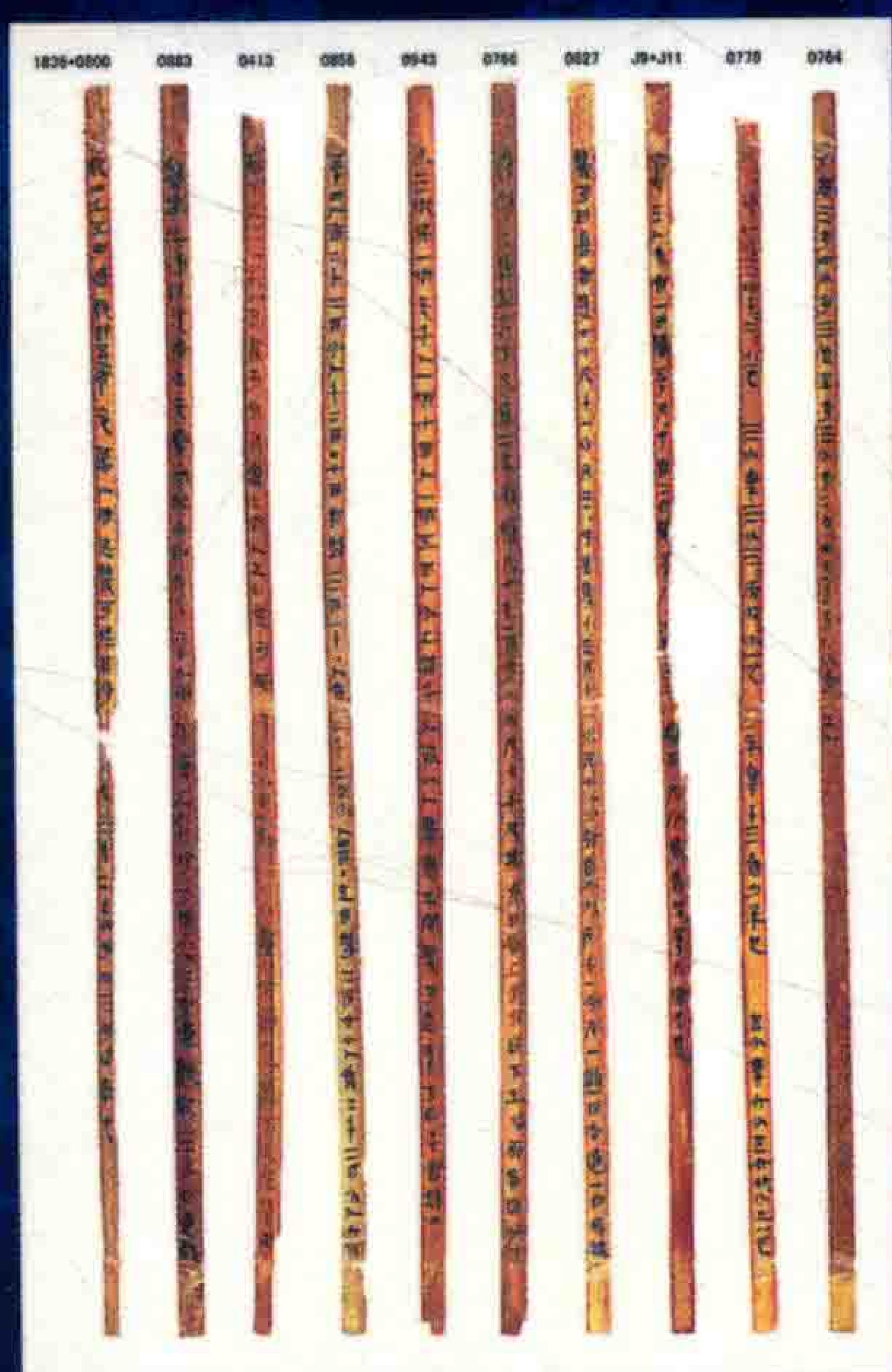
卢嘉锡 总主编

中国科学技术史

数学卷

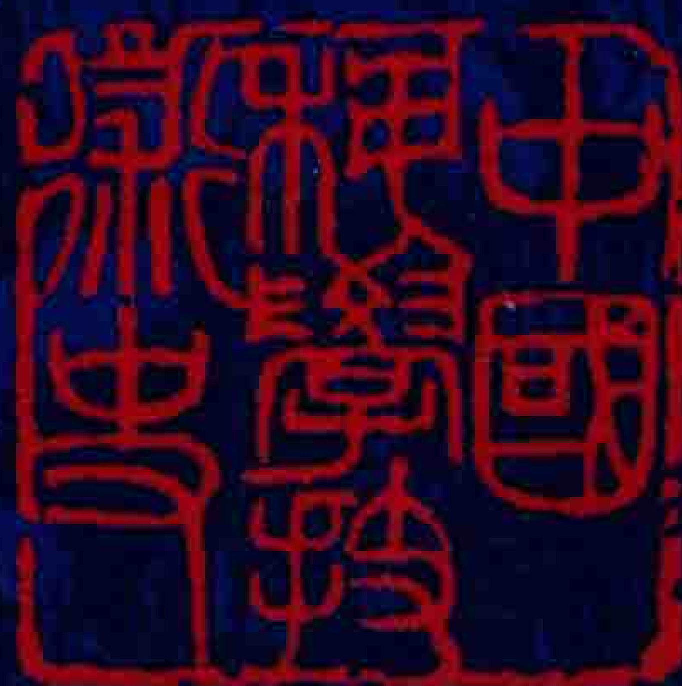
郭书春　主　编
李兆华　副主编



科学出版社

A HISTORY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY IN CHINA

中国科学院"八五"重点研究课题
国家自然科学基金资助
国家"九五"重点图书出版项目
中国科学院自然科学史研究所主办







创造有价值的阅读

科学出版社科学人文分社
编辑部电话：010-64035853
E-mail:houjunlin@mail.sciencep.com

(N-0595.31)
ISBN 978-7-03-049360-6



定 价：6920.00 元
(26卷套装)

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

卢嘉锡　总主编

中国科学技术史

数学卷

郭书春　主　编
李兆华　副主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

中国古代科学技术的辉煌成就举世瞩目，对其进行系统整理和研究是几代中国学者的愿望。《中国科学技术史》由中国科学院自然科学史研究所与科学出版社联合组织，在数百位学者数十年的共同努力下，各分卷陆续出版，成为一项全面系统、结构合理的重大学术工程，堪称中国学者研究中国古代科学技术的集大成之作。

本书各卷分可独立成书，合则成为有机整体，经纬交错，斐然成章，对于研究中国古代科学技术传统的国内外学者具有极高的参考价值，同时也是公众准确认识和深入理解中华文明史的重要读本。

图书在版编目(CIP)数据

中国科学技术史／卢嘉锡主编．—北京：科学出版社，2016. 7

ISBN 978-7-03-049360-6

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①卢 Ⅲ. ①科学技术-技术史-中国 Ⅳ①. N092

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 159988 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 7 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2017 年 5 月第三次印刷 印张：1068 1/2 插页：24

字数：26 800 000

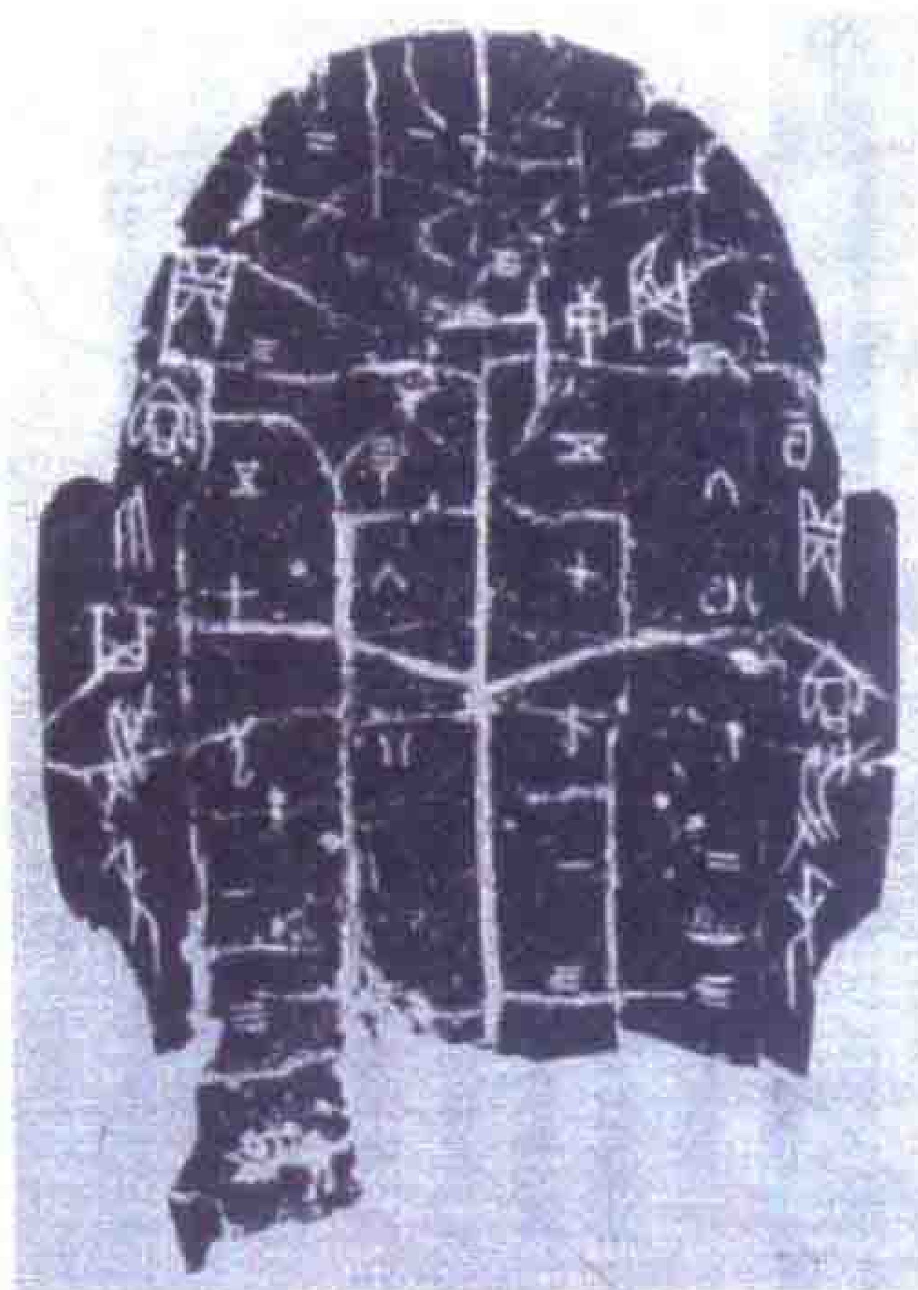
定价：6920. 00 元

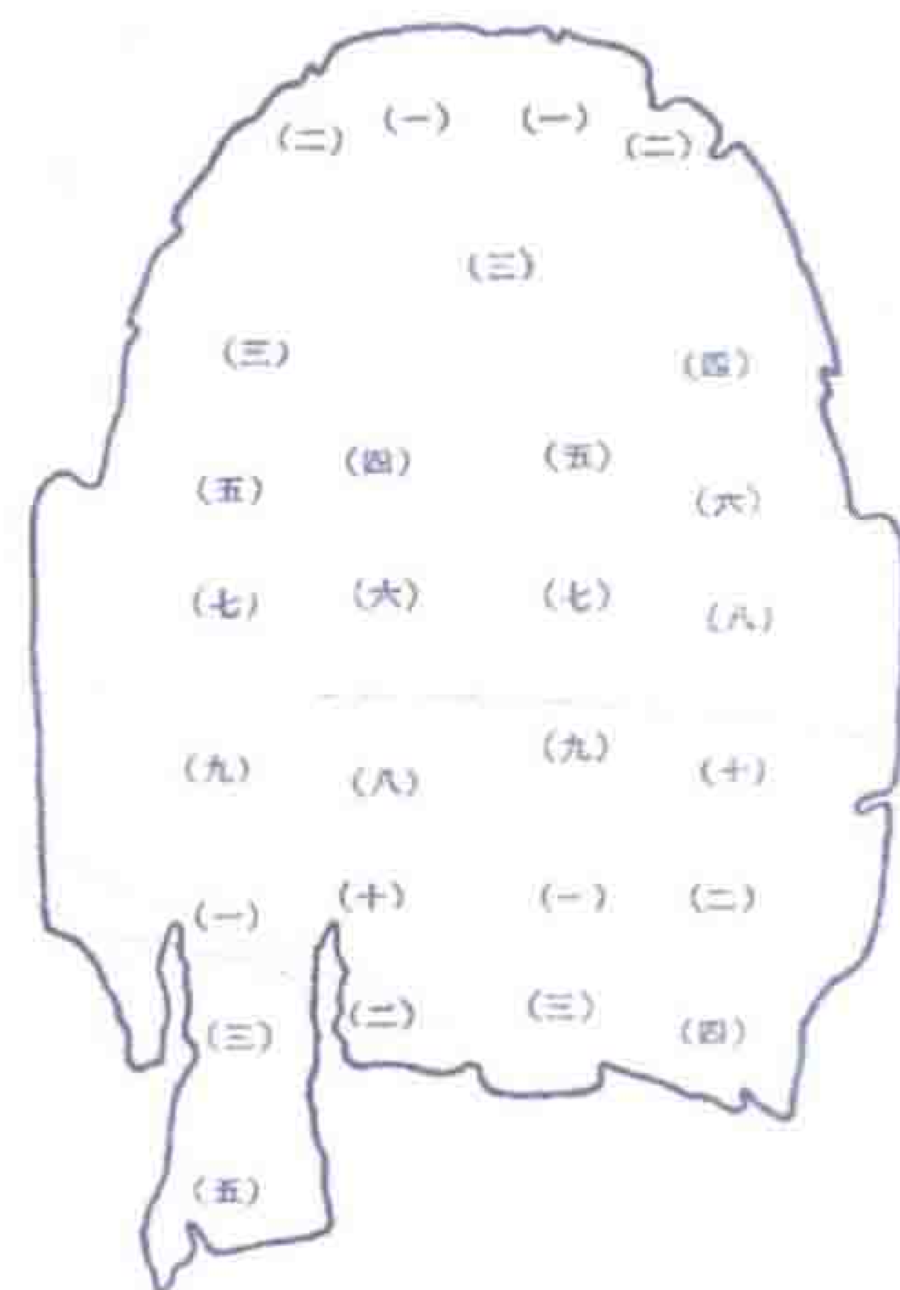
（26 卷套装）

（如有印装质量问题，我社负责调换）

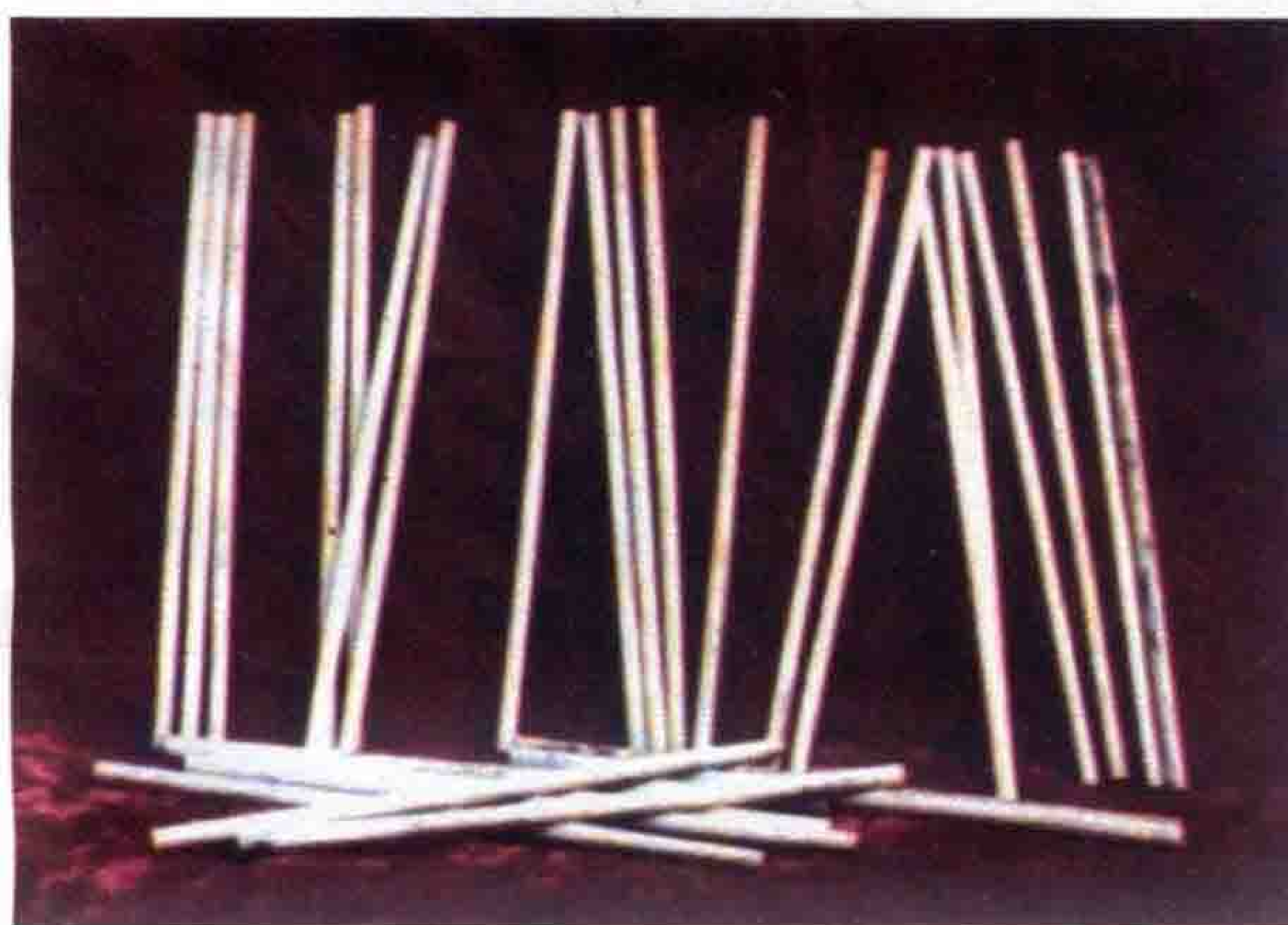


新疆阿斯塔那唐墓出土的彩帛
伏羲女娲持规矩图

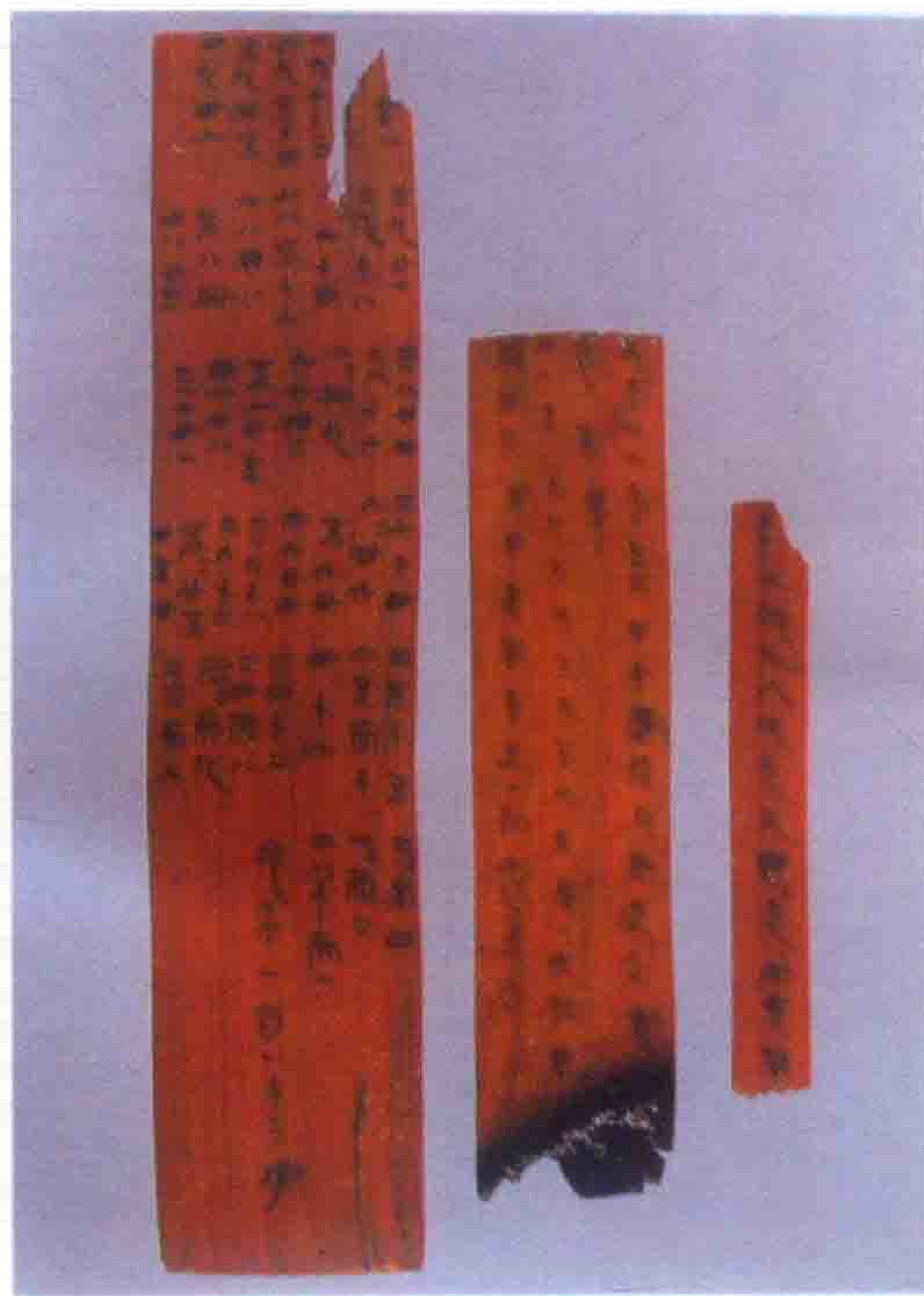




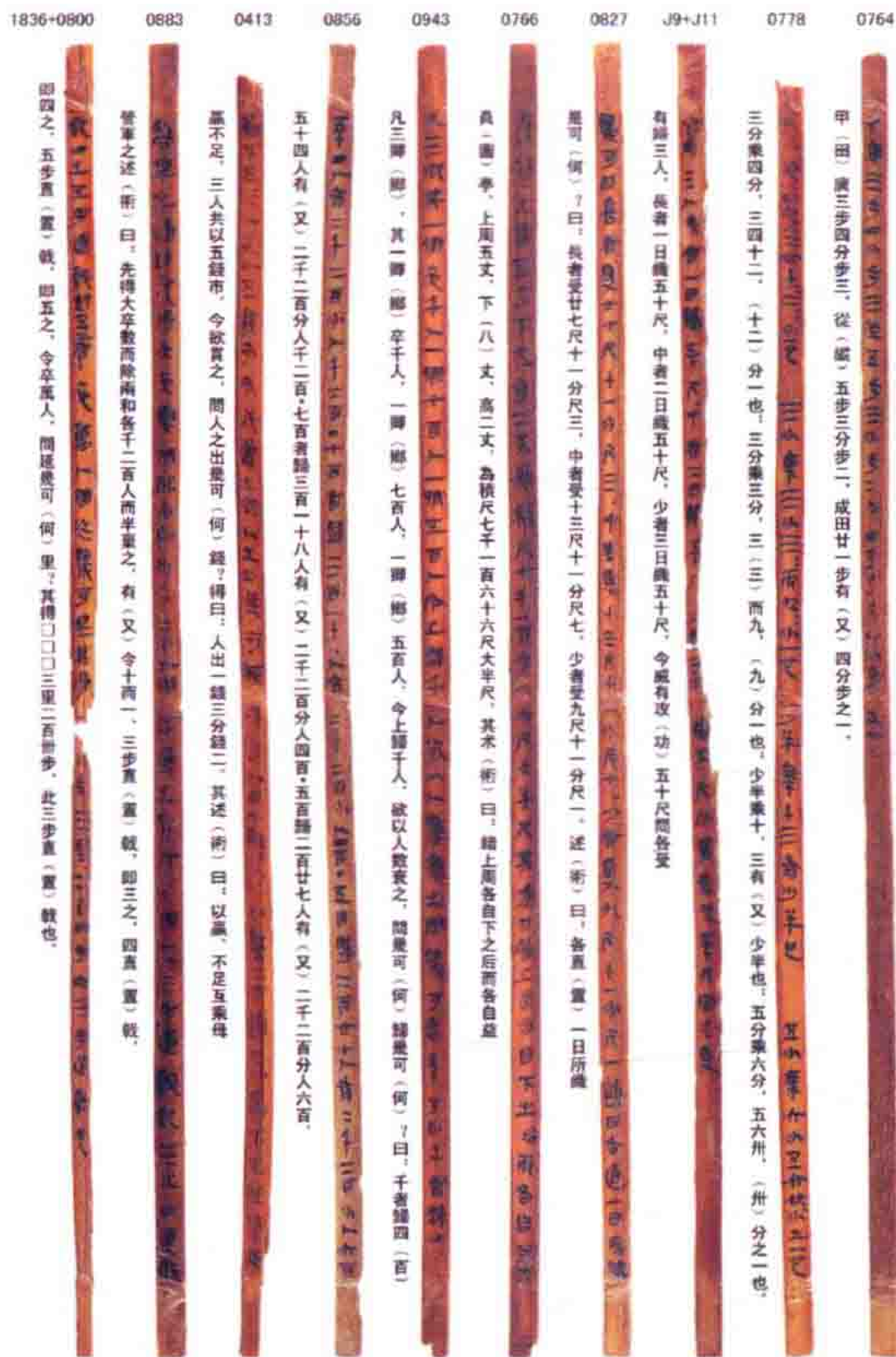
刻有数字的甲骨及其释文



陕西旬阳出土的西汉算筹



湖南里耶出土的秦九九表

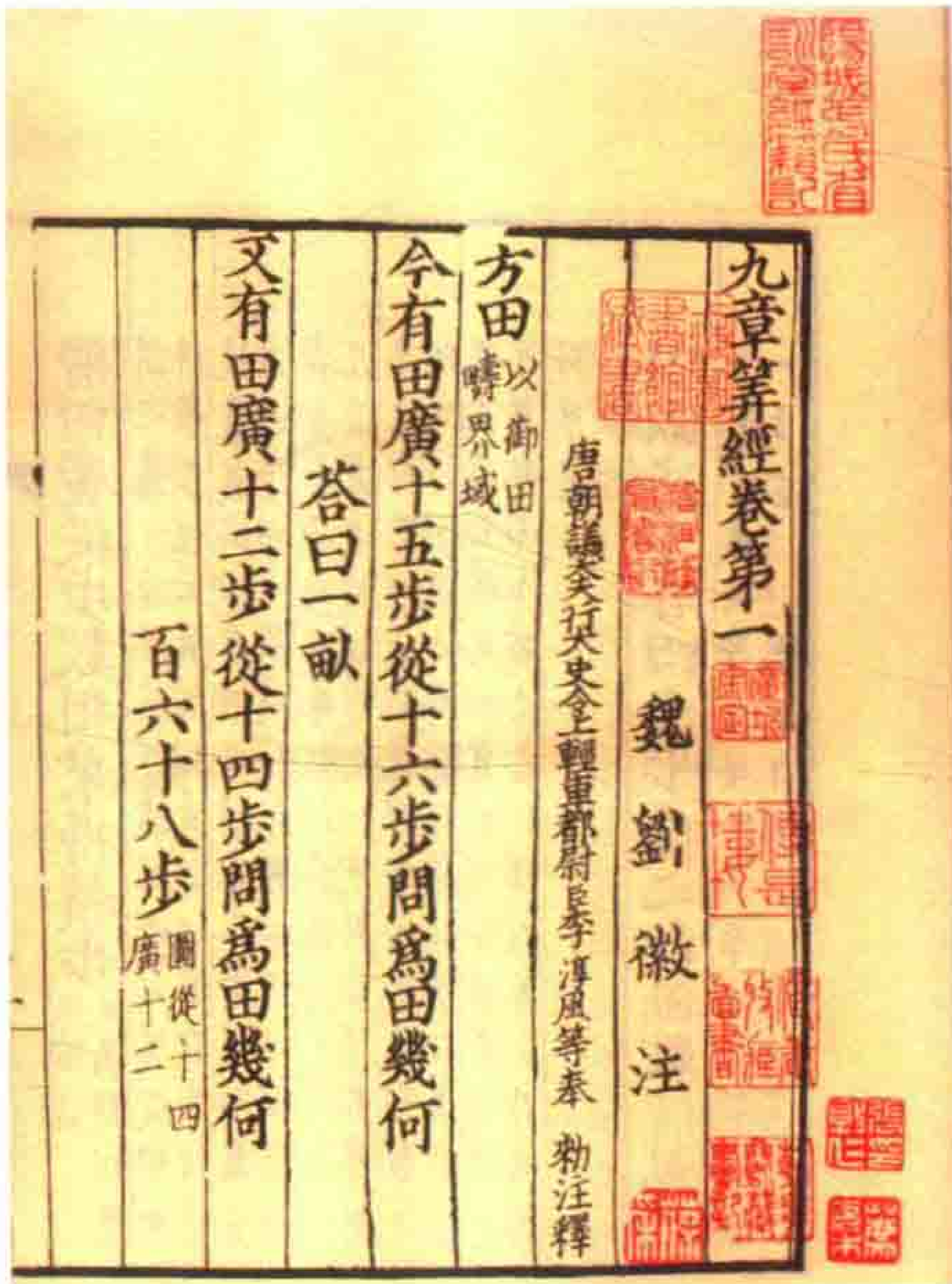


秦简《数》的部分简（岳麓书院供图）



汉简《算数书》的部分简

（左起第 6 枚简背面有“算数书”三字）



九章筭經卷第一

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勑注釋

魏 劉 徽 注

方田 以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

荅曰百六十八步 圖從十四廣十二

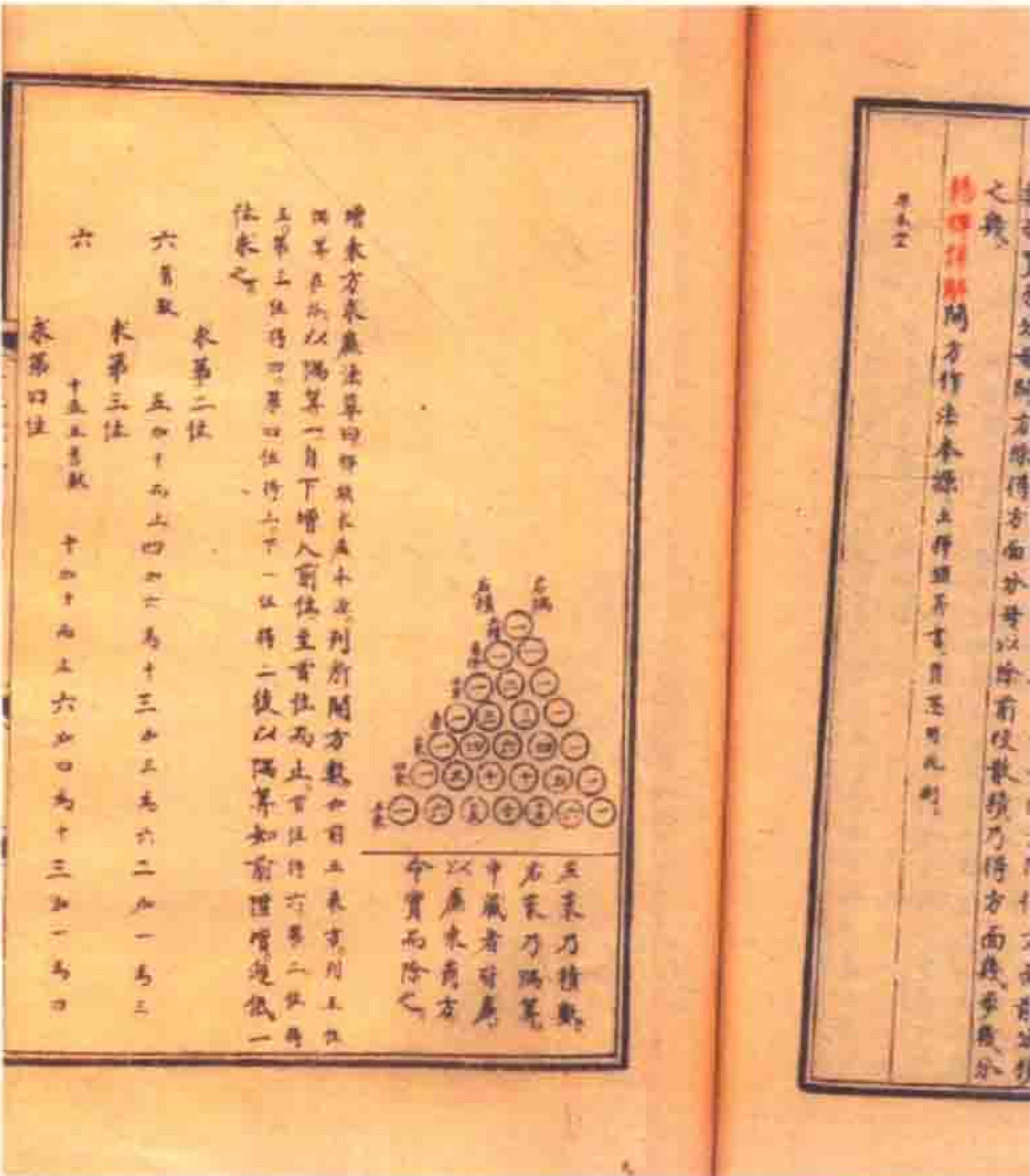
《九章算术》卷一书影（南宋本）



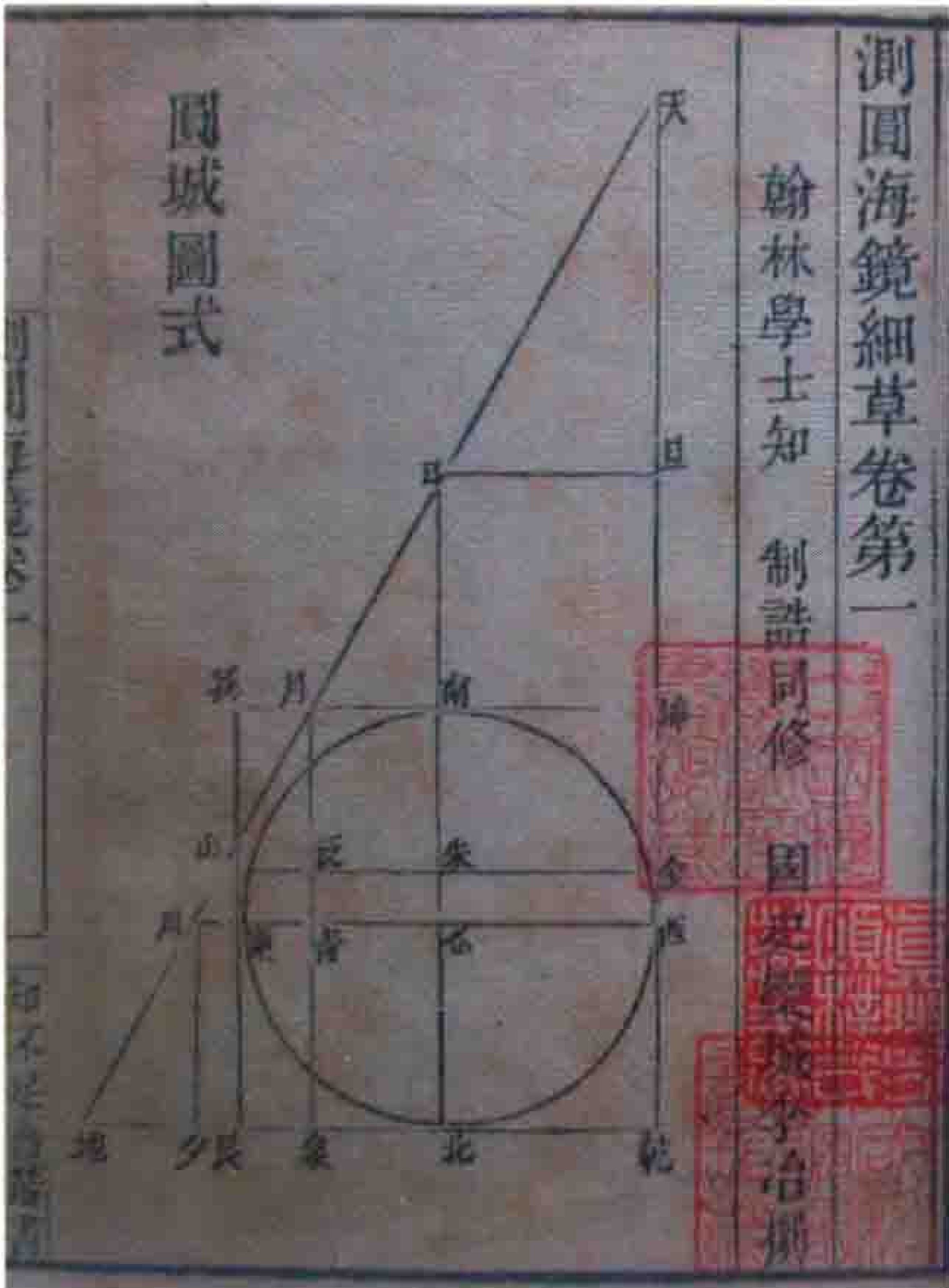
窥望海岛图（采自康熙本《算法统宗》卷十二）



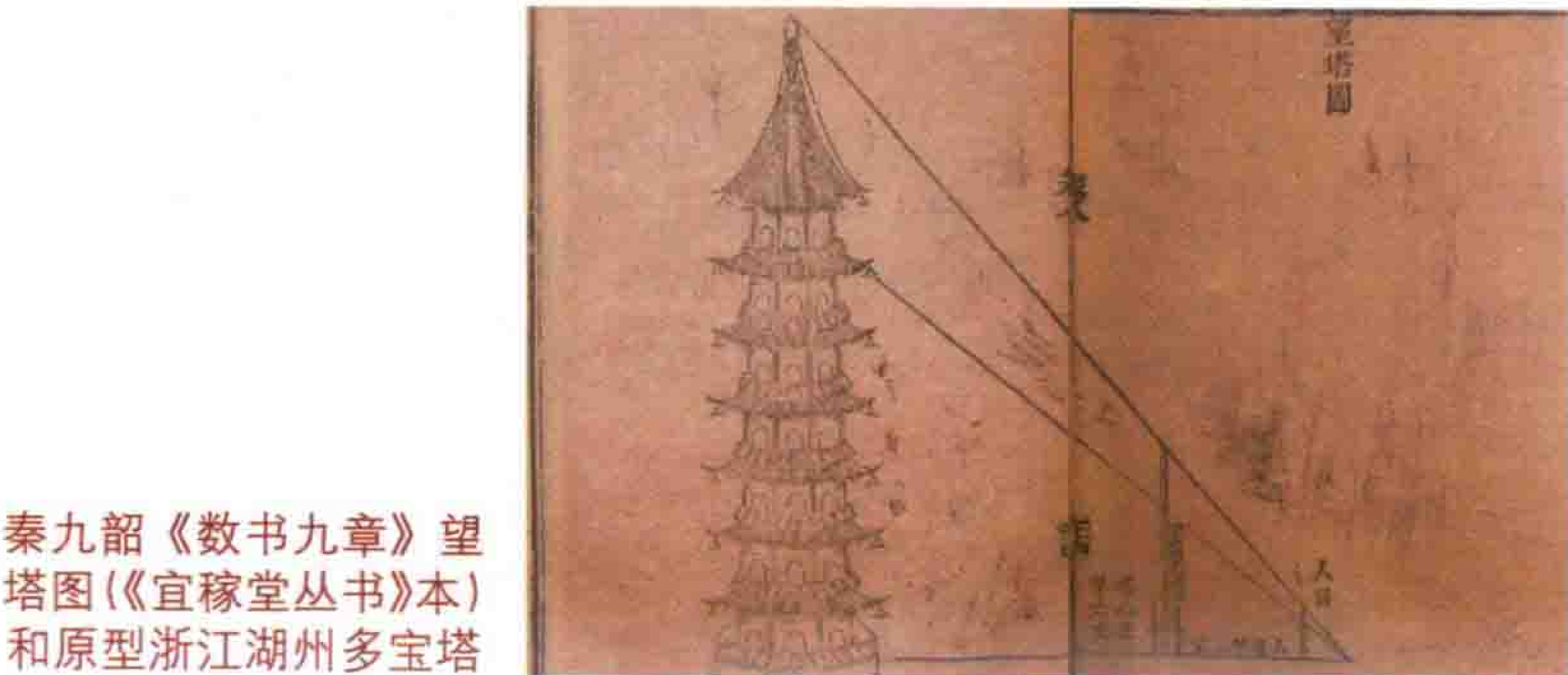
现存汉唐六部算经南宋本书影



贾宪三角（《永乐大典》卷 16344）



李治圆城图式（《知不足斋丛书》本《测圆海镜》卷首）

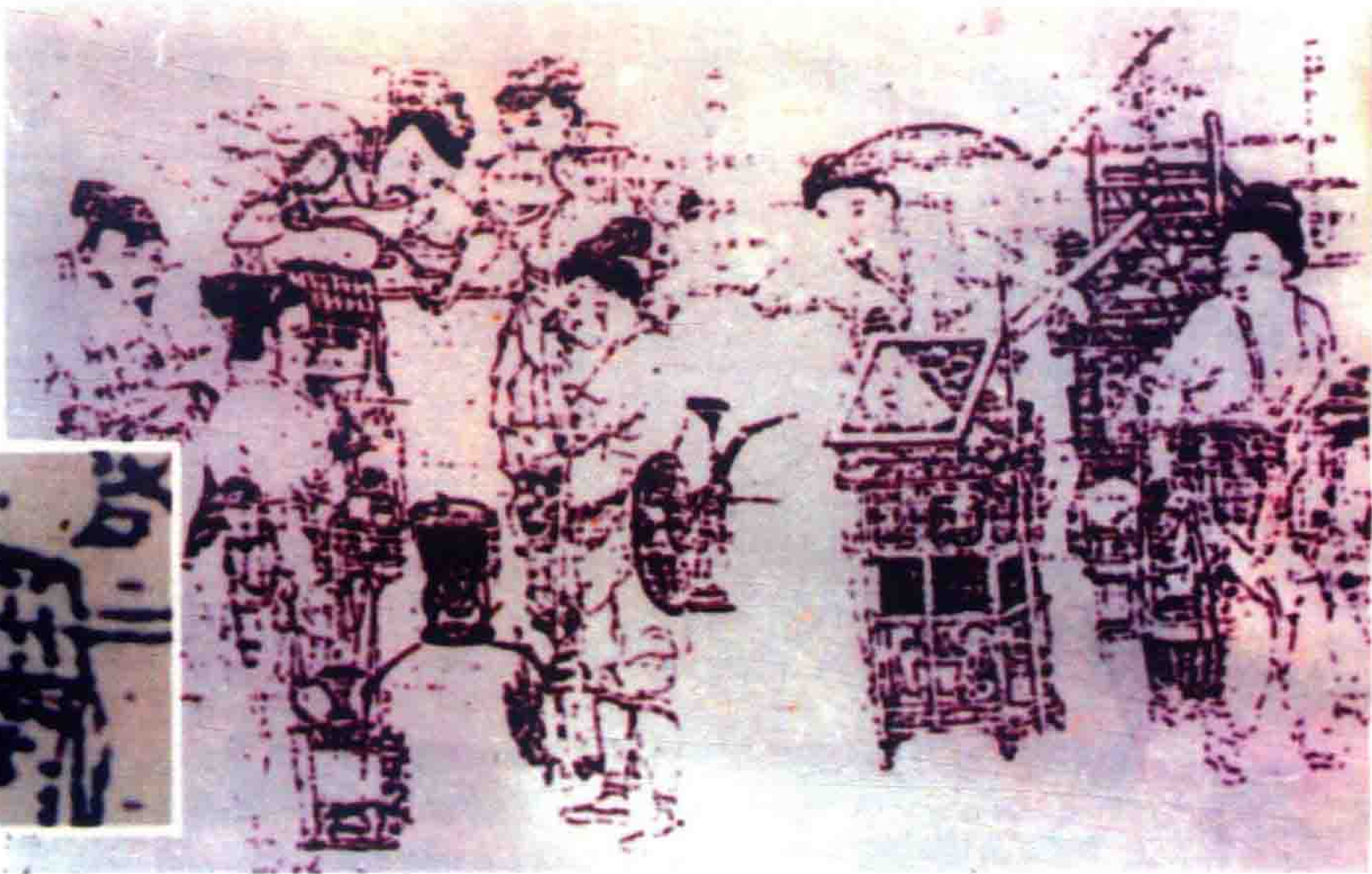




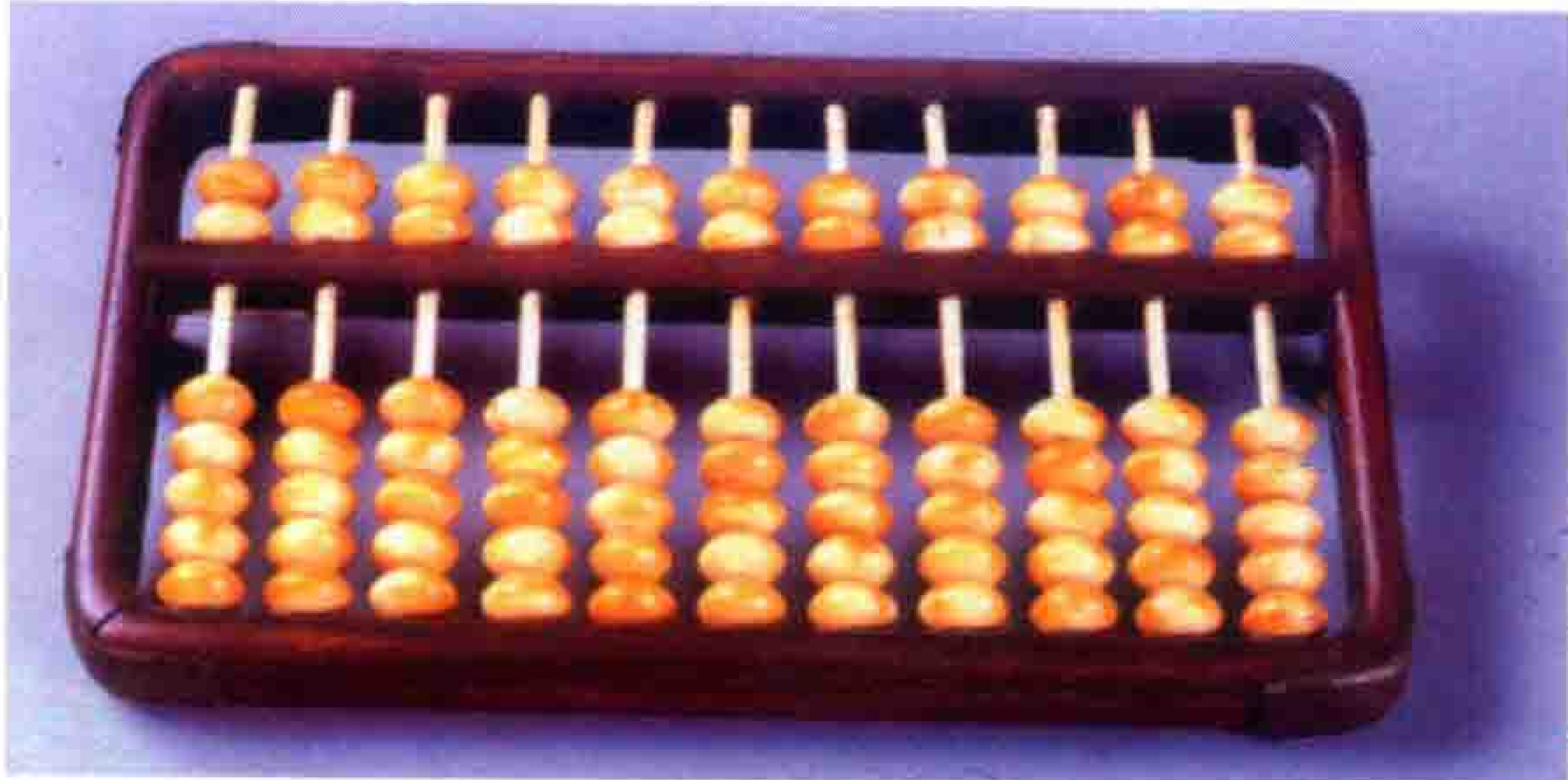
秦九韶《数书九章》望塔图（《宜稼堂丛书》本）和原型浙江湖州多宝塔

局部放大图





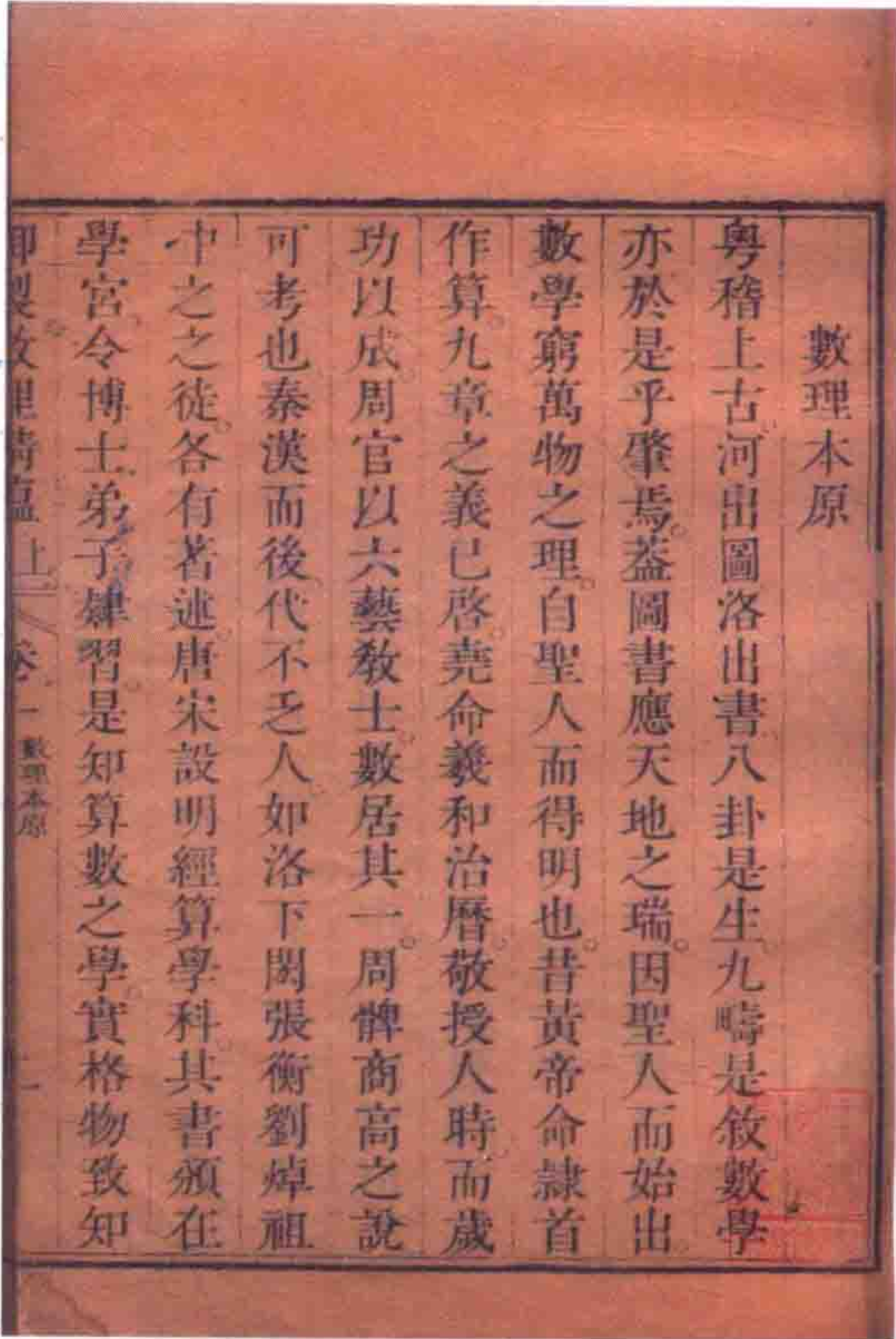
载有珠算盘的南宋茗园赌市图



明玉珠算盘



李善兰（居中坐者）与他的学生们



數理本原

粤稽上古河出圖洛出書八卦是生九疇是敘數學亦於是乎肇焉蓋圖書應天地之瑞因聖人而始出數學窮萬物之理自聖人而得明也昔黃帝命隸首作算九章之義已啓堯命羲和治曆敬授人時而歲功以成周官以六藝教士數居其一周髀商高之說可考也秦漢而後代不乏人如洛下閎張衡劉焯祖冲之之徒各有著述唐宋設明經算學科其書頒在學宫令博士弟子肄習是知算數之學實格物致知

御製數理精蘊上編　卷一　數理本原

《数理精蕴》书影（清内府刊本）

《中国科学技术史》的组织机构和人员

顾　问（以姓氏笔画为序）

王大珩　王佛松　王振铎　王绶琯　白寿彝　孙　枢　孙鸿烈　师昌绪
吴文俊　汪德昭　严东生　杜石然　余志华　张存浩　张含英　武　衡
周光召　柯　俊　胡启恒　胡道静　侯仁之　俞伟超　席泽宗　涂光炽
袁翰青　徐苹芳　徐冠仁　钱三强　钱文藻　钱伟长　钱临照　梁家勉
黄汲清　章　综　曾世英　蒋顺学　路甬祥　谭其骧

总主编　卢嘉锡

编委会委员（以姓氏笔画为序）

马素卿　王兆春　王渝生　艾素珍　丘光明　刘　钝　华觉明　汪子春
汪前进　宋正海　陈美东　杜石然　杨文衡　杨　熺　李家治　李家明
吴瑰琦　陆敬严　周魁一　周嘉华　金秋鹏　范楚玉　姚平录　柯　俊
赵匡华　赵承泽　姜丽蓉　席龙飞　席泽宗　郭书春　郭湖生　谈德颜
唐锡仁　唐寰澄　梅汝莉　韩　琦　董恺忱　廖育群　潘吉星　薄树人
戴念祖

常务编委会

主　　任　陈美东

委　　员（以姓氏笔画为序）

华觉明　杜石然　金秋鹏　赵匡华　唐锡仁　潘吉星　薄树人　戴念祖

编撰办公室

主　　任　金秋鹏

副 主 任　周嘉华　杨文衡　廖育群

工作人员（以姓氏笔画为序）

王扬宗　陈　晖　郑俊祥　徐凤先　康小青　曾雄生

《数学卷》编委会

总　序

中国有悠久的历史和灿烂的文化，是世界文明不可或缺的组成部分，为世界文明做出了重要的贡献，这已是世所公认的事实。

科学技术是人类文明的重要组成部分，是支撑文明大厦的主要基干，是推动文明发展的重要动力，古今中外莫不如此。如果说中国古代文明是一棵根深叶茂的参天大树，中国古代的科学技术便是缀满枝头的奇花异果，为中国古代文明增添斑斓的色彩和浓郁的芳香，又为世界科学技术园地增添了盎然生机。这是自上世纪末、本世纪初以来，中外许多学者用现代科学方法进行认真的研究之后，为我们描绘的一幅真切可信的景象。

中国古代科学技术蕴藏在汗牛充栋的典籍之中，凝聚于物化了的、丰富多姿的文物之中，融化在至今仍具有生命力的诸多科学技术活动之中，需要下一番发掘、整理、研究的功夫，才能揭示它的博大精深的真实面貌。为此，中国学者已经发表了数百种专著和万篇以上的论文，从不同学科领域和审视角度，对中国科学技术史作了大量的、精到的阐述。国外学者亦有佳作问世，其中英国李约瑟(J. Needham)博士穷毕生精力编著的《中国科学技术史》(拟出 7 卷 34 册)，日本薮内清教授主编的一套中国科学技术史著作，均为宏篇巨著。关于中国科学技术史的研究，已是硕果累累，成为世界瞩目的研究领域。

中国科学技术史的研究，包涵一系列层面：科学技术的辉煌成就及其弱点；科学家、发明家的聪明才智、优秀品德及其局限性；科学技术的内部结构与体系特征；科学思想、科学方法以及科学技术政策、教育与管理的优劣成败；中外科学技术的接触、交流与融合；中外科学技术的比较；科学技术发生、发展的历史过程；科学技术与社会政治、经济、思想、文化之间的有机联系和相互作用；科学技术发展的规律性以及经验与教训，等等。总之，要回答下列一些问题：中国古代有过什么样的科学技术？其价值、作用与影响如何？又走过怎样的发展道路？在世界科学技术史中占有怎样的地位？为什么会这样，以及给我们什么样的启示？还要论述中国科学技术的来龙去脉，前因后果，展示一幅真实可靠、有血有肉、发人深思的历史画卷。

据我所知，编著一部系统、完整的中国科学技术史的大型著作，从本世纪 50 年代开始，就是中国科学技术史工作者的愿望与努力目标，但由于各种原因，未能如愿，以致在这一方面显然落后于国外同行。不过，中国学者对祖国科学技术史的研究不仅具有极大的热情与兴趣，而且是作为一项事业与无可推卸的社会责任，代代相承地进行着不懈的工作。他们从业余到专业，从少数人发展到数百人，从分散研究到有组织的活动，从个别学科到科学技术的各领域，逐次发展，日臻成熟，在资料积累、研究准备、人才培养和队伍建设等方面，奠定了深厚而又广大的基础。

本世纪 80 年代末，中国科学院自然科学史研究所审时度势，正式提出了由中国学者编著《中国科学技术史》的宏大计划，随即得到众多中国著名科学家的热情支持和大力推动，得到中国科学院领导的高度重视。经过充分的论证和筹划，1991 年这项计划被正式列为中国科学院“八五”计划的重点课题，遂使中国学者的宿愿变为现实，指日可待。作为一名科技工作者，我对此感到由衷的高兴，并能为此尽绵薄之力，感到十分荣幸。

《中国科学技术史》计分30卷，每卷60至100万字不等，包括以下三类：

通史类(5卷)：

《通史卷》、《科学思想史卷》、《中外科学技术交流史卷》、《人物卷》、《科学技术教育、机构与管理卷》。

分科专史类(19卷)：

《数学卷》、《物理学卷》、《化学卷》、《天文学卷》、《地学卷》、《生物学卷》、《农学卷》、《医学卷》、《水利卷》、《机械卷》、《建筑卷》、《桥梁技术卷》、《矿冶卷》、《纺织卷》、《陶瓷卷》、《造纸与印刷卷》、《交通卷》、《军事科学技术卷》、《计量科学卷》。

工具书类(6卷)：

《科学技术史词典卷》、《科学技术史典籍概要卷》(一)、(二)、《科学技术史图录卷》、《科学技术年表卷》、《科学技术史论著索引卷》。

这是一项全面系统的、结构合理的重大学术工程。各卷分可独立成书，合可成为一个有机的整体。其中有综合概括的整体论述，有分门别类的纵深描写，有可供检索的基本素材，经纬交错，斐然成章。这是一项基础性的文化建设工程，可以弥补中国文化史研究的不足，具有重要的现实意义。

诚如李约瑟博士在1988年所说："关于中国和中国文化在古代和中世纪科学、技术和医学史上的作用，在过去30年间，经历过一场名副其实的新知识和新理解的爆炸"(中译本李约瑟《中国科学技术史》作者序)，而1988年至今的情形更是如此。在20世纪行将结束的时候，对所有这些知识和理解作一次新的归纳、总结与提高，理应是中国科学技术史工作者义不容辞的责任。应该说，我们在启动这项重大学术工程时，是处在很高的起点上，这既是十分有利的基础条件，同时也自然面对更高的社会期望，所以这是一项充满了机遇与挑战的工作。这是中国科学界的一大盛事，有著名科学家组成的顾问团为之出谋献策，有中国科学院自然科学史研究所和全国相关单位的专家通力合作，共襄盛举，同构华章，当不会辜负社会的期望。

中国古代科学技术是祖先留给我们的一份丰厚的科学遗产，它已经表明中国人在研究自然并用于造福人类方面，很早而且在相当长的时间内就已雄居于世界先进民族之林，这当然是值得我们自豪的巨大源泉，而近三百年来，中国科学技术落后于世界科学技术发展的潮流，这也是不可否认的事实，自然是值得我们深省的重大问题。理性地认识这部兴盛与衰落、成功与失败、精华与糟粕共存的中国科学技术发展史，引以为鉴，温故知新，既不陶醉于古代的辉煌，又不沉沦于近代的落伍，克服民族沙文主义和虚无主义，清醒地、满怀热情地弘扬我国优秀的科学技术传统，自觉地和主动地缩短同国际先进科学技术的差距，攀登世界科学技术的高峰，这些就是我们从中国科学技术史全面深入的回顾与反思中引出的正确结论。

许多人曾经预言说，即将来临的21世纪是太平洋的世纪。中国是太平洋区域的一个国家，为迎接未来世纪的挑战，中国人应该也有能力再创辉煌，包括在科学技术领域做出更大的贡献。我们真诚地希望这一预言成真，并为此贡献我们的力量。圆满地完成这部《中国科学技术史》的编著任务，正是我们为之尽心尽力的具体工作。

卢嘉锡

1996年10月20日

前　言

数学是中国古代最为发达的基础科学学科之一，约公元前3世纪至公元14世纪初一直领先于世界先进水平。我们常将中国古代数学称为中国传统数学，它是这一期间世界数学发展的主流。本书试图全面系统论述自远古至清末中国数学的主要成就和数学思想、作为这些成就和思想载体的数学典籍、完成这些成就和典籍的杰出数学家以及产生这些成就和思想、创作这些典籍、造就这些数学家的社会经济、政治、思想和文化背景。

关于中国数学史研究的内容、方法和意义，许多著述已经有详尽、精辟的阐释①，在此不再赘述。在这里，我们主要就中国数学史的分期、如何概括中国古代数学著作亦即中国古代是不是存在数学家的数学、中国古代数学有没有数学证明和数学理论，或者更进一步，中国古代有没有纯数学研究、中国传统数学的特征、中国传统数学属不属于世界数学发展的主流以及在研究中尊重原始文献等问题谈一些粗浅的看法。

一

关于中国数学史的分期，学术界有不同的看法。而且这些不同主要表现在自先秦至元中叶数学的分期上，因为对元中叶至明末中国传统数学的衰落、明末至清末中西数学的会通，大家大都遵从钱宝琮的观点，在学术界是没有争议的。关于先秦至元中叶数学的分期大体有以下几种：

李俨将其分成三个时期：先秦的数学称为上古期，两汉魏晋南北朝称为中古期，隋唐宋元称为近古期。② 后来又将隋列入中古期。③

日本薮内清也将其分成三个时期：古代的数学（先秦）、《九章》的世界（两汉至魏），六朝至唐宋元的数学。④

钱宝琮考虑数学的发展与当时的社会背景的关系，打破按王朝革鼎分期的方法，分成秦统一以前、秦统一以后到唐代中期、唐代中期到明末时期几个阶段。⑤

李迪的分期相当细致，将中国传统数学分成两个时期六个阶段，这就是：中国传统数学的形成期（自远古至西汉末期），这一时期分成三个阶段：约公元前2000年以前为中国数学的“史前期”，约公元前2000～前221年为中国数学的“积累期”，从秦汉之际至西汉末期为中国数学发展史上的第一个高峰。中国传统数学的发展期（自东汉初期至元朝前期），这一时期也分成三个阶段：从约公元1世纪初期至8世纪初亦即东汉初至唐中叶为中国数学

---

① 钱宝琮主编，中国数学史·序，科学出版社，1964年。见：李俨钱宝琮科学史全集，第五卷，辽宁教育出版社，1998年。李迪，中国数学史大系·总论。见：吴文俊主编，中国数学史大系·第一卷，北京师范大学出版社，1998年。

② 李俨，中国算学史，商务印书馆，1930年。见：李俨钱宝琮科学史全集，第一卷，辽宁教育出版社，1998年。

③ 李俨，中国数学大纲，上、下册，科学出版社，1958年。见：李俨钱宝琮科学史全集，第三卷，辽宁教育出版社，1998年。

④ ［日］薮内清，中国数学史，郑瑞明译，南宏图书公司，1984年。

⑤ 钱宝琮主编，中国数学史，科学出版社，1964年。见：李俨钱宝琮科学史全集，第五卷，辽宁教育出版社，1998年。

的“理论期”，从公元8世纪初至11世纪初即唐中叶至北宋初期为中国数学的“滞缓期”，从11世纪初至14世纪初为中国数学的高峰期。此外，李迪将1304～1936年称为中国传统数学向西方数学的“过渡期”，这一时期被分成四个阶段：1304～1606年即元中叶至明朝后期为“珠算期”，1607～1760年左右即明朝末期至清朝中期为“融合期”，约1760～约1850年即清朝中后期之间为中国数学的“复古期”，约1850～1936年为“西化完成期”。[①]

还有一些别的分期方法。

我们认为，钱宝琮的分期思想是可取的。数学史的分期应以数学内部的发展为主要依据，同时考虑相应时期的社会经济、政治的变革和思想、文化背景。我们根据钱宝琮的思想，结合近30年中国数学史的研究成果，对中国数学史的分期提出以下看法：

中国有文字记载的历史相当早，然而夏、商、周三代没有任何数学著作流传到现在。不过，完成当时世界上最方便的记数制度——十进位值制记数法，创造出当时世界上最先进的计算工具——算筹，是两项具有世界意义的成就。一些文史典籍中的鸿爪雪泥说明当时人们的数学知识已经达到相当高的水平。

《九章算术》在西汉先后由张苍、耿寿昌删补成书，它奠定了中国传统数学的基本框架，在分数四则运算、比例和比例分配算法、盈不足算法、开方法、线性方程组解法、正负数加减法则、解勾股形和勾股数组等方面走在世界的前面，有的超前其他文化传统数百年，甚至上千年，是当时世界上第一流的数学著作。人们不禁要问，《九章算术》这么高深的著作是突然冒出来的吗？当然不可能。根据刘徽《九章算术注序》“九数之流，《九章》是矣”的提示和《九章算术注》所提供的资料（包括物价）的分析，《九章算术》的主体部分及主要成就在春秋战国时期已经完成了。换言之，中国传统数学的第一个高潮出现在春秋战国，西汉完成《九章算术》、《周髀算经》等著作的编纂，只是这个高潮的总结。20世纪80年代出土的竹简《算数书》虽然不是《九章算术》的前身[②]，却为上述看法提供了佐证。

因此，不能将春秋战国的数学与夏、商、西周混为一谈。它们应该是两个阶段。也就是说，从远古到夏、商、西周是第一个阶段，数学在某种意义上已经形成一个学科。而春秋战国秦汉是以《九章算术》为代表的第二个阶段。西汉末年至东汉中叶，数学进展不大。

东汉末年之后，一直到唐中叶，中国数学最主要的成就体现在刘徽《九章算术注》中。由于这是一部注解《九章算术》的著作，人们往往将其与《九章算术》归于一个阶段。实际上，刘徽《九章算术注》“析理以辞，解体用图”，提出了许多严格的数学定义，并以演绎逻辑为主要方法全面证明了《九章算术》的算法，奠定了中国传统数学的理论基础。他对圆面积公式和刘徽原理的证明在世界数学史上首次将极限思想和无穷小分割方法引入数学证明，其贡献主要是数学理论方面的。刘徽《九章算术注》无论是从数学的研究方向看，还是从理论高度、逻辑方法看，都与《九章算术》时代有明显的不同，应该属于另一个阶段。祖冲之父子的数学水平不会低于刘徽，可惜对他们的数学造诣，我们只知道只鳞片爪。此外，《数术记遗》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《缉古算经》等在计算工具的改进、不定方程解法、三次方程上有贡献。然而，隋唐数学明显落后于魏晋南北朝时期，对中国古代

① 李迪，中国数学史大系 · 总论，见：吴文俊主编，中国数学史大系 · 第一卷，北京师范大学出版社，1998年。

② 郭书春，关于《算数书》与《九章算术》的关系，曲阜师范大学学报，2008，34（3）：1～9。

水平最高的数学著作《缀术》，隋唐“学官莫能究其深奥，是故废而不理”①，导致《缀术》失传。

自唐中叶起，人们简化乘除运算，创造各种口诀，导致珠算最迟在南宋诞生。北宋贾宪、刘益，南宋秦九韶、杨辉，金元李冶、朱世杰等在高次方程、高次方程组解法、一次同余方程组解法、垛积术和招差术等高深数学的许多分支取得了超前其他文化传统几个世纪的成果。这就是人们常说的宋元数学高潮。

元中叶到明末，继续改进筹算、珠算技术，珠算得到普及，并最终在明中叶之后取代筹算。除此之外，中国传统的高深数学急剧衰落。中国数学遂失去了世界领先的地位。

明末之后，西算传入中国，开始了中西数学融会贯通的阶段。这是学术界都知道的。

我们认为，数学的发展，既有数学内部的自身因素，也必然受社会经济、政治、思想和文化背景的制约。人类进入文明社会以来，世界数学研究的重心发生了几次大的变化。② 先是约公元前31世纪开始的尼罗河流域数学和约公元前24世纪开始的两河流域数学。自公元前7世纪起，希腊取代了上述地区，数学非常发达。约公元前3世纪至公元14世纪初，中国取代古希腊，成为世界数学研究的重心；公元8世纪之后，印度、阿拉伯地区的数学也发展起来。16~17世纪，欧洲数学伴随着文艺复兴，度过了中世纪的黑暗，进入变量数学时代。从此欧洲以及20世纪的苏联、美国一直占据着世界数学研究的重心位置。不难看出，世界数学的重心都发生在某一种社会形态最完备，经济、政治和思想文化最发达的地区。值得注意的是，中国传统数学发展的几个不同阶段，与当时社会经济、政治、思想和文化的变革亦即中国古代社会不同的发展阶段有某种对应关系。中国历史学界对中国古代历史的分期不管持什么观点，都认为，中国在春秋战国时期发生了领主制崩溃并向地主制过渡的激烈社会变革，思想界出现诸子林立、百家争鸣的活跃局面；东汉末至魏晋，庄园农奴制占据经济政治舞台的中心，思想界以谈“三玄”（《周易》、《老子》、《庄子》）为主的辩难之风取代了烦琐的两汉经学，中国社会进入一个新的阶段；唐中叶至宋初，庄园制逐步解体，土地可以自由买卖，地主阶级由按等级占田变成靠购买扩大土地占有，思想界也还比较宽松；元中叶之后，宗法地主制度走向没落，理学占据思想界的统治位置，思想禁锢严酷。两相对照，就会发现，在中国社会发生某种变革的初期，都给数学的发展带来新的活力，从而带来数学发展的高潮。而在某一个社会发展阶段的后期，数学不仅发展缓慢，甚至低于其前期，东汉、隋唐、元末至明末的数学就是这种情形。

由于这种原因，我们将中国古代数学的发展分成以下几个阶段：

中国数学的兴起——原始社会到西周时期的数学；中国传统数学框架的确立——春秋至东汉中期的数学；中国传统数学理论体系的完成——东汉末至唐中叶的数学；中国传统数学的高潮——唐中叶至元中叶的数学；传统数学主流的转变与珠算的发展——元中叶至明末数学；西方数学的传入与中西数学的融会——明末至清末的数学。

显然，这种分期方法是在钱宝琮基础上的修正。本书各编正是基于这种分期思想和方法设置的。本书除了论述各个阶段的数学成就和特点外，还力图探索各个时期数学的发展与当

---

① 唐·李淳风，《隋书·律历志上》，见：魏征等，《隋书》，中华书局，1973年。

② 郭书春，略谈世界数学重心的三次大转移，科学技术与辩证法，1986，(1)：44~48。又见：李文林，数学史教程，高等教育出版社，2000年，第366页。

时社会经济、政治、思想、文化的关系。

二

中国古代传统数学重视实际应用，以解决人们生产生活中产生的数学问题为主要目的，以数学理论密切联系实际为其特点。许多中国数学史著述进而将中国古代数学著作统统概括为“应用问题集”，特别将《九章算术》概括为“应用问题集”。实际上，这种概括不符合实际情况，因而并不恰当。不言而喻，“应用问题集”是以问题为中心的，而《九章算术》等著作的主体部分则是以术文为中心的。“应用问题集”这种不恰当的概括造成了许多误解。例如，许多没有读过《九章算术》或虽读过而不求甚解的人，误以为《九章算术》等中国古代所有的数学著作都是“一题、一答、一术”，其术文都是应用问题的具体解法，而不了解《九章算术》中许多术文是几道、十几道甚至是几十道题目的总术，大部分术文是非常抽象的、具有普适性的严谨算法。许多学者没有认真考察数学著作本身，而从“应用问题集”的片面概括出发，推想中国古代数学著作中的术文都是具体问题的演算细草。既然是演算细草，当然都是“一题、一答、一术”。甚至有的中国数学史著述将《九章算术》中明显属于几道题目的总术都说成是专属于某一题目的术文，并且以讹传讹，谬种流传。

实际上，中国传统数学著作之间的差别相当大。

第一，它们的体例不同。《九章算术》的主体部分是以术文为中心的，我们称之为术文（算法）统率例题的形式。在这里，术文是一类数学问题的普适性、抽象性算法，含有一道、几道、十几道甚至几十道例题，相当大的部分根本不是“一题、一答、一术”。而《孙子算经》等著作不仅是“一题、一答、一术”，而且术文都是应用问题的具体解法。

第二，它们的内容高深程度不同。《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《缉古算经》、《黄帝九章算经细草》、《数书九章》、《测圆海镜》、《详解九章算法》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》等是具有高深内容的著作，《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《杨辉算法》、《算法全能集》、《详明算法》、《九章算法比类大全》、《算学宝鉴》、《算法统宗》等是浅显的或普及性的著作。

第三，抽象程度不同。抽象性是数学的重要特点。中国古代数学著作的数学表达方式的抽象性也有分野。《九章算术》主体部分的术文大都是抽象性非常高的公式、算法，刘徽《九章算术注》、贾宪《黄帝九章算经细草》和杨辉《详解九章算法》等进一步抽象了《九章算术》抽象得不够的术文。《海岛算经》、《张丘建算经》、《缉古算经》、《杨辉算法》、《算学宝鉴》等的术文是关于一种数学问题的比较抽象的算法。《测圆海镜》卷一展示了全书所需的基本理论，其“圆城图式”用汉字记点，是个创举；其“识别杂记”提出600余条抽象命题，集中国勾股容圆知识大成；卷二在“洞渊九容”基础上以非常抽象的形式表示了勾股形与圆的十种基本关系。许多著作都有不同程度的抽象命题，而《九章算术》的一小部分以及《孙子算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《九章算法比类大全》、《算法统宗》等的术文大都是具体问题的演算细草。例如，《九章算术》和《孙子算经》都有开方术，前者是非常抽象的对任何开平方问题都适用的程序，而后者只是演算细草。

第四，严谨性不同。严谨性也是数学的一大特点，是数学著作的生命线。就算法的严谨程度而言，《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《缉古算经》、《夏侯

阳算经》、《黄帝九章算经细草》、《数书九章》、《测圆海镜》、《详解九章算法》、《杨辉算法》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》、《算学宝鉴》、《勾股算术》、《测圆海镜分类释术》、《弧矢算术》、《测圆算术》等都是算法严谨的著作。而《五曹算经》、《算法全能集》、《详明算法》、《九章算法比类大全》等错误比较多，甚至重复某些已被前人纠正了的错误……

此外，在是不是有数学推理和证明上，当然更是不同的。这在下面还要谈。

因此，起码从以上几个方面看，中国古代数学实际上存在着数学的学术研究与普及的分野。《九章算术》及其刘徽注、《海岛算经》、《黄帝九章算经细草》、《数书九章》、《测圆海镜》、《详解九章算法》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》、《算学宝鉴》、《勾股算术》、《测圆海镜分类释术》、《弧矢算术》、《测圆算术》等是数学的学术研究著作，而《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《算法全能集》、《九章算法比类大全》、《算法统宗》等是普及应用著作。

中国古代某些数学家实际上也发现了这一区别。刘徽在阐发了自己求“弧田密率”的方法之后说：“然于算数差繁，必欲有所寻究也。若但度田，取其大数，旧术为约耳。”① 寻究弧田密率，是学术研究；用来度田，是民间应用，用不到弧田密率。南宋初年的数学家荣棨说，当时的许多数学著作“或隐问答以欺众，或添歌彖以衒己。乖万世益人之心，为一时射利之具。以至真术淹废，伪本滋兴。学者泥于见闻，依依然入于迷望，可胜计邪！居仁由义之士，每不平之”②。金元大数学家李冶在批评了某些著作“惟恐学者得窥其仿佛”的错误倾向之后，接着说：“不然，则又以浅近粗俗无足观者，致使轩辕隶首之术，三五错综之妙，尽堕于市井沾沾之儿，及夫荒村下里蚩蚩之民，殊可悯悼。”③ 荣棨、李冶这里所指责的，便是在宋元时期得到高度发展的筹算乘除捷算法，这当然是普及应用的数学。抛开荣棨、李冶等鄙视筹算乘除捷算法的错误态度不谈，显然在他们的头脑中，数学的学术研究与普及是泾渭分明的。至于就某一个数学家而言，到底是从事学术研究还是普及工作，得具体分析。像张苍、刘徽、祖冲之、王孝通、贾宪、李冶、秦九韶、顾应祥等这样的学者，当然是致力于数学的学术研究。也有一些数学家，如赝本《夏侯阳算经》的作者和唐中叶以后从事乘除简化运算的许多数学家以及丁巨、贾亨、安止斋、吴敬、程大位等，则主要关注数学知识的普及应用。但是，也有一些数学家，如杨辉、朱世杰、王文素等，则在这两方面都做了杰出的工作。

三

与“中国古代数学著作都是应用问题集”这一不恰当的概括相联系，国内外数学界和学术界，包括对中国古代数学成就十分推崇的学者在内，多认为“在古代中国的数学思想中，最大的缺点是缺少严格求证的思想”，中国古代数学没有形式逻辑，尤其没有演绎逻

① 魏·刘徽，九章算术注·方田章。见：郭书春，汇校《九章算术》增补版，辽宁教育出版社，台湾九章出版社，2004 年。

② 南宋·荣棨，九章算经序，见：《详解九章算法》、《诸家算法及序记》。见：郭书春，汇校《九章算术》增补版附，辽宁教育出版社，台湾九章出版社，2004 年。

③ 元·李冶，益古演段自序，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年。

辑。“在从实践到纯知识领域的飞跃中，中国数学是未曾参与过的”①，所谓成就都是经验的积累，没有推理和证明。总之，没有数学理论。这种看法是不符合实际情况的。数学理论主要有两个方面：首先是具有普适性、抽象性的正确算法。其次是关于这些算法的推理和论证以及数学定义，并且其推理和论证主要是演绎的。对前者，前已指出，在《九章算术》等著作中有大量关于一类数学问题的具有正确性、普适性和抽象性的术文，这本身就是数学理论。许多学者没有认真考察数学著作本身，而“应用问题集”的概括造成中国古代所有术文都是具体问题的演算细草的错觉，从而“顺理成章”地得出“中国古代数学没有理论”的错误看法。对后者，确实，《九章算术》等大多数中国古代数学著作都没有数学定义、推理和论证。然而，这不是中国古代数学著作的全部，只是其中一部分，尽管是大部分。即使是以大部取代全部，也是一种以偏概全，当然是不恰当的。事实上，刘徽的《九章算术注》和贾宪的《黄帝九章算经细草》、李冶的《测圆海镜》和《益古演段》、杨辉的《详解九章算法》和《杨辉算法》、王文素的《算学宝鉴》等都有不同程度的定义、推理和论证。

李约瑟已经指出，杨辉有演绎推理的倾向。② 实际上，刘徽《九章算术注》中的演绎推理和数学证明比杨辉高明得多，深刻得多。我们经过考察发现，现今形式逻辑教程中关于演绎推理的几种主要形式，刘徽都娴熟地使用过，而且没有任何循环推理。刘徽的数学证明是相当严谨的。说中国古代数学没有演绎逻辑，大约是没有读或者没有读懂刘徽的《九章算术注》。西方有远见的学者，如以研究古希腊数学著称的英国罗界（G. Lloyd）爵士多次与我讨论刘徽的证明问题，他对刘徽的评价极高。③ 法国伦理与政治科学院院长 E. Poulle 教授等认为，刘徽在数学证明及其意义的概念上有新的突破。

我们认为，刘徽等数学家的数学证明表明，中国古代存在着纯数学研究，也就是为数学而数学的活动。一个明显的事实是：就实际应用而言，《九章算术》和许多数学著作提出的公式、算法，只要能够无数次应用，并且在应用中表明它们正确就够了，不在数学上证明它们，根本不会影响它们的应用。刘徽的《九章算术注》对《九章算术》的公式、算法进行了全面而且基本严谨的证明，并在证明中追求逻辑的正确、推理的明晰，这显然是纯数学的活动。杨辉、王文素等的论证工作，也属于纯数学的范畴。

此外，对计算中精确度的追求，也是纯数学的工作。例如，对开方不尽的情况，在刘徽之前，人们用 $a+\frac{A-a^2}{2a+1}$ 或 $a+\frac{A-a^2}{2a}$ 表示平方根的近似值。在实际应用中，一般说来，这已经足够了。刘徽认为这不精确，提出求“微数”的思想，以十进分数逼近无理根。然而，这在实际应用中意义不大。刘徽、祖冲之将求“微数”的思想用于求圆周率，祖冲之将其精确到 8 位有效数字，更不是实际应用所需要的。实际上，祖冲之后 1000 多年间，在工艺技术和历法的计算中，人们还大多使用“周三径一”，除了数学著作中的计算外，甚至连徽率 $\frac{157}{50}$ 也未必使用。王恂、郭守敬制定明以前最精确的历法《授时历》，仍然使用圆周率 3。

---

① ［英］李约瑟，中国科学技术史，第 3 卷，科学出版社，1978 年，第 337 ~ 338 页。其中关于中国数学缺少“严格求证”的说法，是李约瑟转引日本的中国数学史家三上义夫的话。见：Y. Mikami（三上义夫），*The Development of Mathematics in China and Japan*（《中国和日本数学之发展》），Leipzig：Teubner，1913.

② ［英］李约瑟，中国科学技术史·数学，科学出版社，1978 年。

③ G. Lloyd，Préface aux *Neuf Chapitres*：*Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*（中法对照本《九章算术》序），K. Chemla（林力娜），Guo Shuchun（郭书春）译，Dunod Paris，2004、2005 年。

事实上，即使使用祖率$\frac{355}{113}$或8位有效数字的圆周率计算出需要的数值，没有近现代的精密加工技术，古代加工技术所造成的误差，会远远超过圆周率不精确造成的误差。显然，追求圆周率的精确值，不是人们日常生产、生活的需要，而是纯数学活动。

四

20世纪70年代以前，中国数学史界一般将中国古代数学的特征概括为强烈的位值制，以计算为中心，数学理论密切联系社会实际……这是非常明显的，也是正确的。钱宝琮等前辈已经做了充分的论述。然而，进一步问，中国古代数学的算法有什么特点？提出并解决这个问题的是吴文俊。他说："我国古代数学，总的说来就是这样一种数学，构造性与机械化，是其两大特色。"① 构造性和机械化的思想贯穿于整个中国古代数学的始终。

所谓构造性数学，是指从某些初始对象出发，通过明确规定的操作展开的数学理论。中国古代的方程术即线性方程组解法、刘徽求圆周率的程序、开方术和求高次方程正根的增乘开方法、大衍总数术即一次同余方程组解法等成就都是典型的构造性方法。

所谓机械化，就是刻板化和规格化。《九章算术》中的分数四则运算法则，开平方、开立方程序，方程术等，刘徽的求圆周率程序、解方程的互乘相消法和方程新术以及由《九章算术》的开方术发展起来的贾宪、秦九韶的增乘开方法，秦九韶的求解一次同余方程组的大衍总数术，宋元数学家设未知数列方程的天元术，元朝朱世杰等求解多元高次方程组的四元术，等等，都具有规格化的程序，是典型的机械化方法。

另外，吴文俊特别重视中国传统数学中几何问题的代数化思想特征。自《九章算术》起，勾股测望问题都要化成算术、代数问题求解。到宋元时期，数学家发明了天元术，将几何问题通过天元多项式化为一元高次方程。后来，又发展为二元术、三元术、四元术，即二元、三元、四元高次方程组。四元术的核心是四元消法，即将四元高次方程组化为三元，再化为二元，最后化为一元高次方程。这就是几何学代数化。

吴文俊从中国传统数学的构造性和机械化特征得到启发，开创了数学机械化理论。

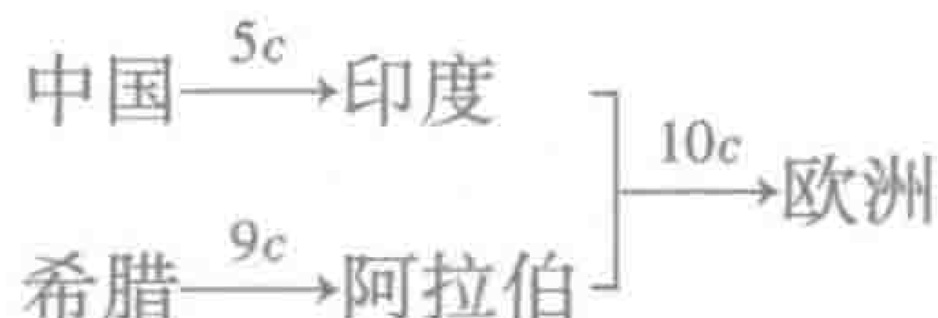
五

吴文俊关于中国传统数学特征的论述，为在理论上回答什么是世界数学发展的主流、彻底解决中国传统数学属不属于世界数学发展的主流等问题开辟了道路。文艺复兴之后，欧洲发生了资产阶级革命，跃居世界前列，并向亚非及美洲扩张，使他们养成了欧洲中心论思想，加之近代中国数学落后，西方人一般鄙视中国古代数学。当他们从日本学者三上义夫的书②上知道了中国古代数学的许多成就时，由于他们固守根深蒂固的西方中心论或其变种，便不顾起码的编年史，也不要任何证据，就说中国数学是从巴比伦、希腊甚至比中国晚出的

① 吴文俊，吴文俊论数学机械化，山东教育出版社，1995年。本文凡引吴文俊语，均据此。

② ［日］Y. Mikami（三上义夫），*The Development of Mathematics in China and Japan*（《中国和日本数学之发展》），Leipzig：Teubner，1913。

印度等传入的。他们编著的数学史著作，大都根本不提中国古代数学，甚至将中国与日本、玛雅的数学一道列入“对于数学思想的主流没有重大的影响”而略而不论。① 英国科学史家李约瑟（1900～1995）根据自己以及李俨、钱宝琮、严敦杰等学者的中国数学史研究成果指出，在数学上，“在公元前250年到公元1250年之间，从中国传出去的东西比传入中国的东西要多得多”②，批驳了中国古代数学源于古巴比伦、古希腊和印度的谬说。吴文俊根据钱宝琮的思想，将中世纪数学发展过程概括为：



c 表示世纪。后来，他进而指出：“贯穿在整个数学发展历史过程中有“两个中心思想”，一是公理化思想，一是机械化思想。”不久，他又将“两个中心思想”改成“两条发展路线”：“一条是从希腊欧几里得系统下来的；另一条是发源于中国，影响到印度，然后影响到世界的数学。”接着，他提出这两条发展路线互为消长：“从数学有史料为依据的几千年发展过程来看，以公理化思想为主的演绎倾向以及以机械化思想为主的算法倾向互为消长。”两年后，他更明确地指出了数学发展的主流问题：“在历史长河中，数学机械化算法体系与数学公理化演绎体系曾多次反复互为消长交替成为数学发展中的主流。”这就在理论上回答了什么是世界数学发展的主流的问题。而“中国古代数学，乃是机械化体系的代表”，从而彻底解决了中国传统数学属于世界数学发展的主流，并且是主流的两个主要倾向之一的问题。这就是说，在吴文俊看来，数学发展的主流并不像以往有些西方数学史家所描述的那样——只有单一的希腊演绎模式，还有与之平行的中国式数学，而就近代数学的产生而言，后者甚至更具有决定性的（或者说是主流的）意义。③ 正是以中国数学为其源头和重要组成部分的东方数学，包括数学方法和用数学解决实际问题的传统，传到欧洲，与发掘出来的古希腊数学相结合，导致数学模式和数学家的数学观改变，重视数学计算，走向几何问题的代数化，从而开辟了文艺复兴后欧洲数学的繁荣，并开辟了通向解析几何和微积分的道路。

古希腊数学与中国传统数学各有所长，厚此薄彼，褒一贬一，不是恰当的态度。正确的态度是取两者之长，兼收并蓄。如果现代数学家既能施用古希腊的抽象方法，又长于中国式的算法，便可以同时进行深入的证明和准确的计算，对当今数学的发展可能会起到无法预料的作用。这是中西数学思想的一种新的融会贯通，可以说是较明末至清末更高的、完全不同的一种融会贯通。

总之，只要了解并客观、公正地评价中国传统数学，就会发现，它是世界数学主流中极其重要的一部分。

---

① ［美］M. Kline（克莱因），古今数学思想·序。见：古今数学思想，第1册，上海科学技术出版社，1979年，V。

② ［英］李约瑟，中国科学技术史·数学，科学出版社，1978年。

③ 李文林，古为今用的典范——吴文俊教授的数学史研究，见：林东岱、李文林、虞言林主编，数学与数学机械化，山东教育出版社，2001年。

六

数学史是历史学的一部分。它要求研究者站在现代数学的高度，用历史学的方法整理此前产生的数学遗产。不言而喻，反映这些遗产的载体——原始文献，是我们研究的主要对象，是数学史研究的出发点。因此，尊重并认真研读原始文献，是对数学史工作者的起码要求。这不是杞人忧天。事实上，不认真研究原始文献，以自己现有的知识理解甚至取代古文；对原始文献弃而不用，只靠自己的臆测得出某些结论；读不懂古文，便对古文乱加改窜；因原始文献的记载与自己的观点相左，便对古文进行曲解，甚至不加说明便随意删节，强古人以就我的态度……在我们的数学史研究中并不鲜见。中国数学史研究经常发生一些争论，原因当然各异。然而，不尊重原始文献，甚至有意无意地篡改古文，曲解古义，是一个重要原因。我们以清中叶以来学术界对《九章算术》的编纂、刘徽的割圆术及求圆周率的程序、对秦九韶大衍总数术的认识、李冶《测圆海镜》为何而作、对天元式的认识等问题的偏颇为例说明这个问题。

刘徽关于《九章算术》是"九数之流"，张苍、耿寿昌等在秦火遗残基础上"各称删补"而成的论述不仅是最早的，而且被对《九章算术》的结构和体例的分析①、对《九章算术》所反映的物价的分析②所证实，因而是最正确的。自清中叶戴震整理《九章算术》(1774) 时开始否定刘徽的说法③起，此后整整 200 年间，人们不再考虑刘徽的说法是不是正确，却沿着戴震的思路走下去，提出一些或者似是而非，或者毫无根据、纯属臆测的《九章算术》成书说。事实上，1983 年底张家山汉墓中与《算数书》同时出土了关于"均输律"的竹简④之后，刘徽的说法不再与任何历史事实相矛盾，是不能轻易怀疑的。

我们认为，今天的研究者不能将刘徽关于《九章算术》编纂的论述与近人、今人关于《九章算术》成书的一些猜测放在同等的位置上来考察。只有首先驳倒刘徽，才能再考虑其他说法。因为刘徽的话是在《九章算术》成书二三百年后，而戴震等的话则在 2000 多年之后。刘徽去古未远，他不仅能师承前辈关于《九章算术》编纂的可靠说法，而且能看到比近人、今人多得多的资料。

乾嘉学派特别是戴震等的考据功夫极深，但是，疑古倾向太严重。且不说当时大规模的文物考古发掘尚未展开，只就典籍而言，由于时代久远及各种天灾人祸，古代出现过的典籍能流传到清中叶的百无一二；有幸流传到清中叶的，一个人即使如戴震这样聪明博学的大才，能读到的亦百无一二。因此，戴震等以一己之知识，便随意否定历史文献的记载，其偏颇是显而易见的。尊重原始文献，走出疑古，这就是结论。

中国传统数学在 20 世纪初中断，从事中国数学史研究的学者绝大多数是受西方现代数学教育的，这就存在着一个既站在现代数学的高度，又回到中国古代的问题。然而，在研治中国数学史的时候，往往囿于自己的知识修养，离开原始文献，自觉或不自觉地用我们所熟

---

① 郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，山东科学技术出版社，1992 年。又见：繁体字修订本，明文书局，1995 年。

② [日] 堀毅，秦汉物价考，见：秦汉法制史论考，法律出版社，1988 年，第 268 ~ 307 页。

③ 清·戴震，九章算术提要，见：《武英殿聚珍版丛书》本。见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第 1 册，河南教育出版社，1993 年。

④ 李学勤，中国数学史上的重大发现，文物天地，1985，(1)。

悉的希腊的或现代的方法取代中国传统的方法，从而造成误解。即使是一些造诣相当高的学者的某些严肃的论著在使用原始文献方面也会造成失误。

对刘徽割圆术及求圆周率程序的理解偏颇就是一个典型的例子。刘徽为《九章算术》圆田术写了一个很漂亮的注。这个注首先记述了前人用出入相补原理对圆田术的论证方法，当然是不严格的。接着，刘徽创造了用极限思想和无穷小分割方法严格证明圆田术的方法，其画龙点睛之处是"以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂"。这几句话清楚地表明刘徽完成了对《九章算术》圆面积公式的证明。然后，刘徽指出，《九章算术》圆田术中的周、径"谓至然之数，非周三径一之率也"。因此需要求这个"至然之数"，就是圆周率。他在批评了前人沿用"周三径一之率"的错误之后，提出了求圆周率近似值的程序。他从直径为 2 尺的圆的内接正六边形逐步割圆，计算出 314 寸^2 作为圆面积的近似值。将其代入圆田术，反求出圆周长的近似值 628 寸。将其与圆直径 20 寸相约，便得到圆周率$\frac{157}{50}$。刘徽的整个圆田术注，论点明确，论据充分，逻辑清晰，没有任何费解之处。

显然，刘徽割圆术的主旨和他的几个极限过程是为了证明《九章算术》的圆田术。可是，"文化大革命"前约半个世纪，几乎所有关于刘徽割圆术的文章都没有认识到这一点。甚至一篇逐字逐句用现代汉语翻译圆田术注的文章①对上面提到的画龙点睛的几句话，竟然略而不译。并且由于这个失误，人们对刘徽求圆周率的程序也统统搞错了。首先，误以为整个割圆术，特别是几个极限过程，就是为了求圆周率。实际上，求圆周率是极限思想在近似计算中的应用，用不到极限过程。其次，误以为求出圆面积近似值 314 寸^2 之后，使用现今中学数学教科书中的圆面积公式 $S=\pi r^2$ 求圆周率。这不仅背离了刘徽注，而且还会把刘徽置于他从未犯过的循环推理错误的境地。

对刘徽割圆术的误解延续时间之长，涉及范围之广，是罕见的。究其原因，除了离开原文并囿于自己的知识结构外，对许多作者而言，是犯了"天下文章一大抄"的错误。研究数学史，认真研读原著是第一要务。在这里，没有捷径可走。

人们常把南宋数学家秦九韶《数书九章》中求解一次同余方程组的方法称为"大衍求一术"。实际上，这是一个误解。秦九韶求解一次同余方程组的方法是"大衍总数术"，它包括四个部分：诸问数的定义、将不两两互素的问数化为相当于两两互素的定数的程序、求乘率的程序即"大衍求一术"、求率数即答案的程序。"大衍求一术"只是其中一部分，尽管是其相当重要甚或核心的一部分，但不是一次同余方程组解法的全部。自清中叶以来，许多推演秦九韶方法的著作②及 20 世纪的数学史著述③大都将"大衍求一术"说成是秦九韶的一次同余方程组解法，这是不恰当的。

自清阮元（1764 ~ 1849）提出"《测圆海镜》何为而作也？所以发挥立天元一之术也"④ 的说法之后，许多中国数学史著述便将《测圆海镜》说成是一部研究天元术的著作，

---

① 励乃骥，《九章算经》圆田题和刘徽注的今释，数学教学，1957，(6)：1 ~ 11。

② 清中叶之后推演秦九韶求解一次同余方程组方法的著作几乎全部冠以"求一术"之名，如张敦仁的《求一算术》、焦循的《大衍求一术》、时曰醇的《求一术指》、黄宗宪的《求一术通解》等。

③ 钱宝琮，秦九韶《数书九章》研究，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966 年，第 67 ~ 77 页。

④ 清 · 阮元，重刻《测圆海镜细草》序，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第 1 册，河南教育出版社，1993 年。

而李冶的《益古演段》是一部普及天元术的著作。诚然，《测圆海镜》和《益古演段》是现存使用天元术的最早的两部著作，人们重视它们关于天元术的内容，这是完全正确的。但是，说它们是李冶为天元术而写的，是不符合历史事实的。实际上，李冶自序已经说明他的《测圆海镜》是为了阐释洞渊九容，而《益古演段》是在《益古集》上“移补条段，细翻图式”，为了使初学数学者能看懂。在李冶自序中，没有一个字谈到天元术。在他的朋友和子侄辈为他的两部书写的序跋中，也都没有一个字谈到天元术。可见，《测圆海镜》是阐释勾股容圆的著作，《益古演段》是阐发《益古集》中田亩问题的著作，二者都不是以阐述天元术为目的的著作。天元术只是李冶在这两部著作中使用的主要方法，当时业已成熟。

对天元式的表示自清中叶以来也有一些模糊认识。应当指出，天元式主要是指含有“天元”的多项式或单项式，而不是指开方式。许多数学史著述说，在天元术中，开方式也称为天元式，甚至称为“天元开方式”，说“‘天元开方式’就是一元高次方程”，并在开方式中以“元”字或“太”字表示一次项或常数项。这是不恰当的。一般说来，在天元术中，经过“如积相消”，得出的开方式中的常数项或天元的一次项便不再标以“太”或“元”。有的学者在引用开方式时加上原文没有的“元”字，是上述误解所致。

经过李俨、钱宝琮等中国数学史学科奠基者和历代数学史工作者的努力，中国数学史研究有相当深厚的基础和成就。在这种情况下，更应该力求准确地表述这些成就，既不夸大，也不缩小。为此，除了尊重原始文献之外，别无他途。

同时，中国传统数学成就虽然辉煌，然而历史上产生的尤其是元中叶以前的大量数学著作，流传到现今的只是极少一部分。就是说，我们实际上只知道中国数学史的几个“点”。如何将这些“点”串联成“线”、“面”或“体”，成为一部完整的中国数学史，是数学史工作者的任务。

李俨、钱宝琮、严敦杰等前辈站在现代数学的高度，用历史学的方法研究中国古代数学的辉煌成就，为中国数学史奠定了实事求是的研究方法。吴文俊进而提出了“古证复原”的“三原则”：

原则之一，证明应符合当时本地区数学发展的实际情况，而不能套用现代的或其他地区的数学成果与方法。

原则之二，证明应有史实史料上的依据，不能凭空臆造。

原则之三，证明应自然地导致所求证的结果或公式，而不应为了达到预知结果以致出现不合情理的人为雕琢痕迹。

这里虽然讲的是复原古证的问题，但对数学史研究的其他问题也是适用的。我们认为，这“三原则”的核心是尊重历史，尊重原始文献。

只有尊重原始文献，深入研究这些“点”，才有可能做好串联成“线”、“面”或“体”的工作，形成完整、准确的中国数学史。这是本书力求达到的目标。正因为如此，本书凡是阐述重大成就或重要观点，必定引征古文献的原文艺为佐证。

郭书春

己丑年（2009）雨水定稿

目　录

第一编　中国数学从兴起到形成一门学科
——原始社会到西周时期的数学

第二编　中国传统数学框架的确立
——春秋至东汉中期的数学

第三编　中国传统数学理论体系的完成
——东汉末至唐中叶的数学

第四编　中国传统数学的高潮
——唐中叶至元中叶的数学

第五编　传统数学主流的转变与珠算的发展
——元中叶至明末数学

第六编　西方数学的传入与中西数学的会通——明末至清末的数学

第一编　中国数学从兴起到形成一门学科

——原始社会到西周时期的数学

第一章　中国数学的兴起
——原始社会的数学

在辽阔的中华大地上，很早就有了人类活动。我们的先民通过彼此交流和与自然接触，逐渐形成了很多知识，创造了物质和文化。1965 年发现的距今约 170 万年的元谋人已经能制造粗糙的工具，并有可能会用火。后来还有陕西蓝田人、北京人、山顶洞人、四川资阳人、河南裴李岗遗址、仰韶文化、山东大汶口文化、良渚文化、红山文化等大量原始人类和文化遗迹。特别是北京人，生活在距今约 70 万～20 万年以前，已经能用火并会保存火种，并且有了语言功能，脑量接近现代人。这一时期又称石器时代，一般分为旧石器时代、中石器时代和新石器时代三个阶段（或把中石器时代并入旧石器时代而分为两个阶段）。旧石器时代以打制石器为主要生产工具，人类过着采集和狩猎的原始生活。中石器时代已出现饲养动物，会制作狩猎工具，石器以细小石器为主，并出现了氏族部落。新石器时代是原始氏族公社由全盛到衰落的历史时期，它以农耕、畜牧的出现为划时代标志，出现磨制石器、制陶和纺织。新石器时代后期已经步入文明的门槛，具备数和形的观念，产生了画圆和画方的工具即规和矩的雏形，发明了记录数量的方法。另外，部落联盟的发展、礼制和王权的逐渐形成为数学知识的传承提供了相对稳定的纽带。①

第一节　图形观念的形成

一　图形观念的产生

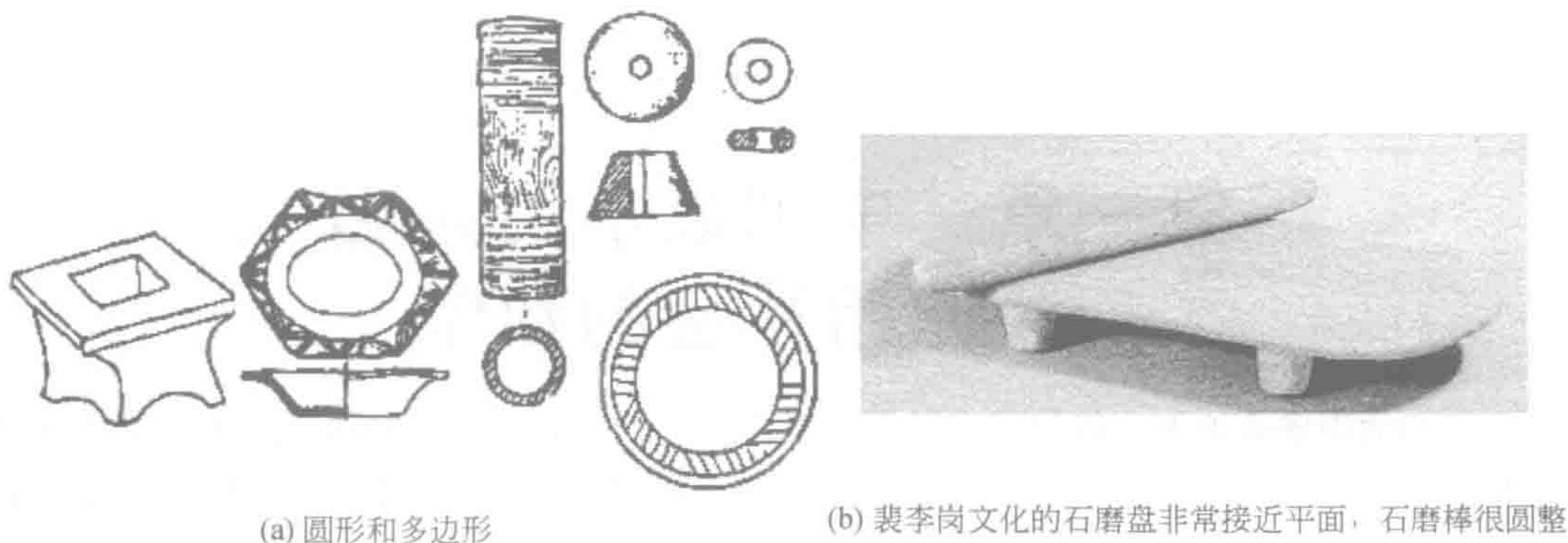
人类在与自然的接触中，逐渐形成图形的观念。旧石器时代遗存中有多边形器、三棱大尖状器、球形器、圆锥形、圆柱形、盘形石核和骨锥等遗物，说明先民对不同的形有了越来越清晰的认识。

《周易·系辞》说："古者庖羲氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。"②如果抛开描述的神秘性，它说明人类从对天地万物和人自身的观察体验中总结出八卦，用以推究万物的奥秘。新石器时代的器物上线条形状多样，有直线、弧线、折线、曲线、旋涡线和螺旋线等，还有虚线和点画线。平面图形有三角形（包括等边三角形）、平行四边形、矩形、菱形、正方形和梯形等各种图形。各种器物表面有圆柱面、圆台面、平面等多种形状（图 1-1-1）。由此可知，几何图形在那时已经能在一定程度上脱离具体实物而存在于人的观念中，并有了点、线、面、体，方、圆，曲、直，平行线，对称，等分圆周等复杂的几何观念。

---

① 本编根据以下文献相关部分删改而成：邹大海，中国数学的兴起与先秦数学，河北科学技术出版社，2001 年。

② 周·周易，十三经注疏，中华书局，1981 年。本编凡引《周易》文字，如不说明，均据此。



(a) 圆形和多边形　　(b) 裴李岗文化的石磨盘非常接近平面，石磨棒很圆整

图 1-1-1　器物、器物外形或器物上的文饰

方、圆是比较典型的几何形状。在距今七八千年的裴李岗文化和晚一些的仰韶文化中都有圆形房基遗存，还有一些房基接近方形甚至几乎是正方形的（图 1-1-2），并发现了圆形陶窑。至于方、圆口形的器物，不仅在裴李岗①，而且在河姆渡、崧泽等年代相差不远和晚一些的仰韶文化等遗址中大量出现。

在河姆渡遗址中，一方形陶盂顶面的内方口与外方沿之间，有八个正方形纹饰，它们具有共同的中心，各边相应平行，排列整齐，可以看成位似形（图 1-1-3）。崧泽遗址中层的一件陶瓶，腹部有一圈圈竹节纹，如从上往下透视，就是一系列同心圆（图 1-1-4）。器具表面的装饰纹或器物的透视图还有方圆相含者（图 1-1-5）。

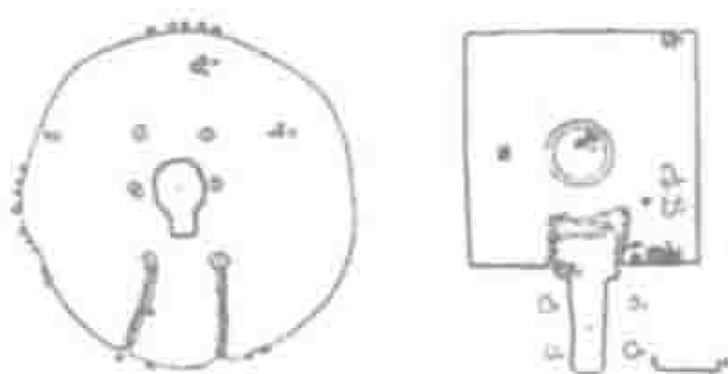


图 1-1-2　仰韶文化方圆形房基

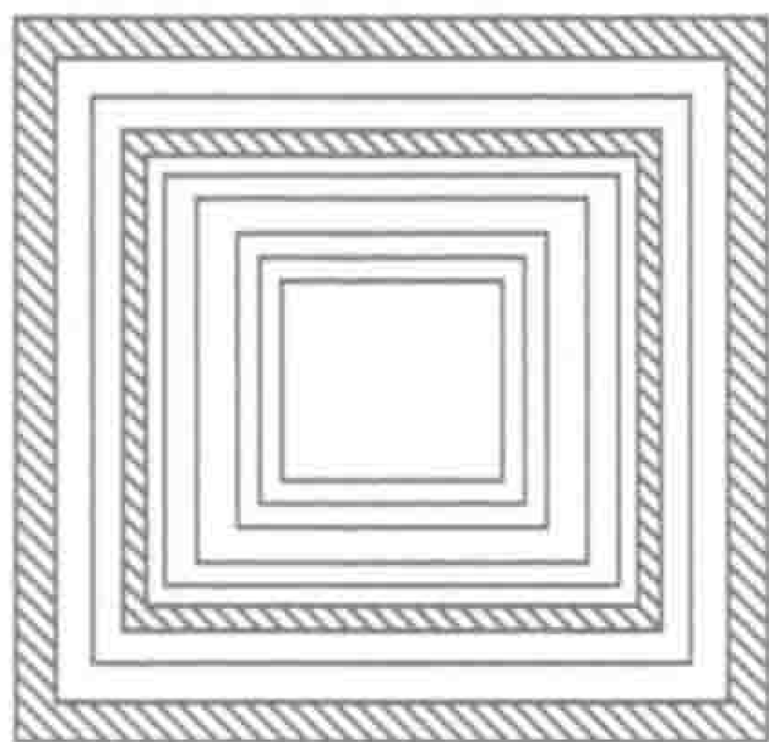


图 1-1-3　陶盂顶面的正方形纹饰

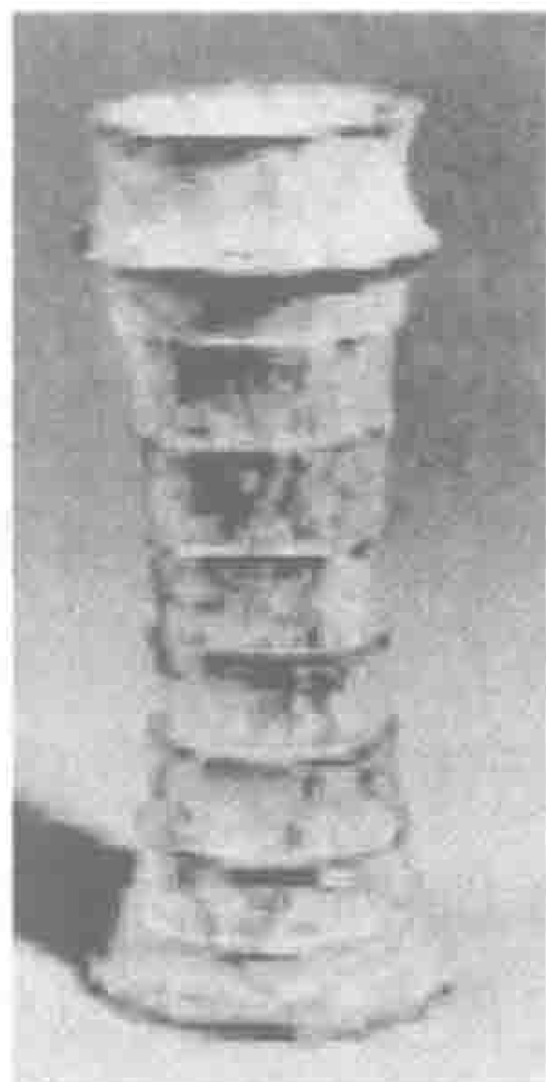


图 1-1-4　崧泽遗址中层的陶瓶

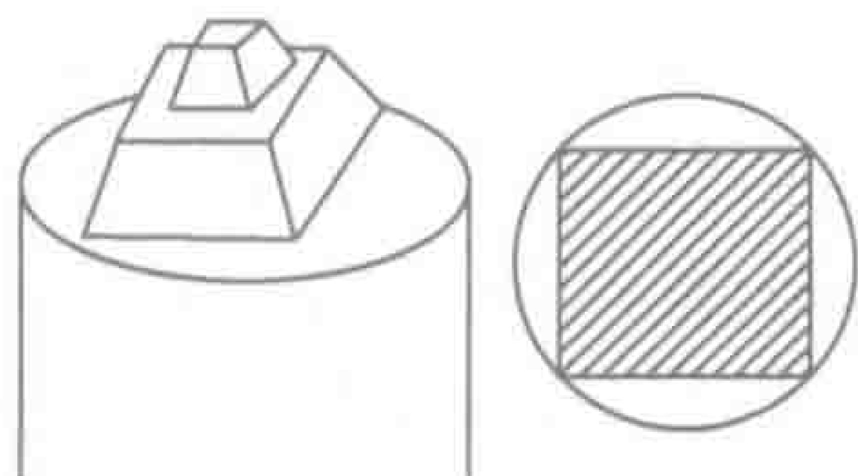


图 1-1-5　方圆相含的器形

① 开封地区文物管理委员会、新郑县文物管理委员会、郑州大学历史系考古专业，裴李岗遗址一九七八年发掘简报，考古，1979，3：197～205。


图 1-1-6　河姆渡三足炊煮器

由河姆渡人住宅的基础木桩排列成直线，同一栋住宅各排桩木的方向基本一致，可知河姆渡人已比较熟练地掌握了定直的方法，三点共线的渊源也能从河姆渡桩木遗迹中体现。① 河姆渡（图 1-1-6）、裴李岗和崧泽等文化中的炊煮器，反映了古人对不在同一直线上的三足对器物摆放的稳定性的认识，这可视为异线三点确定一平面的观念的经验基础。

新石器时代对于图形的对称性已有很深的理解。轴对称和中心对称的图案都能找到。例如，河姆渡一件骨器表面有双鸟朝阳图（图 1-1-7），非常生动。在五六千年前的北阴阳营文化中有一件彩陶钵，它内壁的射影图既符合轴对称，也符合中心对称（图 1-1-8）。

在河姆渡水井遗迹中有两根相距约 6 米的斜桩，各与水平面成 55°角，中间又有一根垂直竖桩，三个桩基本在同一条直线上，向上延伸大体能交于一点（图 1-1-9）。梁大成说“这反映了河姆渡人进行过能使两相交斜线与水平面成等角的实践”。这应是出于一种原始的对称的思想。

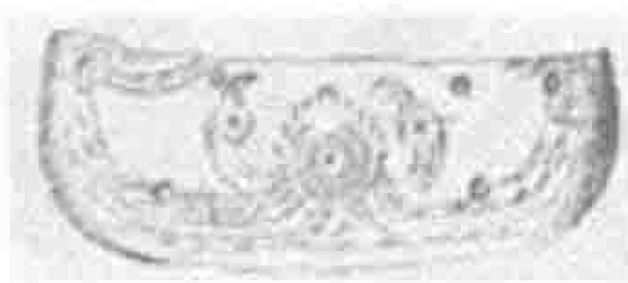

图 1-1-7　双鸟朝阳图


图 1-1-8　彩陶钵射影图案

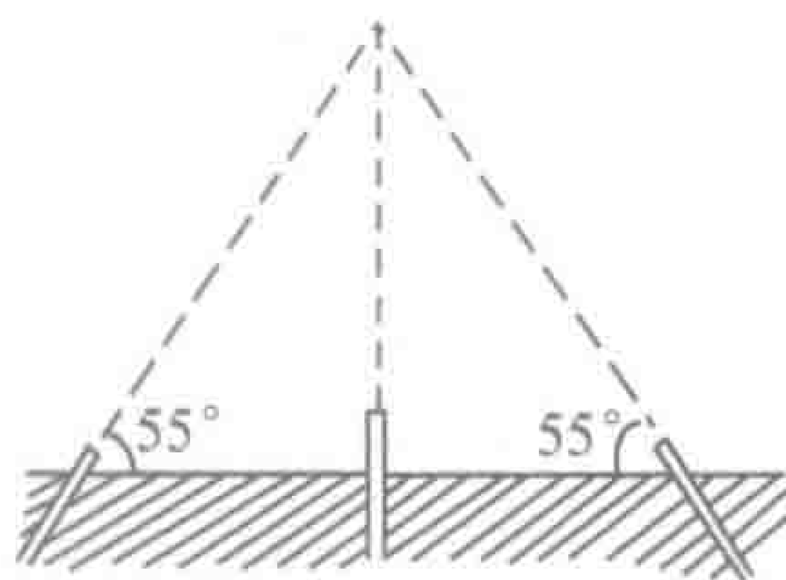
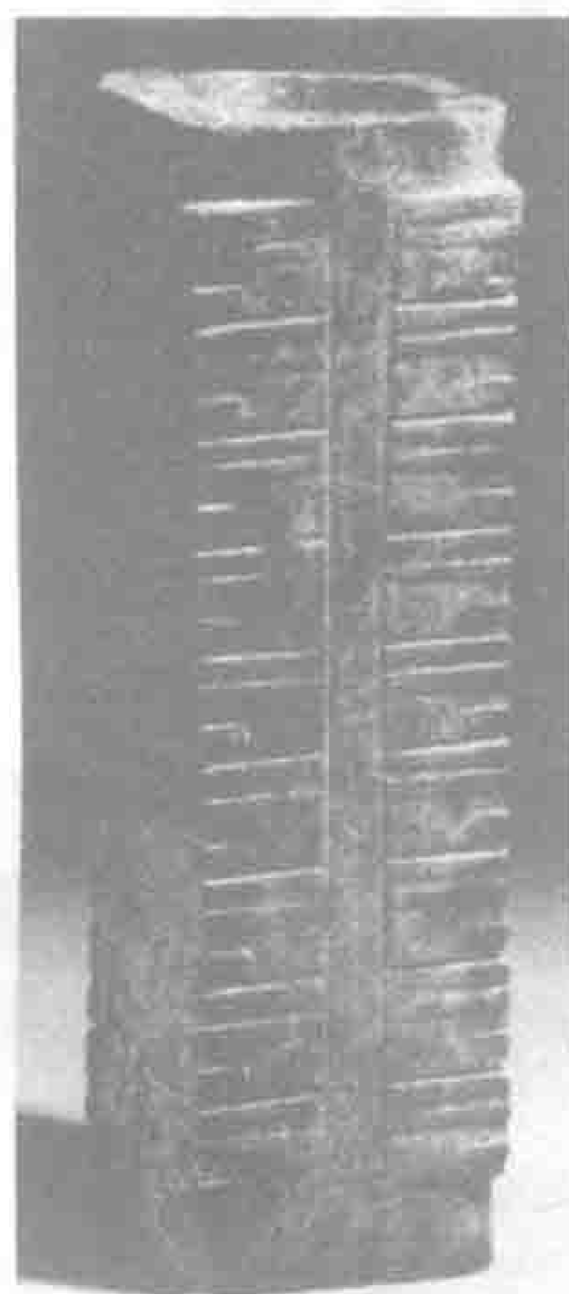


图 1-1-9　河姆渡水井木桩示意图

二　从方位观念看图形观念


图 1-1-10　良渚文化的玉琮

人们外出打猎和进行其他生产、生活活动，需要了解位置和方位。首先当然是日出的东方和日落的西方，后来便逐渐有了南方和北方的观念。南、北概念的形成可能与经常遇到的风有关，也可能和天上的星星有关。一定的季节，总有从某一个方向刮来的风比较多的情况。甲骨文中有东、南、西、北四方各对应一种风的记录。另外，传世文献《吕氏春秋·有始》、《淮南子》“地形”与“天文训”篇、《史记·律书》、《灵枢经·九宫八风》和银雀山汉简等中还有东北、东、东南、南、西南、西、西北、北八个方向各对应一种风的记录。②

“观象授时”是古代天文的重要功能。最早主张“天圆地方”的盖天说大约产生于原始社会。新石器时代很多地方出土了玉琮，内圆外方，作为祭祀天地的礼器，它是一种将天和地象征地融为

① 梁大成，河姆渡遗址几何图形试析，史前研究（辑刊），1991 年。本编凡引用梁大成的论述，均据此。

② 李零，中国方术考，人民中国出版社，1993 年，第 47～52 页。

一体的模型①，图 1-1-10 是浙江金山县出土的属于良渚文化的玉琮。它的四个角反映了古人四个方位的观念。

三　原始的作图工具——规矩准绳

新石器时代有些器物上的图案十分规整，说明当时已具有制造简单作图工具的能力。圆和方是最典型的几何图形，中国古代一向使用规来作圆，用矩来作方。规矩起源于什么时候，历来有不同的看法。山东嘉祥县汉武梁祠左石室第四石第三层画像为人身蛇尾的伏羲、女娲交尾图，两人相背，伏羲手执矩，女娲手执规（图 1-1-11）。后石室第五石亦有类似的画像，但两人相对②。第一石的第二排亦有图，其中伏羲手执矩（图 1-1-12），女娲是否执规，残泐不清。左旁书云："伏戏仓精，初造王业，画卦结绳，以理海内。"③ 李俨说长沙出土一件器物，为有柄两足形木器，两头都是尖形，可能是古代的圆规。④ 这与新疆彩帛规矩图（见图版）上女娲所执的规相吻合。把规矩追溯到伏羲女娲，是一种传说。



图 1-1-11　伏羲手执矩，女娲手执规



图 1-1-12　伏羲女娲执规矩残图

《尸子》卷下和汉代王符都说倕发明了规矩准绳。关于倕的时代，有黄帝、尧、舜三种说法。《史记·夏本纪》说夏禹、益和后稷奉帝舜之令，用规矩准绳开发疆土。《周髀算经》卷上记载商高的话也特别强调矩，并认为数学从夏禹治水中产生。《淮南子》和王符还说到

---

① 冯时，中国天文考古学，社会科学文献出版社，2001 年，第 114 页。

② 朱锡禄，武氏祠汉画像石，山东美术出版社，1986 年，图四八、三七。

③ Liu Xingzhen，Yue Fengxia，*Han Dynasty Stone Reliefs——The Wu Family Shrines in Shandong Province*，Foreign Language Press，1991，17.

④ 李俨，中国古代数学史料，李俨钱宝琮科学史全集，第二卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 19～20 页。

奚仲也善用规矩。《汉书》卷二十“古今人表”第八则把他列于帝禹夏后氏之下。[①] 那么奚仲生活在倕的前后。由奚仲、禹都使用规矩准绳的说法来看，倕发明规矩准绳的时间应该更早一些。这时，这些工具已经推广。

新石器时代早期制陶还没有出现轮制法，到中期才普遍采用慢轮修整，并出现快轮，到了晚期则普遍使用快轮制陶。[②] 人们在使用陶轮制陶的过程中容易体会圆周上各点到圆心等距离这样的本质。有人估算伏羲和黄帝分别在公元前四五千年和公元前三千年左右，这和用慢轮与快轮的制陶法大体对应。那么，伏羲和黄帝时倕制规矩的传说与此能吻合。

在新石器时代出现制作方、圆的工具规矩，也体现在祭坛建筑和居住遗址之中。属于红山文化的辽宁东山嘴文化遗址，北部为一边长 10 米左右的正方形建筑，南部为一直径约 2 米的圆形坛式建筑，形成以南北轴线分布、南圆北方、左右对称的一组完整建筑群址。圆形坛是黄土堆积的，上部用石块铺砌而成的，周围以石片镶边，石圈内铺有一层大小相近的河卵石（图 1-1-13）。这是座专供祭祀的祭坛。建坛时，可能在中心位置确定一个桩，然后用绳子围桩绕一周画圆圈，再依圆圈构建。至于方形的祭坛，则可能用了矩和绳。在西安半坡、姜寨的仰韶文化中，都有圆形和正方形的房屋[③]（图 1-1-2）。这些建筑遗迹说明约在公元前 3000 年的时候，先民已对圆方的原理有了较清楚的认识。传说中的黄帝大约就是这一时期。所以，古人说黄帝时的巧人倕发明规，应该不是空穴来风。



图 1-1-13　东山嘴红山文化圆形祭坛
（采自《牛河梁红山文化遗址与玉器精粹》）

第二节　数概念的形成与原始的记数方法

一　数概念的产生

数概念比形的产生时代似乎更难确定。数更为抽象，李迪、陆思贤认为“应晚于对某些立体形状的认识。最初形成的无疑应是基数而不是序数”[④]，是有道理的。还不识数的幼儿，却往往对形有一定程度的感悟。

人类对数的认识，大约是从对多少的感受开始的。在十万年前的旧石器时代晚期，人类使用二球或三球飞石索。约两万年前的弓箭，每张弓都要配备数枚箭，这些都需要一定的数量概念。[⑤] 但恐怕这还只能算是多少的概念，离数观念的形成尚有很大距离。只有当人们发

---

① 东汉·班固，汉书，中华书局标点本，1990 年，第 880 页。

② 李文杰，中国古代制陶工艺研究，科学出版社，1996 年，第 348 ~ 350 页。

③ 严文明，仰韶文化研究，文物出版社，1989 年，第 183 ~ 198 页。

④ 李迪主编，中国数学史大系，第一卷，北京师范大学出版社，1998 年。本编凡引此书第一卷的文字，均据此。

⑤ 富严，史前时期的数学知识，史前研究，1985，2：104 ~ 112。

现三条狗、三个桃子、三个人都具有同样的数量，这个数量还可用于表示三块石头、三头羊或三个别的什么东西的时候，数字三的概念就形成了。

最先形成的数概念是一和二。在澳大利亚、南美的很多原始部落的酋长尽管认识自己部落的每一个人，但说不出部落人口的数目，他们只能数到三，三以上就称为“多”。我国远古的先民也应经历过这样一个阶段。中国古代常以“三”指多数而不一定确指三。《老子》说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”① 这大概是远古思想的遗迹。

二 原始的记数方法

（一）结绳、刻木和书契

《周易·系辞下》说，庖羲氏时代，“作结绳而为罟，……上古结绳而治，后世圣人易之以书契。”这是说伏羲用结绳，后来才有书契。许慎也说庖羲氏“始作易八卦，以垂宪象。及神农氏结绳为治而统其事”，黄帝之史仓颉“初造书契”②。这是分伏羲八卦、神农结绳和黄帝书契三个发展阶段。司马彪《后汉书志》称：“尝闻儒言，三皇无文，结绳而治，自五帝始有书契。”③ 也把书契的时间定在从黄帝开始的五帝。这几说都认为书契后于结绳，不在伏羲之世。《尚书序》、司马贞亦以书契后于结绳，但以为书契始于伏羲之世，大概书契产生后与结绳并用了很长时间，才从总体上取代结绳。

书契一般是指文字，但最先却不一定专指文字。《经典释文》注《尚书序》说：“书者文字；契者刻木而书其侧，故曰书契也。一云以书契约其事也。郑玄云：以书书木边言其事，刻其木，谓之书契也。”④ 汉刘熙《释名》卷六说：“契，刻也，刻识其数也。”“书，庶也，纪庶物也，亦言著也。”⑤ 这都说明书和契是有区别的。《列子》“说符”篇和《墨子》“公孟”篇的故事说明刻木记事、记数以为凭证，在春秋战国时代还有使用。

解放初，我国西南一些少数民族仍用结绳和刻木记事、记数。例如，傈僳族的黑麦燕带养侄子时，用麻绳涂墨。供给侄子一个月，打一个结。到解放时侄子参加工作已经打了51个结，表示他已经供养侄儿四年多了（图1-2-1）。⑥ 又如云南某诊所，每看一个病人就在木片上刻一缺口，每隔一定时间就据木刻上的缺口数向上级汇报看的病人数。原始的结绳与木刻可能与先进的计数法结合起来。例如，红河哈尼族典当土地的契约木刻，除了一般缺口或刻道外，还出现了各种符号。又如，一件木刻（图1-2-2）是一根长20厘米的圆形木棒，正面刻符号“*”代表100元，“×”代表50元，两个“|”各代表10元，五个圆点“·”各代表1元，表示典当价共为滇币175元。⑦ 这种木刻实际是一种依附于木刻的符号。这种记数刻符和文字记数方法的差异已经不大了。

---

① 朱谦之，老子校释，中华书局，1984年，第176页。
② 东汉·许慎，说文解字，中华书局，1987年，第314页。
③ 晋·司马彪，后汉书志·祭祀下，后汉书，中华书局，1965年，第3205页。
④ 唐·陆德明，经典释文，上海古籍出版社，1985年，第139页。
⑤ 王先谦，释名疏证补，卷六．上海古籍出版社，1984年，第8~9页。
⑥ 李家瑞，云南几个民族记事和表意的方法，文物，1962，1：12~14。
⑦ 汪宁生，从原始记事到文字发明，考古学报，1981，1。

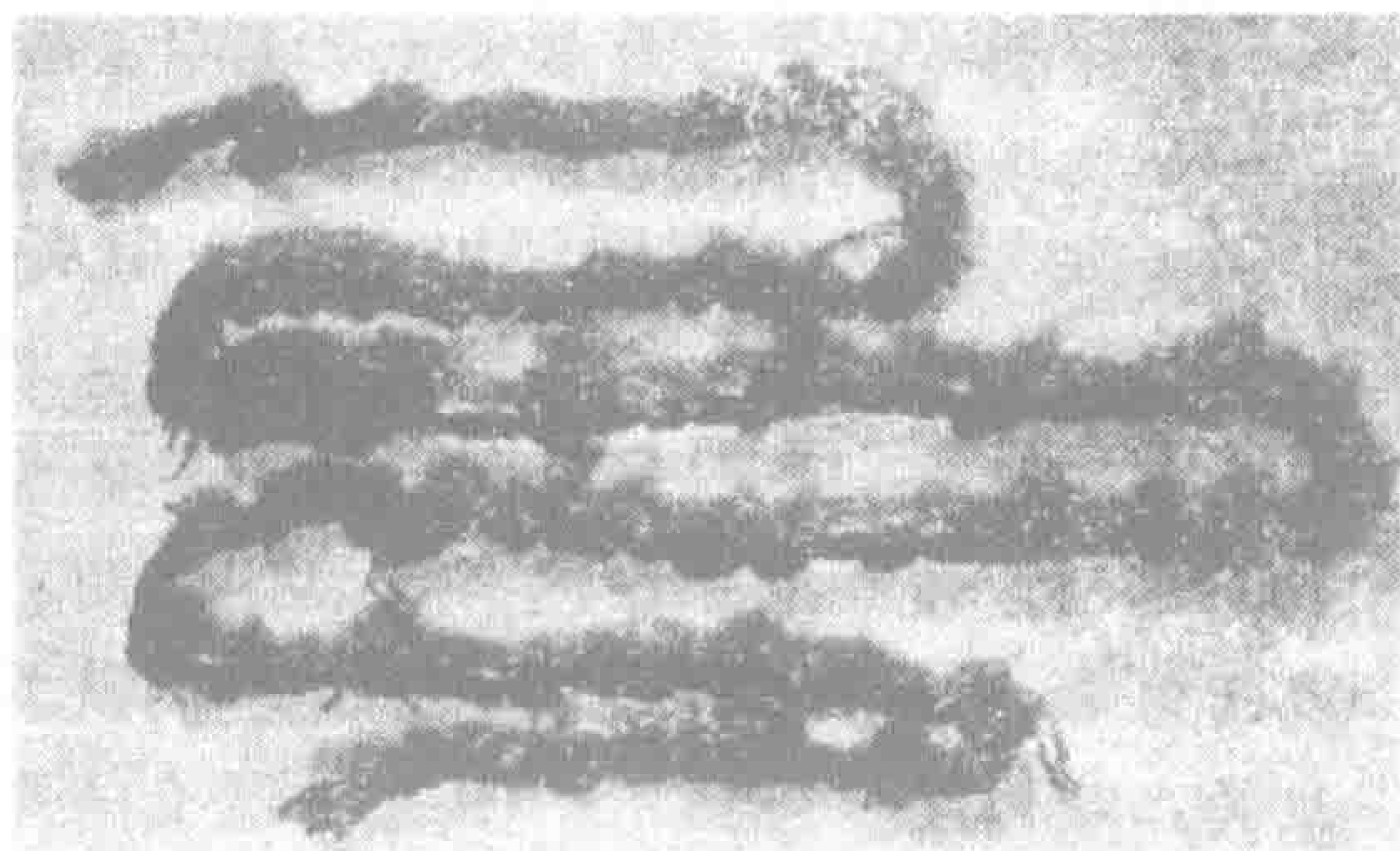


图 1-2-1　傈僳族结绳
（采自《文物》1962 年 1 期）

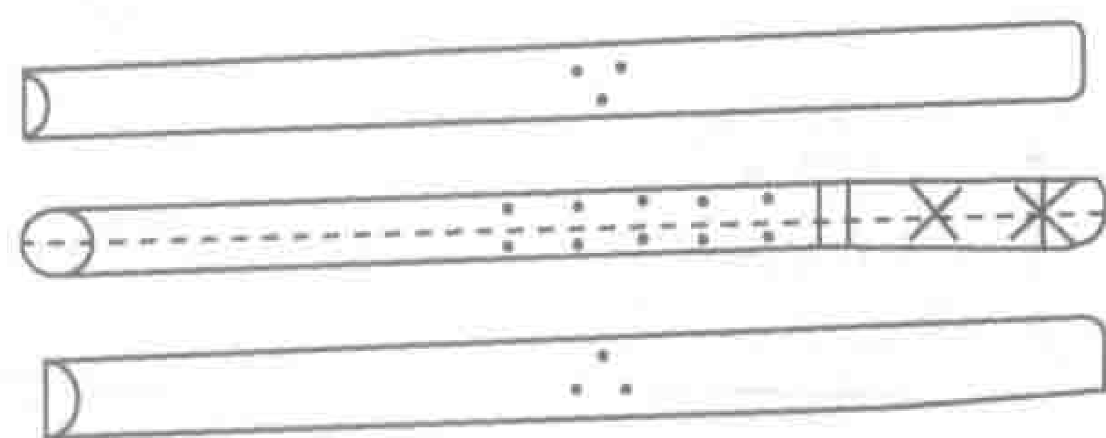


图 1-2-2　哈尼族典当土地的木刻
（据《考古学报》1981 年 1 期）

最原始和最早的记数方法可能是用手足，当手足不够时可能还用身体的其他部位。《周易》的蓍草占卜，大概源于以各种草秆、小长棍计数，后来才固定到蓍草上，并赋予其告往知来的神秘意义。后来的算筹大概就是从这种长条形物品记数的方法发展而来。从手足到实物再到结绳，这应是一种进步，从结绳到刻木，又是一种进步，标志着符号的萌芽。

从 1974～1978 年，在青海省乐都县柳湾发掘了一大批分属马厂、半山、齐家和辛店四种文化类型的新石器时代末期墓葬。半山类型的带刻口骨片有 1072 枚；其Ⅳ型呈带有刻口的长方形状，长 2～2.4 厘米，宽 0.5～1 厘米。有的两长边上都有刻口，二至六个不等，刻口皆相互对称，其中两件的正面还刻有十字形划纹。这些骨片器形整齐规则，磨制精致。又有马厂类型带刻口的骨片共 48 枚，都呈长方形，长 2.3 厘米，分三种类型。其中，Ⅰ型 8 件，只在一侧长边上有一个三角形刻口；Ⅱ型 12 件，在一侧长边上有一刻口，在另一侧长边上有两个刻口；Ⅲ型 28 件，在两长边上分别有两个和三个刻口。[①] 考古学家认为这些骨片“大约是用作记事、记数或通讯联络用的”[②]。李迪、陆思贤在《中国数学史大系》第一卷进一步解释说：“每一个刻口都表示‘一’，五个刻口累加起来就是‘五’，……用累加的方法可以表示较大的数，例如，1＋3＋5＝9，……马厂类型的最大数到五。半山类型的最大数到八，每个骨片所能表示的数均不超过十，与十进制符合。有理由认为，那时已有了加法运算和十进制。”

我们倾向于认为这些刻片代表数，但不是针对某个要记的数（或事物）刻上相应个数的刻口，而可能是它本身就是专门用以记数（事）的，上面的刻口数目和所记数（事）的多少有对应关系，或者有如筹码之类，也许可以用来进行加减法。

上面所述原始社会的记数，都可以叫做实物记数，或至少与实物密不可分。其中孕育着两种后来占统治地位的记数法，一是算筹记数，一是数字符号记数。前者从木（竹）片（棍）、草秆记数发展而来，后者与书契有关。

安徽省含山县长岗乡凌家滩一处 4600±400 年前的墓葬中出土了一块玉版图（图 1-2-3，其中（a）为玉版，（b）为其摹本）和一件玉龟（c）。玉版图呈长方形，长 11 厘米，宽

---

① 青海省文物管理处考古队、中国社会科学院考古研究所，青海柳湾——乐都柳湾原始社会墓地，文物出版社，1984 年，第 50～51 页。

② 青海省文物管理处考古队、中国社会科学院考古研究所青海队，青海乐都柳湾原始社会墓地所映出的主要问题，考古，1976，6：365～377。

8.2 厘米，厚 0.2 ~ 0.4 厘米。正面中部刻一小圆圈，在小圆圈内刻有方心八角星纹，小圆圈外刻一大圆圈。两圆圈间以直线分为八等份，每份有一个尖端朝外的圭形箭头。在大圆圈外玉版四角又各刻有一朝外的圭形箭头。玉龟背甲正面略呈椭圆形，中间有脊。出土时，玉版夹在玉龟的背甲和腹甲之间。学者们认为玉器上的方位和孔数透露了中国文化源头的重要信息。饶宗颐说："玉版的数字排列，看来是河图、洛书以外另套数理系列。它们都能够分辨生数与成数为不同类型，更加以重新组合排列。"[①] 应该说，这些孔数正是人们有了抽象的数概念的体现。在安徽省潜山县薛家岗新石器时代遗址第三期中（距今 5170 ± 125 年）出土了一批带孔石刀（图 1-2-3（d）为其中之一），其孔数全为奇数，说明当时已能分辨奇偶的概念，其抽象数字概念的产生当更早。

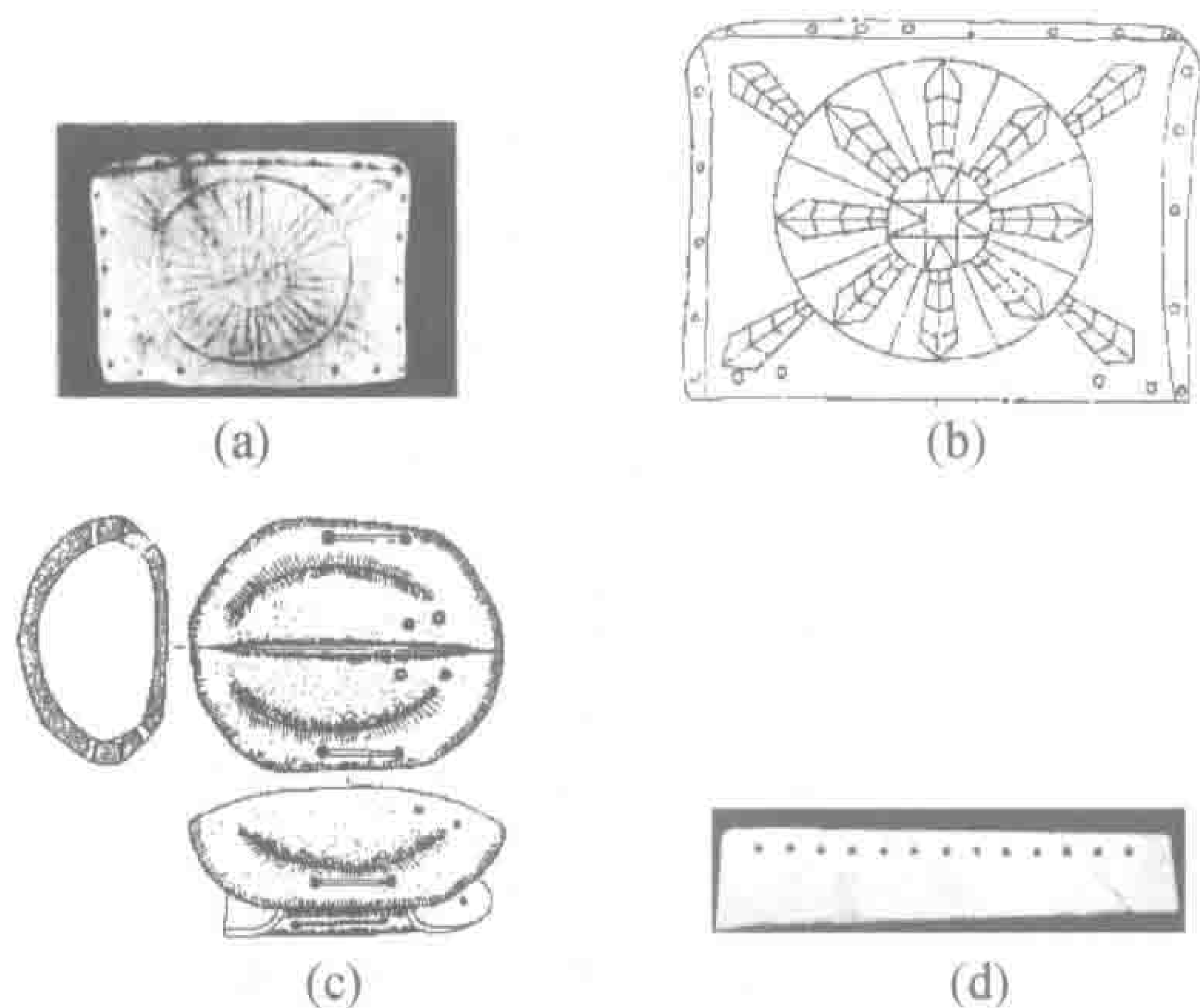


图 1-2-3　玉版石刀图

（二）陶文数字

参照后世的甲骨文数字的形状，下面列出一些类似数字的陶符，如图 1-2-4 所示[②]：对应于 8 的最后一个为八个横划，或即取象于并排的八个长条形物。6 的前两形如后世算筹"丅"形，如果真是 6，那么，算筹的"五在上方"的记数法是原始社会就早已有的了，当然这种可能性不大。还有一些符号也可能与数字有关（图 1-2-5）：第一行最末一符很像结绳，倒数第二符像倒写的六；第二行前面三个紧挨着的原为一个整体，不知是不是数字卦四六四，倒数第一符像是万字符卍，倒数第二和第三符像廿；其他在"丨"上分叉的符号，不知是否取象于刻木，或者是两个数的组合，如李迪、陆思贤在《中国数学史大系》第一卷所猜测的一表十位、一表个位的二位数。这些都大有想象的余地。

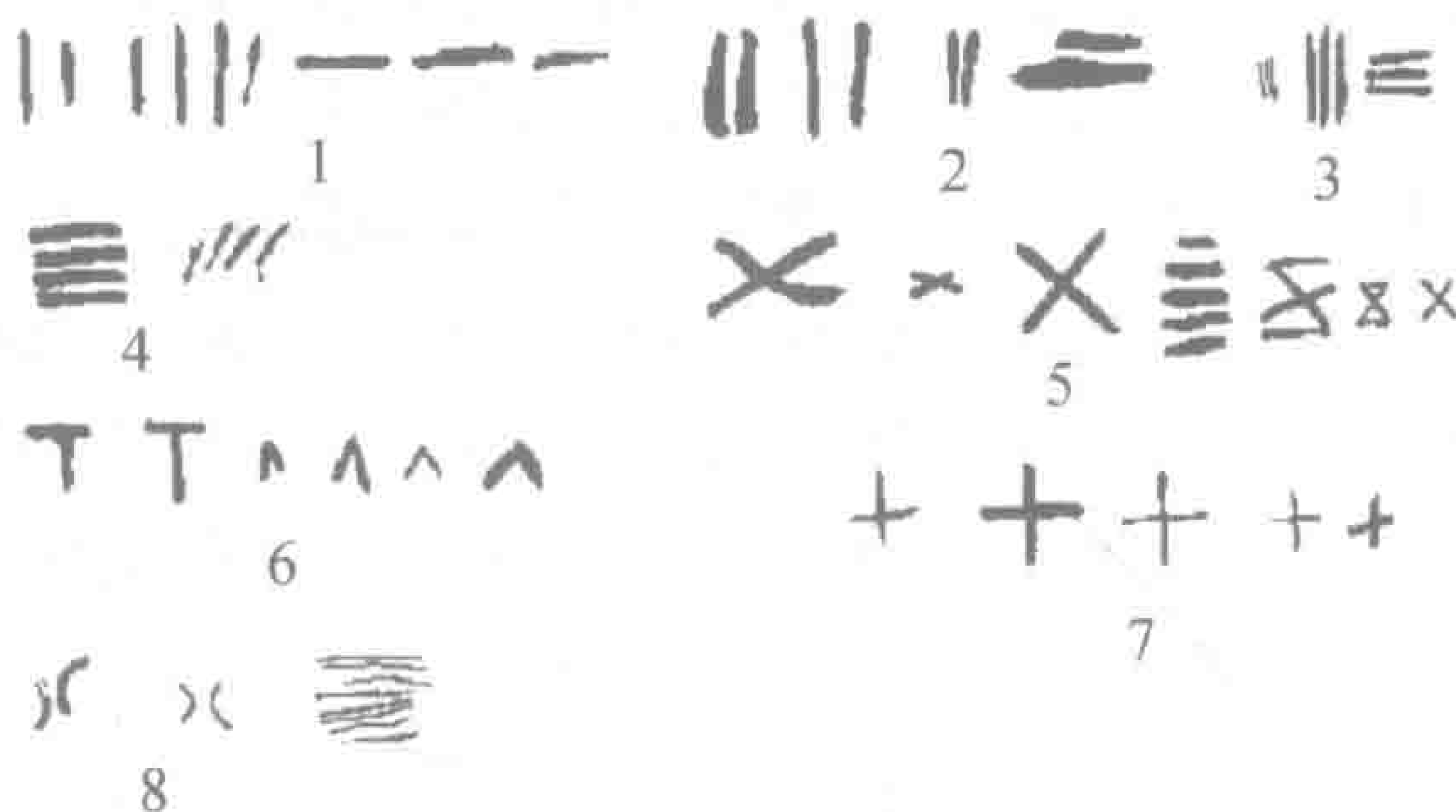
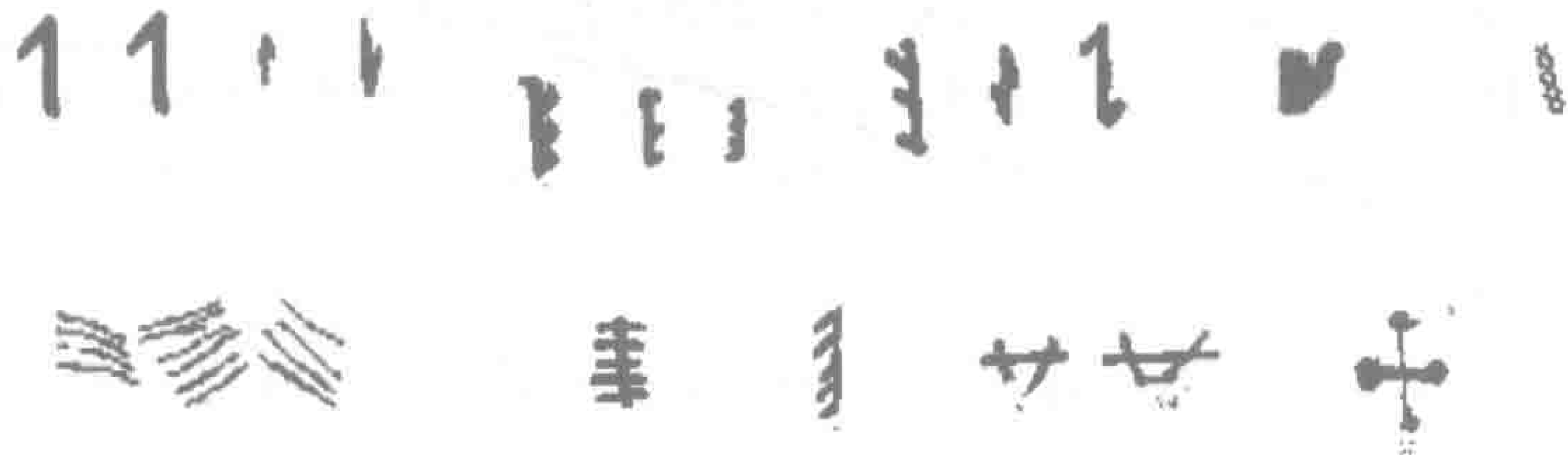


图 1-2-4　类似数字的陶符


图 1-2-5　可能与数字有关的陶符

---

① 饶宗颐，未有文字以前表示"方位"与"数理关系"的玉版——含山出土玉版小论，文物研究，1990，6：48 ~ 52。

② 图 1-2-4 和图 1-2-5 中的陶符，取自：（1）王蕴智，史前陶器符号的发现与汉字起源的探索，华夏考古，1994，3。（2）李学勤主编，中国古代文明与国家形成研究，第 127 ~ 184 页。

1979 年江苏海安县青墩新石器遗址发掘出土骨角栖和鹿角枝上有易卦刻文八个，如三五三三六四（艮下，乾上，遁）、六二三五三一（兑下，震上，归妹）。其所使用的数目字有二、三、四，是以后的数字卦考古材料中所没有的，这在易卦发展史上应属早期形式，[①]说明当时对数的认识已经达到很高的水平。这些数字卦是六爻，所用数字一至六都有，当时所能使用的数字应该已经比较大了，存在针对几十或到几百的较成形的记法是可能的。

（三）数与形的关系

数形关系是学者们关心的问题。《世本》将"隶首作数"与"垂作规矩准绳"分开叙述，看来形数的分野古已有之。人类在与自然的接触和实践中获得了对数不断深化的认识，也有来自认识形的需要的推动。反过来说，人们对数的认识也有助于揭示形的本质。上面的讨论中涉及的圆的几何本质、等分圆周或线段，打桩时定直触及三点共线原理、炊煮以三点支定炊具符合异线三点确定一面的原理等，都是形数结合的例子。为了编织物花纹、陶器饰纹的美观，古人也会考虑形数间的关系，正如杜石然等说的："新石器时代开始出现的竹篾编织物和丝麻织品，可能使人们对形和数之间的关系有了进一步的认识。因为织出的花纹和所包含的经纬线数目之间存在着一定的关系"[②]。形和数概念本来就存在于对各种具体事物的理解之中，人们正是在对具体事物的量和形的认识中，抽象出数和形的观念的。很早的时候，人们可能是根据经验得出的一些固定的搭配。因此，要说有意识的数形结合，可能是原始社会晚期的事。西安半坡出土的陶器残片（图 1-2-6）可以算是一个好的例子。它的图案的中间部分保存完整，这是一个顶点在下、每边 8 个孔的等边三角形，八排平行的孔，每一排比上一排孔数少一个。这确实是数和形的完美结合。类似情况也见于其他出土文物，例如，属于仰韶文化的陕西华县元君庙墓地出土的陶器上也有类似的图案，纹点数更多（图 1-2-7）。[③] 含山玉片上的方位和孔数，也有数形结合的意思。

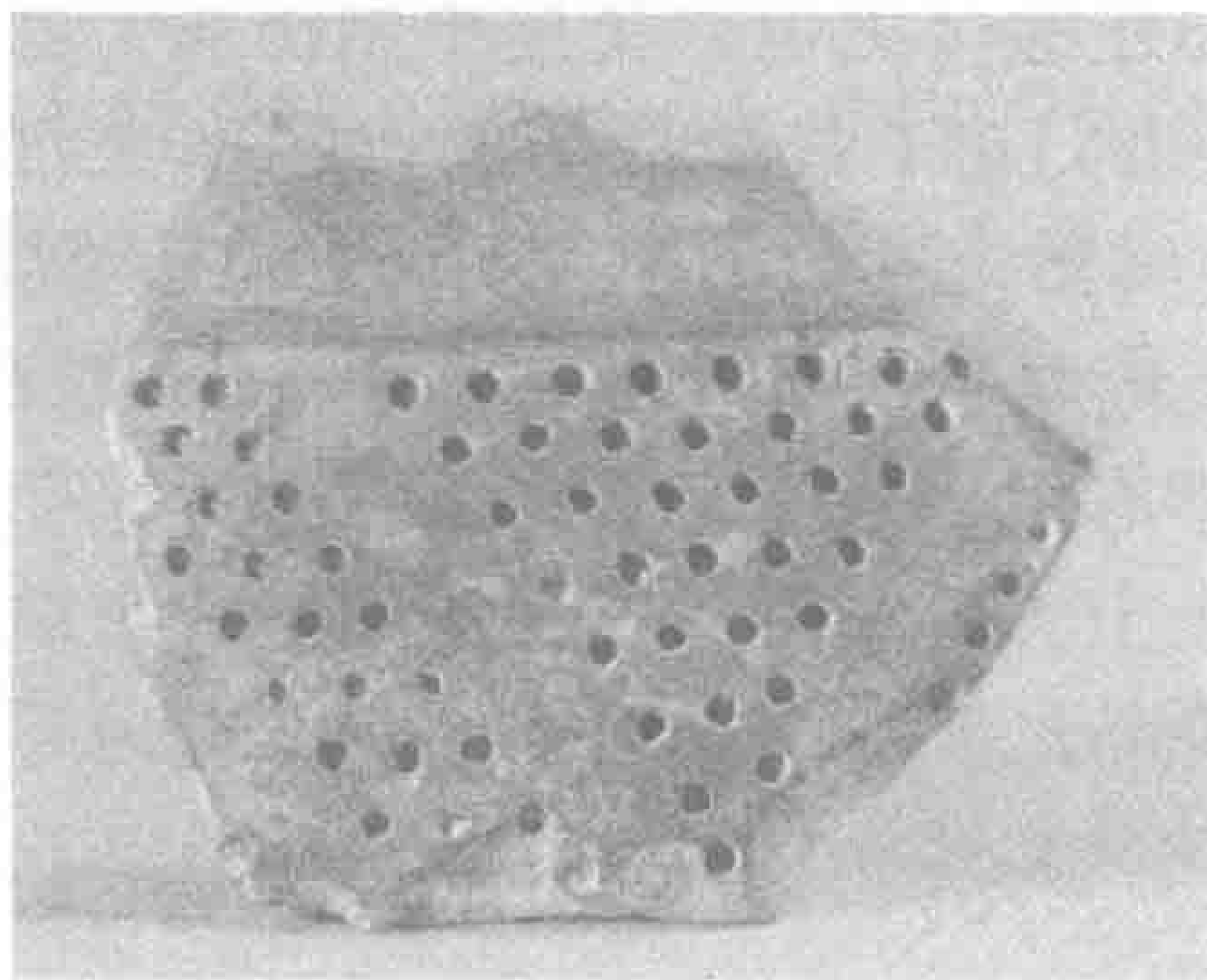


图 1-2-6　半坡带孔陶片



图 1-2-7　元君庙带纹点陶器

在有了抽象的数概念后，数形的结合可能会诱发或促进两方面的思维取向：一是实用的倾向，促使长度、面积、体积或容积的概念以及它们的计算方法等形成和成熟，或使器具和工艺品的造型更加规整美观；二是神秘数形观念的产生或加强，同时可以赋予其文化内涵。

---

① 张政烺．试释周初青铜器铭文中的易卦．考古学报，1980，4：403～415。

② 杜石然等，中国科学技术史稿，科学出版社，1985 年，第 26 页。

③ 北京大学历史系考古教研室，元君庙仰韶墓地，文物出版社，1983 年，图版一六、图版二三、图版四一。

前者推动着中国古代数学的发展，后者在数术中发挥作用，亦可能影响思想领域，甚或成为政治活动中的一种工具，当然也还可能反过来对数学产生某些影响。

第三节 传说中的数学人物

上面讨论的这些成绩是什么人取得的？问题虽然重要，但很难有确切的答案。不过，文献中多少有一些能反映这方面信息的材料，虽然不能作为信史，但也没有切实的证据证明其纯属虚妄。在远古传说中伏羲、黄帝、隶首、尧、舜、禹、倕等都是对数学有重要贡献的人物，实际上把他们的贡献看作一个时代或一个部落（或部落联盟）的创作则更为合理。

一 伏 羲

伏羲，又作伏牺、伏戏、庖牺、虙戏、宓牺等，这些名称上古音近，属于不同的写法。伏羲与女娲在《列子·黄帝》[①] 和古代石刻和画像（见图 1-1-12，1-1-13）中都是人面蛇身。有学者认为庖羲氏把猎得的动物烧熟了吃，故名。[②] 伏羲是古史传说比较早的帝王。很多发明被认为是他或他的氏族所做出的。其中，与数学有关的有结绳、书契、八卦、规矩、九九等，《管子·轻重》载管子的说法和刘徽《九章算术注序》都说伏羲作“九九”。这里的“九九”只是某些数学知识的萌芽，当然不会是后来的九九乘法表。

二 黄帝和隶首

（一）黄帝

黄帝又称轩辕，被视为中华民族的始祖。司马迁的《史记》记述中国历史，就从黄帝讲起。古史传说也将数学和科学技术的许多发明创造归功于黄帝或黄帝时代。《史记·五帝本纪》说黄帝“度四方”、“获宝鼎，迎日推策”，《史记·历书》说：“盖黄帝考定星历，建立五行，起消息，正闰余。”[③] 度四方应是测度土地划分各部族区域的意思，“迎日推策”和“考定星历……正闰余”都是天文历法，与数学有关。这些也都应该理解为那个时代的进步。东汉徐岳所著的《数术记遗》将万以上的十个大数单位和三种进位制度归结为黄帝的创造，唐中叶之后甚至将《九章算术》称为《黄帝九章》，这属于古人基于溯原思想的依托方式。

（二）隶首

传说隶首是黄帝的臣子。《世本》有隶首作数的记载，只是辑本不同而记载稍异，或引

---

① 杨伯峻，列子集释，中华书局，1991 年，第 83 ~ 84 页。

② 刘起釪，古史续辨，中国社会科学出版社，1997 年，第 51 页。

③ 西汉 · 司马迁，史记，中华书局，1959 年。本编凡引《史记》文字，均据此。

作“隶首作数”①，或引作“隶首作数”、“算，黄帝时隶首所作也”②，或引作“隶首作算数”③。宋衷注曰：“隶首，黄帝史也”。从后世的理解来看，对于数和算，前者为抽象的概念，后者为计数的工具，两者又互为表里。黄帝时有了抽象程度较高的数的概念，应是可以理解的。隶首作数或作算数的传说，不应理解为后世的制作算筹④，而是黄帝时代用竹、木等制成的长条形实物来计数的反映。当然，它和后来的算筹也有着不解之缘。

三　尧、舜、禹和倕

（一）尧

尧对天文历法有贡献。《尚书·尧典》说，帝尧“乃命羲、和，钦若昊天，历象日月星辰，敬授民时。……帝曰：‘咨，汝羲暨和，期三百有六旬有六日，以闰月定四时成岁。’允厘百工，庶绩咸熙。……协时月、正日，同律度量衡”⑤。在他的领导下不仅有羲氏与和氏等人观察天象制定历法，而且定下了一年有366日，有春夏秋冬四季，并在历法中使用了闰月。这些说法不一定符合当时的实际，但历法受到重视，并越来越进步，这是完全可能的。另外，由于部落联盟的发展，部落和人们间的交流也得到加强，不仅需要在一定程度上统一历法，也需要在一定程度上统一度量衡。这种进步也应该是与数学的进步相伴随的。

（二）舜和禹

舜和禹也同样被认为对数学有所贡献。《尚书·尧典》说：“帝曰：‘畴若予工？’佥曰：‘垂哉！’帝曰：‘俞！’咨垂：‘汝共工。’垂拜稽首，让于殳、斨暨伯與。帝曰：‘俞！往哉，汝谐’。”这里的“帝”是“舜”。舜听从众人的意见，命令垂和殳、斨、伯與一起负责各种工艺，而垂则是用规矩做工的巧匠。《史记·夏本纪》说，禹与益及后稷奉帝舜的命令进行水利工程和开发山川，用到了规矩准绳，并用杆子测量。这当然要用到数学知识。《周髀算经》卷上载商高曰：“故禹之所以治天下者，此数之所生也。”⑥ 这里特别强调矩，并认为数学从夏禹（治水中）产生。夏禹治水，学术界大都持肯定意见。这项工程浩大，用到规矩和准绳，是没有问题的。

（三）倕

在传说材料中，倕发明或使用规矩的故事更多。倕，又作“垂”或“睡”。王谟辑本

---

① 王谟辑《世本》，宋衷注、秦嘉谟等辑，世本八种，商务印书馆，1957年，第36、39页。

② 陈其荣增订、孙冯翼集录本《世本》，见：世本八种，商务印书馆，1957年，第3页。

③ 张澍辑，世本，见：世本八种，商务印书馆，1957年，第10页。

④ 钱宝琮主编，中国数学史，科学出版社，1964年。李俨钱宝琮科学史全集，第五卷，辽宁教育出版社，1998年。本编凡引此书的论述，均据此。

⑤ 顾颉刚、刘起釪，尚书校释译论，中华书局，2005年。《十三经注疏》内《尧典》和《舜典》两篇系伪《古文尚书》，现代学者则合二为一，认为就是《尚书》原本的《尧典》。本编凡引《尚书》的文字，均据此。

⑥ 刘钝、郭书春点校，西汉·周髀算经。郭书春、刘钝点校，算经十书，辽宁教育出版社，1998年。九章出版社，2000年。本书凡引《周髀算经》的文字，均据九章版。

《世本》说“垂作规矩准绳”。《尸子》卷下说：“古者倕为规矩准绳，使天下仿焉”①，则不仅肯定了倕的发明权，而且进行了推广。汉王符说：“圣人之制经以遗后世也，譬犹巧倕之为规矩准绳以遗后工也。昔倕之巧，目茂圆方，心定平直，又造规绳矩墨，以诲后人，试使奚仲、公班之徒，释此四度而效倕自制，必不能也。凡工妄匠执规秉矩，错准引绳，则巧同于倕也。是故倕以其心来制规矩，后工以规矩往合倕也。故度之工几于倕也。”② 这是把规矩的发明权归于倕，并认为奚仲（被传为是夏禹时候的人）、公输班（战国初期的人）也是善用规矩之人，但他们的境界比倕要低多了。倕的时代有三种说法：黄帝时人，尧时人，舜时人，而以尧时人的说法最多。

第四节　从原始社会晚期的社会结构看当时数学的发展

到公元前3500年左右进入黄帝时代以后，数学的发展可能进入了一个带有突破性的历史时期。民族学材料中反映的少数民族记数法，虽然会受先进文化的影响而在某些方面脱离了原始性，但不管是结绳还是刻木，都适应小规模的生产、生活和其他需要，并不需要处理涉及大规模事务的复杂问题。所以较小数量的记数法和浅易粗糙的数学方法已经足以应付。但华夏族进入黄帝时代以后，情况颇不相同。当时各大氏族、部落之间的联系和矛盾加剧，逐渐形成大范围的部落联合，氏族的机关已开始脱离人民大众，礼制开始萌芽，经济文化获得了进一步发展。先是黄帝和炎帝两大部落之间发生了阪泉之战，之后是黄帝和炎帝部落联合的华夏族集团，与东夷族集团之间进行了大规模的涿鹿之战。此后，黄河流域的部族经过撞击后重组、融合，势力更加强大起来。到了尧、舜、禹时代，黄河流域的华夏族南下发展，与三苗发生战争，在更为广大的范围内建立了新的秩序，经济文化进一步融合，王权逐渐形成。大规模的部落联合和大规模的战争，就要求有较先进的领导和管理机制、管理方法，其中，牵涉大批人力物力的调配，要考虑路途远近、时间安排、山川地势等一系列与数学密切相关的问题。因此，到原始社会晚期，数学也应受到推动而达到一定水平。

《周易·系辞》说：“庖牺氏没，神农氏作，斲木为耜……日中为市，致天下之民，聚天下之货，交易而退，各得其所。”这是说神农时代有一些耕作上的重大发明，使得当时农业有重大进步，并在日中有交易的市场。这时的交易应是简单的物物交换，当然这种交换中蕴含有一定的数量对应观念。神农氏时未必有专门的日中之市，但原始社会的物质交换还是存在的。当部落联合加强时，部落间彼此的交往也会增加，经济关系加强，不仅部落内部而且部落间的物质交换逐渐增多，这就使得人们对数量关系的认识愈加深刻，这里，不仅有计量物品多少的问题，也有物品间的当量关系，可能还会有度量标准的统一或换算问题。当然，这种平时的经济活动对数学的推进是有限的。随着情况的或繁或简而使得新产生的数学方法在一定程度上自生自灭。

但是，到了非常时期或处理部落大规模事务的时候，情况就不一样了。黄帝时代，就有作为群体防御的“城”的出现。河南郑州西山遗址发现了距今5300~4800年的仰韶晚期城

---

① 东周·尸佼，尸子，见：四部备要，中华书局，第19页。

② 东汉·王符，潜夫论。汪继培笺，诸子集成本，上海书店，1991年，第5页。其中“执”字原正文作方框“□”，今据汪继培笺引程本补。

址。城墙基槽挖至生土，基底宽达11米，墙体用方块板筑法分段逐层逐块夯筑，宽度逐级内收，以保证墙体的坚实稳固。筑城需要大量的人力物力，这就需要有效的数学方法解决人力和物力的调配。当部落进行大规模联合时，相互联系时路途远近与时间长短的关系，大规模行动对各部落所应出的人力、物力的摊派，部落联盟公共财物的管理等，都对数学提出了越来越高的要求。另外，部落联盟发展到晚期，贫富分化已趋严重，逐渐形成了带有强制性的“公共权力”，产生了具有某种意义上的行政机构，并有了一批从事管理公共事业的专门人员。[①] 这批人员由于专司其职，其知识传承有序，这就使得知识能得到更加有效的增进，原来新知识和新方法在存亡之间的状态转变成相对稳步的发展和进步。

《尚书·尧典》说，帝尧命羲、和二氏（羲仲、羲叔、和仲、和叔等）观察日月星辰位置、物候变化，把历法和时令问题解决了，就能够治理好百官，使各项事业兴盛起来，所谓“允厘百工，庶绩咸熙”。百官（“百工”）有的要负责人力或物力的统计，这就需要用到加法或减法，在某种情况下可能还要负责分配，这就涉及比例的观念。而且，到原始社会末年，社会经济的一体性趋势加强。《尧典》说“协时月、正日，同律度量衡”，大概除历法外，也有规范度量衡的尝试。度量衡的规范就牵涉不同制度的换算问题，这比“系辞”所说神农氏时的日中交易就要精确多了。可以说这是《九章算术》粟米章的数学思想之滥觞。当然，粟米章的内容无疑是后起的。再者，手工业的相对独立使得与技术有关的数学知识得以进步，而数学知识的进步也使得手工制品越来越精巧。

到原始社会晚期，由于社会结构的变化，数学的发展速度加快了。到了夏禹治水的时候，原始社会所积累的数学方法得到了充分的发挥，同时数学也在这种实践中成长。随着夏禹之后奴隶制国家的形成，原始社会所积累的数学知识由官府的专职人员（当然，其数学知识仍依附于其所从事的工作）保存传承，为后世数学的发展奠定了基础。

① 李学勤主编，中国古代文明与国家形成研究，云南人民出版社，1997年。本编凡引用此书论述，均据此。

第二章　数学形成一门学科
——夏、商、西周三代的数学

到原始社会末期的尧舜时代，华夏族部落联盟发展到它的最高阶段，生产力的发展和财富的积聚导致社会分化和阶级的出现，这就使得部落联盟的管理机关除原来的管理职能外，还出现了强制性的与民众相对立的“公共权力”。约在公元前21世纪禹主盟华夏部落联盟之后，其子启“僭取”部落联盟的最高职位，正式建立夏朝，成为中国历史上第一个奴隶制王朝。大约在公元前17世纪和公元前16世纪之交，商方国的首领汤起兵灭夏，建立了中国历史上第二个奴隶制王朝——商。商有比较完善的官吏体系负责管理农业、畜牧业、手工业等产业，重刑法，其军队也很庞大。商的物质、文化水平超越前代。商代曾多次迁都，从第18位君主盘庚迁殷（今河南安阳附近）以后一直定都于此。商统治者十分迷信，大小事都兴占卜，留下了大量占卜用的龟甲兽骨，其中大多有刻字，但长期湮灭无闻。自1899年王懿荣重新发现后，这些甲骨深刻地影响着100多年来的学术研究，也为我们研究商代的数学提供了资料。

约在公元前11世纪中叶，周武王灭商，建立了一个以周王室为中心、宗法等级制贯通全国的君主专制政体的国家周，史称西周。周王室与地方各方国政权的关系远较商朝密切；同时在伦理规范和文化思想上也形成了一套有效的制度。公元前771年周幽王被犬戎所杀，次年其子周平王从宗周迁都洛阳苟延残喘。史称东周。

从夏开始，青铜器的使用逐渐增多，到商代中期渐趋鼎盛。青铜器不仅用于宗教礼器和生活用器，也用作生产工具，提高了生产力。国家供养了一大批官吏，其中既有国家强制权力的执行者，也有一批管理财富的生产、聚散的官吏，还有专门从事宗教、文化事业的“巫史”。由于生产、生活等的需要和国家管理工作的要求，数学不断受到刺激而发展，并至西周时代形成一门学科。

第一节　十进位值制记数法的形成

一　甲骨文和金文中的数字

现在世界各地通用的记数法是十进位值制记数法。它最早是由中国人创立的。而殷商的甲骨文，是现在所能见到的关于十进制记数法的最早原始资料。在同时代或之后的金文中，也能看到这种记数法。

甲骨文主要是用龟甲和兽骨进行占卜的记录。殷人在修治好的甲骨上钻凿灼烤，根据裂纹（称为“兆”）的情况来判断所卜事情的吉凶祸福。他们在兆纹旁记下占卜的次数，这在甲骨学中称为兆序。兆序中的数目字极多，但数值不大。不过，甲骨文的正文中出现的数字也非常多，最大的数已达三万。图2-1-1是标有数字的甲骨。

图2-1-2是一到万的基本数字。从一到四都是积画而成，与算筹形状一样，是会意字。表示五至十的符号，一般认为是假借字，但具体细节上各家的观点有些不同。⊠的初形是㐅，表示交叉，借用为数词五。六字或以为其形∧像两壁架设一个极简单的棚舍之正视形，即古之“庐”字，“庐”和“六”古音相近，故借为数词六①。于省吾以为其形∧为“入”，借为数词“六”②。十形于横画中加一小竖，会切断横画之意，借为数词七，形成习惯后，原来表示切断义的词就改加“刀”旁以示区别。《说文解字》说，“)(”像分别相背之形，但因已有“北”字像两人相背之形，故姚孝遂以为其说不可信（《甲骨文字诂林》）。《甲骨文字典》云，九像曲勾之形，“勾”和“九”二字古同音，故借九为数词九。《甲骨文字诂林》引丁山说，其本是肘字，像臂节形。关于丨字，《甲骨文字典》说“丨为古代算筹，竖置一筹表示数量十，以与横置之算筹一区别，卜辞中十之五倍以上数字皆置倍数于十之下合书”。姚孝遂也认为丁山“纵一为丨，丨之成基于十进位之通术”之说“甚是”，“西周金文‘十’字始中部增笔作‘↓’形，晚周以后，始延伸成横画”（《甲骨文字诂林》）。这大概是对的。不过，《甲骨文字典》说“卜辞中十之五倍以上数字皆置倍数于十之下合书”，则太绝对了。实际上，卜辞中亦有把倍数数字置于十之上但不合书的。例如，《怀特氏等所

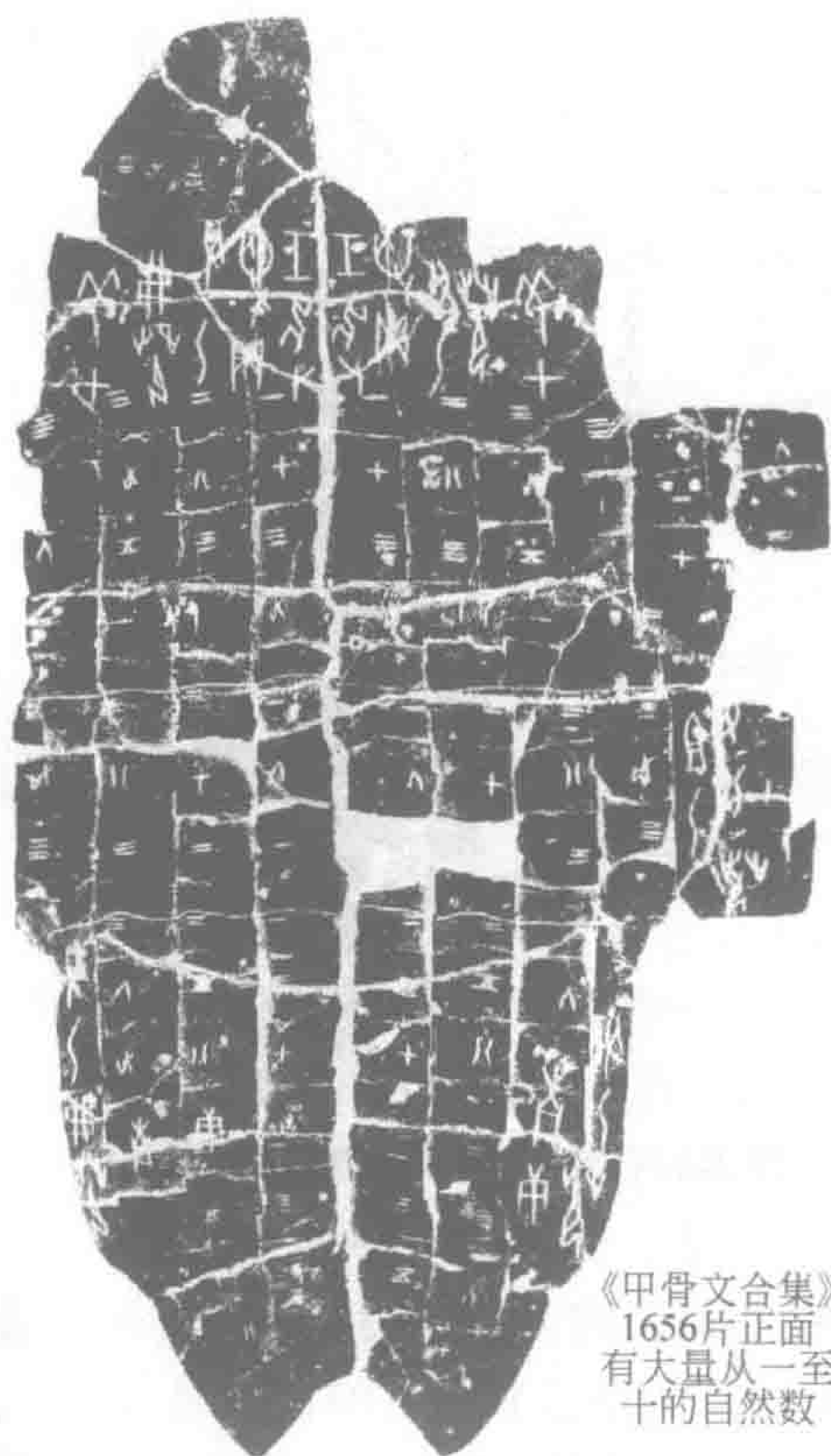


图2-1-1　甲骨文数字

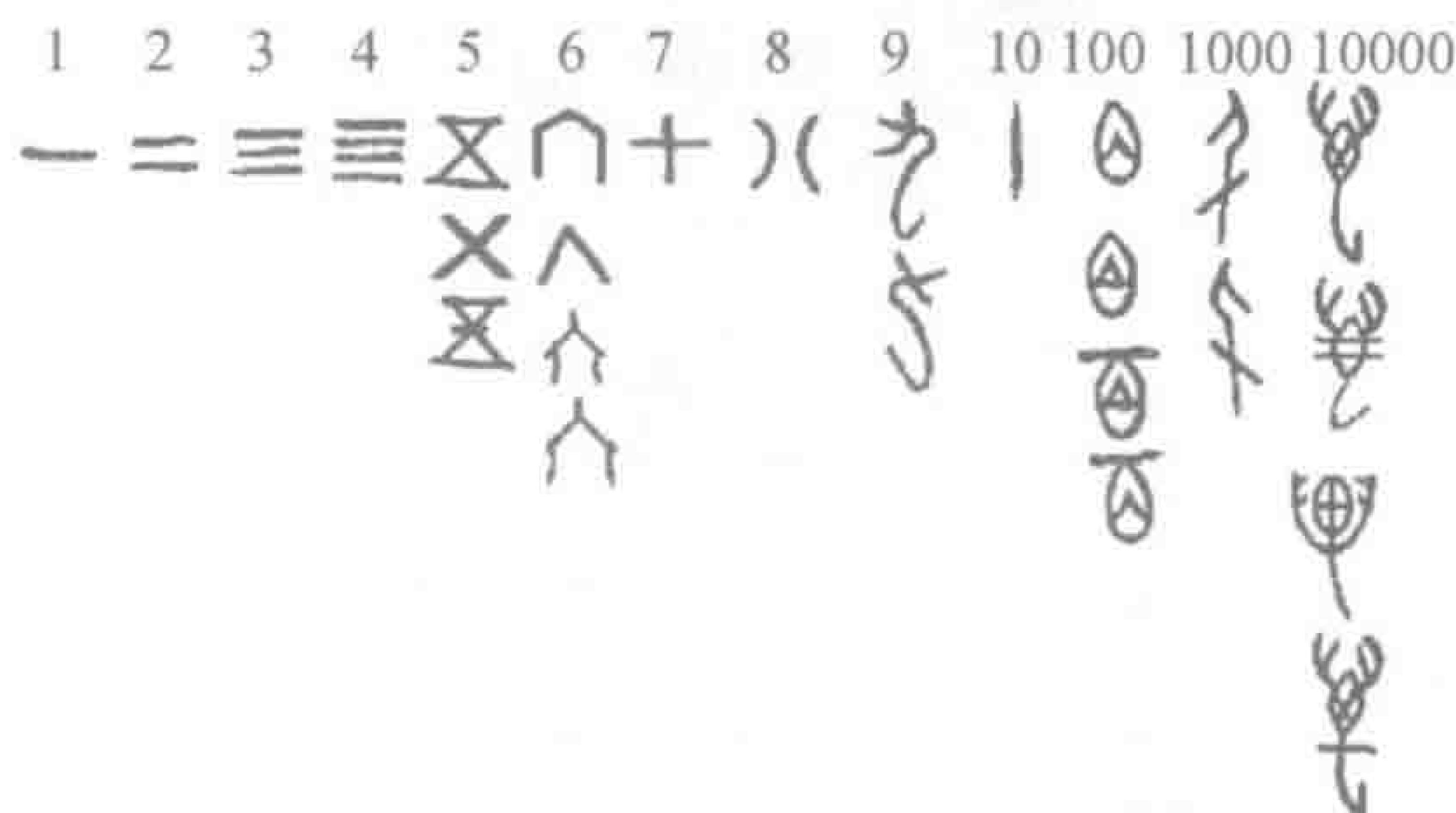


图2-1-2　甲骨文基本数字

① 徐中舒主编，甲骨文字典，四川辞书出版社，1995年。本编凡引此书，均据此。

② 见于省吾主编，甲骨文字诂林，中华书局，1996年。本编凡引此书，均据此。

藏甲骨集》142 片有、和三形，分别表示三十、五十和七十。① 又如，《甲骨文合集》第 6 册第 19152 片反面、17886 片、18882 片亦以此三形分别表示三十、五十、七十。②《甲骨文字典》认为“百”从一从白，一说（白）为古容器，复加指事符∧，遂为表示数目的百。《甲骨文字诂林》引姚孝遂说，“白之初形象人首，卜辞记数字以蠆表萬，以人表千，以白即人首表百，避免与白色之白、白（伯）长之混淆”。那么表示数目的是由表示人首的“白”分化出来的，至于其上部有没有“—”符，那是由于“一百”和“百”两者，一从数量考虑，一从单位考虑。以“一”加“人”上，借“人”声为千《甲骨文字典》。《甲骨文字诂林》云，本像蝎形，借为数词。大概除一、二、三、四以及十外，余者都是语言中先有其词，文字中初无其字，又不便以形象描绘，于是借音近之字以表之。惟万字或以为蝎足多之故才以“”表之，也未可知。

十、百、千、万的倍数，有两种记数方式：一种用合文（或称合书），一种不用合文，文字学家称为析书或分书。合文是把两个符号作为一个整体看待，即用一个符号来表示（图 2-1-3、图 2-1-4），析书则是用两个独立的符号来表示。从数学上看，析书有其独特的意义。



图 2-1-3　《甲骨文合集》37471 片
左下角三个符号为“八十又六”



图 2-1-4　《甲骨文合集》1531 背面

图 2-1-5（a）第一行的二十到四十是几个丨的积画，古人把它们连起来，大概是怕其中的笔画容易与别的字的笔画混淆。从五十到七十以及九十是表示十的符号与表示五、六、七、九的符号连结的写法，多数是表示十的数字在上方，只有个别例外。这几个数字明显属于合文。图 2-1-5（b）前二排表示从二百到九百的数字是百上书写相应的百的倍数数字，

① 姚孝遂主编，殷墟甲骨刻辞摹释总集，中华书局，1992 年。宋镇豪“甲骨文‘九十’合书例”已指出。

② 中国社会科学院历史研究所，甲骨文合集。本编凡引此书，均据此。

都是表示百的符号在下方。这几个也明显属于合文。图2-1-5（c）第一行表示从二千至五千以及三万的数字亦是合文，但表示千的倍数的数字符号都居于表示千的符号的下腰部。由于表示三万的符号中“≡”符也居于表示“万”符号的下足部，所以这种合文的表示法中符号间的位置安排是出于字形位置搭配上的方便，并无深意。

图2-1-5（a）~（c）下排表示二十、三十、五十、七十，一百、三百、五百、七百，二千、三千、五千、十千（一万）的数字，先写表示一到十的基数，然后写表示十、百、千的单位符号。每个数字的两个符号并不连笔，明显不是合文，属于析书。这种表示法的特点是数字的大小为十（或百、千、万）的若干倍，我们可以叫做“倍数表示法”。另外，还有一些不太好确定的中间类型。从思维的角度来说，认识一个比较大的数，总是以较小的数为基础，倍数表示法更加自然，甚至在语言中也总是以两个音节来表达，而在传世文献中则很少有合文数字。所以古人可能最先用的是倍数表示法，后来发展成合文。

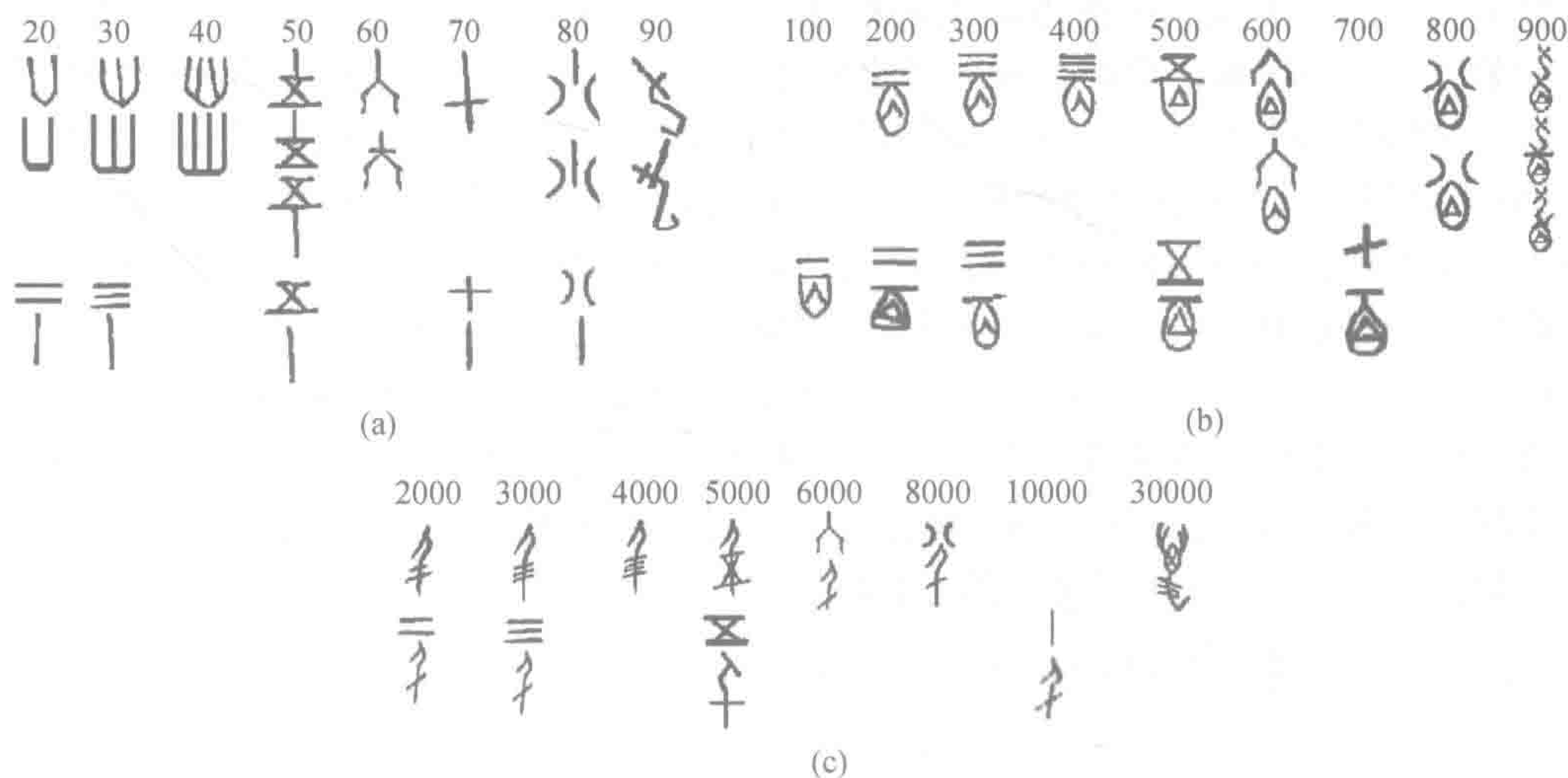


图2-1-5　十、百、千、万的倍数

对于整十、整百、整千、整万后所带的零数，甲骨文中有两种记法：一种是直接接着书写，一种是中间加㞢或㕛（即“有”或“又”字）符号。例如《甲骨文合集》第3册第7771片“八日辛亥允戈伐二千六百五十人……”，第4册第9334片“弜入二百二十五”，其中的数字如图2-1-6（a）（b）所示，都是各数字直接接着写的。又如第11册第33371片“丙戌卜，丁亥王陷擒，允擒三百㕛四十八”，其中数字作图2-1-6（c），10407片正面“……其……𡆥壬申允狩擒，获兕六、豕十㞢六、兔百㞢九十㞢九”，其中的数字“十㞢六”和“百㞢九十㞢九”如图2-1-6（d）（e）所示。还有整数位数字后接事物再接零数的。例如《甲骨文合集》第4册第14047片“固曰……娩嘉……百日㞢八”，其中的数“百日㞢八”如图2-1-6（f）所示。

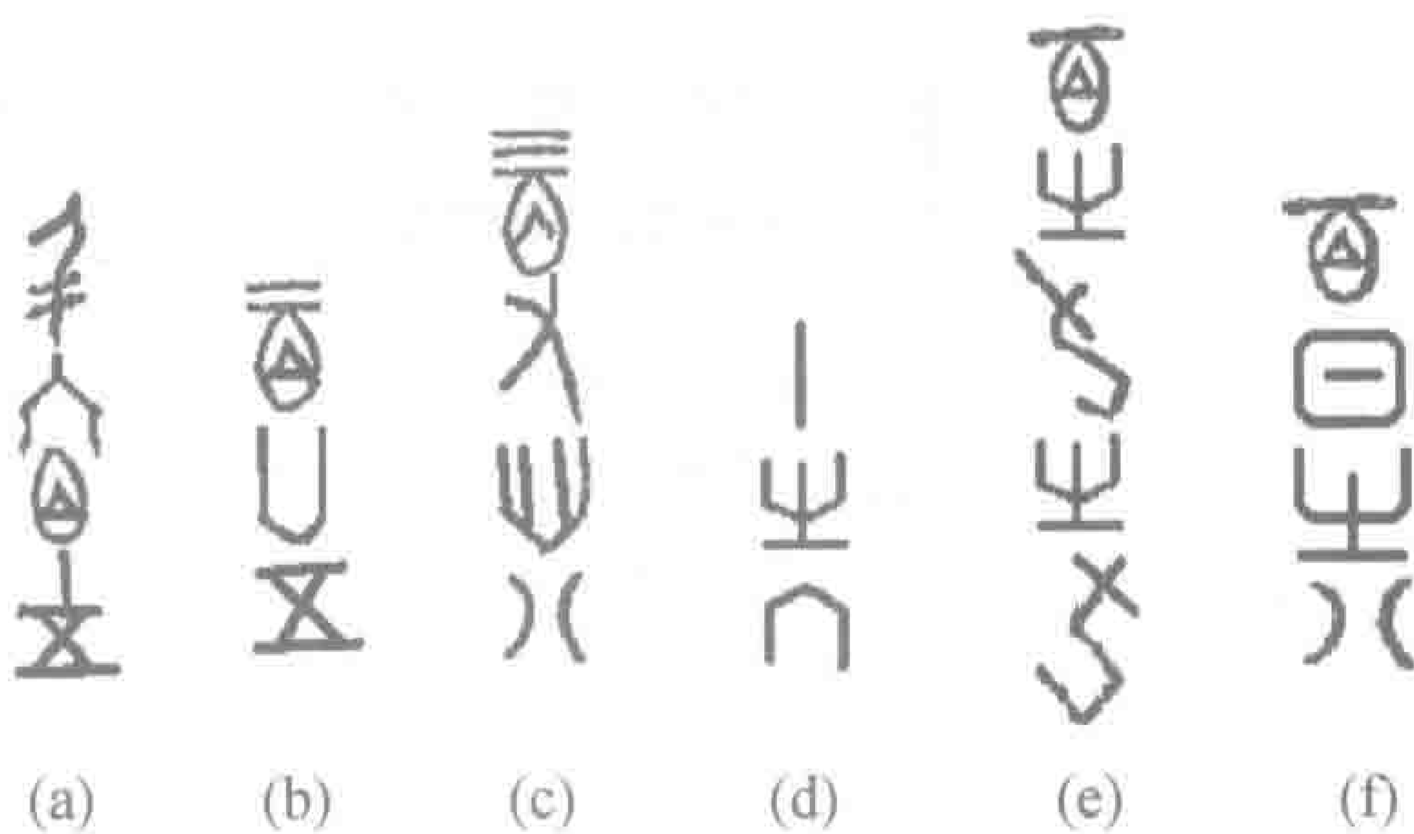


图2-1-6　甲骨文数字用例

甲骨中有十一、十二、十三、十四、十五、十六、十九分别作[甲骨文]、[甲骨文]、[甲骨文]、[甲骨文]、[甲骨文]、[甲骨文]、[甲骨文]，其中表示十五的[甲骨文]的在卜辞中还有非常多。这是甲骨文中表示十几时在丨之后直接刻写表示几的符号来表示的方式。当然，中间插入[甲骨文]或[甲骨文]的情况也很普遍。

从上面的讨论中可以看出，甲骨文已使用十进制记数法，从最小的基数一上升到十有一个专门的记号十（丨），从十上升到十个十又有专门的记号百（[甲骨文]），然后是千（[甲骨文]）和万（[甲骨文]）。利用从1～9的九个数码和十、百、千、万4个符号，可以表示十万以内的任意自然数。在甲骨文中，较多使用的合书一般被整个视为一个符号，如果这样看待，那么，甲骨文中（表示十万以内）主要采用的记数系统应有41个符号。那么，这距离十进位值制记数法还是挺远的。可是，合书表示法是后起的表示法，其先是倍数表示法；而且，甲骨文中也确有倍数表示法的不少用例，说明殷商时代也有仅使用13个符号的数字表示系统。再者，如果从合文的构成要素看，这些合文都由这13个符号组合而成，且各符号在合文中仍以其所表示的数字的身份出现，那么，从合文的角度看，甲骨文的记数法仍可以视为由那13个符号构成。如果我们把万、千、百、十都用一个位置来代替，那么不论是合书还是倍数表示法，都可以只利用1～9这九个数码就表示出10万以内的任意自然数。因此，甲骨文的记数法与十进位置值制记数法相去并不太远。我们可以称之为准十进位置值制记数法。

殷代使用十进制记数法在文物中也有反映。《中国历代度量衡考》著录三种商尺[①]（图2-1-7），都是一尺刻十寸，前两尺还每寸刻十分，这正与甲骨文数字采用十进制记数法相契合。现在已知的商代尺度还没有发现非十进制的，可见十进制在商代的绝对主体地位。

商周金文的记数方法与甲骨文相似，也用准十进位置值制记数法。但符号的形状有些变化。例如四除用☰外，也用[金文]、[金文]或[金文]等形来表示，其中[金文]已与后代的“四”很接近；五除☒外，也用[金文]或[金文]等形来表示；十除丨外，还有[金文]、[金文]等符号，万如图2-1-8（a）形所示。西周早期的小盂鼎铭文中有“万三千八十一”，如图2-1-8（b）。[②] 图中万字作[金文]，系残泐所致，其原形当与[金文]相近。1975年出土的一件西周铜簋上有数字“百又十又四”和“百又三十又五”，分别如图2-1-8（c）和（d）所示。[③]

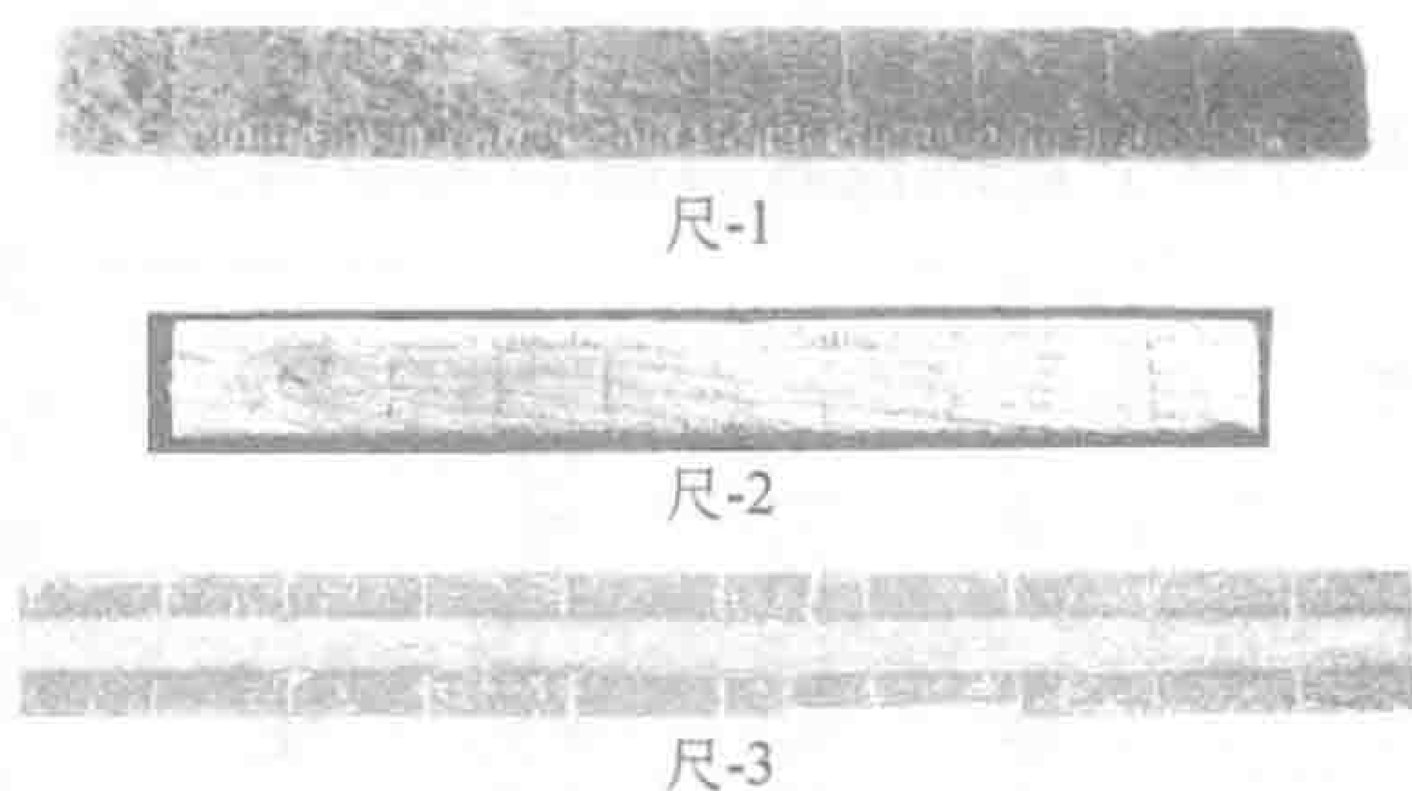


图2-1-7　三种商尺

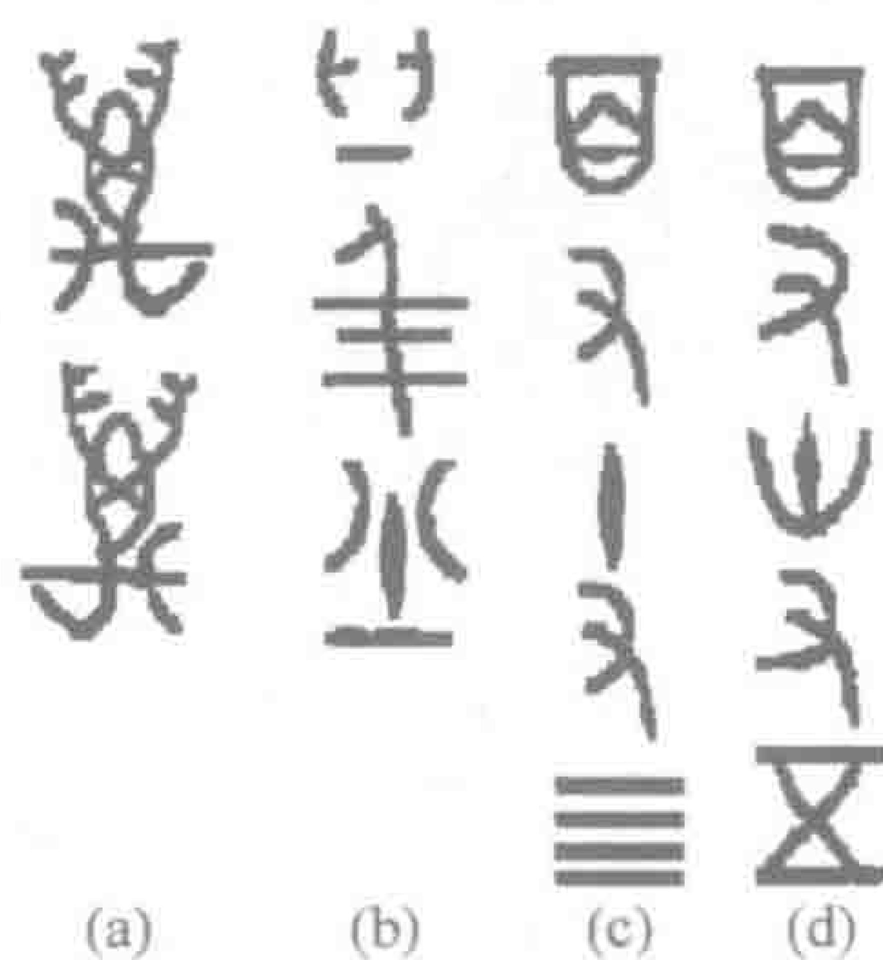


图2-1-8　金文数字用例

① 丘光明，中国历代度量衡考，科学出版社，1992年，第6，7页。

② 中国社会科学院考古研究所，殷周金文集成第5册，中华书局，1985年，第246～248页。郭沫若，两周金文辞大系图录考释，科学出版社，1957年。

③ 徐中舒主编，殷周金文集录，四川辞书出版社，1986年，第179，180页。

二 十进位值制记数法

（一）十进位值制记数法

在原始社会，各部落和氏族在各自的环境和条件以及习惯下形成多种多样的记数方法和记数系统，其中十进、二进、五进、十二进、六十进等大概都有过。当氏族社会发展到它的高级阶段形成部落联盟时，交流、形成共同力量和进行公共管理等方面的需要促进了一种共用的记数法的形成。《尚书·尧典》说帝舜时“协时月、正日，同律度量衡”，这种规范历日和度量衡的活动，也需要先在一定范围内规范记数法。而进入夏代奴隶制社会以后，各方国都要受夏王朝节制，对夏尽贡赋、征发等各种义务，这时统一历日、度量衡和记数法的需要就更加迫切，而统一的历日、度量衡和记数法的行用范围也会更加深广。对十进制的认知以身体的十指为基础，十分自然，大概是中国境内各部落采用较多的记数法。据张政烺研究，存在着一种“十进制氏族组织”，居统治地位的氏族对被统治氏族的原有血缘组织进行调整，使每一氏族都含有一百个壮丁，从氏族到宗族再到部族都成为一种十进制组织，这样每一部族便包含一百个氏族一万个壮丁，“这便是《尚书·尧典》上所说的‘平章百姓，百姓昭明’”①。较为广泛的社会基础使十进制成为统一记数法的首选。至迟到殷商的时候，它已经普遍使用，并发展到比较完善的程度，这从上面讨论的甲骨文和金文的准十进位值制记数法中可以看到充分的证据。

据《甲骨文字典》，商周时代也用简策来书写。甲骨文“册”作[illegible]、[illegible]诸形，正是简牍编成册的样子；“典”字作[illegible]、[illegible]，像双手持册的样子。在传世文献中用到的数字单位有比万更大的亿、兆、京等单位，也都是十进制，除偶尔用到廿、卅、卌、卌外，都不用合书。

《周髀算经》载公元前11世纪商高答周公问说“数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一”，这说明“九九”已为商高掌握。“九九”与先进的记数法是互为表里的。从甲骨金文看，其中所用的准十进位值制记数法到算筹的十进位值制记数法，在道理上是很容易过渡的②。我们认为算筹记数法的形成大约有三个阶段：第一阶段约在商代之前，竹、木或草茎等用于计算，但用途尚不固定，我们称为前算筹期；第二阶段是商末之前，某些长条形的竹、木棍（片）被赋予一项计数的专门功能，我们称为算筹形成期；第三阶段是商末至西周末年，逐渐形成后世算筹记数制度，可以称为算筹完善期。

（二）干支记数法

除十进制外，夏商西周时期还有一种记数法，就是干支法。它主要用来记时。干就是天干，即甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸十个符号；支是地支，即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥十二个符号。天干可能来源于原始社会曾把一年分为

---

① 张政烺，古代中国的十进制氏族组织，历史教学，1951，3（2）：13~19。4：14~17。

② 参考王青建，算筹记数思想，第七届国际中国科学史会议文集，大象出版社，1999年，第220~225页。

十个时节的十月太阳历，地支有人认为出于日月之会一年中有十二次①。干支搭配形成60种组合：

甲子，乙丑，丙寅，丁卯，戊辰，己巳，庚午，辛未，壬申，癸酉；甲戌，乙亥，丙子，丁丑，戊寅，己卯，庚辰，辛巳，壬午，癸未；甲申，乙酉，丙戌，丁亥，戊子，己丑，庚寅，辛卯，壬辰，癸巳；甲午，乙未，丙申，丁酉，戊戌，己亥，庚子，辛丑，壬寅，癸卯；甲辰，乙巳，丙午，丁未，戊申，己酉，庚戌，辛亥，壬子，癸丑；甲寅，乙卯，丙辰，丁巳，戊午，己未，庚申，辛酉，壬戌，癸亥。

这60个组合由于以“甲子”开头，又称为甲子。

干支记日法是一种序数记法，它与60进制有关，但不能算作60进制，从甲子到癸亥，再往下又回到甲子，确实只用60个符号。但是，干支的记日不出现某“干支”周期的某“干支”日，因此，它决算不上是60进制。

第二节　数学成为一门学科

从夏代进入阶级社会开始，国家的社会结构对数学提出了更高的要求从而刺激了数学的进步，另外，数学在管理者和世代相传的劳动者手中成长，从而具有更加稳定的传承纽带。数学知识的积累和社会的需要，使它终于在西周时期发展成为一门学科。

一　社会管理和工作的需要与数学的发展

原始社会晚期促进数学发展的诸多因素，在中国步入奴隶社会以后依然存在并得到了加强。夏、商、周三个王朝，国家机构日趋完善，所统辖的范围越来越广，以华夏族活动区域为中心的广大地区的民族冲突和融合逐渐形成越来越大的社会共同体，当然也就为数学提出了越来越高的要求。特别是大的工程和战争，必然要求其领导对人力、物力有较好的方法进行安排和调配，还须要解决一些技术问题。国家庞大和复杂的管理系统，既对管理人员提出较高的要求，也使他们能脱离机械的体力劳动，有时间和精力完备制度，提高管理能力。同时，手工业的分工也越来越细，经过经验的不断总结和技艺的世代相传，生产力和工艺水平就会越来越高。这些都会对数学的发展产生刺激作用。

《史记·夏本纪》云，禹与益和后稷奉帝舜之令治水，“命诸侯百姓兴人徒以傅土，行山表木，定高山大川。……左准绳，右规矩，载四时，以开九州，通九道。”这里提到要用规矩准绳等工具来测定高山大川的高低宽窄、地势迂直，确立地域的疆界，开通道路。这就需要对工程量大小、用工人数、工具和粮食等进行估算，其中肯定会用到测望、加减乃至某种形式的乘除和比例分配方法等数学知识。这为三代的数学提供了基础。

夏商西周不仅要继续兴建水利工程，也要筑王城，夏、商都多次迁都，每次都要大兴土木，西周建立不久就兴修洛邑。各诸侯卿大夫也都要修筑城邑。夏商周时候的国家机构要管理大量的财物，了解国家的资源，在遇到大型工程和重大事情时，要合理调配大量人力物力。同时，国家又拥有一大批世代相传的工匠，他们在制作产品时，都形成越来越完备的规

① 陈久金，天干十日考，陈久金集，黑龙江教育出版社，1993年，第59~75页。

程。这些既应用了已有的数学知识，也促进了数学的发展。

《孟子·滕文公上》说："夏后氏五十而贡，殷人七十而助，周人百亩而彻。其实皆什一也。……贡者，校数岁之中以为之常。"注云："民耕五十亩，贡上五亩；耕七十亩者，以七亩助公家；耕百亩者，彻取十亩以为赋。虽异名而多少同，故曰'什一'也。"① 夏王朝向王畿地区的平民，按耕种 50 亩收取 5 亩的实物收获征税。这和商代 70 亩收 7 亩、周 100 亩收 10 亩的税率相等，都是十分之一的税率。这里需要用比例算法。《国语·周语上》说"《夏书》有之曰：'关石、和钧，王府则有'"注云："言征赋调钧，则王之府藏常有也。"② 如是则夏代已开始征收商业税了。在商代，平民的商品交换已经很活跃，商王室和贵族的用品也有很多是通过商品交换得到的。商代已经有贝币作为流通的一般等价物。③ 商品交换的发展必然刺激相关计算方法的进步。上面我们看到甲骨文已经有大到三万的数和准十进位值制记数法，这就为商品交换时准确快捷的计算提供了基础。

战争与数学也有密切关系。三代有些战争规模很大。例如，《吕氏春秋·简选》提到商汤伐夏桀用 70 辆军车，6000 人的敢死队④，加上其他的部队，人数会多得多。甲骨文中有一些用兵人数的记载，多数为 3000～5000。最多的一次是 13000 人，由武丁妻子的封邑提供 3000 人，王室的军队提供 10000 人。⑤《史记·周本纪》载周武王伐纣，"率戎车三百乘，虎贲三千人，甲士四万五千人"，并有"诸侯兵会者车四千乘"。而据说商纣王则匆匆集结了七十万人的军队。《逸周书·世俘》说，周灭商以后，"武王遂征四方，凡憝国九十有九国，馘魔亿有万七千七百七十有九，俘人三亿万有二百三十"，"凡武王俘商，得旧宝玉万四千，佩玉亿有八万"⑥。不管这些数字是否有传抄错误，它们的获得必定用到统计方法，其中必定有整数运算问题。而且发动这些大规模的战争，肯定需要在战前对双方实力有合适的估计，对地势、路程、人数、粮草、器械等有合理的安排。这就必然用到很多相关的数学方法。

商代的手工业有青铜、建筑、陶瓷、纺织等各种行业⑦，其中肯定要用到很多数学方法。例如，建筑、木作中用到长宽、体积的计算等多种几何方法，青铜铸造、酿造业中都有原料的配伍问题，需要比例算法，等等。《考工记》中记录关于各种手工业的规范，涉及大量的数学知识，其中很多可能来源于前代。

历法的制定有两项重要工作，一是观测，二是计算，都离不开数学。观测天象除用肉眼外，还借助工具。立杆测影大概在原始社会时代就已经有了。商代已经采用圭表法测日影。⑧《考工记》"正朝夕"的测影法用到平分和垂直的概念。其源当远在《考工记》形成前。商高的测望方法也与历法的制定有关系。

能在一定程度上反映西周制度的《周礼》特别强调数量化和负担均平。其"天官冢宰"

---

① 战国·孟轲，孟子，十三经注疏，中华书局，1981 年。

② 上海师范大学古籍整理研究所校点，国语，上海古籍出版社，1990 年，第 121 页。

③ 杨升南，商代经济史，贵州人民出版社，1992 年，第 590～607 页。

④ 秦·吕不韦，吕氏春秋，《诸子集成》本，上海书店，1991 年，第 79 页。

⑤ 杨升南，商代经济史，贵州人民出版社，1992 年，第 48～49 页。

⑥ 黄怀信、张懋镕、田旭东，逸周书汇校集注，上海古籍出版社，1995 年。原文"万"前衍"十"，今从章太炎校。"凡武王俘商，得旧宝玉万四千，佩玉亿有八万"原文作"凡武王俘商旧玉亿有百万"，今从王念孙校。

⑦ 杨升南，商代经济史，贵州人民出版社，1992 年。

⑧ 商玉芝，殷商历法研究，中国社会科学出版社，1987 年，第 87 页。

说大宰要“均万民”，就是要让万民的负担相等；小宰辅佐大宰执用九贡九赋九式，合理调配国家的财用，并采用定期会计的方法管理财物的出入。司会“掌邦之六典八法八则之贰，以逆邦国都鄙官府之治。……掌国之官府郊野县都之百物财用，凡在书契版图者之贰，以逆群吏之治，而听其会计。以参互考日成，以月要考月成，以岁会考岁成，以周知四国之治，以诏王及冢宰废置”①。对国家财货的出入，每日每月每年都要有会计并登记在册，并以之作为考核官吏的成绩。《周礼》甚至还主张用统计方法对医生、酒官、卜筮之类的官员进行考核。因此，周代的贵族子弟所受的教育中就有数学一门。

二　数学进入教学科目

相传虞夏时代就有学校。《礼记 · 王制》说：“有虞氏养国老于上庠，养庶老于下庠；夏后氏养国老于东序，养庶老于西序；殷人养国老于右学，养庶老于左学；周人养国老于东胶，养庶老于虞庠。虞庠在国之西郊。”② 原始社会末期已有礼制的萌芽，《礼记》说有虞氏时养国老、庶老于庠（学校），大概是这个原因。有人认为甲骨文有贵族子弟去上学，预卜其返回时会不会遇到下雨的记录。③ 朱启新认为商代的教育已有大学（“右学”）和小学（“左学”），学习的内容有可能有数，主要是计数。④ 西周时代的学校，有大学（称为学宫、辟雍）和小学，这在金文中有证据。⑤

《周礼 · 地官司徒》说：

> 保氏掌谏王恶，而养国子以道，乃教之六艺。一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数。

九数是数学的九个门类。它在西周具体是哪九个门类，已不可考。《礼记 · 内则》说周朝教育贵族子弟“六年，教之数与方名。九年，教之数日。十年，出就外傅，居宿于外，学书计”。“数日”就是六十甲子和朔望月。数学成为贵族子弟的一项必修课程，这意味着，它已经成为一门学科。

西周时代的数学内容，基于十进位值制记数法，以算筹为计算工具，大约含有郑众所列“九数”中方田、粟米、衰分、商功、旁要的部分方法。由于难以找到西周时代使用分数的确切证据，所以我们估计，这些方法基本限于整数运算的范围内，除比例外，基本上不涉及分数概念。

三　商高及其所掌握的数学知识

夏商西周三代最集中的数学史料在《周髀算经》中的商高答周公问中。

商高，又作殷高⑥，生平不详。赵爽说他是“周时贤大夫，善算者也”，系由商入周的

---

① 周 · 周礼，十三经注疏，中华书局，1981 年。本编凡引《周礼》文字，均据此。

② 西汉 · 戴圣，礼记，十三经注疏，中华书局，1981 年。本编凡引《礼记》文字，均据此。

③ 杨宽，西周史，上海人民出版社，1999 年，第 665 页。

④ 朱启新，商代的六艺，文史知识，1989，4（总第 94 期）：43 ~ 48。

⑤ 杨宽，西周史，上海人民出版社，1999 年，第 665 ~ 667 页。

⑥ 唐 · 房玄龄等，晋书 · 天文志，中华书局，1974 年，第 278 页。

数学家。他是记载比较确切的中国古代最早的数学家。

《周髀算经》卷上云：

昔者周公问于商高曰："窃闻乎大夫善数也，请问古者包牺立周天历度，夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？"商高曰："数之法出于圆方。圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。故折矩以为句广三，股脩四，径隅五。既方其外，半之一矩。环而共盘，得成三、四、五。两矩共长二十有五，是谓积矩。故禹之所以治天下者，此数之所生也。"

"勾股圆方图。"

"此方圆之法。万物周事而圆方用焉，大匠造制而规矩设焉，或毁方而为圆，或破圆而为方。方中为圆者谓之圆方，圆中为方者谓之方圆也。"

周公曰："大哉言数！请问用矩之道？"商高曰："平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方。方属地，圆属天，天圆地方。方数为典，以方出圆。笠以写天。天青黑，地黄赤。天数之为笠也，青黑为表，丹黄为里，以象天地之位。是故知地者智，知天者圣。智出于句，句出于矩。夫矩之于数，其裁制万物，唯所为耳。"周公曰："善哉！"

赵爽在下文陈子答荣方问后注"此非《周髀》之本文"，可见《周髀》本文原来只是商高答周公问这一段。周公从天地这样的巨物不能直接量度，向商高询问数据如何得来。商高特别强调方圆的意义和矩的重要性。他认为矩来源于"九九"的方法。矩上有刻度，故能与数值相应，所以说"矩出于九九八十一"。矩是画方的工具，说"方出于矩"很好理解。但圆如何能出于方呢？赵爽说："体方则度影正，形圆则审实难。盖方者有常而圆者多变。故当制法而理之。"赵所说虽指天体而言，但确实道出了人们处理问题的方式：圆和曲的图形，其周长和面积都要化为方和直来考虑才好量度。所谓"圆出于方"，从计量角度来说，就是要把圆化为方才好处理，所以商高又说"方数为典，以方出圆"，指出方之数是根本，要用方来得到圆的数量。文中的勾股圆方图，有圆方图、方圆图是关于圆与方内接、外切的关系图，应该是商高的。

商高给出了勾三、股四、弦五的勾股定理之特例。① 据此可以利用比例关系求远处物体的距离，也可以定直角。用这种方法定直角，在立八尺之表测影时，可能比用矩具有优势。

商高在回答周公如何用矩时说"平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远"，概述了用矩测高望远的方法。钱宝琮在《中国数学史》中认为"平矩以正绳"是把一矩的一条直角边与铅垂线（绳）相靠着，那么矩的另一边必定处在水平位置上，这样就能够确定水平线，如图 2-2-1 所示。"偃矩以望高"是用矩测量物体的高度，如图 2-2-2 所示，把矩的一边 AC 水平放着，另一边 CE 竖直向上，从 A 处望高处物体 P，视线与矩的边 CE 交于 B，从矩上可以读出 CB，利用 AQ 的长度就可以算出 P 的高度 PQ 等于 $(BC \cdot AQ) \div AC$。"覆矩以测深"是把矩倒过来测望深度，如图 2-2-3 所示，也是由 AC、BC、AQ 算出 PQ，方法同上。"卧矩以知远"，钱宝琮说得不太具体："将曲尺 ACE 全部放在水平面上，也可用来

① 商高回答中"数之法出于圆方"节"既方之外，半其一矩，环而共盘，得成三、四、五。两矩共长二十有五，是谓积矩"甚为晦涩难解。陈良佐、程贞一、李国伟、李继闵、曲安京等认为该节含有勾股定理的一般性证明，很有启发性。但由于缺环尚难弥补，我们不采此说。

测量两目的物间的平距离。”冯立昇也有类似的说法。但他提出两种具体的方法。一种是如图 2-2-2 所示，矩 ACE 与水平面平行，从 AC、BC 和 AQ 可以算出两个目的物 P、Q 的距离，其公式仍如上。另一种是由 PQ、BC、AC 求目的物 P 与人的距离 AQ，其公式为 $AQ=(AC\cdot PQ)\div BC$。[①] 冯立昇的前一种方法可能更符合钱宝琮的原意。但后一种似乎更符合原文。商高利用矩来变通，可以测得远处物体的高、深、广、远。

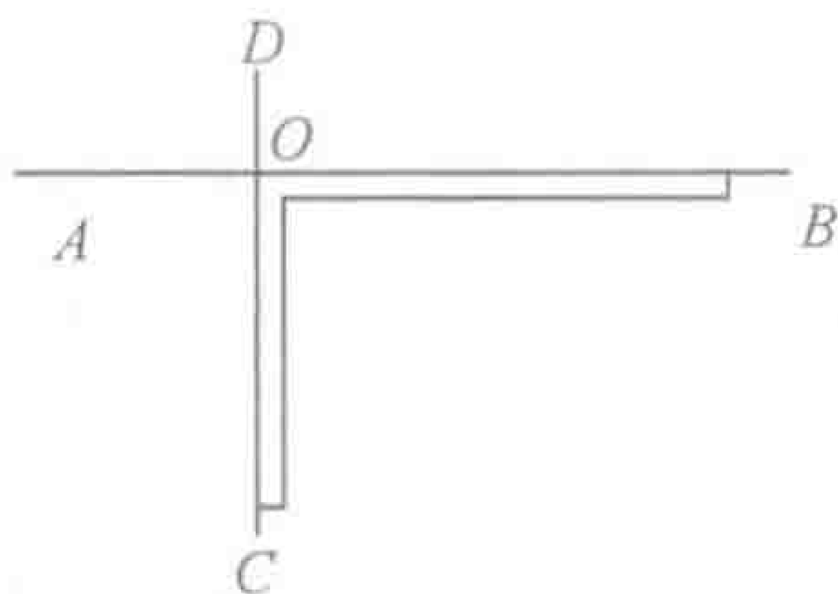


图 2-2-1　平矩以正绳

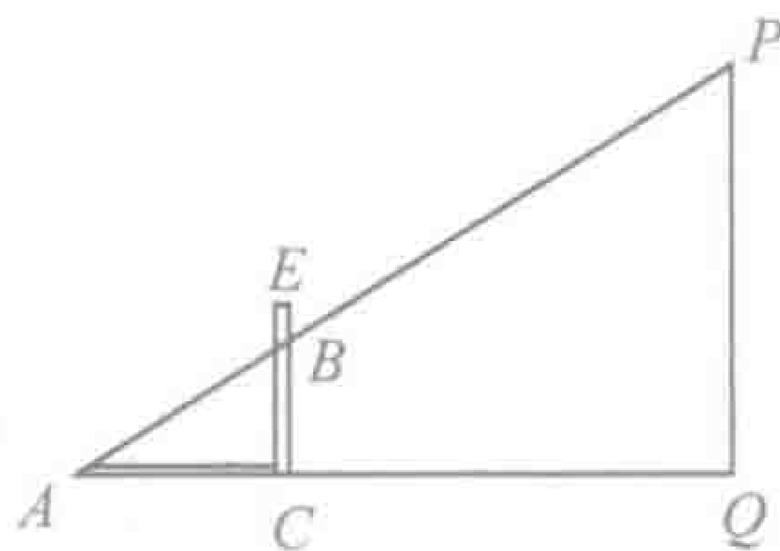


图 2-2-2　偃矩以望高

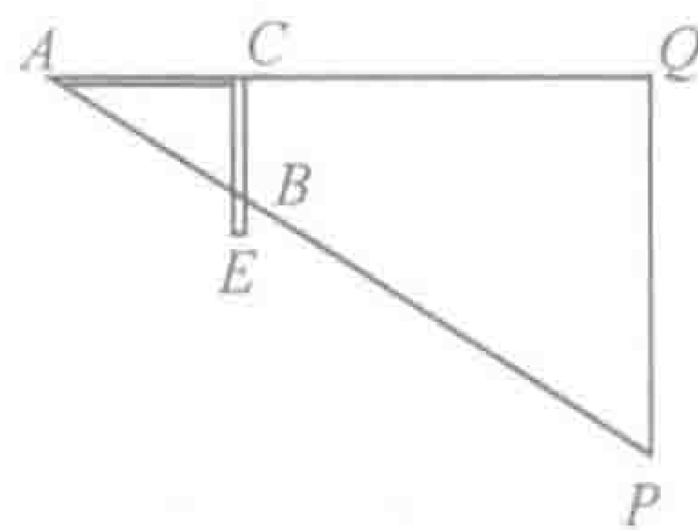


图 2-2-3　覆矩以测深

但是，上述方法实际是需要很多前提的。例如，PQ 要和 AQ 垂直，AQ（或 PQ）的长度必须是已知的。这些并不是在很多情况下都具有条件的，甚至可能多数情况下都不具备。因此，这些方法有很大的局限性，当然有时可以把一些另外的情况近似地化为上述类型。正是因为其局限性，所以，后世才发展出重差术来解决这类远距离测量问题。而上述方法的原始性和粗略性，也反映出其时代的久远。

上面的方法用到了相似直角三角形的对应边成比例的原理和乘除法。前者说明中国古代对这一原理的认识源远流长，后者与商高时代已知九九相符合。西周初年营建洛邑，需要测量，同时征伐战争也较多，测定军事目标的距离也是需要的，而且往往只能远距离估测。商高提出上述测量方法是不奇怪的。

上面的讨论说明，十进位值制记数法和九九乘法表为整数四则运算提供了基础，夏商西周的社会制度、管理工作等为数学提出了要求，也为数学的发展提供了便利，《周髀》所载商高答周公问，说明当时数学既获得了广泛的应用，也有了长足的发展，而西周时期数学成为教育贵族弟子的一个科目，则标志着数学在西周时期形成了一个学科。钱宝琮有一个没有展开论述的观点说，西周时代“‘数’作为六艺之一，开始形成一个学科。用算筹来记数和四则运算很可能在西周已经开始了”。以上的讨论证明钱宝琮的这一估价是十分正确的。

① 冯立昇，中国古代测量学史，内蒙古大学出版社，1995 年，第 26～27 页。

第二编　中国传统数学框架的确立

——春秋至东汉中期的数学

第三章　春秋至汉代数学概论

第一节　春秋战国秦汉数学与社会及文化背景

一　春秋战国数学与社会及文化背景

西周末年，政治腐败，社会动荡，幽王为犬戎所杀。公元前770年，周平王东迁洛邑，史称东周。从此历史逐渐进入了一个社会大变动、思想大解放的时代——春秋战国时代。从此时到公元前476年，史称春秋。[①] 其后至秦于公元前221年统一中国，史称战国。

春秋时期，随着周天子权力的削弱，政治结构和经济关系也渐渐发生了一些变化。各国虽普遍实行井田制，但出于征收赋役的需要，分散的农户被组织起来，纳入村社组织之中，再派官吏去管理。后来，郡县制下的乡里制就由此演化而来。井田制下，田地分公田和私田，公田由农户合作，收成归国家或诸侯贵族；私田则分给各户耕种，收成归农户自己。随着社会经济的变化，农民对公田的积极性越来越弱，这就影响到国家的收入。于是各国改革税收方式。齐桓公时实行按亩征收租税，鲁在宣公十五年（公元前594年）宣布实行“初税亩”，长期以来的力役租税制被履亩而税的实物租税制所取代。井田外，还有不划井的零散土地，如《周礼》所说，在国都附近有官田、士田、贾田、赏田等。官田、贾田是分给官府小吏、工商的禄田，士田是授予家属的份田。春秋时期，卿大夫之间已可转移土地，但还没有形成土地自由买卖的局面。手工业和商业在民间有一定发展，但仍以官营为主。春秋时期人们已使用铁器，较好地掌握了生铁的冶铸技术。与当时的政治、经济等社会变革和技术革新相适应，春秋时期的学术和文化也发生了变化。原来“学在官府”的局面被打破，私学兴起，出现了一个“士”阶层。“士”是当时的知识分子，有各自的学术观点、理想抱负，服务于不同的社会集团。同时，“士”之间也进行争辩，促进了学术的发展。

从春秋战国之交起，社会变革加剧。铁器在手工业和农业中的使用越来越多，大大促进了生产力的发展。井田制瓦解，各国将土地分为小块，每户农民受田百亩，还有小块宅圃之地。农民虽只有田地的使用权，但国家只按产量征收一定比例的税，农民多收可多得，这提高了农民的生产积极性。这就使得土地的准确测量成为必要，从而促进面积计算方法的进步，同时，比例换算方法也会受到刺激而发展。战国时代，社会上还出现了具有独立经济地位的手工业者和商人阶层。其中，有些人发财致富。农业、手工业和商业的发展，使得战国时期的经济在战争间隙中颇为繁荣。这些都直接刺激相关数学方法的发展，并使之得到推广。面对分裂和争夺的局面，诸侯为了生存和发展，变法成为一时主题，人才也成为统治者所笼络的对象；同时各阶层人的地位和身份不再由世袭和出身决定，而是可以通过个人努力和社会汰选而升黜。而

---

① 春秋与战国的分界有不同的意见，本书从郭沫若说。

且，分裂局面使得统治者对思想的严格束缚成为不可能，有利于个人思想的自由发展，这样在战国时代呈现了“百家争鸣”的局面，各种思想和学术相互影响，彼此交流，既促进了学术的发展，也提高了思维的逻辑水平。这就为数学的发展提供了有利的环境。

现存早期文献对诸子百家的评述，几乎都以政治经济、伦理道德或人生的观点为依据，数学家无法厕身于诸子百家。不过，西周贵族子弟所受教育的六艺中有“数”（数学）一门，在从周王到诸侯国的各个职能部门中都有一批负责统计、计算的人员，春秋战国时期的士，或多或少地与西周时期的官学有渊源关系，他们也多受过包括数学在内的六艺的教育，西周时期的数学在这时得到了继承。由于社会经济情况日益复杂，对数学计算也提出了更高的要求，加之百家争鸣对思想的推动，数学获得更大的发展。

根据对零星的资料和社会的经济、政治、法律、文化及思想等背景的考察，我们发现，春秋战国时期的数学和整个先秦学术一样，呈现一种多样化的趋势。更重要的是，思想界的百家争鸣，大大提高了人们的抽象思维能力。这种能力不仅大大高于夏商西周三代，也高于后来的两汉。这对数学的发展和形态产生了深刻的影响。一方面，变法的刺激和要求使数学在精确性和应用范围上有了巨大进步①，抽象思维的发展提高了数学的一般性，从而形成了郑众注《周礼》所指的“九数”格局，它构成了西汉《九章算术》的主要方法和基本框架。另一方面，百家争鸣、思想自由的环境孕育了理论数学的倾向：讲究以类似定义的形式来界定概念的内涵或外延，讨论了一些数学哲学层面上的问题，形成了一些较为抽象的理论化的数学知识，同时也为数学推理提供了逻辑范式。这种倾向所达到的高度由于史料不足而无法论定，但它也渗透到计算传统的数学——九数中，这就能解释为什么九数远远超出了经验总结的高度。下面将对这两个方面分别进行论述。

二 秦汉数学与社会及文化背景

公元前221年，秦始皇灭齐，结束了诸侯长期割据的局面，完成了兼并六国的统一大业，建立了中国历史上第一个多民族的中央集权的大帝国。不久，秦朝的残暴统治引发了中国历史上第一次农民大起义，推翻了秦朝。刘邦于公元前206年称帝，建立汉朝，史称西汉。公元8年，王莽篡汉，建立新朝。公元23年，农民起义推翻了新朝。公元25年，皇族刘秀称帝，史称东汉。2世纪末，黄巾农民起义摧毁了东汉，不久进入三国，中国历史翻开了新的一页。

秦汉数学以《九章算术》为代表。《九章算术》最后在西汉以我们现在所看到的形式编纂完成，有其深刻的经济、思想和文化背景。

秦始皇统一中国，废分封，设郡县，以法为教，以吏为师，运用政权的力量将地主经济的土地所有制和意识形态推向全国。秦朝的土地所有制有国有、私有两类形式。私有土地又分为皇家所有、地主所有、自耕农所有三种。《史记·秦始皇本纪》云“使黔首自实田”②，承认土地私有权，极大地提高了农民的生产积极性。“车同轨，书同文”，秦始皇统一文字，统一货币，统一度量衡，修建驰道，兴修水利，修筑堤防，整治长城，采取了一系列有利于

① 邹大海，睡虎秦简与先秦数学，考古，2005，6：57～65。

② 西汉·司马迁，史记，中华书局，1959年。本编凡引用《史记》的文字，均据此。

社会进步、促进生产力和科学技术发展的措施。数学的发展除计算田亩面积、粮食产量、土木工程、商业贸易、军旅等方面需求的影响外，严格的考核和商法制度本身就要求计算的准确。然而，秦朝实行严刑苛法，对人民无比残暴的经济剥削和政治统治，窒息了春秋战国时期百家争鸣的思想自由的局面，加之焚书坑儒等毁灭文化的暴行，将秦朝的统一及其举措对科学技术进步带来的正面影响抵消殆尽，甚至超过其正面因素。

汉承秦制，西汉政府一方面继续实行秦朝的经济政治制度和巩固统一的措施；另一方面，“破觚而为圜”，废除秦朝的严刑苛法，采取轻徭薄赋，与民休养生息，鼓励农桑的政策。同时，铁制农具的普遍使用和其他先进技术的推广，大大提高了农业、手工业和其他行业的生产力，使社会经济得到迅速恢复和发展。《史记·平准书》说，至文、景二帝（公元前179～前141）时，“民人给家足，都鄙廪庾尽满，而府库余财。京师之钱累百钜万，贯朽而不可校。太仓之粟陈陈相因，充溢露积于外，腐败不可食”。这里虽不免有溢美之词，但西汉建立70余年，出现中国历史上第一个盛世“文景之治”，社会生产力超过战国的水平，这是不容置疑的。科学技术的各个领域都有长足的进步。长沙马王堆、荆州张家山等地汉初墓葬中出土的各种精美的漆器、丝织物以及地图和许多涉及天文、医学、数学等方面的简牍，都反映出此时的科学技术水平不低于甚或超过战国时期。西汉初期的数学、天文、医药学等可以形诸文字的基础学科的成就，首先表现在对因秦火及随后的秦末战乱而散佚的先秦成果或著作的搜集、整理与继承，然后才是创新与发展。

汉武帝（公元前140～前87年在位）时，在文景之治的基础上，经济继续发展。同时开拓西南，北击匈奴，解除边患，经营西域，将中原的先进农耕技术和其他科学技术传播到边远地区，这加速了各民族的融合。并开辟“丝绸之路”，使中华的先进文化和科学技术远达境外，促进了中外交流。当然，汉武帝的不断用兵，及统治阶级的挥霍浪费，造成《汉书·昭帝纪》所说“海内虚耗，户口减半”的境况①，社会动荡不安。武帝晚年有所察觉，去世前两年发布轮台诏令，采取了一些缓和社会矛盾的措施。此后的昭、宣二帝（公元前86～前49）进一步采取提倡农耕、“轻徭薄赋”、“休养生息”的政策，社会生产力得到恢复、发展，史称“昭宣中兴”。汉代的许多重大技术成就，如赵过的代田法，炒铁技术的成熟，等等，都发生在武、昭、宣时代。现传《九章算术》的最后编定，也是宣帝时的耿寿昌完成的。

汉初的政治思想统治比较宽松，除墨家外，在秦朝遭到镇压的儒家等诸子学说都有不同程度的流行。西汉前期的统治者笃信以道家统摄儒、法而形成的黄老之学，主张无为而治，而知识分子信奉荀派儒学的很多。解决实际问题，更成为数学著作的首要目的。《九章算术》主要是张苍在荀派儒学的思想指导下编纂的。

汉武帝时，思想界发生了一件影响中国2000余年的大事，这就是汉武帝接受董仲舒等的建议，“废黜百家，独尊儒术”，改变了汉初70年黄老之学在思想界的统治地位，儒学成为官方的统治思想。此时的儒学已不完全同于战国时的儒家，它是以战国儒家为主，融合先秦的宗教天道观和阴阳、五行学说，吸收法、道诸家的思想而建立的思想体系。思想界的这一变化对中国传统数学和整个科学技术的发展产生了深刻的影响。

东汉政权一方面减轻租税徭役，释放奴婢，采取了一些有利于生产力的恢复与发展的措

① 东汉·班固，汉书，中华书局，1962年。本编凡引用《汉书》的文字，均据此。

施；另一方面，大力提倡谶纬迷信，并经由汉章帝主持的白虎观会议（公元79），使谶纬更加符合经学体系，又使经学更加谶纬化，从而将董仲舒的儒学体系进一步神化。桓谭（公元前40～公元32）、王充（公元27～约97）等对谶纬迷信进行了严厉的批评。据《后汉书·桓谭冯衍列传》，桓谭认为谶纬都是"奇怪虚诞之事"，不足凭信。[1] 王充强调元气自然，《论衡·谈天》认为"天地，含气之自然也"[2]，否定"天人感应"，以天文、物理、生物、医学、冶金等自然科学和技术知识为基础，批评了谶纬神学的荒诞不经之说。在认识论上，王充《论衡·薄葬》提出"实知"和"效验"的观点，否定"神怪之知"，肯定"类推"之知。他明确提出并阐述了论证的概念，指出："事莫明于有效，论莫定于有证。"他关于论证的思想和方法，对后世对科学命题的论证影响极大。然而王充的思想被重视，是东汉末年以后的事情。在当时却是隐没不彰。总的说来，自新莽至东汉末年以前，思想界笼罩着谶纬的迷雾。数学的建树不大，不能不说与此有关。

两汉学者的抽象思维能力低于先秦诸子，正如冯友兰指出的，汉朝人的"抽象思维的能力是比较低的，汉朝哲学家们的根本观念都还是具体思维的。例如，董仲舒所说的'天'好像是一个活灵活现的玉皇大帝，坐在凌霄宝殿上发号施令，赏善罚恶。王充批判董仲舒所说的'天'的时候，也是用具体思维的话。"董仲舒、刘歆、扬雄、王充、张衡等人所说的气，是一种有形有象的东西，是可以感觉的，只要人们有足够灵敏的感觉和工具。"这些观念都是图画式的，都是属于具体思维的。"[3] 数学是抽象的学问。《九章算术》中能判定为先秦完成的部分，大都抽象出具有普适性的算法，而西汉补充的部分，如解勾股形问题，则都是具体问题的演算细草。不言而喻，这种情况与西汉学者的抽象思维能力低于战国时代是密切相关的。

第二节　算法式数学在春秋战国时期达到高峰[4]

一　整数四则运算在春秋时期的普及

十进位值制记数法、算筹和九九乘法表是整数四则运算的基础。

（一）算筹及其记数法

算筹又称为算（或筭）、筹、策（或筴）、筹算、筹策（筴）、算子，是中国古代数学家长期使用的计算工具。它是一种长条形物品，一般用竹或木制作；也有用金属、象牙或骨制的。用算筹按一定的方式摆放可以很方便地表示任意的自然数，并用以进行四则运算。算筹表示1～9等九个自然数有纵式和横式两种：

数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

---

① 南朝宋·范晔，后汉书，中华书局，1965年。本编凡引《后汉书》，均据此。

② 东汉·王充，论衡《论衡简注》。上海人民出版社，1975年。本编凡引《论衡》，均据此。

③ 冯友兰，中国哲学史新编第4册，人民出版社，1986年，第44页。

④ 本节主要根据邹大海《中国数学的兴起与先秦数学》第91－217页删补修改而成。

算筹记数，采用纵横交错的十进位值制记数法。早期的数学启蒙读物没有流传到现在，目前能看到的具体表示法的最早记载在《孙子算经》中："凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当。"又说："六不积，五不只。"① 后者在《夏侯阳算经》中为："满六已上，五在上方，六不积算，五不单张。"②（图 3-2-1）通过算筹的纵横交错，以及用空位表示○，用算筹符号，可以表示任意的自然数。例如，597031 用算筹表示就是≣ ⫼ ⊥ ≡|。用算筹还可以表示分数、负数、一元方程、线性方程组和多元高次方程组。

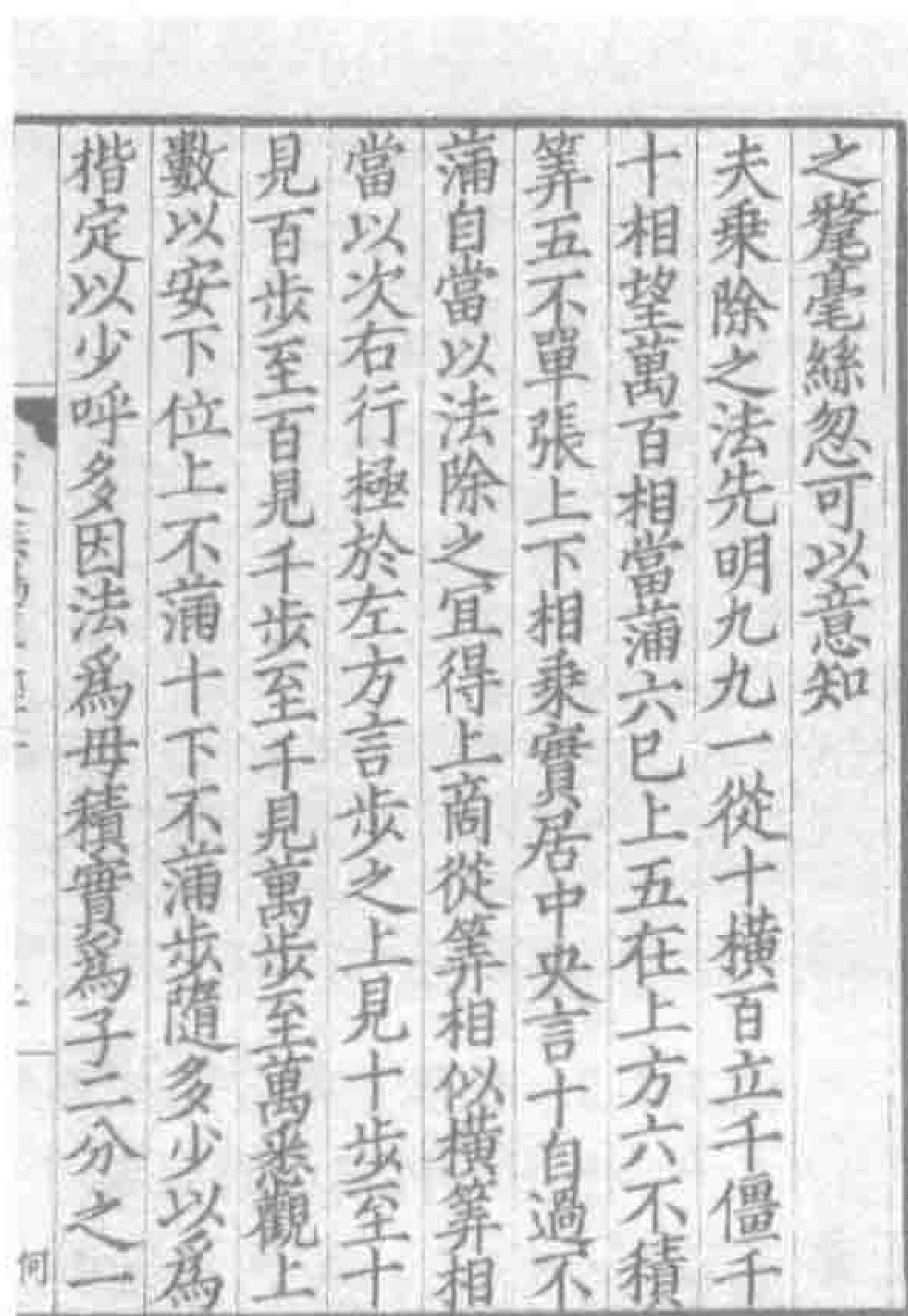

之氂毫絲忽可以意知
夫乘除之法先明九九一從十横百立千僵千
十相望萬百相當滿六已上五在上方六不積
筭五不單張上下相乘實居中央言十自過不
滿自當以法除之宜得上商從筭相似横筭相
當以次右行極於左方言步之上見十步至十
見百步至百見千步至千見萬步至萬悉觀上
數以安下位上不滿十下不滿步隨多少以爲
揩定以少呼多因法爲母積實爲子二分之一

图 3-2-1 《夏侯阳算经》关于算筹记数法的记载

算筹在原始人用长条形竹、木小棍（片）、草茎等记数的基础上逐渐发展而来，约在西周和春秋之交形成了上面的定制，而到春秋战国时期成为普遍的计算工具。

《左传》襄公三十年三月（公元前 543）记载的一则字谜说一个老人的年纪的旬日数为一个亥字。"史赵曰：亥有二首六身，下二如身，是其日数也。士文伯曰：然则二万六千六百有六旬也。"③ 亥字拆开来为═⊤⊥⊤，即 26660 日。以算筹的摆放为字谜，说明当时这种制度已经流传很广。其产生当然会早得多。

考古工作中已发现战国时期的竹算筹。1954 年 6 月长沙市左家公山战国木椁墓中出土了筹签。筹签"四十根，长短一致，每根长一二公分。"④（图 3-2-2）当时的报告没有指明其功用。后来严敦杰确定为算筹。⑤ 20 世纪 60 年代初，在湖南常德德山战国楚墓中发掘出"竹筹"一束，计 10 余根，呈黑色，已大部腐朽，每根长 13 厘米，宽 0.7 厘米，厚 0.3 厘米。⑥ 当是算筹。⑦ 战国以后的算筹有更多的发现（图 3-2-3）。特别是在西汉早期文景帝时期的墓中的两段筹上还发现三块红色的漆斑，对照刘徽说"正算赤，负算黑，否则以邪正为异"的记载，这些算筹可能被用于进行正负数的计算。⑧

（二）九九表

"九九"到春秋时期已经流传很广。《韩诗外传》说，春秋齐桓公设庭燎招贤，"期年而士不至。于是东野有以'九九'见者，桓公使戏之曰：'九九足以见乎？'鄙人曰：……夫

① 晋（?）· 孙子算经，郭书春点校。郭书春、刘钝点校，算经十书。台北：九章出版社，2001 年。

② 南北朝 · 夏侯阳，夏侯阳算经，郭书春点校。郭书春、刘钝点校，算经十书，辽宁教育出版社，1998 年。九章出版社，2001 年。此段文字系原本《夏侯阳算经》的。

③ 东周 · 左丘明，春秋左传，十三经注疏。中华书局，1982 年。本编凡引用《春秋左传》文字，如不另加说明，均据此。

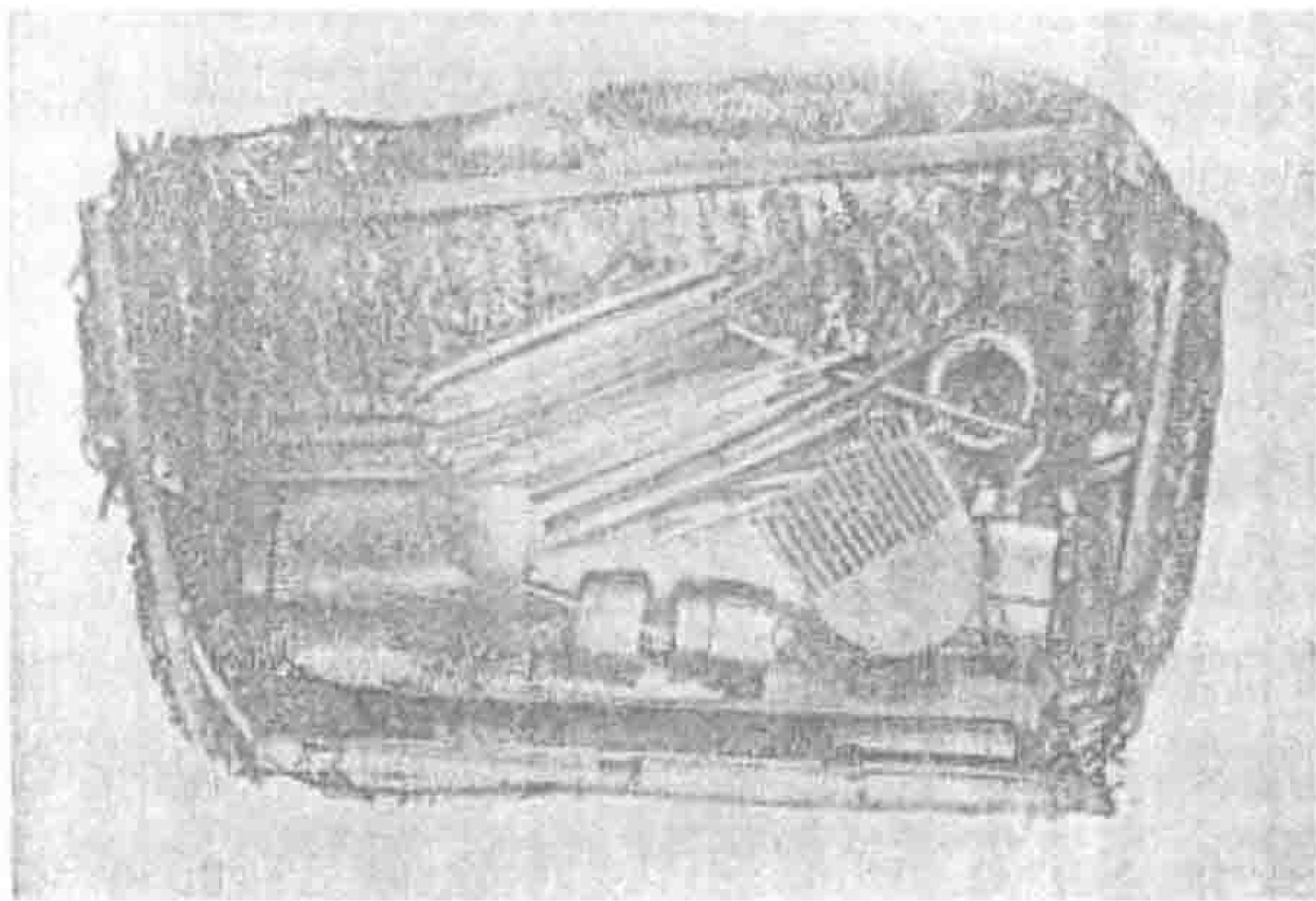
④ 湖南省文物管理委员会，长沙左家公山的战国木椁墓，文物参考资料，1954，12。

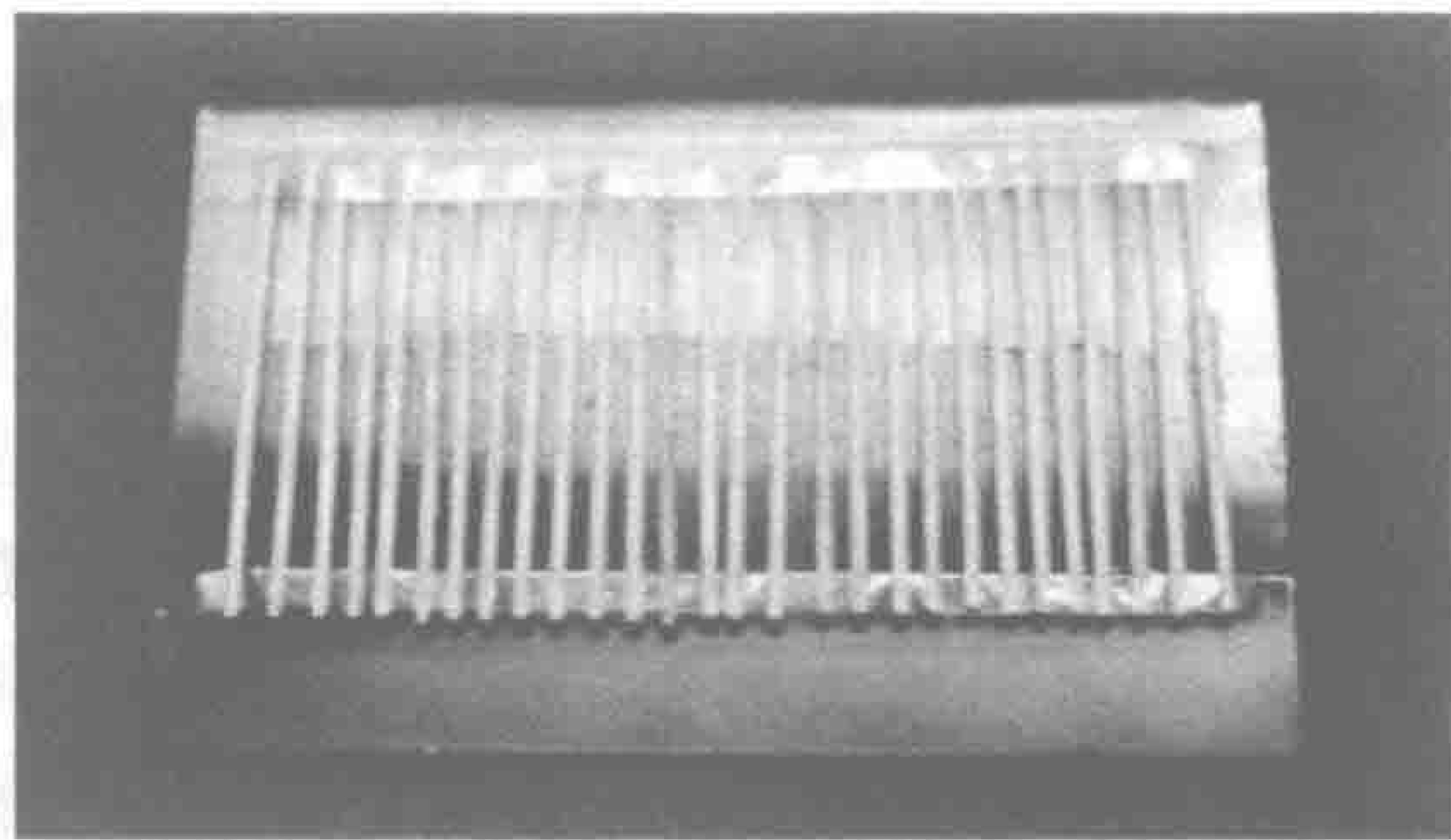
⑤ 严敦杰，中国古代数学的成就，中华全国科学技术普及协会，1956 年，第 3 页。

⑥ 湖南省博物馆，湖南常德德山楚墓发掘报告，考古，1963，9：461～473 转 479 页。

⑦ 张沛，出土算筹考略，文博，1996，4：53～59。

⑧ 杜石然，算筹探源，中国历史博物馆馆刊，1989，12：28～36。


图 3-2-2　长沙左家公山战国楚墓出土的竹笈中有算筹


图 3-2-3　西汉旬阳算筹

‘九九’薄能耳，而［君］犹礼之，况贤于九九者乎！……桓公曰：‘善。’乃固礼之。期月，四方之士相导而至矣。”① 《说苑》、《汉书 · 梅福传》、《三国志》裴松之注等也有类似记载。钱宝琮说：“在春秋时期里，结合生产实践的乘除算法已经是家喻户晓不足为奇的常识。”②

先秦文献多次引用“九九表”③，出土的九九表竹简很多，以 2002 年湖南湘西里耶古井出土的九九表木牍最早、最为完整，见图版。

（三）四则运算

十进位值制、算筹计数、九九乘法表的普及，意味着整数四则运算在当时也已普及。《周易 · 系辞》云：

> 天一，地二，天三，地四，天五，地六，天七，地八，天九，地十。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十，凡天地之数，五十有五。此所以成变化而行鬼神也。……乾之策，二百一十有六。坤之策，百四十有四。凡三百有六十，当期之日。二篇之策，万有一千五百二十，当万物之数也。④

这里有几个整数加法与乘法的运算：天数总和为 $1+3+5+7+9=25$，地数总和为 $2+4+6+8+10=30$，天地之数为 $25+30=55$。3 变得 1 爻，1 卦 6 爻，1 卦的变数为 $3\times6=18$。阳爻用九由“揲四”而成，故用策 $9\times4=36$；阴爻用六亦由“揲四”而成，故用策 $6\times4=24$。乾之策为 $36\times6=216$，坤之策为 $24\times6=144$；乾坤之策为 $216+144=360$。易六十四卦，阳爻、阴爻之数各为 192，二篇之策为：$192\times36+192\times24=11520$。“系辞”不晚于战国时期，所记的操作法当远在“系辞”撰写的年代以前。

整数的加减法则在上古的数学著作中没有记载。《周髀算经》、《算数书》、《九章算术》

---

① 西汉 · 韩婴，韩诗外传。程荣纂辑《汉魏丛书》。吉林大学出版社，1992 年，第 39 页。

② 钱宝琮主编，中国数学史，科学出版社，1964 年。李俨钱宝琮科学史全集，第五卷，辽宁教育出版社，1998 年。本编凡引用钱宝琮的论述，如不另加说明，均据此。

③ 李俨，中国古代数学大纲。李俨钱宝琮科学史全集第 3 卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 12 ~ 13 页。

④ 金景芳，《周易 · 系辞传》新编详解，辽海出版社，1998 年，第 52 页。此处引文据金氏校勘。

也没有记载整数的乘除法法则。根据现有资料，整数乘除法则最先出现在《孙子算经》和《夏侯阳算经》中，它们最迟在春秋时代就是人们已经娴熟的方法。

《孙子算经》卷上云：

> 凡乘之法，重置其位。上下相观，上位有十步至十，有百步至百，有千步至千。以上命下，所得之数列于中位。言十即过，不满自如。上位乘讫者先去之。下位乘讫者则退之。六不积，五不只。上下相乘，至尽则已。

古代没有被乘数和乘数的名义。二数相乘时，先用算筹布置一数于上行，一数于下行，中间一行准备布置乘积。将下数向左移动，使其末位与上数的首位相齐。以上数的首位数自左向右乘下数各位，所得数布置于中行，并将后得的数依次加到已得的数上。乘完下数各位后，将上数的首位去掉，将下数向右移一位。再以上数的第二位以同样的方式乘下位各数。如此继续下去，直到上数各位全部去掉，中行所得的数就是二数的乘积。

以 36×27 为例。布置二数，使下数末位 6 与上数首位 2 对齐，如图 3-2-4（a）所示。以上数首位 2 乘下数首位 3。呼“二三如六”（即 600），布置于中行。又以上数 2 乘下数第二位 6，呼“二六一十二”（即 120），加到已得的 600 上，得 720。去掉上数首位 2，将下数向右移一位，如图 3-2-4（b）。以上数的 7 自左向右依次乘下数各位，先得“三七二十一”（即 210），加到已得的 720 上，得 930。次得“六七四十二”（即 42），加到已得的 930 上，得 972。此时上下二数可以完全去掉，只剩 972，就是二数之积，如图 3-2-4（c）。

(a)　　(b)　　(c)

图 3-2-4　整数乘法举例

关于除法，《孙子算经》卷上云：

> 凡除之法，与乘正异。乘得在中央，除得在上方。假令六为法，百为实。以六除百，当进之二等，令在正百下，以六除一，则法多而实少，不可除，故当退就十位。以法除实，言一六而折百为四十，故可除。若实多法少，自当百之，不当复退。故或步法十者置于十位，百者置于百位。上位有空绝者，法退二位。余法皆如乘时。实有余者，以法命之。以法为母，实余为子。

除法与乘法恰好相反。用算筹布置“实”即被除数于中行，“法”即除数置于下行，商数置于上行。先将法的首位与实的首位对齐，如果实的首位不够大，不够法除，便将法向右移一位，再商量商数的首位。以商数的首位自左向右乘法的各位，随即在实中减去每次乘得的数。减毕，再商量商数的第二位得数。以商数的第二位自左向右乘法的各位，亦随即在实中减去每次乘得的数。如此继续下去，直到或者实被减尽，或有比法小的余数。如是后者，就以法作为分母，以余数作为分子，命名一个分数。

以 4395÷97 为例。先布置实 4395 于中行，法 97 于下行，如图 3-2-5（a）所示。先将

法右移，使法和实的首位对齐。因实的首二位43小于法97，便将法向右移一位，将其首位9与实的第二位对齐，如图3-2-5（b）所示。商量得商数的首位4，置于上行的十位上。以4乘法的首位9，呼“四九三十六”（3600），减实，余795。再以4乘法的第二位7，呼“四七二十八”（280），减实，余515。将法向右移一位，如图3-2-5（c）。商量得商数的第二位5。以5乘法的首位9，呼“五九四十五”（450），减实，余65。以5乘法的第二位7，呼“五七三十五”，减实，不尽，余30。如图3-2-5（d）所示。便命名一个分数，商数得$45\frac{30}{97}$。

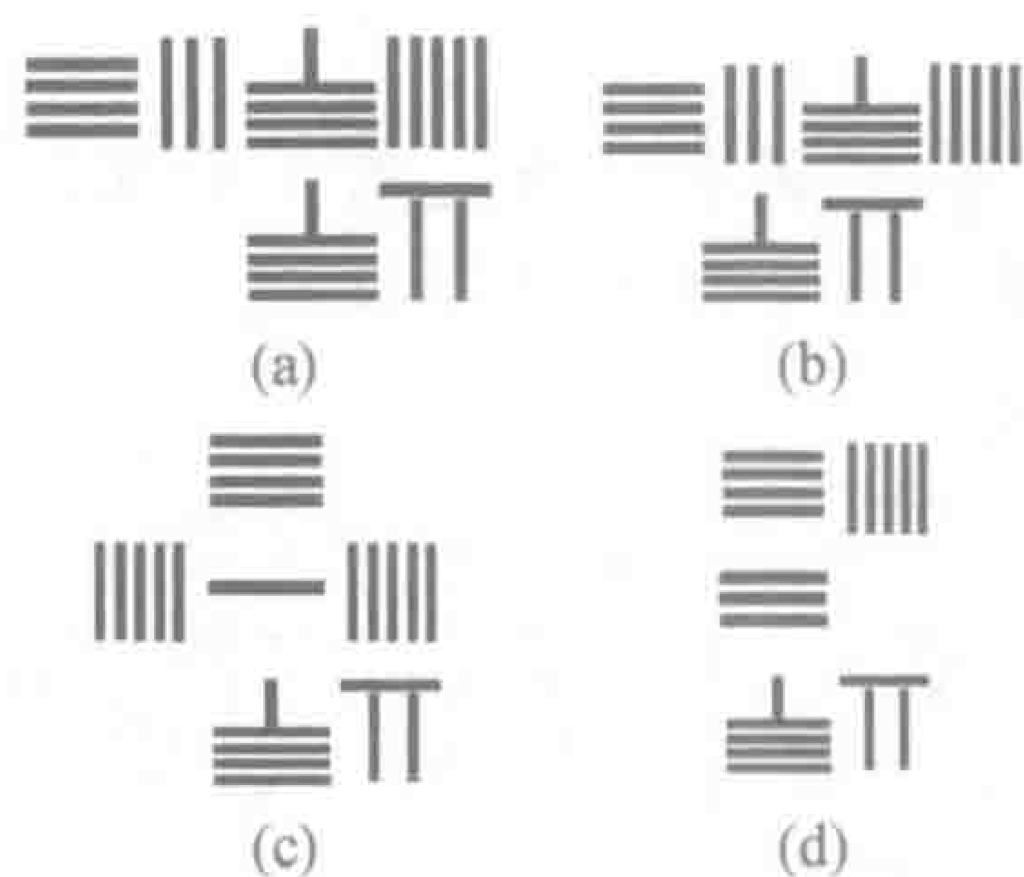


图3-2-5　整数除法举例

可以看出，中国古代的乘法与今天自个位乘起不同，是从高位开始乘的。

二　分数、比和比例的广泛使用

（一）分数的广泛使用

分数的产生最早在什么时候，现在还没有办法考证。春秋战国时期，由于整数乘除已经很容易和习见，所以在大量文献中都能见到分数。《逸周书 · 太子晋解》说周文王“三分天下而有其二”①，即占有天下的2/3。《左传》隐公元年（公元前722年）祭仲说“先王之制，大都不过参国之一，中五之一，小九之一”，是说大的诸侯国都不超过周王国都的$\frac{1}{3}$，中等的不超过$\frac{1}{5}$，小的不超过$\frac{1}{9}$。《墨子 · 七患》：“岁馑，则仕者大夫以下皆损禄五分之一；旱则损五分之二；凶则损五分之三；馈则损五分之四。”② 这种“几分之几”是我们今天典型的分数形式了。有的文献还有带分数。例如，《管子 · 度地》：“故高其上领，瓴之，尺有十分之三。”③ 即$1\frac{3}{10}$尺。

一些文物上也能看到分数。商鞅铜方升铭文：“爰积十六尊（寸）五分尊（寸）壹为升。”这是说，1升等于$16\frac{1}{5}$立方寸。魏平安君廿八年铜鼎盖铭文“一益七釿半釿四分釿之重”，即重1镒7斤$\frac{1}{2}$斤又$\frac{1}{4}$斤。1978年，河北易县燕下都战国墓出土的两件赵国武王头像金饰件上的记重铭文，都用到带分数。一件云“四两十六朱四分之一”，即4两$16\frac{1}{4}$铢。另一件云“四两十九朱三分”，当是“四两十九铢三分铢之一”的简称，即4两$19\frac{1}{3}$铢。④

① 黄怀信、张懋镕、田旭东，逸周书汇校集注，上海古籍出版社，1995年，第1088页。
② 孙诒让，墨子间诂，上海书店，1991年。本编凡引用《墨子》原文，如不另加说明，均据此。
③ 颜昌峣，管子校释，岳麓书社，1992年。本编凡引用《管子》原文，如不另加说明，均据此。
④ 器物铭文都引自丘光明：中国历代度量衡考，科学出版社，1992年，第140、162～164、314页。

（二）比和比例的广泛应用

与分数紧密相关的是比和比例关系。它们在文献中也有大量反映。例如：

《孙子·作战》："食敌一钟，当吾二十钟；萁秆一石，当吾二十石。"[①] 是说自己带的粮草和从敌方缴获的粮草在战场上的效用比为1∶20。《管子·乘马》："以上地方八十里与下地方百二十里，通于中地方百里。"这里的比则有三个量：上∶中∶下＝80∶100∶120。

当从一个量的变化考察另一量的变化时，这两个量就是比例关系。一般说的比实际隐含的是正比例关系。《商君书》"境内"篇："五百主，短兵五十人，二五百为主，将之主，短兵百；千石之令，短兵百人；八百之令，短兵八十人；七百之令，短兵七十人，六百之令，短兵六十人；国封尉，短兵千人……"[②] 主的量级和短兵之比为500∶50，所以二五百（两个五百即一千）主就有短兵 $50\times2=100$。1000 石对应短兵 100，那么 800 石对应短兵 80，700 石对应短兵 70，600 石对应短兵 60。这都是正比例关系。

《战国策》载苏秦游说赵王："臣窃以天下地图案之。诸侯之地五倍于秦，料诸侯之卒，十倍于秦。六国并力为一，西面而攻秦，秦必破矣。"[③] 苏秦能从地图上看出六国诸侯之地为秦地的五倍，可见当时的地图是讲究比例的。这种按比例绘图的情况，从战国中期偏晚的中山国𠫓（音措）墓出土的一件铜版兆域图可以得到反映。据研究这是一个比例尺为1∶500的陵园建筑平面设计图。[④]

《管子·乘马》："一乘者四马也，一马其甲七，其蔽五。一乘，其甲二十有八，其蔽二十，白徒三十人，奉车两。"这里乘、马成正比，其比为1∶4，马、甲、蔽成正比，其比为1∶7∶5，所以求一乘的甲、蔽时，用到乘法，各以 4 乘之，得一乘之甲为 $7\times4=28$，一乘之蔽为 $5\times4=20$。这里实际算出了乘、马、甲、蔽之比为1∶4∶28∶20。

率是《周髀算经》、《九章算术》中的一个重要概念。例如，《周髀算经》卷上载陈子云："即取竹，空径一寸，长八尺，捕影而视之，空正掩日，而日应空。由此观之，率八十寸而得径一寸。"赵爽注曰："以此为日髀之率。"[⑤] 这是说从长八尺直径一寸的筒中看太阳，如果太阳正好充满筒，则太阳的距离和直径之比为80∶1。率在其他先秦文献中也有反映。例如，《孟子·尽心上》："大匠不为拙工改废绳墨，羿不为拙射变其彀率。"[⑥]"彀率"指张满弓时弓与弦之比。《管子·禁藏》："食民有率，率三十亩而足于卒岁。"即百姓的生活费用有一定之率——一年花费 30 亩的收成。《墨子·备城门》："城人楼本率一步一人，二十步二十人。城小大以此率之，乃足以守围。"这里前一"率"字为比，后一"率"字为作关于率的运算。银雀山汉简《守法守令》说："岁收，中田小亩亩廿斗，中岁也。上田亩廿七斗，下田亩十三斗，太上与太下相覆以为率。"[⑦] 这里的"率"是标准数量的意思。事实上，

---

① 李零，吴孙子发微，中华书局，1997 年，第 37 页。

② 蒋礼鸿，商君书锥指，中华书局，1986 年。本编凡引用《商君书》原文，均据此。

③ 西汉·刘向集录，战国策，上海古籍出版社，1995 年，第 639～640 页。

④ 河北省文物研究所，𠫓墓——战国中山国国王之墓，文物出版社，1996 年，第 104～110 页。

⑤ 周髀算经，刘钝、郭书春点校。郭书春、刘钝点校，算经十书，台北：九章出版社，2001 年。本编凡引用《周髀算经》原文，均据此。

⑥ 战国·孟子。见：焦循，孟子正义。《诸子集成》本，上海书店，1991 年，第 556 页。本编凡引《孟子》，均据此。

⑦ 银雀山汉墓竹简整理小组，银雀山汉墓竹简［壹］，文物出版社，1985 年，释文第 146 页。

率之作为比，它就含有不变的因素在内，所以才会有比中的两个量，一个增大时另一个也要增大同样倍数的情况。

反比例在文献中也有反映。例如，《管子 · 揆度》："管子曰：'一岁耕，五岁食，粟贾五倍。一岁耕，六岁食，粟贾六倍……'" 这是说物价与供求的关系。管子认为物价与供应（"耕"）成反比，与需求（"食"）成正比。

先秦虽没有一部数学著作以近似于原貌的形式保留至今，但我们仍能从其他文献中找到一些关于分数和比例算法的具体例子。例如，《墨子 · 杂守》云：

> 斗食，终岁三十六石。参食，终岁二十四石。四食，终岁十八石。五食，终岁十四石四斗。六食，终岁十二石。斗食食五升，参食食参升小半，四食食二升半，五食食二升，六食食一升大半。日再食。救死之时，日二升者二十日，日三升者三十日，日四升者四十日。如是而民免于九十日之约矣。

斗食、参食、四食、五食、六食的吃法为每顿吃 5 升、$3\frac{1}{3}$升、$2\frac{1}{2}$升、2 升、$1\frac{2}{3}$升。各种吃法一年（一年按 12 个月，每月按 30 天计算）所需粮食分别为：

斗食：5 升 $\times 2 \times 30 \times 12 = 36$ 石，参食：$3\frac{1}{3}$升 $\times 2 \times 30 \times 12 = 24$ 石，

四食：$2\frac{1}{2}$升 $\times 2 \times 30 \times 12 = 18$ 石，五食：2 升 $\times 2 \times 30 \times 12 = 14$ 石 4 斗，

六食：$1\frac{2}{3}$升 $\times 2 \times 30 \times 12 = 12$ 石。

由于上面给出了五种吃法的比例关系，所以也可能是在计算出斗食一年所需粮食后，用正比例法计算出另几种吃法一年所需粮食的：

参食：36 石 $\times 3\frac{1}{3} \div 5 = 24$ 石，　　四食：36 石 $\times 2\frac{1}{2} \div 5 = 18$ 石，

五食：36 石 $\times 2 \div 5 = 14$ 石 4 斗，　　六食：36 石 $\times 1\frac{2}{3} \div 5 = 12$ 石。

三　从先秦文献看春秋战国时代的算法化数学——"九数"

（一）统计、会计等计算工作在春秋战国时期受到重视

政府要把国家管理得很好，必须利用统计方法了解国家各方面的情况，用计算方法安排国家财用、分配资源和考核官员的成绩等。先秦时期官府有一批负责统计和计算的人员。这种工作或担任这种工作的人一般称为计、会、计数、会计、职计、法算等。西周时期的政府已有此项职能。春秋战国时期，见诸文献的就更多了。

《左传》襄公二十五年（公元前 548）载："楚蒍掩为司马，子木使庀赋，数甲兵。甲午，蒍掩书土、田：度山林，鸠薮泽，辨京陵，表淳卤，数疆潦，规偃豬，町原防，牧隰皋，井衍沃。量入脩赋，赋车籍马，赋车兵徒兵甲楯之数。" 这里需要调查统计、测量计算各种土、田的情况和数量，包括山林的、薮泽的各种资源，水利河防及相应的田土、盐碱地、干湿土壤、各等井田等的情况和数量，特别是"辨京陵"即分辨山势的高低，可能还要用测望术。这些调查统计需要用四则运算、测量、比例算法等多种数学方法。

《管子·中匡》："管仲会国用，三分二在宾客，其一在国。管仲惧而复之。"管仲所做的工作，大概是最后的汇总，他从中发现了经济问题。《管子·七法》："刚柔也，轻重也，大小也，实虚也，远近也，多少也，谓之计数。""举事必成，不知计数不可。""其数多少，其要必出于计数。"这里的计数不仅指统计计算或其结果，还含有各种数量关系。同书"问"篇提出65个调查项目。其中，45个是定量的问题，涉及国家的民情、人材、政治、经济、军事等多个方面，大都要用数学方法进行统计。孔子曾做过掌管仓库、苑囿一类的小官，通晓会计。《孟子·万章下》"孔子尝为委吏矣，曰：'会计当而已矣'。"

会计核算发现经济工作中的差错，要追究相关人员的责任。睡虎地秦简《效律》说："计校相谬也，自二百廿钱以下，谇官啬夫；过二百廿钱以到二千二百钱，赀一盾；过二千二百钱以上，赀一甲。人户、马牛一，赀一盾；自二以上，赀一甲。"[①] 可见当时对一般的下级官吏在计算能力上已有较高的要求，由此可以想见当时数学应达到了一定的水平。负责计算的人员如果有失，其长官也要承担责任。《效律》不避秦始皇讳，其时代当早于公元前246年嬴政登基，所以上述法律实际反映战国时代秦国的情况。

（二）九数

1. 郑众《周礼》注中的"九数"是春秋战国时期数学的九个分支

东汉郑玄引郑众（？～公元83）《周礼注》释"九数"曰："九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。今有重差、夕桀、勾股也。"[②] 陆德明认为"夕桀"系衍文。郑众认为方田至旁要是先秦固有的数学门类，重差、勾股是汉代发展起来的。先秦"九数"与《九章算术》[③] 的章名相比较，只有差分、赢不足、旁要三项有异，后者分别作衰分、盈不足、勾股。其中，前两者含义无疑是一样的："衰"和"差"（音 ci）都是不同差别等级之义，"赢"和"盈"都是多余的意思，它们是可以分别互训的。"旁要"和"勾股"名称差异很大，但据北宋贾宪的提示，旁要包括勾股术、勾股容方、容圆和简单的测望问题（主要是测邑方诸问）等内容。[④] 刘徽《九章算术注序》说："周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣。"就是说，"九数"在春秋战国时期已经发展为某种形态的《九章算术》。春秋战国的"九数"是西周初年"九数"的发展，但周初"九数"绝不可能是郑众所释的九项的全部，甚至也不可能是其大部。因为春秋战国的"九数"已经达到相当高的数学水平，一般说来，西周初年数学不可能在大多数领域达到这种水平。从本章第六节可以看到，如果在《九章算术》中除去衰分章的非衰分问题、均输章的非均输问题、勾股章的解勾股形问题并恢复"旁要"之名，那么所余部分与二郑所释"九数"惊人一致，其名称也都正确无误，并且都采取术文统率例题的形式。这证明，郑众所说的"九数"在春秋战国时期确实存在；同时证明，刘徽关于"九数"流变及其与《九章算术》关系的论述，是完全正确的。当然，"九数"不仅内容不断扩充、发展，其类别也在调整。

---

① 睡梦虎地秦墓竹简整理小组，睡虎地秦墓竹简，文物出版社，1978年。本编凡引《睡虎地秦墓竹简》，均据此。

② 周·周礼，十三经注疏，中华书局，1982年。本编凡引用《周礼》文字，如不另加说明，均据此。

③ 西汉·张苍、耿寿昌编定，九章算术。汇校《九章算术》增补版，郭书春汇校。辽宁教育出版社，九章出版社，2004年。本编凡引《九章算术》及其刘徽注的文字，均据此。

④ 郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，简体字本，山东科学技术出版社，1992年。繁体字修订本，明文书局，1995年。本编凡引用郭书春的论述，如不另加说明，均据此。

后来张苍（？～公元前152）、耿寿昌（公元前1世纪中叶）在整理《九章算术》时将解勾股形问题并入“旁要”，并改名为“勾股”。

2. *从先秦文献看当时的实用算法式数学——郑众所列“九数”*

我们还能从先秦文献中看到先秦用到“九数”的数学方法。刘徽注“方田”曰：“以御田畴界域。”春秋战国时期，各诸侯为了自强和称霸，开荒造田渐渐多起来，而铁制工具的使用也使得开垦田地变得容易，这样就产生了越来越多不规则的田地，对这些田地的测算也就提到了议事日程上来。《管子 · 问篇》云：“人之开田而耕者几何家？”《商君书 · 算地》说：“今世主欲辟地治民而不审数。”井田制的瓦解、田地的买卖和农民阶层的出现也使得原来的井田变得形状多样。《九章》方田章计算各种形状的田地的方法自然会应运而生。

周制以100步^{2}为亩，银雀山汉简《孙子兵法 · 吴问》载孙武答吴王问，提到春秋晚期晋国六卿中笵氏和中行氏以160步^{2}为亩，智氏以180步^{2}为亩，韩、魏二氏以200步^{2}为亩，而赵氏则以240步^{2}为亩。赵氏240步^{2}的亩制，大概是商鞅所本。春秋战国时代各种亩制的出现反映了深刻的经济变革。[①]《算数书》和《九章算术》统一采用240步^{2}的亩制，说明这一章可能主要作于战国时期，当然该章有一些方法还可以追溯得更早。

刘徽注“粟米”曰“以御交质变易”，它确实是讲各种食物之间的换算的，其主要的数学成就是比和比例。对先秦学者来说是烂熟于胸的。

《算数书》曰：

> 程曰：禾黍一石为粟十六斗泰半斗，舂之为粝米一石，粝米一石为糳米九斗，糳米九斗为毇米八斗。王程曰：稻禾一石为粟廿斗，舂之为米十斗为毇，粲米六斗泰半斗。麦十斗，𪍿三斗。程曰：麦、菽、荅、麻十五斗一石，稟毇糳者，以十斗为一石。[②]

这段文字与睡地秦简所抄秦律基本相同，只是秦简中“粲”、“毇”二字误倒，《算数书》把秦律的“稟毇粺者”引作“稟毇糳者”，即“粺”换成了“糳”。另外，《算数书》还有其他条目涉及粮食的比率，但没有出现糳，而代之以粺。分析《说文》、《九章》、秦简《仓律》和《算数书》的异同，可知“糳”和“粺”在汉初和先秦时代曾用来指同种精度的米；《九章》弄错了糳米和相应的糳饭的比率[③]，这说明粟米章不可能直接出于秦汉两朝负责谷物的官吏之手，而是先秦时期一定程度上脱离实际工作的学者所为。[④]

刘徽注“衰分”曰：“以御贵贱稟税。”也就是说，衰分章是讲如何按不同的等次分配和上交赋税。这是比例分配问题。分配问题出现很早。《周礼 · 地官司徒》说：“凡均力政，以岁上下：丰年则公旬用三日焉；中年则公旬用二日焉；无年则公旬用一日焉；凶札则无力政，无财赋，不收地守地职，不均地政。”（《十三经注疏》第730页）这大概是西周的制度，它按不同的收成情况分为四种年岁决定劳役地租的收取。《管子 · 小匡》载管仲答桓公语：“相地相衰其政，则民不移矣。”这说明，要按不同田地的好坏分等收税。《孟子 · 万章》说：“大国地方百里，君十卿禄，卿禄四大夫，大夫倍上士，上士倍中士，中士倍下

---

① 杨宽，战国史，上海人民出版社，1981年，第140～142页。

② 郭书春，《算数书》校勘，中国科技史料，第22卷，2001，3，202～219。本编凡引用《算数书》文字，如不另加说明，均据此。“粲”字前“为毇”二字原作连下读，今改为连上读。

③ 邹大海，从《算数书》和秦简看上古粮米的比率，自然科学史研究，2003，4（22）：318～328。

④ 邹大海，睡虎地秦简与先秦数学，考古，2005，6：57～65。

士，下士与庶人在官者同禄，禄足以代其耕也。”对次国和小国也有相应的规定。这里提出各级官员的俸禄比例。当国家的收入与常情有出入时，必定根据可以支出俸禄的多少，用衰分术计算各级官员的俸禄。

秦任商鞅变法，军士可按功劳晋爵级，按爵级享有俸禄。《商君书·境内》载有公士、上造、簪褭、不更、大夫、公大夫、公乘、五大夫……大庶长、左更、大良造等爵。其中，公士至大夫是最低的五个爵档。《九章》衰分章载有这五个爵级的人共获一鹿时如何分配的问题，以及共出钱时如何摊派的问题。这虽然不是俸禄问题，但两者的分配有对应关系。可以想见，衰分章的这种问题正是战国时秦按爵享受俸禄的折射，而不是汉代情形。因为汉代虽仍使用秦代的爵级，但最低八档爵位已不实行差等的俸禄分配，而主要按官秩来分配。[①]

刘徽注“少广”曰：“以御积幂方圆。”此章有少广术和开方方法。李淳风等注“少广”曰：“一亩之田，广一步，长二百四十步。今欲截其从少，以益其广，故曰少广。”[②] 这种变换的目的就是要使田亩的面积保持不变，并容易感受其大小。所以少广章的少广术所统领的问题都是已知广为1步又若干分步，求1亩面积所对应纵（长）的多少，就不奇怪。

西周时井田制特别注重正方形状。周王封给诸侯或卿大夫的土地也都以方多少里来衡量。从春秋时代开始，井田制逐渐瓦解，但以正方形来衡量田地的面积，一直是人们心目中的思维定势，所以在战国以后很多文献中仍常见“方多少多少”的说法。例如，《管子·乘马》有“方六里”、“上地方八十里”、“中地方百里”、“下地方百二十里”的提法。

当土地不是正方形时，古人习惯于化为正方形来考虑其大小。例如，《墨子·非攻命上》载墨子说：“古者汤封于亳，绝长继短，方地百里……昔者文王封于歧周，绝长继短，方地百里。”《孟子·滕文公上》载公明仪曰：“今滕绝长补短，将五十里也。”墨子不说商汤所封之亳、周文王所封歧周10000（平方）里，而要通过取长补短化为方形，说方百里。公明仪不说滕国2500（平方）里，也不说滕国广多少袤多少，而一定要通过截长补短化为方形，以其边长来描述它的大小。这种用正方形来感受土地大小的习惯会刺激数学家们去寻找开方的方法，开（平）方术就应运而生。有了开方术，再探索开立方术就容易多了。

刘徽注“商功”曰“以御功程积实”。此章讲土方工程、体积和容积问题。

《管子·度地》谈到城、郭、堤、川、沟的修造，还谈到春分之后，“夜日益短，昼日益长，利于作土功之事”。秋分之后则不利于作土功之事。可见当时注意到不同季节所能完成的工程量是有差别的，与《九章算术》商功章区分春程、夏程、秋程、冬程人功相吻合。[③]《左传》：宣公十一年（公元前598），“令尹蒍艾猎城沂，使封人虑事，以授司徒。量功命日，分财用，平板干，称畚筑，程土物，议远迩，略基趾，具糇粮，度有司。事三旬而成，不愆于素”（《十三经注疏》第1875～1876页）。昭公三十二年（公元前510）“己丑，士弥牟营成周，计丈数，揣高卑，度厚薄，仞沟洫，物土方，议远迩，量事期，计徒庸，虑财用，书糇粮，以令役于诸侯。属役赋丈，书以授帅，而效诸刘子。韩简子临之，以为成命”（《十三经注疏》第2128页）。在这两次筑城的记载中：“具糇粮”、“书糇粮”涉及粟

① 宋杰，《九章算术》与汉代社会经济，首都师范大学出版社，1994年。本编凡引宋杰论述，均据此。

② 唐·李淳风等，九章算术注释。《汇校九章算术》增补版，郭书春汇校。辽宁教育出版社，九章出版社，2004年。本编凡引李淳风等《九章算术注释》的文字，均据此。

③ 郭书春，《管子》与中国古代数学。中国科技典籍研究——第一届中国科技典籍国际会议论文集，大象出版社，1998年，第63～70页。

米问题；“分财用”、“虑财用”要用到衰分方法；“程土物”、“物土方”、“仞沟洫”用到商功类的体积计算方法甚至测望方法；而“议远迩”、“计徒庸”、“量功命日”还要用到包括均输在内的其他数学方法。[①] 春秋战国时代有很多大型宫殿、城防、水利、航运等工程，牵涉的因素非常多，这就需要事先有周密的策划。睡虎地秦简《徭律》载有工程问题的处罚规定。其中，特别提到：“县为恒事及灋有为也，吏程功，赢员及减员自二日以上，为不察。上之所兴，其程功而不当者，如县然。度功必令司空与匠度之，毋独令匠。其不审，以律论度者，而以其实为徭徒计。”规定县以上的征发，如施工时间比所估算的时间相差（不论是超过或不足）两天以上，就要以不察论处。这些都说明，包括《九章》中的商功类在内的很多数学方法在战国时期已经成熟。

刘徽注“均输”曰：“以御远近劳费。”均输章的典型均输类问题一般是若干县共输物或劳力到某处，要根据物价，佣价，路途远近，各县的人数、算[②]数或户数等因素，分配各县的负担。这里的原则是要使按某一单位（如人、户、算）的平均负担相等。过去一些论著据正史所记汉高祖四年（公元前203）“始为算赋”，汉武帝置均输官的说法，说明《九章》中相关问题晚出。实际上，商鞅变法时“民有二男以上不分异者，倍其赋”，那么一户一丁应是标准户口单位。睡虎地秦律有户赋，这与汉代的算赋性质相同。《汉书 · 晁错传》载晁错上汉文帝书说：“今秦之发卒也，……死事之后不得一算之复。”说明在战国时代秦国时已有算赋。

至于均输政策，实不自武帝太初元年始。与《算数书》同出的汉律中有《均输法》，而《算数书》中亦有非典型的均输类内容，这说明均输律远比原来认为的要早。杜石然引《周礼 · 地官 · 大司徒》为证说明“大司徒的‘土均之法’和‘均人’的职责，实际上都含有均输的内容”，认为“均输问题的产生，实可推至先秦”。[③]《国语》载孔子的话：“先王制土，籍田以力，而砥其远迩；赋里以入，而量其有无；任力以夫，而议其老幼。”[④] 谓先王时本周公之法按土地肥瘠、远近及人的体力等分为不同差等征收赋税，这显然是均输的思想。《盐铁论》提到的两个均输中，古之均输与《九章》的均输相类，而今之均输则是汉武帝时候推广开来的。另外，阜阳双古堆西汉文帝时一个墓葬中出土的数学著作的残简，有可能属于《均输》章第一个问题的两段残文“□万一千二百户行二旬各到输所”（第28号简）、“千六百”（第20号简）。[⑤] 睡虎地出土的秦律对工程计划与施工期限差距的严格规定、先秦文献中提到的要考虑的多种因素、双古堆数学简残文等多方面的证据，证明先秦时代肯定要用到《九章》的均输方法。[⑥]

刘徽注“盈不足”曰：“以御隐杂互见。”《管子 · 事语》载管子曰：“彼天子之制，壤方千里，齐诸侯方百里，负海子七十里，男五十里，若胸臂之相使也。故准徐疾赢不足，虽在下也，不为君忧。”李俨等把《管子》的“赢不足”视为数学方法。其实，《管子 · 事

---

① 郭沫若主编，中国史稿第一册，人民出版社，1976年，第356～357页。这部分文字由严敦杰撰写。郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，第100页。

② 赋税单位，根据一个成年男性劳力（汉代指15～65岁）来核定。

③ 杜石然，江陵张家山竹简《算数书》初探，自然科学史研究，1988，3（7）：201～204。

④ 上海师范大学古籍研究所校点，国语，上海古籍出版社，1990年，第218页。

⑤ 胡平生，阜阳双古堆汉简数术书简论。出土文献研究第四辑，中华书局，1998年，第12～30页。

⑥ 邹大海，睡虎地秦简与先秦数学。

语》等篇中"赢不足"、"羡不足"，还是理解为一般意义的有余不足为好。"准徐疾赢（羡）不足"、"钧羡不足"，就是要用赢和不足来调整，盈不足术应是在这种需要下发展起来的。

《算数书》有盈不足问题，但无完整的算法，有的解法只是点出问题中的哪个数量对应于盈不足术的哪个参数，其为提示如何用既有的盈不足方法解答问题的用意十分明显。因此，《九章算术》的盈不足方法，反而应该出现在《算数书》盈不足问题之前。由于《算数书》已涉及盈不足问题的绝大部分类型，加之又是撮编之作，从其所取材的书会更早，再结合刘徽和郑众所论，先秦应该是有盈不足数学方法的。①

"方程"是九数中最难从先秦材料中找到根据的科目，但这并不意味着先秦没有方程一科。如果没有《九章算术》，我们很难从汉代的文史材料中找到使用方程的依据，但并不能因此就断定汉代没有方程一科。刘徽序已经明确指出九数是先秦的，他是熟悉郑众九数的说法的，那么他肯定认为方程是先秦已有的数学方法。方程是把一组相关的数看成一个率，然后利用率的性质而产生的数学方法。具有数学含义的率概念在先秦已经存在。因此，方程产生于先秦的数理逻辑基础已经具备了。

负数概念已见于《算数书》的"医"条："程曰：医治病者得六十算而负廿算□□程□弗……得六十而负几何？曰：负十七算二百六十九分算十一。其术曰：以今得算为法，令六十乘负算为实。"② 这应是用"正算"和"负算"来说明医生治病是否有效的问题。③ 在《九章》中负数只见于方程章，应是在方程消元时两行相减而不足减时引进的，所以方程的产生则还要早一些，加之方程章有些问题反映了先秦的物价④，方程应该是先秦就有的。

"九数"中的"旁要"在编《九章算术》时为勾股取代，说明它与勾股同类。"要"有求、取、考察、校正等义，旁要的本义大概是从旁边进行考察的意思。《周髀算经》载商高答周公问说的方圆关系，勾三股四弦五的特例，利用矩来正绳、测望高深广远，陈子对勾股定理的表述，以及用来"知日之高大，光之所照，一日所行，远近之数，人所望见，四极之穷，列星之宿，天地之广袤"的方法等都与旁要之义相合。又如《大戴礼记·四代》"夫规矩准绳钧衡，此昔者先王之所以为天下也。小以及大，近以知远，今日行之，可以知古，可以察今，其此邪！"⑤ 先王时用规矩准绳由近知远，这就是测望的方法。《吕氏春秋·不屈》载惠施语说"或操表掇以善睎望，如施者其操表掇者也"。高诱注"表掇，仪度也"⑥。看来惠施是一个善测望的人。

甘肃天水的放马滩1号秦墓（秦王政八年即公元前239年下葬）出土了7幅绘在松木板上的地图，其中六幅有文字注记。地图的内容有：河流、分水岭（或山脉）、居民点、道路、关隘以及地名、山名、溪名、道里数字和图的上下方位等。⑦ 由于地形起伏较大，要求

---

① 邹大海，出土《算数书》初探，自然科学史研究，2001，3（20）：193～205页。邹大海，《算数书》盈不足问题看上古时代的盈不足方法，自然科学史研究，2007，3（26）：312～323。

② 其中"而负"二字据何祖有《张家山汉简〈脉书〉、〈算数书〉札记》补，见：江汉考古2007，1：91～93。

③ 邹大海，从出土简牍文献看中国早期的正负数概念（待刊）。

④ 日·堀毅，秦汉物价考。《秦汉法制史考论》，法律出版社，1988年。本编凡引此文，均据此。

⑤ 王聘珍，大戴礼记解诂，中华书局，1992年，第164页。

⑥ 战国·吕不韦主编、东汉·高诱注，吕氏春秋，《诸子集成》本，上海书店，1991年，第229页。

⑦ 曹婉如，有关天水放马滩秦墓出土地图的几个问题，文物，1989，12：78～85。

地点之间的水平直线距离是不容易的。这就需要用间接的测望方法进行计算。据研究，“这些地图相当准确，是经实地测量后绘制的”①。这也说明当时的测望方法相当发达。

以上将各种文献中和先秦数学相关的信息与《九章算术》相参照，论证了春秋战国时期必然需要与《九章算术》中绝大部分数学方法相同或相当的算法，郑众所列“九数”正是现传汉代编定的《九章算术》的主体。西汉初年墓出土的《算数书》则进一步证明了这一点。②

四　先秦时期的其他数学知识

（一）《考工记》中的实用数学知识

《考工记》是一部关于手工业规范的专著。一般认为它是战国时齐国文化的产物。《考工记》记载工艺规范和工艺思想，涉及数学知识，可为我们了解先秦数学提供帮助。其数学知识主要有分数（比例）、角度概念、标准器的量值等。《周礼 · 冬官》缺失，遂以充《冬官》。

钱宝琮对《考工记》中的分数指出了几种情况：如果 A 的长度是 B 的长度的 n 分之一，那么《考工记》就说“n 分其 B，以其一为之 A”。如果 A 的长度是 B 的长度的 n 分之 $n-1$，那么《考工记》就说“n 分其 B，去一以为 A”。《考工记》有时把 B 的长度分成 m 比（$n-m$）的两部分，还有“几分 × 之一”的用例（《中国数学史》）。实际还有其他情况。例如，A 为 B 的 n 分之一，也说“n 分其 B，而 A 居一”。还有“几分 × 之几”，甚至有带分数的用例。例如，“六分其轮崇，以其一为之牙围；参分其牙围而漆其二。”“五分其毂之长，去一以为贤，去三以为轵。”“五分其毂之长，去一以为贤，去三以为轵。”“参分其毂长，二在外，一在内。”“六尺有六寸之轮，绠参分寸之二，谓之轮之固。”“桯长倍之，四尺者二。十分寸之一谓之枚。”“参分车广，去一以为隧。参分其隧，一在前，二在后，以揉其式。以其广之半为之式崇，以其隧之半为之较崇。六分其广，以一为之轸围。参分轸围，去一以为式围。参分式围，去一以为较围。参分较围，去一以为轵围。参分轵围，去一以为轛围。”“金有六齐：六分其金而锡居一，谓之钟鼎之齐；五分其金而锡居一，谓之斧斤之齐；四分其金而锡居一，谓之戈戟之齐；参分其金而锡居一，谓之大刃之齐；五分其金而锡居二，谓之削杀矢之齐；金锡半，谓之鉴燧之齐。”“矢人为矢。鍭矢参分，茀矢参分，一在前，二在后。兵矢田矢五分，二在前，三在后。杀矢七分，三在前，四在后。参分其长而杀其一，五分其长而羽其一。”“大车崇三柯，绠寸。牝服二柯有参分柯之二，羊车二柯有参分柯之一，柏车二柯。”（《十三经注疏》）其中，“几分 × 之几”和“几 × 有几分 × 之几”，与后世的算术用语相同。

《考工记》中的角度概念是数学史家十分关心的。钱宝琮说“在《考工记》里用‘倨

---

① 何双全，天水放马滩秦墓出土图初探，文物，1989，2：12～22。

② 邹大海，出土《算数书》初探，自然科学史研究，2001，20（3）：193～205。郭书春，试论《算数书》的理论贡献与编纂，《法国汉学》第六辑，中华书局，2002 年，第 505～537 页。郭书春，《算数书》初探，《国学研究》第 11 卷，北京大学出版社，2003 年，第 307～347 页。邹大海，从《算数书》与《九章算术》的关系看算法式数学文献在上古时代的流传，赣南师范学院学报，2004，6：6～10。

勾’二字表示角。用现代语言来解释，‘倨’就是钝，‘勾’就是锐，用‘倨勾’表示角，好像用‘多少’表示量，‘长短’表示长度。矩是工人用的曲尺，具体地表示一个直角”。“‘欘’和‘柯’都是斫木材用的斧，因木柄与铁斧间的角度有锐有钝，故用来表示角度的大小。”这是很正确的。《考工记》“已倨则不入，已勾则不决”，这是说兵器的拐角太钝、太锐都不行。“为皋鼓，长寻有四尺，鼓四尺，倨勾磬折”。这是说皋鼓的鼓腹向两端屈曲成磬折形角。《管子·弟子职》“栉之远近，乃承厥火，居勾如矩。蒸间容蒸，然者处下，捧椀以为绪。”

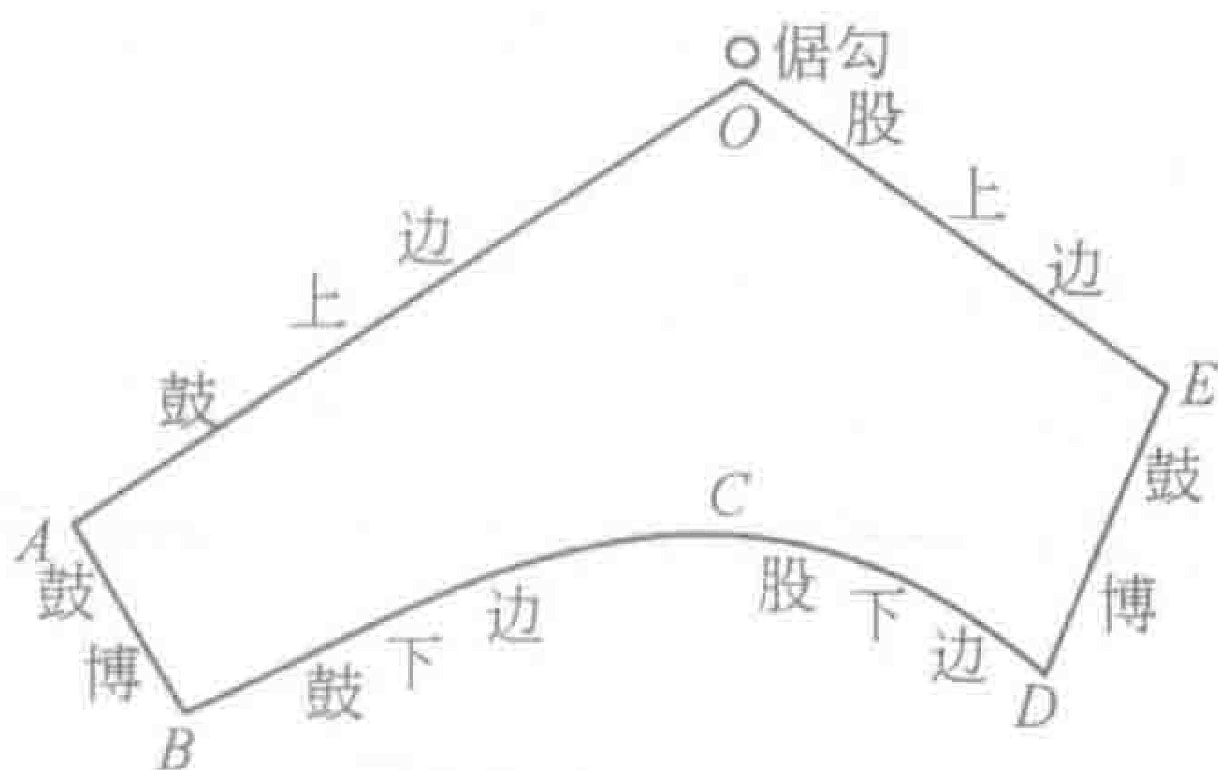


图 3-2-6　倨勾

《考工记》说：“车人之事：半矩谓之宣，一宣有半谓之欘，一欘有半谓之柯，一柯有半谓之磬折。”（933 页）矩、宣、欘、柯、磬折的角度分别为矩：90°，宣：90°×（1/2）=45°，欘：45°+45°×（1/2）=67°30′，柯：67°30′+67°30′×（1/2）=101°15′，磬折：101°15′+101°15′×（1/2）=151°52′30″。这里，“磬折”的度数为151°52′30″。“磬折”指磬（古代一种石制乐器，也有用金属做的）的顶角（悬挂处的角，图 3-2-6 中的角 *AOE*）。但是《考工记》“磬氏”节则说“磬氏为磬，倨勾一矩有半”（《十三经注疏》923 页），这就是说磬的顶角为：90°+90°×（1/2）=135°。这两个角度显然不同。对此钱宝琮的解释是“大概在135°上下的钝角都得称为‘倨勾磬折’。于此可见《考工记》中宣、欘、柯、磬折等名词的定义是不很明确的”。因为两个角度相差超过 15 度，从视觉上已很容易觉出。而且两处结果从计算数字上看更是明显不一致。我们推测，磬折和磬的顶角不必要求统一（正如很多学者所采用的一样），磬折是一个由“车人之事”节所定义的角度，这个角度之所以名磬折，是因为这一角度与磬的顶角接近。这样，磬的倨勾自为其倨勾，而磬折自为作为角度的磬折。那么“磬氏为磬，倨勾一矩有半”就规定磬的顶角为一个半直角即 135°。而其他地方要用一个磬折的角就用“一柯有半”这样一个角。当然，古人在实际操作时可以有一定的误差。

《考工记》“匠人建国。水地以县，置槷以县，视以景。为规，识日出之景，与日入之景。昼参诸日中之景，夜考之极星，以正朝夕”（927 页）。这是说匠人在营建城邑时，要用带悬绳的水准平地，树立一个表（标杆），观察它的影子。用规在地面上画一个圆，看太阳初出时的影子和太阳落下的影子（与圆的交点）。利用这个方法来确定方位，同时，在白天以正午时候的影子来校正，在晚上以北极星的位置来校正。这种方法如图 3-2-7 所示，在 *O* 点树一表，以 *O* 点为中心作一个圆，太阳开始升起时表的影子与圆交于 *C* 点，太阳西落时影子与圆交于 *D* 点，那么 *CD* 就是东西方向，决定了东西方向，就可以决定南北方向。这种以表测影来决定方向的方法，可能出现于原始社会（详见第一章），公元前 15 世纪末周人先公公刘也用过。《诗经·大雅·公刘》说：“笃公刘！既溥既长。既景乃冈，相其阴阳。观其流泉，其军三单。度其隰原，彻田为粮；度其夕

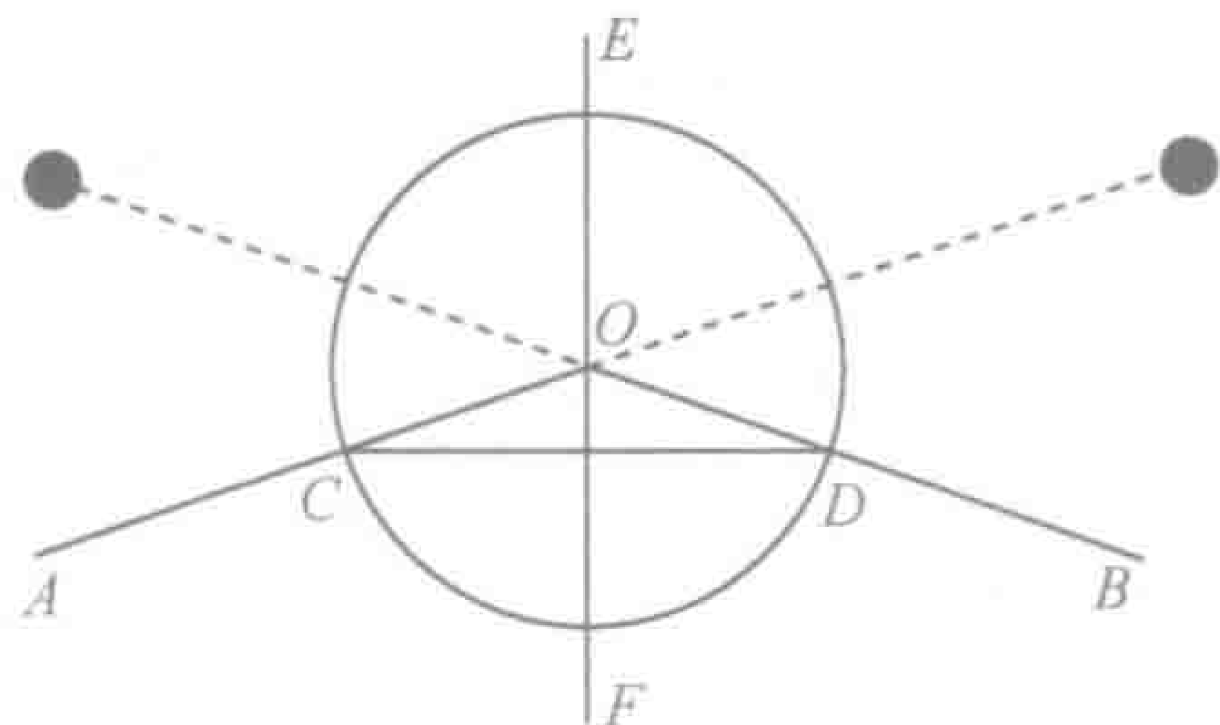


图 3-2-7　日影正朝夕

阳，豳居允荒！”① 这段诗说明公刘在用表测影确定了方位后，登上山冈，勘察了那里的日照南北阴阳，观看了那里流泉灌溉的方向。他的军队经过了几次轮番的换防，在这里测量了高低不同的地方，整治田地，收取粮食，测量了夕阳。看来，以表测影来确定位，确是源远流长的。当然，这种方法还很粗略。后来《淮南子 · 天文训》用多表法测方向，就精确得多。

《考工记》很讲究度量衡，特别是关于量器的说法很值得重视。“㮚氏为量”节说：“量之以为鬴，深尺，内方尺而圜其外，其实一鬴。其臀一寸，其实一豆；其耳三寸，其实一升；重一钧。”（916 ~ 917 页）它规定一鬴为 1 立方尺即 1000 立方寸。齐国容量制度有新旧两制。《左传》昭公三年引晏子的话“齐旧四量：豆、区、釜、钟。四升为豆，各自其四，以登于釜，釜十则钟。陈氏三量皆登一焉，钟乃大矣”（《十三经注疏》第 2031 页）。《晏子春秋》两次提到“齐旧四量”，皆与《左传》相同，就是：1 钟 = 10 釜，1 釜 = 4 区，1 区 = 4 豆，1 豆 = 4 升，所以 1 釜或 1 鬴是 64 升。由此推算 1 升的容积是 $15\frac{5}{8}$ 立方寸。而关于“田（陈）氏量”的说法一同于《左传》，一说“田氏四量，各加一焉”②。据研究，田氏的新量制当为：1 钟 = 10 釜，1 釜 = 5 区，1 区 = 5 豆，1 豆 = 4 升，那么 1 釜 = 100 升。③ 如按田氏的新量制，则 1 升 = 10 立方寸。

（二）组合数学的思想

组合数学是研究如何按一定要求安排离散性对象的学科。它到 20 世纪才由于实际应用的需要和计算机的发展而受到足够的重视。我国在先秦时期也不乏组合数学的思想。先秦关于组合论的思想有以下几项值得关注：易卦、三阶纵横图（九宫图）、田忌赛马。

1. 易卦

《周易》是中国古代最重要的经典之一。它是先民把卜筮和对事物发展的认识紧密结合的产物。相传夏、商、周三代都有《易》，夏曰《连山》，商曰《归藏》，周曰《周易》。现传本《周易》包括《易经》和《易传》两部分，前者是本文，后者为后人的阐发。《易经》包括易卦和相应的卦爻辞，一般认为成于西周。其中，易卦的年代可能更早。

易卦的基本构件是阴爻和阳爻，分别用- -和—表示，三爻组成一卦时，共有 $2^3 = 8$ 种组合，便得到八卦：乾☰、坤☷、震☳、巽☴、坎☵、离☲、艮☶、兑☱。八卦中任取两卦一上一下合成一卦，或六爻合成一卦，共有 $8^2 = 2^6 = 64$ 种组合，这便得到六十四卦。这里我们用指数来表示卦的组合数，古人是否有这个概念，是不能肯定的。不过，《管子 · 地员》的“四开以合九九”是具有指数的含义，那么到了《管子 · 地员》的时代，古人是可能用指数和乘法算得八卦或六十四卦的卦数的。八卦或六十四卦，与二进制暗合，但它们本身不是二进制。

2. 三阶纵横图

早期的纵横图是近年来受数学界和文史界关注的问题。这主要是由考古的发现使得人们

---

① 周 · 诗经，十三经注疏，中华书局，1982 年。本编凡引《诗经》，均据此。

② 张纯一，晏子春秋校注。《诸子集成》本，上海书店，1991 年，第 110、188 页。

③ 丘光明，中国历代度量衡考，科学出版社，1992 年，第 138，139 页。

对河图洛书的认识有所修正而引起的。

《易纬·乾凿度》卷下说："故太一取其数以行九宫，四正四维，皆合于十五。"郑玄注曰：

> 太一下行八卦之宫，每四乃还于中央。中央者北辰之所居，故因谓之九宫。天数大分，以阳出，以阴入，阳起于子，阴起于午。是以太一下九宫，从坎宫始。坎，中男；始亦言无适也。自此而从于坤宫。坤，母也。又自此而从震宫。震，长男也。又自此而从巽宫。巽，长女也。所行者半矣，还息于中央之宫，既又自此而从乾宫。乾，父也。自此而从兑宫。兑，少女也。又自此而从于艮宫。艮，少男也。又自此从于离宫。离，中女也。行则周矣，上游息于太一天一之宫，而反于紫宫。行从坎宫始，终于离宫，数自太一行之，坎为名耳。出从中男，入从中女，亦因阴阳男女之偶，为终始云。从自坎宫，必先之坤者，母子养之勤劳者。次之震，又之巽，母从异姓来，此其所以敬为生者。从息中而复之乾者，父于子教之而已，于事逸也。次之兑，又之艮，父或老顺其心所爱，以为长育，多少大小之行，已亦为施。此数者合于十五，言有法也。①

古人以为天上的星和神有对应，太一是北辰（北极星）之神。太一所居的紫宫在中央，八卦神则居于八方的八宫。图3-2-8左图表明了太一和八卦神所在的位置。这里按上南下北的方位。八卦对应八方，其中震东、离南、兑西、坎北叫做四正，巽东南、坤西南、乾西北、艮东北叫做四维。太一神按照一定次序巡视八宫，始于坎宫，终于离宫。路线走法"有时像象棋里的马，有时像卒，有时像士，所以有九宫行棋的说法"②。若在各宫内分别填入太一巡视的次序数字，便得到图3-2-8右图，一般叫做九宫图（九宫数）。它的三行、三列以及两条对角线上的三个数相加都得到15。凡是将$1\sim n^2$这n^2个自然数，在一个每边n格的方形内各放入一数，使得每行、每列和每条对角线上的数之和都相等，这样的数字图在中国古代被称为纵横图。西方称之为幻方（magic squares），日本称之为方阵。我国在南宋时对纵横图构造的研究大有进展，这是后话。

巽	离	坤
震	中	兑
艮	坎	乾

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图3-2-8　太一巡行九宫图

《数术记遗》记天目有"九宫算"，甄鸾注云："九宫者，即二、四为肩，六、八为足，左三、右七，戴九、履一，五居中央。"③ 这是对上面九宫图的形象描述。天目说这是隶首所造，这大概是数术家追根溯源的一种表达方式。钱宝琮指出《黄帝内经·素问》有取用九宫数的证据。《内经》"五常政大论"篇有"眚于九"、"其眚四维"、"眚于七"、"眚于一"等话；"六元正纪大论"有"灾七宫"、"灾五宫"、"灾一宫"、"灾九宫"等话。"论灾眚方位时，用'三、九、七、一、五"五个数字来代表"东、南、西、北、中'五方，和九宫数完全相同"④。不过，最明显的是《黄帝内经·灵枢》"九宫八风"篇首有一图，

① ［日］安居香山、中村璋八，纬书集成，河北人民出版社，1994年，第32，33页。

② 钱宝琮，太一考，李俨钱宝琮科学史全集，第九卷，辽宁教育出版社，1998年，第226页。

③ 东汉·徐岳撰，北周·甄鸾注，数术记遗，郭书春点校。郭书春、刘钝点校，算经十书，辽宁教育出版社，1998年。九章出版社，2001年。本编凡引甄鸾《数术记遗注》文字，均据此。

④ 钱宝琮，太一考。

图下附有说明（图 3-2-10）[①]，是九宫图渗透到医学思想的体现。[②]



图 3-2-10　《内经》取用九宫图

戴德所传《大戴礼记 · 明堂》提到“二九四七五三六一八”[③]，这九个数字若分成三组从右至左并排，便得到上面的九宫图。所以一些注家以为这九个数字代表明堂九室。近年来，考古的发现为这种观点提供了佐证。1977 年，安徽阜阳双古堆一号墓出土了三件漆木式盘。其中，第 2 号被严敦杰定为“太一九宫占盘”。此器天盘“是一个九宫，……通过天盘的圆心，画四条两两正交的直线，把盘面分为八等分，按九宫数分注在直线末端，……与《灵枢经》所引正相同。”“地盘上的文字比较容易明白，四周格线外乃二分二至和四立的日数，其中只秋仓果四十五日与《灵枢经》的四十六差一日。”[④] 西汉初年的这具太一九宫占

① 河北医学院，灵枢经校释，下册。人民卫生出版社，1982 年，第 373 页。《太素》亦有这样的图，据认为是本于《灵枢》。

② 以前有人以为《九宫八风》的图并非原有，是根据齐梁间陈延之《小品方》绘制的。李学勤“《九宫八风》及九宫式盘”（载：李学勤，古文献丛论，上海远东出版社，1996 年，第 235 ~ 243 页。）已辨其非。

③ 王聘珍，大戴礼记解诂，第 149 ~ 151 页。

④ 严敦杰，关于西汉初期的式盘与占盘，考古，1978，5：334 ~ 337。

盘和《九宫八风》的惊人吻合，说明九宫数的更早出现，可推到战国晚期。[①] 另外，对照《大戴礼记·明堂》与《九宫八风》，也可确定前者的"二九四七五三六一八"代表明堂九室。[②] 所以，刘起釪也说"明堂"篇的这九个数"则纯为九宫图的数字。知儒家此《明堂篇》受九宫数的影响了，把自己原来的明堂十二室，改从九宫数为明堂九室了"[③]。

3. 田忌赛马与对策论思想

具有竞争或对抗性质的行为称为对策行为。对策论考虑如何在对策行为中寻找对自己最为有利或最为合理的方案。春秋战国时代兵家讲求运兵要考虑各方面因素，就含有对策论思想。《孙子兵法》"计"篇说："夫未战而庙算胜者，得算多也；未战而庙算不胜者，得算少也。多算胜少算，而况于无算乎！吾以此观之，胜负见矣。"[④] 以算（实际是胜利因素的量化）之多少来决定胜负，可以说是比较明显的对策论思想。但这还显得操作性不强。一般运筹学书[⑤]中常引用的"田忌赛马"则是更为典型的对策论例子。

据《史记·孙子吴起列传》载，孙膑到齐国后受到齐将田忌的善待。"忌数与齐诸公子驰逐重射。孙子见其马足不甚相远，马有上、中、下辈。于是孙子谓田忌曰：'君弟重射，臣能令君胜。'田忌信然之，与王及诸公子逐射千金。及临质，孙子曰：'今以君之下驷与彼上驷，取君上驷与彼中驷，取君中驷与彼下驷。'既驰三辈毕，而田忌一不胜而再胜，卒得王千金。"在比赛时，孙膑对田忌说：用你的下等马与他们的上等马比，用你的上等马和他们的中等马比，用你的中等马和他们的下等马比。一场比赛下来，田忌一负而两胜，赢了齐王千金。

这里讨论的春秋战国时代数学，差不多都与实际需要有关，且除个别例子外都是讲计算方法。这些数学知识是在继承西周及其以前数学的基础上发展起来的。由于社会的变革、思想的解放，各种实际需要的要求，特别是严苛法律的要求和促进，使继承西周传统的实用算法式数学获得了空前的发展，形成了它的第一个高峰，构成了郑众注《周礼》"九数"所列的九个科目。这就为西汉编定《九章算术》提供了大部分的内容和基本的框架[⑥]。

第三节　理论思辨倾向——春秋战国数学的新动向

春秋战国时期，在西周"九数"传统的实用算法式数学继续发展并达到它第一个高峰的同时，数学上又出现了与之互相影响的一种新动向——理论思辨倾向。它较为关注抽象的概念及其间的联系，注意与数学推理相关的逻辑方法和思想。本节通过分析墨名二家的数学思想、道家及其他诸子对无限的认识，来反映当时数学的理论思辨倾向和成就。[⑦]

---

① 蔡运章，论原始洛书及相关问题——安徽含山出土玉版图和龟研究（载：甲骨金文与古史新探，中国社会科学出版社，1996 年，第 139～158 页）即把《八宫九风》篇定在战国晚期。

② 李学勤、邢文，黄帝与河图洛书。李学勤，古文献丛论，第 225～234 页。

③ 刘起釪，关于隶古定与河图洛书，传统文化与现代化，1997，2：38～46。

④ 李零，吴孙子发微，第 30 页。

⑤ 《运筹学》教材编写组，运筹学，清华大学出版社，1990 年，第 388 页。

⑥ 郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，第 96～105 页。邹大海，出土《算数书》初探。邹大海，出土简牍与中国早期数学史，人文与社会，2008，2（2）：71～98。

⑦ 本节关于先秦数学的理论思辨倾向的讨论，主要根据邹大海《中国数学的兴起与先秦数学》第 218～445 页简化删改而成。

一　墨家与数学

创立墨家的墨翟，称为墨子。墨家主要出身于手工业者，形成了一个以钜子为核心的组织严密的团体，推行兼爱、非攻等十大政治和伦理主张。墨家训练门徒，培养各种人材，《墨经》就是训练门徒用的材料。它没有把数学列为一类，但有很多条目具有数学含义，同时它也反映出墨家特别注重培养门徒的抽象思维能力，说明墨家具有很高的数学造诣。

《墨经》的著作年代，以徐克明的意见最为近真。他估计"《经上、下》大约在公元前5世纪和公元前4世纪之交，由墨子和禽子主持最后定稿；《经说上、下》则大约在公元前4世纪中叶靠前，由当时的钜子（或即田襄子）主持，在说书者讲授《经上、下》的基础上，最后定稿"。[①] 当然，是不是由墨子和禽子编定《经》文，田襄子编定《经说》，还可以讨论。《墨经》并不是如有人所说是当时一部百科全书，而只是前期墨家编的一部包含综合性基础知识，用以训练墨徒的教程。当时数学的很多基本内容，《墨经》并没有涉及，它只有极少量条目可以归为今天的数学，很多与数学相关的条目则具有更宽泛的含义，能反映古人的数学思想，也可能对数学的发展产生某种影响。下面我们首先介绍《墨经》中一些与数学有关的条目。

（一）对《墨经》中与数学有关条目的解释[②]

1. 倍的概念

经上第60条云：

［经］倍，为二也。　［经说］倍〇二尺与尺，但去一。[③]

本条讲的是加倍的概念：经文说加倍是把一个数量变成它的两个那么多。经说从逆向举例说明：尺的加倍二尺和尺，只要从加倍量中去掉一尺，便得到原来的量一尺。墨家的倍概念当是基于有比较明确的数量概念而提出的。

2. 记数制中位的概念

经下第59条：

［经］一少于二而多于五，说在建位。［经说］一〇五有一焉；一有五焉，十二焉。

本条反映了墨家对十进位值制记数法中同一数字在不同位上表示不同数值的认识。经文说：一少于二，但可以多于五，这种说法建立在记数时数位不同的基础之上。例如，一在个位上表示一，故小于二，在十位上表示十，故多于五。经说是讲：从个位看一，五中包含有一，从十位看一，一中包含有五，因为十有二个五（"十，二［五］焉"），也可以说十分之二就是五（"十［之］二，［五］焉"）。

---

① 徐克明，论《墨经》的著作年代。陈美东、林文照、周嘉华主编，北京·1990中国科学技术史国际学术研讨会论文集，中国科学技术出版社，1992年，第68～73页。

② 对《墨经》各条文的校释，往往众说纷纭，邹大海《中国数学的兴起与先秦数学》对诸家意见有较详尽的分析。除非必要，本书所引原始文献，一般根据该书考订后的结果。

③ 《墨经》各条的经说和经文在开头有一字或几字相同，称为牒字。谭戒甫在牒字后加"〇"以醒目，今从。

3. 平的概念

经上第 52 条：

［经］平，同高也。

本条是说：要说一东西是平的，那么它的各处应该有相同的高度。说明古人向认识两平行线间的距离相等的原理前进了一步。

4. 同长的概念

经上第 53 条：

［经］同长，以缶相尽也。　［经说］同〇捷与狂之同长也。

“缶”，即“正”，恰好、正好。经文说：同长，就是两者恰好相尽。这是从直线段的角度来考虑：如果让两个长条形的东西一端对齐，一直顺过去，如果另一端也正好相尽，那么这两个东西就同长。经说举例说明：门上的楗（“捷”）与门框（“狂”）的宽同长。

5. 中的概念

经上第 54 条：

［经］中，同长也。　［经说］心中〇自是往相若也。

经文说明：一个东西的中心，与该东西的边缘各处的距离是同长的。经说进一步说明从中心通往各边缘的各直线段是相等的。原文没有具体说明是什么东西的中，应该是从较一般的意义上讲的，例如直线段的中是它的中点，圆或球的中就是它的圆心或球心，其他可以中心对称的形体的中则是它的对称中心。正如钱宝琮所说：“‘中’是形象的对称中心”。

6. 厚的概念

经上第 55 条：

［经］厚，有所大也。　［经说］厚〇惟无厚无所大。

经文的意思是说：厚就是有一定的大小，也就是有一定数量的量度。

经说文字不好理解，“无厚”二字系暂据高亨补[①]，不失为一种权宜。据此，经说是从反面考虑：无厚就是没有一定的大小，即其量度为零。“厚”就是一个东西量的多少的意思。其含义宽泛，就立体来说是体积，就面来说是面积，就线段来说是长度。[②] 但墨家没有明确的限定，所以惠施找到其漏洞提出一个形式相反的命题“无厚不可积也，其大千里”。当然，惠施命题的意义还在于提出了一种与墨家不同的思想：不可分量不可积。

7. 直的概念

经上第 57 条：

［经］直，参也。

陈澧说：“‘直，参也’即《海岛算经》所谓后表与前表参相直也。”[③] 钱宝琮说这条讲“三点共线定义‘直’。参就是三，后来刘徽《海岛算经》用‘参相直’说明三点在一条直线上”。这是很近真的说法。本条说的是判断某一对象是否直的依据和方法：在该对象上任取三点都在一条直线（视线）上。

8. 圆、方的概念

经上第 58 条：

---

① 高亨，墨经校诠，科学出版社，1958 年，第 64 页。

② 邹大海，《墨经》中的无限思想。科史薪传，辽宁教育出版社，1997 年，第 18 ~ 27 页。

③ 陈澧，《东塾读书记》卷第十二第 13 页上半页。

［经］圜，一中同长也。　［经说］圜○规写支也。

经上第 59 条：

［经］方，柱隅四讙也。　［经说］方○矩见支也。

第 58 条经文说明：圆有一个中心，它到圆上各处有同样的长度。这与现代几何学中圆的定义是一样的。“支”和“讙”字不太好解。“讙”字或读为“权”（權），释为等，把“柱隅四讙”解为一个柱子的四个角都相等；或释“讙”为“正”，把“柱隅四讙”解为一个柱子的四个角都是直角；或释“讙”为“合”，则“柱隅四讙”应是一个柱子的四个角都可以重合起来。上述三种解释，都需要从语言训诂上进一步证实。孙诒让疑“支”为“交”之误。第 58 条经说的意思是说用规画圆时要画至少一圈使结束时的线与开始画的线相交，矩画方形时要让几个矩达到相交的状态。这也比其他意见合理。

《墨经》这两条的经文给出了圆的定义，和与方定义等价的描述，说得粗略一点也可以说是方的定义，这种定义具有今天几何学上的意义。

9. 没有量度值的始和端

经上第 43 条：

［经］始，当时也。　［经说］始○时，或有久，或无久。始，当无久。

经上第 61 条：

［经］端，体之无厚而最前者也。　［经说］端○是无同也。

第 43 条经文说“始”是正当某个时刻。钱宝琮解释：“‘有久’的时是时间，‘无久’的时是瞬间。‘始’是‘无久’的瞬间。”这是很精到的论述。此条中的“久”就是指时间的长度，“有久”就是有时间长度，“无久”即是没有时间长度或曰时间长度为零。《墨经》认为存在“无久”的时间并用“始”来表达，它是“时”的分限（“始，当时也”），是两种时间（“有久”和“无久”）中的那种特殊的形态即时间间隔为零的时间（“始，当无久”）。这是中国古代对时刻的最早认识。

经上第 61 条经文是说：端是一个事物的各个部分中那个（些）没有大小（“无厚”）而又处在起始处或最边缘的部分。经说存在两种可能：一是“同”字如梁启超所说为“间”字之误，经说讲的“端”是没有间隙的，中间不能再有更小的东西。二是如高亨于“同”字前补一“不”字，“是无不同也”就是说所有的端都是相同的。这种观念和现代的“点”观念是很接近的。

10. 作为分割结果的端

经下第 60 条：

［经］非半弗𣃁则不动，说在端。　［经说］非○𣃁半，进前取也。前，则中无为半，犹端也。前后取，则端中也。𣃁必半；毋与非半，不可𣃁也。

𣃁通斫，即砍的意思。本条的大意是：分割一个长条形的东西，先斫去一半，再斫去余下之半，如此不断地分割下去，最后会达到不能再分割成半的地步，这便得到一个“端”。而由于分割的方式不同，得到的“端”位置也不同，从一端往另一端斫，则“端”在两头，从两头（不一定交替）往中间斫，则“端”在中间。𣃁这种操作一定要按斫去一半的要求来进行，“毋（无）”（无物）和不能再分割成两半的东西（应指端），是不能再进行𣃁这种操

作的。“毋”也可能反训为“务”①，“毋与非半”是说一定要给一个“非半”之意。由于“端”是无厚的，所以我们认为这个被分的东西在本条中是被作为一维的线来看待的，它应含有无穷多个端（钱宝琮以为是有限个，当误）。

此条命题蕴涵的数学意义是把一条线段连续平分，先去其半，以后每次去其上次分割后余下部分之半，最后会得到一点，由于采用不同的分割方式，得到的点的位置也就不相同。这种分割实际是无限分割。墨家从经验抽象得出此观念，忽视了过程，而径认为分割会到达一个终结。后来的辩者则看到了这是一个无限的过程，所以提出“一尺之棰”的命题来反驳。

11. 瞬时运动中的矛盾

“经下”第16条云：

[经] 景不徙，说在改为。 [经说] 景：光至景亡，若在，尽古息。

“经上”第50条云：

[经] 止，以久也。 [经说] 止，无久之不止，当牛非马，若矢之过楹。有久之不止，当马非马，若人过梁。

经下第16条认为运动物体的一个影子在背景上占据一个位置，它本不是运动的。人们所看到的影子的移动，只是各个时刻的不同影子出现在不同的位置而产生的印象。因为影子是光为物所蔽而在背景上产生的，光达到背景上时影子就消失了。只要光在背景上，影子就永远会消除的。

经上第50条“当牛非马”和“当马非马”不好解。经文是说：静止是从时间观念上体现出来的。经说从反面考察了时间段上的运动（“有久之不止”）和时刻上的运动（“无久之不止”）两种情况。

墨家可能在考虑时刻上的运动时意识到矛盾。说影子是在改换而不是在移动，是对静止的承认；说“景不徙”而不说“飞矢不动”是对运动的回避。由于“光至景亡”的缘故，墨者比较好回避动态的影子为同一个实体移动的问题，而可以把影子的运动看做是一系列影子的此生彼灭而产生的效果。古人由于当时还远没有发展出瞬时速度的概念来，其运动与静止的观念不论在时间段上还是在时刻上都总是以有没有位移来衡量，这就引发了他们对运动理解的矛盾。这种矛盾被后来的辩者揭示得更清楚。

12. 曲直之间

经上第47条云：

[经] 儇，积柢。

“儇，积柢”似应通“環，俱抵”。可能是讲一个圆形物在地上（可以抽象为圆在直线上或圆柱在平面上）滚动时，其上各处均与地相接触。而后面我们要讨论的辩者“轮不蹍地”的命题则与此相反。如是，则轮与地、直线与圆利用运动通过点（在一个循环内）建立起一对一的关系。这与“次，无间而不相撄也”的思想是一致的。

13. 有限和无限的界定

经上第41条：

[经] 穷，或有前不容尺也。 [经说] 穷○或不容尺，有穷；莫不容尺，无

---

① 叶爱国，“毋（無）”字反训。文史第三十九辑，中华书局，1994年，第26页。

穷也。

这条以钱宝琮的解释最好："用尺来度量路程，如果量到前面只剩不到一尺的余地，那么，这路程是'有穷'的。如果继续量过去，前面总是长于一尺，那么，这路程是'无穷'的。"这是讲一维上的有限与无限。有了这个命题，就可以判定空间在各个方向上的有限和无限，这样任何空间区域的有限性和无限性也就可以判断了。

14. 盈的意义

经上第65条：

[经] 盈，莫不有也。 [经说] 盈〇无盈无厚。

经上第66条：

[经] 坚白，不相外也。 [经说] 于石无所往而不得，得二。坚白，异处不相盈，相非，是相外也。

第65条经文说：盈，是指（一个考察对象被另一种东西充满其内）无处没有（这种东西）。经说从反面说明：（这个对象若）未充满则（它）没有量度（即量度为零）。第66条经文是说：（在一块白石中）坚和白是相互包含、不相排斥的。经说的一种解释是：在一块白石中无论任何地方都可以得到坚和白。坚和白不在相同的地方则不互相包含和充满；相排斥乃是"相外"之义。从第65条可知，有一考察对象的量度是要通过它被相应的某种东西充满才能体现。这里有一个问题：一个对象当它某些部分被充满而另一些部分并未被充满，这时如果还认为它没有量度显然不合适。这是《墨经》作者考虑不周的地方。不过，对于这类情况，可以通过考虑其被充满部分的量度，将这些部分的量度相加得到。再者，"无盈无厚"也可以理解为"没有被充满的部分就没有量度"，如是则不存在什么问题了。

15. 间和有间的意义

经上第62条：

[经] 有间，中也。 [经说] 有间，谓夹之者也。

经上第63条：

[经] 间，不及旁也。 [经说] 间，谓夹者也。尺前于区穴而后于端，不夹于端与区内。及，及非齐之及也。

经上第64条：

[经] 纑，间虚也。 [经说] 纑〇虚也者，两木之间谓其无木者也。

参考方孝博的意见①，我们认为：第62条经讲的是："有间，是指中间位置（有间）。"这里，"有间"一个述宾结构，省略了主语（某物）。经说的意思是："'有间'是说夹'间'的东西（不是被夹的东西）有间"。第63条经的意思是"间，是不和夹着它的东西的边缘相接触的"，在经说"及及非齐之及也"中，前两个"及"字可能有一个为衍文，经说讲的是"间，是指被夹的东西。尺（线）在区穴（面）之前而在端之后（指产生的次序而言），但不是夹在端和区之间"。"及非齐之及也"可能是后世注文窜入，意思是说这个及不是指数量多少齐等于某物，而是指空间上的延伸达到某个位置。"间"是内容物，但它和在外面包围它的东西不接触。第64条讲一种特殊的"间"——"纑"。经文说"纑是间之虚者"，也就是夹在中间的空虚的间的意思。经说进一步说明什么叫"虚"：虚就像两棵树之间没有

---

① 方孝博，墨经的数学和物理学，中国社会科学出版社，1983年，第13，14页。

树的空隙一样。这几条讨论空间位置关系。

16. 撄、仳、次的概念

经上第 67 条：

［经］撄，相得也。　［经说］撄〇尺与尺俱，不尽。端与端俱，尽。尺与端，或尽或不尽。坚白之撄相尽，体撄不相尽。

经上第 68 条：

［经］仳，有以相撄，有不相撄也。　［经说］仳〇两有端而后可。

经上第 69 条：

［经］次，无间而不相撄也。　［经说］次〇无厚而后可。

“撄”是用一个对象叠合在另一对象上使其具有相同性质的部分正相吻合，然后看有无出入。第 67 条经说的意思就是：线和线相叠合在一起，不能正好相尽；点和点叠合在一起，正好相尽；线和点叠合在一起，点尽没于线中而线不为点所尽。在一块坚白石中，坚和石相撄时正好相尽，而两个物体相撄时则不能相尽。

“仳”（通“比”）条通过叠置考虑两个同类的形体之大小、多寡，它们都有端点或边界。不过，如果经说的“端”限于《墨经》中的界定，则本条的说可能只指两直线段而言。但是，“有以相撄，有不相撄也”的叠置法，对于比较两个其他图形，也仍是适用的。

第 69 条经文说的是一种特殊的排列“次”：相邻两个对象之间没有间隙（“无间”），又无相重叠（“不相撄”）的部分。经说则进一步强调排列的对象是无厚（量度为零）。假设有一长串紧密相连的同样大小和形状的小球或小立方体，想象其大小不断缩小，而其数目相应增加，当它们小到“无厚”时，它们就“无间而不相撄”了。《墨经》此条当从这类经验和现象中以此种方式抽象而来。这条说明《墨经》具有不可分量可积的观点。

第 69 条经说中，《道藏》本中“后”作“厚”，杨俊光认为经说中“而”是和的意思，经文说明“无厚”（图形）和“有厚”（物体）皆可以是“无间而不相撄”之依次排列的对象。① 他把“无厚”、“有厚”分别理解为图形和物体是不对的，因为图形也可以是有厚的（线有长度，面有面积，立体有体积）。如果按《道藏》本，则经说讲的是：不论是无厚的东西还是有厚的东西，它们都可以没有间隙而又不相重合地进行排列。本条精妙处在于提出了一种观念：把“无厚”的东西可以进行既无间隙又不互相重叠的排列。

17. 关于充分和必要条件的概念

经上第 1 条云：

［经］故，所得而后成也。　［经说］故〇小故，有之不必然，无之必不然；体也，若有端。大故，有之必然，若见之成见也。

这条是讲一个事物产生或存在的原因，也可以说是一个命题中的前提或条件。经的意思是说结论得到了前提（“故”），而后成其为结论。经说把前提分为两种，一是“小故”，相当于必要条件，有了“小故”结论不一定成立，但没有这“小故”，结论一定不成立。二是“大故”，是充分条件，有了它结论一定成立。“若见之成见也”和“体也，若有端”不好解。

《墨经》充分考虑了逻辑推理的充分条件和必要条件，这为他们及以后的名家进行较严密的推理提供了理性的基础。

① 杨俊光，墨经研究，南京大学出版社，2002 年，第 503 ~ 510 页。

18. 对同一性的认识

经上第 88 条：

［经］同，异而俱于之一也。　［经说］侗〇二人而俱见是楹也，若事君。

经下第 65 条：

［经］一法者之相与也尽类，若方之相以也，说在方。　［经说］一〇方尽类，俱有法而异，或木或石，不害其方之相以也。尽类犹方也，物俱然。

经上第 88 条经文说：同，是指不同的事物而在某一方面都具有相同的特质。经说举例说：两个人都看到了这条门楹，从各自的角度，看到楹的不同方面，但都是同一条楹，这楹就是两人所看到的楹的“同”。这有如不同的臣子都共同事奉同一君主一样，事奉君的方面不同，但事奉的君却是同一个。

经下第 65 条“以”通“似”。经文的意思是：合于一个标准的事物，彼此相似，都是同一类，例如各种方都相似，因为它们都属于方类。经说的意思是：整个方类中的各种方形，都具有方这个标准而各方又不完全相同。例如，有的为木头之方，有的为石头之方，但这不影响这些方的相似性。一个标准能遍及同类的各个事物，就像方的标准能遍及所有的方一样，只要是这类事物，就都具有该属性。

墨家特别注重从事物中找出同一性和特殊性，分析事物间的关系，从而得出合乎规律的认识。而从思维规律上看，对同一性的探求是量度不同事物共同属性的前提，也为正确使用矛盾律和排中律提供了基础。

19. 数量比较的同类性

经下第 6 条：

［经］异类不吡，说在量。　［经说］异〇木与夜孰长？智与粟孰多？爵、亲、行、贾四者孰贵？麋与霍孰高？麋与霍孰霍？蚓与瑟孰瑟？

“吡”当读为“比”。经指出比的前提是两个被对比的对象属于同类事物或属性，异类的事物或属性是不能相比的，这是要考虑它们量的多少。经说举 6 组不同类的事物作为不能相比的例子。[①] 这说明墨家注重分类，并有比较明确的量化观念。经上第 89 条的经说云：“比度，多少也。”说明通过比和度能够知道事物量的多少。通过比和度来知道事物量的多少，必须有一个量度的单位；两个事物要比较其大小，必须有共同的度量单位，有共同的度量单位，必须是同类的事物或不同事物的同类属性。这是墨家对数量化方法处理问题的觉悟。

20. 对矛盾律和排中律的认识

经上第 73 条：

［经］彼，不可两不可也。　［经说］彼〇凡牛枢非牛，两也无以非也。

经上第 74 条：

［经］辩，争彼也。辩胜，当也。　［经说］辩〇或谓之牛，或谓之非牛，是争彼也。是不俱当，不俱当，必或不当，不当若犬。

经下第 35 条：

［经］谓辩无胜，必不当，说在辩。　［经说］谓〇所谓，非同也，则异也。

---

① 后三组意义不详。谭戒甫删去“麋与霍孰高”，则只有五组了。见：谭戒甫，墨辩发微，中华书局，1987 年，第 215 页。

同则或谓之狗，其或谓之犬也。异则或谓之牛，亓或谓之马也。俱无胜，是不辩也。辩也者，或谓之是，或谓之非。当者胜也。

“彼”有不同的理解，我们倾向于梁启超的意见，“彼”“指所研究之对象也。能研究之主体为我，故所研究之对象，对‘我’而名‘彼’也”①。《墨经》把“彼”单列一条，似应有其特殊的意义。第73条经文的意思应是：某一对象的是与非，不能两者都不成立，当然也不能两者都成立。经上第73条已经具备“p和非p”不能都不成立的形式，也就必有一成立，这就是形式逻辑的排中律。“p和非p”不能都不成立，也就不能都成立，这就是现代逻辑中的矛盾律。可以认为墨家明确知晓单称肯定和单称否定间的矛盾律和排中律。

第74条经说则举例说明：今有一物，一方说它是牛，另一方说它不是牛，这就是争论“彼”。对这种情况，争论两方不可能都对，则必有一方不对。这一命题也说明墨家对单称肯定、否定命题必有一误有明确的认识，这也是对形式逻辑中矛盾律的明确认识。同时，墨家认为辩论必须基于讨论的问题是同一对象的原则。这一点，经下第35条表达得更清楚。

《墨经》认为辩的命题必须是单称命题的是与非，所以认为辩没有胜方的观点一定是不对的，这是由辩本身的内涵决定的。这就是经下第35条说的“谓辩无胜，必不当，说在辩”。此条经说从“名”、“实”关系入手做更具体的阐述：用不同的名指称实，不是同一实的名，就是不同实的名。例如，一物有人叫做狗，有人叫做犬，这就是同一实的名。如果，有人叫一物做牛，又有人叫一物做马，这就是不同实的名，他们指称不同的实。在这种情况下，就会出现两方都不胜的局面，这就不能算是辩了。辩这一范畴，只能是针对同一对象，有一方说是对的，另一方说是不对的。对于这种争辩，合于事理的一方获得胜利。

21. 对归纳和演绎的认识

经说上第96条：

［经说］彼举然者，以为此其然也，则举不然者而问之。

经下第1条：

［经］止类以行之，说在同。　［经说］彼以此其然也，说是其然也；我以此其不然也，疑是其然也。此然是必然则俱。

第96条经说的意思是：列举一些实例，由某类事物中一些个体具备某种属性，归纳出这类事物都具备这种属性；我们只要举出这类事物一个（或几个）个体不具备这种属性，就能否认这类事物具备那种属性的命题。

经下第1条的“止”应训居、处，是按照、依照的意思。“行”可训为推理。经文是说：要按照类来推理，因为同类的事物具有共同的性质。经说是讲：某人认为某类事物具有某种性质，则其中任一个体也具有这一性质；我认为某类事物不具有某种性质，则其中任一个体也不具有这种性质。只要这种性质是必然性，则类与个体应同时具有或不具有这一性质。本条反映了墨家对演绎逻辑有明确的认识。

《周髀算经》卷上载陈子的话说学习数学要能“通类”，要能够“知一事而以万事达”，“同术相学，同事相观”，“类以合类”，强调要认识事物的共性，在此基础类比以融会贯通。其中“类以合类”的说法与《墨经》“止类以行之”有些接近。陈子在《墨经》以前，可能与邓析约略同时。他关于类的看法，或者可以视为《墨经》作者认识“类”的一种背景

① 梁启超，墨经校释，中华书局，1941年，第38页。

材料。但是,《墨经》已有基于类概念推理的范式,这是远远超越陈子的。

22. 整体与部分的关系

经上第 2 条:

[经] 体,分于兼也。　[经说] 体○若二之一,尺之端也。

经上第 45 条:

[经] 损,偏去也。　[经说] 损○偏去也者,兼之体也;其体或去或存,谓其存者损。

经下第 4 条:

[经] 不可偏去而二,说在见与 [不见] 俱、一与二、广与脩。　[经说] 不○见不见不离,一二相盈,广脩、坚白。

经下第 7 条:

[经] 偏去莫加少,说在故。　[经下] 偏○俱一无变。

《墨经》中作为特殊名词的“兼”、“体”一般释为整体(或全部)、部分。经上第 2 条说:体是从兼中分出的一个部分,正如从二中分出的一,从线上分出的点。

经上第 45 条经文说损就是除去一部分。经说进一步作解释:首先指出言“偏去”者是兼中之一体,而后指出兼可以分为被除去部分和保留部分,“损”是针对保留部分而言的。其实,“谓其存者损”是有语病的,“存者”是“损”以后的结果,不是“损”的对象。

第 4 条经文认为属于同一物体的两种属性与之同在,其中任何一种属性都不能从此物体也不能从另一种属性中分离出来。其所举“广与脩”的例子是说:一块面积是由一系列平行横线合成的,又是由一系列平行竖线合成的。横线和竖线都在这块面积内,它们都充满这块面积,也就互相充满了。这种思想后来成为《公孙龙子 · 坚白论》反对的对象。《墨经》广修相盈的思想与其不可分量可积的思想是一致的,是后世刘徽积线为面思想的滥觞。

在经下第 7 条经文是说:一个东西有多种属性,考察其中某种属性的量度,这时去掉一部分(“偏去”),它的那种属性的量度并没有减少(“莫加少”),这是因为该属性仍然如故,并没有改变(“说在故”)。经说进一步强调,对于那种属性来说,把那个东西除去一部分的前与后它都是同一个东西,并没有改变。

(二) 墨家的数学思想

《墨经》中有着丰富的数学思想,涉及记数法、倍数观念、几何学、无限观、数量比较原则、逻辑推理原则、整体与部分关系等很多方面,在文献不足的情况下,为我们认识先秦数学的发展水平提供了极为宝贵的资料。

《墨经》涉及位值制和“倍为二”的论述虽不是什么新的贡献,但体现墨家注重从理论层次揭示问题本质的倾向。其关于平、直、同长、中、圆、方、厚等的界定更是如此。“间”、“有间”、“纑”等条讨论了多种空间位置关系,“次”条还提出了一种特别的位置关系,是不可分量可积思想的明确表示。“同长”命题通过移动叠置来衡量长度是否相等,这是几何学上叠合方法的例子。而“撄”条是用叠置方法比较两个对象性质的一般表述,从理想的角度看,就是几何学上用叠置法比较两个图形几何性质的方法。“仳”条让一部分(根据具体需要选用这一部分)相重合,以考虑其余部分的方法,对于一般几何图形间的关系问题,仍是适用的。现代初等几何学讨论图形的全等和相似、比较线或角的大小等,莫不

通过移动叠合来考察。所以，《墨经》的撄为进一步的几何学探索提供了基础和广阔的视野。“盈”条体现了《墨经》用一个对象的充盈来考虑另一个对象的量度的倾向，并界定了一个对象的几何量度概念“厚”，这一界定如果再分别具体化为长之大、面之大和体之大，就是对长度、面积和体积的界定。而同时“端”条对“端”（点）进行了界定。这些反映了墨家在几何学上有一种追求理性、超越一般实用的倾向。

《墨经》有了时空无限的思想，经上第41条还从量度上给出了判定无穷和有穷的方法，不仅蕴涵了相当阿基米德公理——对于任意的两个正实数 a、b，必定存在一个自然数 n，使得 $na>b$ 的逆命题，而且由此推出阿基米德公理。而从阿基米德公理得出《墨经》的命题则需要引入其他概念。

《墨经》的“始”是时间间隔为零的时刻，“端”是没有大小的点。可以想见，墨家也会认为线是没有宽度、面是没有厚度的（即都是“无厚”的）。“次”条认为“无厚”的东西可以没有间隙又不相重合地排列起来，含有“无厚”可积累为“有厚”的思想，因此在墨家的意识中，时刻“始”可积为时间，“端”可积为线，线可积为面，面可积为体。所以墨家具有了圆和直线可通过切点形成一一对应的关系的观念，于是圆沿直线滚动一周便转化为一条线段了。也正是基于这种面可由线积累而成的观念，墨家认为广和脩相盈。（一个平面形可以看成由很多平行于一个方向的平行线——“广”组成，也可以看成由与该方向垂直的很多平行线——“脩”组成。既然面积由很多“广”组成，那么“广”就充盈了所有的“脩”，反之亦然。）在这种观念支配下，墨家考察了运动问题。由于没有瞬时速度的概念，古人的动静概念总是以有无位移来衡量，这样他们在瞬时运动的问题上就陷入了在同一时刻一个运动物体既动又静的两难之境。对于这种矛盾，墨家采取回避的态度。

《墨经》对整体和部分的关系有认真的讨论，对它们的某些性质会根据不同情况分析其中的同和异，他们强调推理中必须保持同一概念的同一性。“异类不吡”命题认为必须同类事物才可比较其大小、多寡。《墨经》认识到了逻辑推理的矛盾律、排中律，也对演绎推理的方式和归纳法的局限有着明确的认识。当然，墨家不是按明确的三段论格式来表达其演绎推理方式的。他们强调“类”的重要性，在推理中要按类的原则归纳事物的共同属性，按类的原则把共性赋予它的个体。

《墨经》反映了作者在理论思辨上所达到的很高程度。这种思想一旦与数学结合起来，就可能产生一种初步的理论数学。《墨经》为墨家各派学习的基础知识（当然也包括前期墨家的经验总结和理性升华），它既不代表它编成时，更不代表先秦数学在理论上达到的最高成就；相反它的教材性质倒是说明它会在一定程度取材于当时的数学理论。因而，《墨经》只能折射出当时最高理论数学的发达。另一方面，墨家学者在学习这些基础知识后，应有一部分学者更求精进，在这方面取得更高的成就。另外，《墨经》强调理论思辨的倾向，也会刺激墨徒和战国时代的数学家在西周以来“九数”传统的实用算法式数学中融入理性的思辨，并通过当时的辩论之风直接或间接地影响整个数学的发展。

二　名家的数学思想

根据伍非百的意见①，名家可以分成“求治”派和“求知”派两类。后者关注自然现

① 伍非百，中国古名家言，中国社会科学出版社，1983年，第476页。

象和思维方法，追求对事物的真切认识。与数学思想有关的主要是求知类名家，他们是邓析、惠施、桓团、公孙龙以及一批不知名的辩者。

（一）邓析的思想与数学

邓析是春秋后期郑国的学者，大致与孔子、老子、子产是同时代的人。《邓析子》中“厚”指伦理和道德上的恩惠，“无厚”是没有恩惠，一般认为能反映邓析的一些思想。后来《墨经》和惠施用来指形体没有大小，就量度为零这点来说，思想上也是一致的。他认为要根据同异分类，使不同类别的事物各属其类。当名实不一时，若指某一特定的实，那就舍弃原来的名而找一新的名来表达它；若指某一特定名，则舍弃原来的实而按名寻找真正与之对应的实。

后世常常谈到的“两可之说”和“无穷之辞”最能体现邓析对同异的认识和要求名实统一的思想。后者反映了他可能采用类似形式逻辑的方式进行严密的逻辑推理，是先秦形式逻辑倾向的先驱，战国时代理论数学之倾向与邓析不无关系。

（二）惠施的数学思想

在求知类名家中，最重要的是惠施（约生于公元前380年，卒于公元前310～前314年）。[①]《庄子 · 天下》[②]说“惠施多方，其书五车”。不过，这些书全散佚了。据《天下》篇，惠施知识广博，擅长对自然万物进行分析和研究。他提出了10个论题（后人称为“历物十事”），并用以引导“天下之辩者”，而辩者则提出了他们津津乐道的21个论题（“辩者二十一事”）。

“历物十事”中有一些思想与数学相通。

1. “至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一”

“大一”和“小一”既有空间的意义，也带有一定的观念性质。惠施大约对道家用同一个东西表示大小相反的两种极端情况不满，遂发明“小一”，用两个概念来表示两种不同的情况。他的“小一”和《墨经》的“端”都不可分，但两者有区别。“小一”“无内”则细小到没有部分、没有内外之别，而只是浑然之一体，其来源是精气和道的思想，不是由无限分割得到的；而《墨经》的“端”则可由无限分割得到。惠施同用“一”来表示“至大”和“至小”，这自觉或不自觉地把无穷大和无穷小归为一类，也显示了道家和精气说影响的痕迹。

2. “无厚，不可积也，其大千里”

《墨经》从量度的角度来考虑，认为“无厚”是量度为零。但是，这量度是指的长度、面积还是体积，不够明确。另外，《墨经》不可分量可积的思想也有难以克服的困难。惠施敏锐地看到《墨经》的薄弱环节，遂提出这个命题，钱宝琮认为这是说没有厚度的面不能积而成体，但却可大到千里；没有宽度的线不能积而成面，却可长达千里。惠施大概认为

---

① 生年据杨俊光《惠施公孙龙评传》，南京大学出版社，1992年，第4～11页。卒年据钱穆《先秦诸子系年》，上海书店，1992年，第346～347页。

② 战国 · 庄周，庄子。见：郭庆藩，《庄子集释》。《诸子集成》本，上海书店，1991年。本编凡引用《庄子》原文，均据此。

"无厚"的值是"无"，很多"无"相加还是"无"，于是就认为"无厚"不可积了。这是一种明确的不可分量不可积的观念，与《墨经》针锋相对。

3. *"日方中方睨，物方生方死"*

"中"是指在太阳从东到西的轨道上的正南位置。惠施可能这样考虑：太阳会在某个时刻达到正中的位置，在此时刻它在这个位置上而不在别的位置上，故此时刻没有位移，所以它是不动的。可是若它此时刻不动，则同样的道理，此时刻以后的各个时刻它都是不动的。因而经过一段时间，太阳也总是在正中这个位置（这里隐含了时刻可以积为时间的思想）。但此后太阳明显是到另一个位置上去了。所以，太阳在日中时也必然是动的，而古人的动概念总是以位置移动来衡量，既有位移，它就又不在正中的位置上而是有所偏移了。故曰"日方中方睨"。惠子对这种运动物体在一个时刻行和驻存在的矛盾的揭示，无疑是十分深刻的。面对这种两难的情况，他无法给予合理的解释，就把"日方中方睨"和"物方生方死"并提，将这和生物的新陈代谢一样看待以求心安理得。惠施是在调和这种矛盾。

4. *"连环可解也"*

联系到《墨经》"儇秖秪"的命题，我们可以这样理解惠施的这个命题：抽象来看，连环的每一个环（圆）都由点构成，当它在地面（直线）上滚动时，它的每一个点都与地接触而可以看做是地面上的点。这样，环滚动一周时，环就可以转化为一段直线，一个环滚动时另一环可不对它的滚动产生妨碍，这样每一环都可以转化为一段直线，于是连环不就解开了吗？

5. *"南方无穷而有穷"*

尽管对"南方有穷"有不同的解释，但南方无穷是指在空间一维的方向延伸上说的，说明惠施对无穷概念有明确的认识。

惠施认为空间是无限的，有无穷大和无穷小的观念，他认为曲直可以（实际是通过点的一一对应）得到转化，因而也"连环可解"。他认同不可分量概念，但明确指出空间不可分量是不可积的，这反映惠施以数值看待"无"的倾向。惠施在指出空间不可分量不可积的同时仍默认时间不可分量的可积性，这引发了瞬时运动的矛盾，这在古代以有无位移来衡量动静的思想观念下是不可避免的矛盾，对此他采取了调和的态度，而在宇宙观上偏向于道家的生成论。此种情况可能与当时道家学说流行的大环境有关。①

（三）辩者的数学思想

《庄子·天下》所载辩者"二十一事"中也有几个和数学有关的论题。

1. *"矩不方，规不可以为圆"*

《墨经》中有圆、方的定义。辩者认为，以此标准，则用规画不出圆，用矩画不出方。因为规、矩画出的线总是有宽度，且或多或少有点不均匀，至于在使用规矩的时候也难保不出现一些误差。于是得出这一不同凡响的结论。辩者的这一命题表明辩者从抽象的角度考虑问题，有把数学概念独立于生活实际以外的倾向，而这正是理论数学所必需的。从西方数学发展的历史看，几何学是最早独立于生活实际的学科，中国的辩者在这方面也至少走出了一步，可惜我们缺乏足够的史料了解他们到底走了多远。

---

① 邹大海，名家的无限思想，第七届国际中国科学史会议论文集，大象出版社，1999年，第30~35页。

2. “一尺之棰，日取其半，万世不竭”

“万世”是说时间久到任何的时候。辩者从共相的角度考虑问题，揭示每次取去前一次留下的部分之半以后仍余有一定的长度，这样分割就永远也没有完结。这个命题从数学上看就是：对于任何的自然数 n ，都有 $\frac{1}{2^n} \neq 0$ 。这是强调分割程序的无限性。与《墨经》“非半弗斮”的命题强调分割的结果会得到一个不可再分的“端”不同，辩者强调分割过程的不可完结性。辩者这种对过程无限性的强调使墨家无限分割会得到一个不可分的结果的思想在操作上有难以克服的困难。

3. 辩者第十五事“飞鸟之影，未尝动也”，第十六事“镞矢之疾，而有不行不止之时”

前者的思路应是：飞鸟的每一影子都占据一个与其大小一样的空间而不在其外，所以它是不动的。这里说影而不说鸟不动，因为讨论的对象是预设其为动的“飞鸟”。这是为了避免正面的矛盾，因为影虚鸟实，光达到产生鸟影的背景时影子就消逝了。它明显是从墨家那里继承来的。不过，“未尝”二字更体现了辩者故意立异、矫情的性格。

后者的思路应是：一方面，如果飞箭在一个时刻上静止，则它在一段时间上也静止；可箭经过一段时间后明显从一处到了另一处，可见箭在一个时刻上静止的假设不成立，因此它在时刻上必然是“不止”的。另一方面，箭在一段时间内飞过一段位移，随着时间的缩短，箭的位移也越来越短，当时间间隔缩短为零变为时刻时，箭的位移也应当为零。由于没有瞬时速度的概念，这样就会觉得箭应该是“不行”的。对于这两方面的推理辩者都没法否认，就只好干脆说飞箭在有的时候不行又不止了。这种运动观说明辩者对机械运动中的矛盾采取强行调和的态度。

4. “轮不蹍地”

《墨经》提出“儇秖秪”的命题，辩者为与墨家立异，提出“轮不蹍地”的命题。辩者大概从运动的角度来考虑：如果轮蹍地，那么，轮和地两者都必定会有一部分相接触，则接触部分一方面在轮上，就得随轮运动；另一方面，它又在地上，而地被认为是静止的，于是这公共部分又是不动的。这样，就出现了同一个东西在同一时刻既是动的又是不动的这样一对矛盾。为避免这种矛盾，就干脆说轮与地不相接触了。无论对时段还是时刻，古人的运动概念都局限于位移，这就导致了他们在瞬时运动的矛盾面前无能为力。

应该说，《墨经》的看法是在直观经验的基础上抽象出来的结论，比较能符合实际；名家的观点则更具思辨性。但是，由于他们的认识和那个时代科学水平的局限，辩者犯了一个高级错误，于是《墨经》的“儇秖秪”和“轮不蹍地”这两个命题便构成了一对本属子虚乌有但在古人那里却是实实在在的矛盾。

（四）名家的数学思想综议

春秋末年的邓析，已经善于从异中求同（特殊性中找出普遍性），同中求异（普遍性中找出特殊性）。墨家结合生产实际，注重抽象和推理，给出了一批有价值的概念和命题。惠施等名家则有更进一步的讨论。“大一”、“南方无穷”和“小一”是无限大和无限小的实体性概念，其“连环可解”涉及了一一对应和线由点构成的思想，这与墨家思想是一脉相承的。“日方中方睨”、“飞鸟之影”、“镞矢之疾”、“轮不蹍地”等命题不仅继承了墨家的思想，并把这种思想推到极端，而得出了两可的矛盾结论。这些都是有关瞬时运动矛盾的，

我们知道，瞬时运动是后来促进微积分产生和发展的典型问题。辩者继承了墨家关于方和圆的界定，而得出了与常识不符的结论。"一尺之棰"命题则从抽象长度的角度揭示了任意小的有限数量非0的特性，惠施"无厚不可积"命题也蕴涵了类似的思想，它们都揭示无限和有限的分野、连续和间断的矛盾，使墨家无限分割有终极和无限可以过渡到有限的思想难以维持。总体说来，名家的标新立异建立在一定的逻辑基础和抽象思维之上。因此，一方面受到批评和攻击，另一方面被认为善辩。名家对待他们所揭露的矛盾采取的亦是亦彼的态度，也与道家学说的流行有关。这也反映了在春秋战国时代百家争鸣中不仅彼此排斥和反对，也有互相影响和互相渗透的一面。

三　先秦道家等学派的无限思想

无限既是数学概念，也是哲学概念。它是一个永恒的主题。先秦学者已有非常丰富的无限思想，尤以墨、名二家逻辑思辨性的无限思想，道家的超越性的无限思想引人瞩目。其中，前者已如前述，这里重点讨论后者的若干闪光点。

无限，就其最原始的意义上说就是没有限制、找不到一个具体的范围。随着认识的深入，人类对它也就有各种不同的界定，揭示它的方方面面。但是，尽管现在我们对它的认识深化了，可要给出一个能统摄其各个方面的精确定义来，却几乎不可能。我们的讨论侧重于量的方面，从这个角度看，无限大致可分为两种类型，即无限大和无限小。

（一）无限的时空观

墨家和名家对空间无限性有一种明确的认识。道家也具有时空无限的思想。例如，《庄子·秋水》载北海若说"时无止"、"年不可举，时不可止"，又说"日夜相代乎前，而莫知其所萌"，指出时间在未来的方向是没有穷尽的。而《庄子·庚桑楚》曰："有长而无本剽者，宙也。"明确肯定了时间在过去和未来两个方向都具有无限性。在"则阳"篇中魏王回答戴晋人说四方上下"无穷"。此篇还把天地看成整个空间中的一个很小部分。

（二）道论与无限思想

《文选》注引《庄子》云："遍谓周曰：吾知道近乎无内，远乎无外。"① 这比较明白地说明，道既无穷大又无穷小。《管子·心术上》说得更清楚："道在天地之间，其大无外，其小无内。"此书"内业"篇的灵气也具有与道同等的地位和性质。惠施则提出用"大一"和"小一"来表示无穷大和无穷小两个更为抽象的概念，这应该受到了道家思想影响。

《庄子·秋水》表明道家认识到任何有限量之和都不能达到无限量，并具有在无穷大量之上有更大的无穷大量的思想。先秦时期还有无穷小量比任何小的量都还要小的思想。《庄子·外篇·秋水》中北海若在答河伯问是否真的"至精无形，至大不可围"时说："无形者，数之所不能分也；不可围者，数所之不能穷也。"这说明，"不可围"的"至大"（无穷大）不能为任何数所穷尽，"无形"的"至精"（无穷小）不能用任何数来表示，这样就在无穷的量和有限的数量之间划了一道不可逾越的鸿沟。所以北海若又说："何以知豪末之

① 梁·萧统编、唐·李善注，文选，中华书局，1977年，第478页。

足以定至细之倪？又何以知天地之足以穷至大之域？”

道家用“无形”概念沟通有限和无限。“无形”的本义是没有形质和形状，看不见，摸不着，不能为我们的感官所把握和了解。它具有两方面的含义。一是指不能被感知或不能被感知的状态（或事物），在道家那里不仅专门用来描述或指代超越具体事物之上的东西，还用来指一种无限的境界。一是指变化、行动等没有踪迹，神秘莫测。道家认为万物从无形中产生，又复归于无形。

《庄子 · 秋水》北海若云：“可以言论者，物之粗也；可以意致者，物之精也；言所不能论，意之所不能察致者，不期于精粗焉。”把人的认识和物的大小粗细对应起来，于是对物就可以根据其大小粗细分为三个层次：可以用语言描述其规定性（当然包括大小粗细）的是粗者，语言难以描述只能想象其规定性的是精者，不仅不能描述而且不能想象其规定性的东西就无所谓精粗了。由于该篇把精者和粗者实际都算做是有具体形质的东西，“无形者”和“不可围者”都是脱离具体规定性的东西，属于“言所不能论，意所不能察致者”，所以三个层次实际只有两个，精者和粗者是属于同一层次的两个层面。不过，精者又处于枢纽地位，就其不能“言论”来说和道相接，就其可以“意察致”来说又和“粗者”相关联，强调其精细，便“意”也“不能察致”，强调其粗大，便可以“言论”，前者对应于无限的道，后者对应于有具体大小的事物。于是，在古人的思维里，由小到无穷小是通过人的认识的层次的转换而得到了沟通。这可以说是道家对无限和有限的分野和联结的认识论基础。

四　春秋战国时期的理性思辨与数学

春秋战国时代的“百家争鸣”促进了对自然、人类社会和思维规律的认识，自然也影响到数学。当时诸子在辩论中“求同辨异”，用类比、归纳等方法分析问题，并总结思维规律和推理方法，这都对数学的进步产生了促进作用。我们主要强调要从墨、名二家的理论思辨成果来考察先秦数学的理论思辨倾向。因为，对于讲究实用的“九数”传统的中国古代数学而言，“求同辨异”比逻辑推理似乎更显重要。对一般应用数学解决实际问题的人而言，主要是把实际问题化为典型的数学问题以便利用既有方法求解。而对于想在数学上有所精进的人而言，“求同辨异”和逻辑推理都必不可少，而且相互促进。上面我们讨论墨家和名家的数学思想正好说明先秦时代具有了这样的条件、可能乃至实践。墨家和名家都注重利用“求同辨异”形成概念，并把现实的问题抽象成典型形式，同时又特别讲究逻辑推理。到了战国早中期之交的《墨经》至战国中期的惠施时代，他们已经有了一些这方面的可以操作的方法，建立了一批抽象的理论数学的概念和命题，还有用于进行逻辑推导的归纳、演绎推理的逻辑范式，有的还是非常深刻的。这说明在战国时代，有学者对数学的考虑已经远远超越简单经验归纳的层次，而进到了理论深化层次。

《墨经》中关于十进位值制记数法的性质，抽象点、线、面、体的观念，方、圆的界定，形体间的相对位置、图形的叠合方法的考虑，线、面构成的观点，说明当时已有这种理论化的数学知识。而关于量的比较原则和方法，关于归纳和演绎的推理原则以及整体和部分关系的思想等，也会为数学发展提供工具和思想源泉，从而促进数学的发展。而且，这些很可能只有一部分是墨家自己的经验总结和理论升华，另一部分则来源于当时学术界已有的知

识。这些既反映了当时数学理论上的成果对墨、名二家产生了影响，也说明二家对数学理论会有新的建树，并为之提供理论和逻辑上的依据，从而促进当时的数学进步。本章第二节我们证明了《九章》的主体构成了先秦的“九数”。而“九数”所达到的高度，也只有在充分考虑百家争鸣的大背景中先秦的数学理论倾向，及其与实用算法倾向的互动关系的前提下，才能够得到合理的解释。

第四节 秦简《数》与汉简《算数书》

一 秦简《数》

2007年底，湖南大学岳麓书院从香港收购了一批秦简，其年代下限为秦始皇三十五年（公元前212）[①]，比《算数书》的年代下限早。其中有220余枚简是关于数学的，比《算数书》的数量大。整理者根据0956号简的背面写有“数”字，原称为《数书》，后来定名为《数》[②]，见图版。全部释文的公布尚需假以时日，现在透露出来的有以下内容。

（一）面积与体积

《数》有长方形、梯形（箕田）及圆田等三种平面图形的土地面积计算。例如，0936号简是关于箕田的计算方法：

箕田曰：并舌嶂步数而半之，以为广，道舌中丈彻嶂中，以为从，相乘即成积步。

与《九章算术》基本一致。

《数》有长方体、方亭、圆亭、方锥及除等多面体体积问题。如0830号简为：

方亭：乘之：上自乘，下自乘，下壹乘上，合之，以高乘之，令三而成一。

这是方亭的体积公式，与《九章算术》相同。又如0766号简为：

圆亭上周五丈，下八丈，高二丈。为积尺七千一百六十六尺大半尺。

其术残缺，不赘。

（二）粟米、衰分与少广

《数》有重一石的各种粟米不同的容积，有各种粟米的换算关系及其应用题，如2173号简的问题是：

粟一石为米八斗二升。问：米一石为粟几可？

《九章算术》中有大量这类题目。

《数》0978号简与0950号简为一个衰分题目：

大夫、不更、簪裊、上造、公士共除米一石，今以爵衰分之，各得几可？……述曰：各直爵数而并以为法，以所分斗数各乘其爵数为实，实如［法而一］。

---

① 陈松长《岳麓书院所藏秦简综述》，见：《文物》，2009年第3期。

② 肖灿、朱汉民：岳麓书院秦简《数》的主要内容及历史价值。《中国史研究》，2009年第3期。这里的内容主要根据此文。

“直”通“置”。《九章算术》也有同类的内容。

又如0943号简与0856号简为：

凡三乡，其一乡卒千人，一乡七百人，一乡五百人。今上归千人，欲以人数衰之，问：几可归几可？曰：千者归四百五十四人有二千二百分人千二百。七百者归三百一十八人有二千二百分人四百。五百归二百廿七人有二千二百分人六百。

与《算数书》、《九章算术》一样，《数》也有传统的少广问题。如0942号简为：

少广。下有半以为二，半为一，同之三，以为法。亦直二百卌步，亦以一为二，为四百八十步，除，如法得一步。为从百六十步。

方法与《九章算术》、《算数书》相同。

(三) 赢不足类问题

赢不足即盈不足，是中国传统数学的重要算法。如《数》0413号简为：

赢不足。三人共以五钱市，今欲尝之，问：人之出几可？得曰：人出一钱三分钱二。其述曰：以赢、不足互乘母……

术文有脱漏。这是求不盈不朒之正数（即每人应出的数）的例题。对此，根据题设，通过两次假设，比如假设人出2，盈1，人出1，不足2，就会化为盈不足问题。值得注意的是，这是特意为盈不足术求不盈不朒之正数而设的题目。因为这是一个形如 $ax=b$ 的一元一次方程，直接得出 $x=\frac{b}{a}$ 更为方便。盖中国古代的盈不足术求三项：人数、物价、不盈不朒之正数。《九章算术》的盈不足术含有这三项，盈不足章后半章的题目都由求不盈不朒之正数的术文解决。《算数书》中没有同类的问题。

(四) 勾股类问题

《数》中0304号简与0457号简为：

有圜材薶地，不智大小。斲之，入材一寸而得平一尺。问：材周大几可？即曰：半平得五寸。令相乘也，以深一寸为法，如法得一寸。有以深益之，即材径也。

“薶”通“埋”。此与《九章算术》勾股锯圆材问相同。这是已知勾与股弦差求股、弦的问题。

此外，《数》中还有类似于《九章算术》均输章不属于均输类问题的算术难题，以及《九章算术》所没有的，与《算数书》同类的某些问题。

尽管我们还无法窥《数》之全豹，但从上面的叙述可知，《数》的内容相当丰富。

二　《算数书》的体例、表达方式及特点

1983年底、1984年初在湖北江陵（今荆州）张家山274号汉墓中出土了一批数学竹简，约190支完好。文物界根据第6枚背面的3字将其命名为《算数书》，见图版。存70个小标题，100余条术文或解法，80余道题目，约2/3的篇幅是抽象性术文及其例题。绝大多数是在秦或先秦完成的。有世界上最早的分数四则运算法则、比例算法、盈不足术、面积、

体积问题的算法以及若干算术杂题，为中国传统数学的第一个高潮出现在春秋战国时期提供了有力的佐证。它已经具备中国传统数学著作密切联系实际的特点。其解法有不同的类型和抽象程度。就数学理论所达到的高度而言，在后来的现存汉唐算经中，除《九章算术》及其刘徽注之外，可以说，再无居其右者。

《算数书》有70段，每一段有一个小标题。但其体例和表达方式非常复杂，异彩纷呈。

（一）《算数书》的体例

谈到体例，主要是术与题目的关系。《算数书》有以下各种情形：①

1. 第一类是非常概括抽象、严谨，并且应用相当广泛的运算法则与某些例题

这里有三种情形。

（1）术文单独立条，条名即术名，本条中没有例题，但是，随后的条目往往是其例题。以二条“少广”为例：

少广　求少广之术曰：先直广，即曰：下有若干步，以一为若干，以半为若干，以三分为若干，积分以尽所求分同之，以为法。即耤直田二百卌步，亦以一为若干，以为积步。除积步如法，得从一步。不盈步者，以法命其分。

随后第二条“少广”的9个题目是此条“少广”中“少广术”的应用。此外，“分乘”条提出分乘分术，随后的“乘”条中大量分数乘法是其应用；“石率”条提出石率术，随后的“贾盐”条即是其例题；“误券”条提出3道术文，随后的“租误券”条是其应用；“粺毇”条提出15道术文，无随后应用的条目或例题；“粟求米”条有5道术文，随后的“粟求米”、“米求粟”条分别引用其中一道。

（2）术、题在同一条中，条名与术名相同。比如“合分”条［图3-5-1（b）］：

合分　合分术曰：母相类，子相从；母不相类，可倍、倍，可三、三，可四、四，可五、五，可六、六，七亦辄。倍、倍，及三、四、五之如母。母相类者，子相从。其不相类者，母相乘为法，子互乘母，并以为实，如法成一。今有五分二、六分三、十分八、十二分七、三分二，为几何？曰：二钱六十分钱五十七。其术如右方。有曰：母乘母为法，子羡乘母为实，实如法而一。其一曰：可十、十，可九、九，可八、八，可七、七，可六、六，可五、五，可四、四，可三、三，可倍、倍，母相类止。母相类，子相从。

有4道术文，1道例题。4道术文两两重复。属于这种情形的还有：约分、径分、羡除、郓都、刍童术、旋粟、囷盖、圜亭、井材、以圜材方、以方材圜、启从、大广、里田等条。

（3）术、题在一条中，条名为题名，而不是术名。如“出金”条，“出金”是此条中题目的名称，其术文有2条，分别对应于《九章算术》的“减分术”与“课分术”，而没有相应的术名：

出金　有金三朱九分朱五。今欲出其七分朱六，问余金几何？曰：余金二朱六十三分朱卌四。其术曰：母相乘也为法，子互乘母，各自为实，以出除焉，余即余也。以九分朱乘三朱，与小五相并。今有金七分朱之三，益之几何而为九分七？

---

① 郭书春，试论《算数书》的理论贡献与编纂，法国汉学第6期，中华书局，2002年。第505～537页。本书做了某些观点的修正。

曰：益之六十三分朱廿二。术曰：母相乘为法，子互乘母，各自为实。以少除多，余即益也。

属于这类情形的还有相乘条的乘分术，分乘条的分乘分术，分钱、方田条的赢不足术等。

这第一类的术文，大多数在表述上比《九章算术》古朴；有的，比如赢不足术，不如《九章算术》的严谨；而粟求米术只是《九章算术》的今有术的应用之一，在那里是一条二级术文，在这里却是一级术文。但是，这类术文就其抽象程度与应用广泛，以及在当时的数学中所起的作用，与《九章算术》的若干抽象性术文是不分轩轾的，它们是这些条目的中心。因此与《九章算术》一样，可以称为术文统率例题的形式。将一类各种不同的数学问题抽象成一类数学模型，进而归纳出抽象性的术文，这是深刻的数学理论创造。这就是陈子所说的“类以合类”。这类条目有45条，大约占《算数书》的1/2。

在这类情形中，术文与题目的位置也各不相同。

2. 第二类是应用问题集的形式，都是题目跟随一条术文

就术文而言，有两种情形：

（1）术文比较抽象。以息钱条为例：

息钱　贷钱百，息月三。今贷六十钱，月未盈十六日归，计息几何？得曰：廿五分钱廿四。术曰：计百钱一月积钱数，以为法。直贷钱，以一月百钱息乘之，有以日数乘之为实。实如法得一钱。

这条术文虽未离开贷钱这个具体对象，却比《九章算术》同类问题的术文要抽象些，对已知“月百钱息”的任何利息问题都是适应的，是关于一种问题的抽象性术文。狐皮、金贾、舂粟、取枲程、粟米并、羽矢（第2条）、丝练等条亦如此。

（2）术文是演算细草。以共买材条为例：

共买材　三人共材以贾，一人出五钱，一人出三钱，一人出二钱。今有赢四钱，欲以钱数衰分之。出五者得二钱，出三者得一钱五分钱一，出二者得五分钱四。术曰：并三人出钱数以为法，即以四钱各乘所出钱数，如法得一钱。

狐出关、女织、并租、负米、铜秏、传马、妇织、羽矢（第1条）、桼钱、缯幅、㱃桼、税田、程竹、医、贾盐、挐脂、取程、秏租、米粟并、粟米并、负炭、卢唐、行、米出钱、除、启广等条亦如此。

（二）《算数书》的表达方式①

1. 提问和答案的表示

（1）提问方式。

《算数书》问题的表述没有统一模式。其提出数学问题的方式有2类：

第一类不以“几何”发问，采取直叙方式，秏租、取程、共买材、里田、启从、约分、径分、秏、粟米并、除、郓都、刍、旋粟、囷盖、圜亭、井材、少广条均如此。

这种方式可能相当早，或许是中国传统数学问题的最原始状态。

第二类以“几何”发问，合分、挐脂、贾盐、粟求米、米求粟、出金条、出金、妇织、

① 郭书春，试论《算数书》的数学表达方式，中国历史文物，2003，2：28～30。

挐脂、米粟并、粟米并、狐出关、狐皮、女织、负米、桼、分钱、大广、并租、金贾、春粟、铜秏、传马、羽矢、桼钱、缯幅、息钱、租误券、负炭、米出钱、方田、以圜材方、以方材圜、圜材、井材、税田、行、启广、第二条取程、取枲程、取程、程竹、医、卢唐、羽矢等条均如此。

其中，以“今有”起首，以“几何”发问，有5种方式，共18条。这项方式成为后来中国传统数学中表述数学问题的标准方式，《九章算术》及其后来的著作都采用这项方式。

（2）答案的表示。

《算数书》答案的引出方式也多种多样，相当复杂。具体说来有以下4种：

①没有任何引语，直接给出答案者有13条，25个题目：约分、径分、粟米并、除、郓都、刍、旋粟、囷盖、圜亭、井材、启从（3题）、少广（9题）、里田（3题）。

②用“曰”引出答案者有30条，31个题目：合分、出金（2题）、女织、金贾、春粟、传马、羽矢、桼钱、缯幅、歓桼、程竹、医、贾盐、挐脂、秏租、租误券、粟求米、米求粟、米粟并、负炭、卢唐、羽矢、行、米出钱、方田、以圜材方、以方材圜、圜材、启广、大广。

③用“得曰”引出答案者有13条，14个题目：狐出关、狐皮、并租、负米、铜秏、妇织、息钱、税田、挐脂、取程（2题）、粟米并、分钱、米出钱。

④用“得”引出答案者有4条，11个题目：径分、共买材、取枲程、秏（8题）。

其中用“曰”引出答案者最多，达30条31个题目，约占《算数书》中能辨认题目的一半。其次是没有任何引语，直接给出答案者，有13条25个题目。再次是用“得曰”引出答案者，有13条14个题目。最后是用“得”引出答案者，有4条11个题目。值得注意的是，没有一个问题使用《九章算术》及其后的著作给出答案的标准方式“荅曰”者。

2. 分数的表示

（1）非名数分数。

现今的非名数分数$\frac{a}{b}$（a、b皆为正整数），《算数书》的表示方式有两种：在相乘、乘、合分、出金4条中称为“b分a”；在约分、径分、启从3条中称为“b分之a”。

（2）名数分数。

《算数书》对名数分数的表示则纷杂得多。例如，现今以尺为单位的分数$m\frac{a}{b}$尺（m、a、b均为正整数），有少数条目在“分”后没有名数单位。

①在负米、金贾、粟求米、圜亭、以方材圜、狐出关、狐皮、并租8条中表示成m尺b分a。其中，狐出关、狐皮、并租3条的答案自第二个分数起表示成m尺分a。

②在“卢唐”条中表示成m尺b分之a。

大部分条目在“分”后表示出名数单位：

①在相乘、合分、径分、出金、并租、春粟、铜秏、羽矢、桼钱、缯幅、息钱、共买材、女织、妇织、歓桼、税田、程竹、医、贾盐、挐脂、取程、秏租、租误券、秏、米粟并、粟米并、米出钱、粟求米、负炭、方田、以圜材方等31条中表示成m尺b分尺a；

②在取程、取枲程、秏、少广、大广等5条中表示成m尺有b分尺之a；

③在出金、粺毇、秏、旋粟、启从、大广等6条中表示成m尺b分尺之a。

共有3种，凡31条。其中最多的是“m尺b分尺a”的表示方式，达24条之多，接近有名数分数条目的$\frac{4}{5}$。

在《算数书》中，有的同一条中使用不同的分数表示方式。例如，“取程”条同时使用“m尺b分尺之a”与“m尺有b分尺之a”两种方式。

此外，狐出关、狐皮、并租等3条自第二个分数起省略分母。

3. 除法的表示

在中国古代的除法中，被除数称为“实”，除数称为“法”。中国传统数学密切联系实践，所分的东西都是谷物、丝绸、金银等实有的东西，故称为“实”。而用来分的数实际上是一种标准，便称为“法”。《管子·七法》曰：“尺寸也，绳墨也，规矩也，衡石也，斗斛也，角量也，谓之法。”实施除法的过程称为“实如法而一”或“实如法得一钱（或其他单位)”，意谓“实”中有与“法”相等者就得一，那么“实”中有几个与“法”相等的部分，就得几。《算数书》中关于法、实和除法的表示也相当复杂。大体说来，有以下各种情形。

(1) 只点明“法”，而未点明“实”。只点明“法”。只有程竹1条。约分条只点明“法”，有“实”而未以“实”名之，最后说“如法而成一”。共买材、舂粟、铜秏、税田、取程、粟米并、负炭、米出钱、少广、少广等10条只点明“法”，有“实”而未以“实”名之，最后说“（令）如法（得）一尺（或其他单位)”。

(2) 只给出“实”，未点明“法”，最后说“令……而成一”，有以圜材方、以方材圜凡2条。

(3) 给出“法”与“实”。给出“法”与“实”，无“实如法而一”，有相乘、分乘、径分、出金、狐皮、负米、传马、医、石率、贾盐、租误券、粟求米、米求粟、米粟并、粟米并、卢唐、羽矢、分钱、方田、启广等凡20条。给出“法”、“实”，最后说“如法成一”。只有合分1条。给出“实”、“法”，最后说“如法（而）一尺（或其他单位)”，有妇织、羽矢、误券、大广等凡4条。给出“法”、“实”，最后说“实如法而（或得、成）一”，有合分、狐出关、饮桼、取枲程、粟米并、启从等凡6条。给出“法”、“实”，最后说“实如法得（一）尺（或其他单位)”，有女织、金贾、桼钱、缯幅、息钱、挐脂、启从等凡7条。

(4) 不点明“法”、“实”，最后说“令……而一”、“如……成一数”、“除……而得一”、“令如……而得一步”，有取程、秏租、丝练、启从等凡4条。

(三)《算数书》的特点

综上所述，《算数书》有几个重要特点。

第一，《算数书》有大量十分抽象的术文，体现了相当高的数学理论水平，从而部分反映了中国先秦数学在数学理论上所达到的高度。这些术文按抽象程度高低和应用范围大小可以分成两类。第一类是非常概括抽象、应用非常广泛的运算法则。第二类是关于一种问题的抽象性术文。这些术文虽不如上一类抽象程度高、应用宽泛，但也不像《九章算术》卷三、卷六两卷的后半卷以及《孙子算经》的问题那样，术文都是具体的数字运算。

以上两类情形，即提出抽象性术文及其应用部分，连同“增减分”条及其应用的1条，

涉及《算数书》70条中的45条，接近2/3，虽逊于《九章算术》，却是后来其他数学著作所无可比拟的，充分反映了《算数书》对数学理论的重视和取得的重大成就。

第二，《算数书》具有非常强烈的实际应用性。与《九章算术》、《孙子算经》等著作中有相当多的题目是为阐明某些术即算法而设计的趣味题，并不是直接来源于实际应用不同，《算数书》完全是为了解决人们日常需要所提出的数学问题而设计的，没有一道不是来源于人们生产、生活的实际题目。

第三，《算数书》以计算为中心，在它70条中，没有一条不是关于计算的。即使关于分数的“增减分”条，也是如此。

第四，《算数书》中数学问题和数学术语的表达方式，如问题的提出与发问方式，答案、除法、分数等的表示十分纷杂，没有统一的格式。经初步统计，数学问题的起首方式有4种，发问方式有3种，问题答案的表示方式有4种，除法的表示方式有7类19种，名数分数的表示方式有2类6种。

三　《算数书》的编纂

谈到《算数书》的编纂，首先应该注意到两点。

1.《算数书》内容多处重复

（1）标题重复。在《算数书》的70个标题中，有2条“羽矢”，2条“粟求米”，2条“少广”。

（2）预备知识重复。例如“相乘”与“乘”二条中分数乘法算表有部分重复；粟米互换的“程禾”、“粺毇”、“粟为米”、“粟求米”中重复很多，“粟求米”完全涵盖了“粺毇”条的内容。

（3）术文重复。首先是不同的条目中有同样的术文。例如，《算数书》有两条乘分术，分别在“相乘”条中与“分乘”条中，二条“粟求米”与“米求粟”开头的抽象性术文重复。其次是一条内有重复的术文。例如，“约分”条中的“约分术”与“其一术”程序相同而文字稍异；又如，“合分”条有4条抽象性术文，“母相类，子相从”重复了2次，而“母不相类”有2种处理方法，各重复了1次；“里田”条中“里乘里，里也”重复了2次，而1平方里化顷、亩的方法重复了3次，“广一里，从一里”的题目也重复了1次。

2.《算数书》有的内容矛盾，不能自洽

例如，为率27者，在“程禾”条中为糳米，在“粟为米”条中为粺。甚至有的同一条的内容就矛盾。例如，程禾条第一段中的粟、米、毇的比率为50∶30∶24，第二段则为60∶30∶20。

由这两点，我们自然得出这样一个结论：《算数书》是从不同的书中摘录而成的，而且未加以系统梳理、归纳。这个结论还可以从《算数书》的问题提出方式，答案的表示，术与问题的关系及其表述方式，分数的表示，以及法、实和除法的表示方式多种多样，没有统一的格式得到佐证。

但是，《算数书》摘编的都是些什么著作，写于什么时候，都已经无从考察。其“方田”条使用赢不足术由正方形的面积求边长，不是借助于开方术，而且现存的整个《算数书》也没有开方术的内容。这起码可以肯定地说，在“方田”条成立时，人们还不懂开方

术。因此，《算数书》“方田”条成立的时代，应该在通晓开方术的陈子之前。程贞一、席泽宗认为，陈子活动于公元前 5 世纪。[①] 联系到陈子关于数学知识“类以合类”的思想，那么，作为《算数书》来源的某些著作，不会晚于公元前 5 世纪。

总之，《算数书》不是一部系统的专门性的数学著作，而是多年间，甚至长达几个世纪不断地从不同的数学著作中摘录，并稍加归类而成的，即所谓撮编作品。它不是一部数学教科书，或为数学工作者编纂的著作，而是为了自用或家用，或是为了负责钱谷、土木工程、手工业工场的下级官员使用方便编纂的。

四　《算数书》的内容及其在中国数学史上的地位

《算数书》的数学内容大体可以分成乘法算表，分数性质及四则运算，衰分与返衰，粟米互换与异乘同除，正负数乘除法，同工共作，盈不足，化圆为方与化方为圆，由积求广、从与少广，大广与里田，体积等类问题。有的内容是现存传统数学著作中所没有的。就“九数”而言，它含有方田、粟米、衰分、少广、商功、赢不足等类型的术、题，出土的竹简中缺少均输、方程、勾股的内容。就《算数书》现存部分而言，其内容当然远逊于中国传统数学最重要的经典《九章算术》，但远远超过综合性著作《五曹算经》，就是与《孙子算经》相比，也各有千秋。我们将这三部著作的内容比较如下：

内容	预备知识	分数性质	分数四则	粟米互换	异乘同除
算数书	有	有	有	有	有
孙子算经	有	无	有	有	有
五曹算经	无	无	无	有	有

内容	衰分	同工共作	赢不足术	化圆为方	化方为圆
算数书	有	有	有	有	有
孙子算经	有	有	有	有	有
五曹算经	无	无	无	有	有

内容	求从（广）	少广	大广田	曲线形面积	圆柱	圆锥
算数书	有	有	有	无	有	有
孙子算经	无	无	无	有	有	有
五曹算经	无	无	无	有	有	无

内容	委粟	圜亭	刍甍	刍童	羡除	堑	开方	同余方程
算数书	有	有	有	有	有	无	无	无
孙子算经	有	有	无	无	无	有	有	有
五曹算经	有	无	无	无	无	无	无	无

由这 24 项内容的对照可以看出，《算数书》有 20 项，《孙子算经》有 17 项，《五曹算

① 程贞一、席泽宗，陈子模型和早期对于太阳的测量。京都大学人文科学研究所研究报告，中国古代科学史论续篇，1991 年，第 377 页。

经》仅有7项。当然，这里只列出了一些主要内容，《孙子算经》还有个别内容，如鸡兔同笼等，未列入。已经列入的内容，如“预备知识”一项，尽管有的内容《算数书》有而《孙子算经》没有，但就“预备知识”的整体而言，《孙子算经》的内容要比《算数书》多。不过总的说来，《算数书》与《孙子算经》涉及的数学分支各有千秋，而远远超过《五曹算经》，大体是符合实际情况的。

再从所含有的题目数量看，《算数书》能辨认的题目有86个；《孙子算经》卷二、三共有题目64个；《五曹算经》有67个，但都十分浅显，甚至没有任何分数运算。换言之，就题目的数量而言，《算数书》稍多于《孙子算经》与《五曹算经》。而在深度上，则远远超过《五曹算经》。如果考虑到《算数书》中大部分算题的形成年代至迟不会晚过秦代，有的甚至更早，那么，它比《孙子算经》至少要早六七百年[①]，比《五曹算经》早八九百年。因此，《算数书》在中国传统数学史上的地位，要比《孙子算经》、《五曹算经》重要得多。

第五节　《周髀算经》和陈子

一　《周髀算经》

《周髀算经》，二卷，《算经十书》之一，如图3-5-1所示。中国最早用数学方法阐明盖天说和四分历法的数理天文学著作。原名《周髀》，陈子在回答荣方“周髀者何”的问题时说：“古时天子治周，此数望之从周，故曰周髀。髀者，表也。”就是说，“周髀”的本义是用竖立在周城的表竿进行天文观测计算。有人将“周”理解成周天，失之。盖天说衰败之后，人们仍然重视其中的数学内容。唐初李淳风等整理“十部算经”，方加“算经”二字。

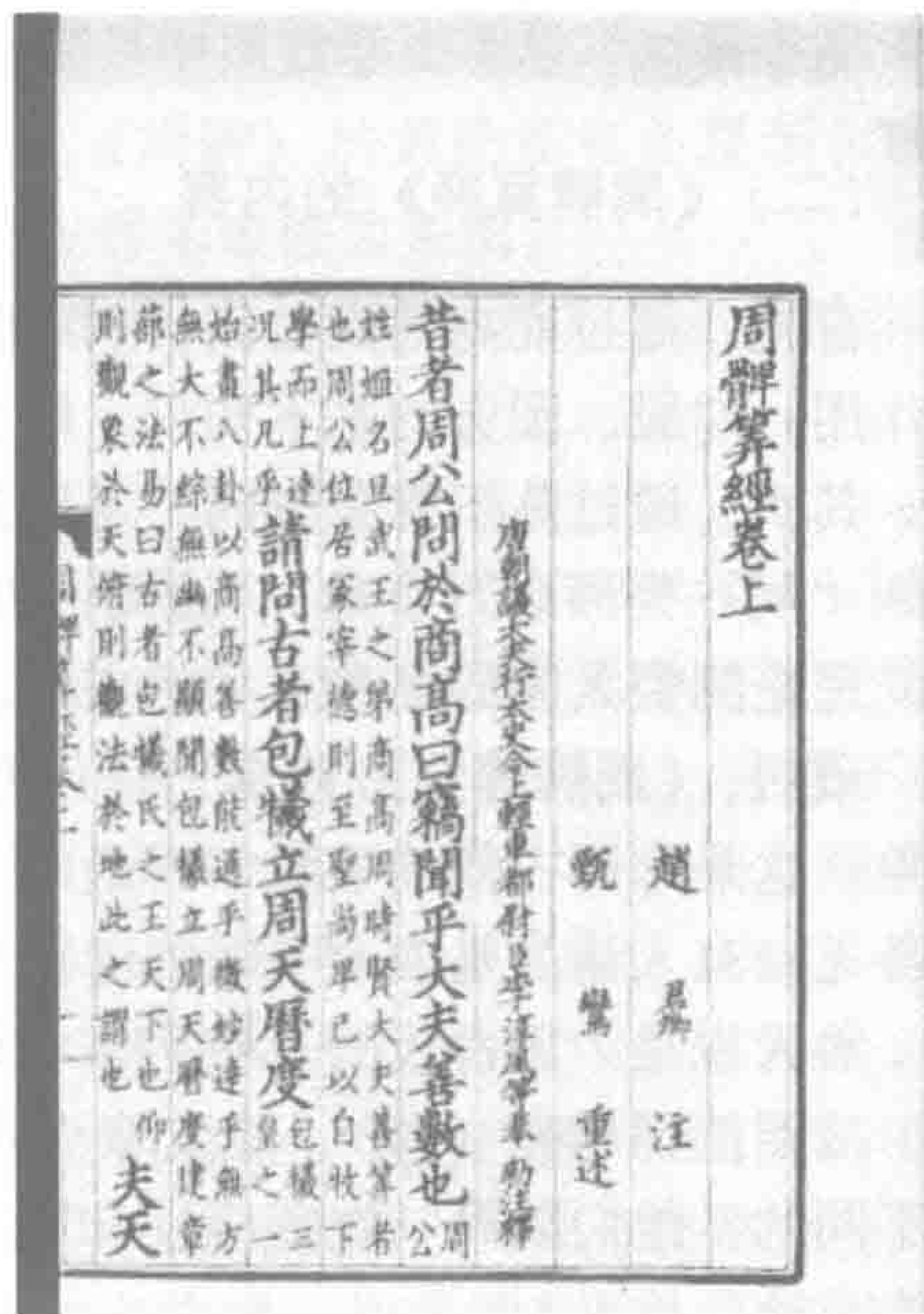

周髀算經卷上
趙君卿注
甄鸞重述
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉敕注釋
昔者周公問於商高曰竊聞乎大夫善數也 周公姓姬名旦武王之弟商高周時賢大夫善算者也周公位居冢宰德則至聖尚卑己以自牧下學而上達況其凡乎
請問古者包犧立周天曆度 包犧三皇之一始畫八卦以商高善數能通乎微妙達乎無方無大不綜無幽不顯聞包犧立周天曆度建章蔀之法易曰古者包犧氏之王天下也仰則觀象於天俯則觀法於地此之謂也
夫天

图3-5-1　《周髀算经》卷上书影（南宋本）

（一）《周髀算经》的编纂与构成

《周髀算经》不具作者，因此其编纂是学术界长期争论的问题。南宋鲍澣之根据卷上之首是商高答周公问，认为“其书出商、周之间”。[②] 然此段以“昔者”起首，可见所记之事在周初，而记此事之时则当在此后很久。而赵爽说陈子答荣方问“非《周髀》之本文”，可见赵爽认为《周髀》之本文，原只是商高答周公问，至于陈子答荣方问则是《周髀》本文的增补。其起首也有“昔者”二

① 钱宝琮认为，《孙子算经》成书于公元400年前后。见：钱宝琮校点，《算经十书》，下册。中华书局，1963年，第275页。李俨钱宝琮科学史全集，第四卷，辽宁教育出版社，1998年，第217页。

② 南宋·鲍澣之，《周髀算经》后序。见：《宋刻算经六种》，文物出版社，1980年。

字，可见系后人追记。

陈子答荣方问包含哪些内容，学术界诸说并立。江晓原认为自卷上“昔者荣方问于陈子”至卷下末，全是陈子答荣方问。① 古克礼（C. Cullen）将《周髀》分成11个部分，第1、2部分分别是商高答周公问、陈子答荣方问。以下的方圆之法，七衡，天地形状及昼夜，璇玑、北极与五带，周天度和北极距度，晷影表，月离，日月升落与季节，历法周期等9节都不是陈子的话。② 我们认为古克礼的看法比较合理。

至于后9部分内容写成的时代，钱宝琮根据《周髀》引用《四分历》，认为其成书应在汉武帝改用《太初历》（公元前104）以前；又根据《周髀》所载二十四气的名称及顺序与《淮南子·天文训》基本相合，断定《周髀》是公元前100年前后的作品。③《四分历》产生于春秋后期，说《周髀》成书于改用《太初历》之前，无疑是正确的。然而，《周髀》与《淮南子》所记二十四气相合，怎么能肯定是《周髀》引用了《淮南子》，而不会是《淮南子》引用了《周髀》？因此，《周髀》的成书年代实际上并未解决。我们只能说，《周髀》最晚成书于公元前100年前后，这远非它成书的可靠年代。

因此，《周髀》是长期积累编纂而成的一部著作。最先只是商高答荣方问，后来增补了陈子答荣方问，再后来陆续增补了其他部分，最晚在公元前1世纪或更早时代成书。无论如何，赵爽认定的《周髀》本文在分量上与陈子答荣方问及其后部分相比已经显得很少了。一般认为，《周髀》是在浑天说产生并逐步占据上风时以盖天说为主也融会了浑天说的某些观点而形成的。

（二）《周髀算经》的内容

首先，通过商高答周公问，《周髀算经》阐述了数学方法在测天量地、制定历法中的巨大作用，勾股、圆方的基本知识，以及用矩之道。

其次，通过陈子答荣方问，《周髀算经》提出学习数学要“通类”，能“类以合类”，做到“问一类而以万事达”，达到“知道”的境界。陈子还阐述了用勾股定理、开方法和比率的理论测望太阳的高和直径的方法。

最后，《周髀算经》以准公理化方法描述了盖天说的宇宙模式，并用以解释有关的天文现象。这是中国古代建立科学理论的一次尝试。至于这个宇宙模式中天与地的关系，亦是仁智各见。有人认为是两个平行的球冠形，也有人认为是两个平行的平面，还有别的说法。

盖天说是中国古代的一种宇宙学说，大约产生于殷周之际，到《周髀》时发展到最高峰。按照能田忠亮（日）、钱宝琮、薄树人等学者的观点，《周髀》两卷所反映的宇宙模式是不同的，他们以第一次盖天说和第二次盖天说相区分。也有人认为《周髀》全书形成了一个自洽的体系。

《晋书·天文志上》大体勾勒出《周髀》盖天说的宇宙模式：

> 其言天似盖笠，地法覆槃，天地各中高外下。北极之下为天地之中，其地最

---

① 江晓原，《周髀算经》译注，辽宁教育出版社，1996年。本编凡引江晓原言论，均据此。

②［英］C. Cullen（古克礼）*Astronomy and Mathematics in Ancient China, the Zhou Bi Suan Jing*. Cambridge University Press，1996.

③ 钱宝琮，《周髀算经》提要。钱宝琮校点《算经十书》上册，北京：中华书局，1963年，第4页。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第四卷，辽宁教育出版社，1998年，第4页。

高，而滂沱四隤，三光隐映，以为昼夜。天中高于外衡冬至日之所在六万里。北极下地高于外衡下地亦六万里，外衡高于北极下地二万里。天地隆高相从，日去地恒八万里。日丽天而平转，分冬夏之间日所行道为七衡六间。每衡周径里数，各依算术，用勾股、重差推晷影极游，以为远近之数，皆得于表股者也。①

《晋书·天文志》又载《周髀》家说。两者稍有不同，后者较现《周髀》的理论为粗糙，是较为原始的盖天说。两者的不同既反映出盖天说发展的不同阶段，也反映了《周髀》的编纂经历了相当长的过程。

《四分历》大约产生在公元前5世纪，以$365\frac{1}{4}$日为一个回归年，故名。它以阴历月为基础，一个朔望月为$29\frac{499}{940}$日，故利用闰月兼顾太阳的周年运动。《四分历》19年有7个闰月。因此《四分历》实际上是阴阳合历。《周髀》系统阐述了《四分历》的基本数据及有关算法。

为了适应农业生产的需要，人们将一个太阳年划分成若干等份，便产生了节气的概念。经过逐步演变，大约到战国时期，形成了二十四节气。《周髀》记载了二十四节气的晷影长度及其计算方法。其晷影长度是一个等差数列。

《周髀》用七衡图解释了季节和昼夜的变化，并由太阳光照半径的假设解释了昼夜和星辰的出没现象。七衡的直径长度也是一个等差数列。这都是中国数学史上较早的等差数列。

《周髀》还有用表测量二十八宿距度的方法。此外，《周髀》的黄图还有冬夏至、春秋分、二十八宿及其他星象，是以北极为中心的全天星图，后来被称为盖图。

《周髀》的大量计算方法中都用到繁杂的分数计算，说明人们谙熟分数四则运算法则。

（三）《周髀算经》的版本

《周髀算经》有赵爽注、北周甄鸾重述、唐李淳风等注释等。传本《周髀算经》皆将这些注释与本文一体行世。李淳风等整理的《周髀算经》最迟在唐中叶就有几个稍有歧异的抄本，均不传。北宋元丰七年（1084）秘书省以其中一个抄本为底本刊刻之，今亦不传。南宋嘉定六年（1213）鲍澣之翻刻了秘书省刻本，自明末之后仅存一部，今藏于上海图书馆。1980年文物出版社原式影印，收入《宋刻算经六种》。清康熙二十三年（1684）汲古阁主人毛扆影抄了南宋本，世称汲古阁本。唐中叶的另一种抄本于明永乐六年（1408）被分类抄入《永乐大典》。另外，明万历年间胡震亨将《周髀算经》刻入《秘册汇函丛书》，除已有的赵、甄、李三家注之外，又增加了唐寅注，题"明赵开美校"。明末常熟汲古阁主人毛晋翻刻胡震亨刻本，收入《津逮秘书》。清《古今图书集成·历象典》、嘉庆年间张海鹏的《学津讨原》、光绪年间朱纪荣的《槐庐丛书》、民国年间商务印书馆的《四部丛刊》、中华书局的《四部备要》等均以赵开美校本为蓝本。清乾隆三十八年（1773）开《四库全书》馆，戴震从《永乐大典》中辑录出《周髀算经》。他以胡震亨刻本为底本，以《永乐大典》的辑录本参校，先排印活字版，收入《武英殿聚珍版丛书》本，后抄入《四库全书》。1776年或稍后，戴震以汲古阁本为底本重加校勘，后由孔继涵刻入微波榭本《算经十

① 唐·房玄龄，晋书，中华书局，1974年。本编凡引用《晋书》文字，均据此。

书》。钱宝琮以微波榭本为底本校点，1963 年收入中华书局出版的《算经十书》。刘钝、郭书春以南宋本为底本重新点校，1998 年收入辽宁教育出版社出版的郭书春、刘钝点校的《算经十书》（简体字本），2001 年台湾九章出版社出版了繁体字修订本。

二　陈　子

陈子是著名数学家、天文学家，生平不详。据程贞一、席泽宗考证，他大约活动在公元前 5 世纪。

（一）陈子答荣方问

《周髀算经》载，荣方问于陈子曰："今者窃闻夫子之道，知日之高大，光之所照，一日所行，远近之数，人所望见，四极之穷，列星之宿，天地之广袤，夫子之道皆能知之。其信有之乎？"陈子答曰："然。"荣方请求陈子教他数学，问："今若方者可教此道邪？"陈子答曰："然。此皆算术之所及。子之于算，足以知此矣。若诚累思之。"荣方"归而思之，数日不能得"，又来请教陈子。陈子向他阐发了关于数学的特点、学习方法方面的许多道理。

（二）类以合类

陈子对荣方说：

> 子之于数未能通类。是智有所不及，而神有所穷。夫道术言约而用博者，智类之明。问一类而以万事达者，谓之知道。今子所学，算数之术，是用智矣，而尚有所难，是子之智类单。夫道术所以难通者，既学矣，患其不博；既博矣，患其不习；既习矣，患其不能知。故同术相学，同事相观，此列士之遇智、贤不肖之所以分。是故能类以合类，此贤者业精习智之质也。夫学同业而不能入神者，此不肖无智而业不能精习，是故算不能精习。

这是中国数学发展史和数学思想史上一段相当精彩的论述。

陈子指出数学具有"类以合类"的特点，道术即数学方法"言约而用博"，学习数学要能"通类"，做到"类以合类"、"问一类而以万事达"，才能称为"知道"。这是当时存在的数学的总结，也规范了后来中国传统数学著作的特点与风格。《九章算术》就是按照"类以合类"的思想编纂的。

陈子认为，数学是聪明的学问，需要"用智"，就是充分发挥自己的智力。学习数学有博、习、知三个层次。根据赵爽的注释，博就是"广博"，必须有广博的数学知识；习就是"究习"，也就是深入研究；知就是"知类"，也就是"通类"。

为了做到"知类"，应该"同术相学，同事相观"。赵爽说，前者是"术教同者则当学通类之意"，后者是"事类同者观其旨趣之类"。能否做到此，是区别一个人智与愚、贤与不肖的标志。

陈子接着应荣方的要求阐述了用比例与勾股定理测望日之远近、大小的方法。

第六节　《九章算术》和张苍、耿寿昌

一　《九章算术》的内容

《九章算术》在唐初至清中叶称作《九章算经》，清中叶又恢复原名，九卷，《算经十书》之一，是中国传统数学最重要的著作，见图版。它的主要内容在先秦已具备，因秦火及秦末战乱散坏，经西汉张苍、耿寿昌先后删补而成。分九章：①方田——分数四则运算法则与各种面积公式；②粟米——以今有术为主体的比例算法；③衰分——比例分配算法以及异乘同除问题；④少广——面积与体积的逆运算，最重要的是开平方与开立方法；⑤商功——各种体积公式和土方工程工作量的分配算法；⑥均输——赋税的合理负担算法及各种算术难题；⑦盈不足——盈亏类问题算法及其在其他数学问题中的应用；⑧方程——线性方程组解法与正负数加减法则；⑨勾股——勾股定理、解勾股形及简单测量问题。《九章算术》的主体采取术文统率例题的形式，含有近百条十分抽象的术文即公式、解法以及246个例题。其中，分数理论，比例、盈不足、开方等算法，线性方程组解法，正负数加减法则及解勾股形方法等都是具有世界意义的成就。它奠定了中国传统数学的基本框架，和长于计算，以算法为中心，算法具有机械化、程序化、构造性的特点，以及数学理论密切联系实际的风格。

二　《九章算术》的体例和编纂

数学史界和学术界常将《九章算术》称为应用问题集，并且说都是一题、一答、一术。这个说法对不对呢？为了回答这个问题，我们必须详细考察《九章算术》的具体情况。

（一）术文与题目的关系

关于《九章算术》术文与题目的关系，大体说来有以下几种情形①：

1. 关于一类问题的抽象性术文统率若干例题的形式

这种形式往往是一术多题或一术一题。这是《九章算术》主要内容所采取的形式。这里又有不同的情形：

（1）给出一个或几个例题，然后给出一条或几条抽象性术文，而例题中只有题目、答案，没有具体演算的术文。以《九章算术》方田章合分术及其例题为例：

今有三分之一，五分之二。问：合之得几何？

答曰：十五分之十一。

又有……

又有……

① 郭书春，关于中国传统数学的“术”。李文林等主编，数学与数学机械化，山东教育出版社，2001年，第441～456页。此文在郭书春《古代世界数学泰斗刘徽》的有关论述基础上做了某些修正。

合分术曰：母互乘子，并，以为实。母相乘为法。实如法而一。不满法者，以法命之。其母同者，直相从之。

显然，这条术文是3个例题共有的，而不是哪个例题特有的。有的著述从《九章算术》都是“一题、一答、一术”的成见出发，说合分术是方田章第九题的术文，这显然是不恰当的。《九章算术》的方田章，粟米章的2条经率术、其率术、反其率术，少广章的开方术、开圆术、开立方术、开立圆术，商功章除城垣堤沟堑渠术、刍童等术之外的内容，均输章的均输粟术、均输卒术、均赋粟术等4术，盈不足章的盈不足术及其一术、两盈两不足术及其一术、盈适足不足适足术等5术，勾股章的勾股术、勾股容方、勾股容圆以及关于测邑的5术等，都属于这类情形，共有73术，106个例题（商功章还有6术的例题附于其他题目之后，未计在内）。

（2）先给出抽象的术文，再列出几个例题，而例题只有题目、答案，亦没有演算术文。以《九章算术》商功章刍童术及其例题为例：

刍童、曲池、盘池、冥谷皆同术。

术曰：倍上袤，下袤从之；亦倍下袤，上袤从之；各以其广乘之。并，以高若深乘之，皆六而一。

今有刍童，下广二丈，袤三丈；上广三丈，袤四丈；高三丈。问：积几何？

答曰：二万六千五百尺。

今有曲池……

以下是关于曲池、盘池、冥谷的例题。《九章算术》商功章城、垣、堤、沟、堑、渠术及其例题亦如是。共2术，10例题。

（3）先给出抽象性的总术，再给出若干例题，而例题包含了题目、答案、术文三项。其中的术文是总术的应用。以《九章算术》粟米章今有术及31个粟米互换题目为例：

今有术曰：以所有数乘所求率为实，以所有率为法。实如法而一。

今有粟一斗，欲为粝米。问：得几何？

答曰：为粝米六升。

术曰：以粟求粝米，三之，五而一。

今有粟二斗一升，欲为粺米。问：得几何？

答曰：粺米一斗一升五十分升之十七。

术曰：以粟求白米，二十七之，五十而一。

下面还有29个同样类型的例题，不赘。属于这类情形的还有衰分章的衰分术、返衰术及其9个例题，少广章少广术及其11个例题，盈不足章使用盈不足术解决的11个一般算术问题，以及方程章方程术、正负术、损益术及其18个例题，共7术（盈不足术不计在内），80个例题。

这三种情形共82术，196问，约占全书的80%。尽管其间的表达方式有差异，却有三个共同特点：首先，在这里术文是中心，是主体，题目是作为例题出现的，是依附于术文的，而不是相反。其次，在这里，作为中心的术文非常抽象、严谨，具有普适性，换成现代符号就是公式或运算程序。第三，这些术文具有构造性、机械化的特点。因此，我们将之称为术文统率例题的形式。很遗憾，后来的数学著作基本上没有沿袭这种体例。

2. 应用问题集的形式

这种形式往往是一题一术。其术文的抽象程度也有所不同：

（1）关于一种问题的抽象性术文。以均输章凫雁问为例：

今有凫起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海。今凫、雁俱起，问：何日相逢？

答曰：三日十六分日之十五。

术曰：并日数为法。日数相乘为实。实如法得一日。

其术文虽未离开日数这种具体对象，但没有具体数字的运算，可以离开题目而独立存在，将凫、雁换成其他鸟类或运动的器物，将南海、北海换成其他地点，将七、九换成其他数字，都可以应用这条术文。就是说，它对同一种问题都是适应的。在均输章此问之下，长安至齐、牝牡二瓦、矫矢、假田、程耕、五渠共池等的术文，以及粟米章今有术的31个例题，衰分章衰分术、返衰术的9个例题，勾股章的持竿出户等问也都是这类性质的术文。

（2）具体问题的算草。《九章算术》中衰分章的非衰分题目，均输章的非均输类的大部分题目，勾股章的解勾股形题目及“因木望山”等4个题目都是如此。以勾股章开门去阃问为例：

今有开门去阃，不合二寸。问：门广几何？

答曰：一丈一寸。

术曰：以去阃一尺自乘。所得，以不合二寸半之而一。所得，增不合之半，即得门广。

术文以题目的具体数字入算，它是不能离开题目而独立存在的。

这部分内容共有50个题目，全部在衰分章的非衰分类问题，均输章的非典型均输类问题以及勾股章的解勾股形等问题。显然，这些内容是以题目为中心的，术文只是所依附题目的解法甚至演算细草，计算程序是正确的，尽管第（1）种的术文，对某一种问题具有普适性，却不具有《九章算术》大多数术文那样高度的抽象性、广泛的普适性等特点。

总之，《九章算术》的术文尽管都表述为“术曰”，它们却有不同的层次：第一个层次是一类问题的总术，第二个层次是一种问题的术文，第三个层次是题目的演算细草。有的著述笼统地说《九章算术》共有多少多少术，不作具体分析，不仅没有什么意义，而且会误导读者。

此外，《九章算术》粟米章将“粟米之法”即各种粟米的互换比率置于该卷卷首。后来的《孙子算经》、唐中叶赝本《夏侯阳算经》，以至宋元的《测圆海镜》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》等都将预备知识置于卷首。

（二）《九章算术》的编纂

《九章算术》的编纂，不仅涉及某些历史人物的定位，而且关系到对先秦数学的认识，是中国数学史研究中的重大问题。

1. 《九章算术》编纂诸说

据现存史料文物，《九章算术》之名最先见之于东汉灵帝光和二年（公元179年）的大司农斛、权的铭文中：

依黄钟律历、《九章算术》，以均长短、轻重、大小，用齐七政，令海内都同。①

《九章算术》当然不是2世纪下叶才成书。但是，关于《九章算术》的编纂与成书年代，历代学者一直争论不休，归纳起来，主要有以下几种说法：

（1）刘徽的西汉张苍、耿寿昌在先秦遗文基础上删补而成说。

在现存资料中，刘徽最先谈到《九章算术》的编纂。他说：

周公制礼而有九数。九数之流，则《九章》是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

（2）西周初周公所作。

唐王孝通《上缉古算经表》说："昔周公制礼有九数之名，窃寻九数即《九章》是也。"② 南宋鲍澣之、清屈曾发等亦持这种看法。显然，这种看法是将刘徽的"九数之流，则《九章》是矣"修正成"九数"就是《九章》而得出的看法。

（3）黄帝、隶首所作。

唐赝本《夏侯阳算经》说："黄帝定三数为十等，隶首因以著《九章》。"北宋贾宪著《黄帝九章算经细草》，其书名冠以"黄帝"，当然亦认为《九章算术》系黄帝或隶首所作。南宋荣棨、元莫若等皆持此说。

（4）否定张苍删补《九章》，西汉中叶之后成书诸说。

清戴震说："今考书内有长安、上林之名。上林苑在武帝时，苍在汉初，何缘预载？知述是书者，在西汉中叶后矣。"③ 戴震此说一出，张苍未参与删补《九章算术》，似成定论。尽管钱宝琮发现汉高祖时已有上林苑④，然而他并未由此推翻戴震的看法，反而将《九章算术》成书时代更向后推，定在1世纪下半叶。⑤ 此后论者多在西汉中叶至东汉中叶之间各抒己见。有西汉中叶齐人所作说，有公元前1世纪成书说，有公元元年前后新莽时刘歆完成说，有1世纪下半叶成书说，也有马续编纂《九章算术》说。其中，影响比较大的是钱宝琮的看法与近年李迪提出的刘歆完成说。⑥

（2）、（3）两种说法是不必认真对待的，值得重视的是（1）（4）两项。

我们认为刘徽的说法最为可靠。（4）的各种见解尽管经过不同程度的考证，但都不足以推翻刘徽的论断；相反我们有充分证据说明刘徽的话是言之有据的。

为了正确解决这个问题，有一个态度问题必须首先解决。这就是，今天的研究者不能将刘徽关于《九章算术》编纂的论述与近人、今人关于《九章算术》成书的一些猜测放在同等的地位上来考察。只有首先驳倒刘徽，才能再考虑其他说法。因为刘徽的话是在《九章

---

① 国家计量总局，中国古代度量衡图集。北京：文物出版社，1984年，第97页。

② 唐·王孝通：缉古算经，郭书春点校。算经十书，郭书春、刘钝点校。简体字本，辽宁教育出版社，1998年。繁体字本，九章出版社，2001年。本编凡引《缉古算经》，均据九章版。

③ 清·戴震：九章算术提要。见：郭书春，汇校《九章算术》增补版，附录二。辽宁教育出版社，九章出版社，2004年。

④ 实际上，秦始皇时便有上林苑。见《史记·秦始皇本纪》。

⑤ 钱宝琮，戴震算学天文著作考，浙江大学科学报告，1934，1（1）。见：李俨钱宝琮科学史全集，第九卷。河南教育出版社，1993年。教育出版社，1998年。

⑥ 李迪，中国数学通史·上古到五代卷，江苏教育出版社，1997年。本编凡引此书文字，均据此。

算术》成书二三百年后，而戴震等的话则在2000多年之后。刘徽去古未远，他不仅能师承前贤关于《九章算术》编纂的可靠说法，而且能看到比近人、今人多得多的资料。如果找不到刘徽的论述与历史事实相矛盾的例证，就只有相信刘徽的话，其他说法都是无稽之谈。

2.《九章算术》所反映的物价所处的时代

与《九章算术》的编纂问题密切相关的“九数”及其在先秦文献中的反映，以及《九章算术》的体例，在前面已经讲过。而日本堀毅关于《九章算术》中的物价所反映时代的论述有助于解决《九章算术》的编纂问题。我们引用并作了某些修正①，其结果如下：

粟的价格：《盐铁论》、《汉书》及居延汉简等文献的记载是85～150钱/石，只有《史记》记载文帝时为10余钱/石，《九章算术》的价格为10～20钱/石（均输章第3、4问）。

黍的价格：居延汉简载110～150钱/石，《九章算术》方程章第18问为60钱/石。

麦的价格：居延汉简载90～110钱/石，《九章算术》方程章第18问为40钱/石。

米的价格：《史记》、《汉书》记载2000～10 000钱/石，而由《九章算术》的粟的平均价14.7钱/石换算成的粝米价为24.5钱/石。

马的价格：《史记》、《汉书》、居延汉简等记载9000～1 000 000钱/匹，《史记》、居延汉简另一些资料的记载4000～6000钱/匹，《九章算术》方程章第11问为5454 6/11钱/匹，方田章乘分术刘注为3750钱/匹。

牛的价格：《史记》、居延汉简记载800～3000钱/头，《九章算术》盈不足、方程章为991～3750钱/头。

羊的价格：《史记》、居延汉简等记载600～1500钱/只，《九章算术》盈不足、方程章为150～583.3钱/只。

犬的价格：居延汉简等记载500～600钱/只，《九章算术》盈不足、方程章为100～121钱/只。

豕的价格：《史记》、居延汉简的记载450～600钱/头，《九章算术》盈不足、方程章为300～900钱/头。

布的价格：居延汉简记载226～1333钱/匹，《九章算术》粟米、衰分章为125～245钱/匹。

素的价格：居延汉简等记载670～1000钱/匹，《九章算术》衰分章为500钱/匹。

缣的价格：居延汉简记载360～800钱，《九章算术》粟米、衰分章为472～512钱/匹。

丝的价格：居延汉简记载350～434钱/匹，《九章算术》粟米章为5～76.8钱/匹，衰分章为240～365钱/匹。

劳动收入，律平贾：《汉书》如淳注等记载24 000钱/年，《九章算术》衰分、均输章为1750～3450钱/年。

客庸：《汉书》如淳注等记载12 000～34 500钱/年，《九章算术》均输章为13 800钱/年。

黄金价格：《汉书》记载10 000钱/斤，《九章算术》盈不足章为9800钱/斤。

---

① 郭书春，张苍与《九章算术》。见：科史薪传，辽宁教育出版社，1997年，第114～117页。

白金价格：《汉书》记载6000钱/斤，《九章算术》均输章为6250钱/斤。

田地价格：《汉书》等记载1000～10 000钱/亩，居延汉简记载100钱/亩，《九章算术》盈不足章70～300钱/亩。

漆的价格：《史记》记载1200钱/斗，《九章算术》粟米章为345钱/斗。

酒的价格：《汉书》如淳注等记载为40钱/斗，《太平御览》引为1000钱/斗，《九章算术》盈不足章为10～50钱/斗。

因此，堀毅认为，尽管有的物价《九章算术》与汉代十分相近，但总的来说，差别是相当大的。"认为《九章算术》里的物价即汉代物价是颇勉强的。"而两者在粟、米、劳动收入等方面的差别，将成为考证《九章算术》所载物价年代的重大因素。

堀毅又分析了秦代及战国的物价。他推断战国及秦代物价，并与《九章算术》比较如下：

种类	《九章》	秦及战国
谷物	10～70钱/石	30钱/石（秦律18种） 45钱/石（李悝平籴法）
牛	991～3750钱/头	>660钱
羊	150～500钱/只	220～230钱/只
豕	300～900钱/头	220～230钱/只
犬	100～121钱/只	100钱/只
布匹	125～245钱/匹	55钱/匹
劳动收入	5～10钱/日或1752～3450钱/年 2500钱/年	6～8钱/日（秦简） 2250钱/年（李悝） 2600钱/年（秦简）

堀毅由此得出结论："《九章算术》基本上反映出战国、秦时的物价。"他认为，尤其是劳动收入的相近对证实上述结论具有很大的意义。因此，《九章算术》从整体上反映了战国与秦代的物价水平，而不是汉代的物价水平。堀毅的看法是有道理的。只是堀毅仍使用《九章算术》成书于1世纪的看法，无法自圆其说。

将《九章算术》中的价格所反映的时代分野与其体例的差异结合起来分析将更加强刘徽的看法。《九章算术》与汉代的价格的比较分析共涉及31个问题，其中与汉代价格相差较大而与战国、秦代接近的问题有粟米章的第34、37、39、40～44问，衰分章的第13、19问，均输章的第3、4问，盈不足章的第4、6、7问，方程章的第7、8、11、17、18问，凡20问。除了衰分章的第13、19问外，其体例全部属于术文统帅例题形式的（1）、（3）两种情形。

与汉代价格相近而与战国、秦代价格相差较大的题目有：粟米章第35、36问，衰分章第10、11、12、14、15问，均输章第7、15问，盈不足章第5、12问，共11问。而与秦、战国时代尚无法比较的3问。其中，有7问属于应用问题集的形式，只有粟米章二问、盈不足章二问属于术文统帅例题形式的第（3）种情形，后二问还无法与秦、战国比较。

3.《九章算术》的编纂

前面关于《九章算术》体例的分析说明，其中采取术文统率例题形式的三种情形共82术，196问，覆盖了方田、粟米、少广、商功、盈不足、方程等六章的全部，衰分、均输章

的衰分、均输问题以及勾股章的勾股术、勾股容方、容圆、测邑问题。而采取应用问题集形式的内容是余下的衰分章的非衰分类问题、均输章中的非典型均输类问题以及勾股章解勾股形问题。我们已指出，勾股章的勾股术等术是先秦九数中“旁要”的内容。那么若将勾股章的这部分恢复“旁要”的篇名，将衰分章、均输章剔除非衰分类、均输类的内容，则《九章算术》采取术文统率例题部分，其内容不仅完全与篇名相符，而且与二郑所说的“九数”惊人一致。这证明，刘徽所说的“九数之流，则《九章是矣》”，是言之有据的，“九数”确实是《九章算术》的滥觞。《九章算术》采取应用问题集形式的部分不仅体例、风格与术文统率例题的部分完全不同，而且题目的性质与所在章的篇名所反映的性质也有区别，有明显的补缀性质，编纂思想也有较大的差异。

这一分析，加之我们在堀毅关于《九章算术》物价的结论基础上的进一步分析，都证明了，《九章算术》的主体即采取术文统率例题部分的方法和大多数例题在战国及秦代已完成了，而带有明显补缀性质的衰分章与均输章的后半部分，即采取应用问题集形式的部分是西汉人所为。换言之，刘徽关于《九章算术》的编纂的论述是完全正确的。

总而言之，现有的历史资料不仅没有与刘徽关于《九章算术》编纂过程的论述相矛盾之处，反而证明了刘徽的看法。

此外，刘徽具有实事求是的严谨学风和高尚的道德品质，我们不能不相信刘徽的话。他设计了牟合方盖，指出了解决球体积的正确途径，虽然功亏一篑，没有求出牟合方盖的体积，但他不仅没有掩饰自己的不足，反而直言：“判合总结，方圆相缠，浓纤诡互，不可等正。欲陋形措意，惧失正理，敢不阙疑，以俟能言者。”“隶首作数”是当时的传统看法，他却说“其详未之闻也”。在描绘了堑堵的形状之后，他说“未闻所以名之为堑堵之说也”。整个刘徽注洋溢着言必有据、不讲空话的崇高精神。因此，刘徽的话有百分之百的可信度。他如果没有可靠的资料，没有张苍、耿寿昌删补《九章算术》的确凿记载，对《九章算术》的编纂这样严肃的问题，他是绝对不可能随便讲的。以刘徽的记载是孤例、没有旁证为由否定刘徽的话，是没有道理的。一个明显的事实是岁月延宕、天灾人祸，刘徽当时能看到的资料，流传到清中叶和今天的，百无一二。

总之，张苍、耿寿昌删补《九章算术》的事实是不容否定的。关于《九章算术》的编纂，我们只能相信刘徽的话。随意否定刘徽的话，甚至杜撰别的说法，都不是科学的态度。

张苍整理《九章算术》的指导思想是荀派儒学。荀子（公元前313～前238）将《春秋左氏传》“授张苍”。张苍将《左传》传给贾谊。[①] 可见荀子、张苍、贾谊是嫡传的师生关系。贾谊是西汉初荀派儒学的主要代表人物。由此可知，张苍是信奉荀派儒学的。《荀子·儒效》将学问分成闻、见、知、行四个层次，而“学至于行而止矣”。[②]《荀子·正名》同时主张“名无固宜，约之以命。约定俗成谓之宜，异于约则谓之不宜”。事实上，《九章算术》汇集了百余条对国计民生十分有用的抽象性极高的数学公式、解法，具有长于计算，以算法为中心，算法以解决实际问题为根本目的等特点，表现了“实事求是”的作风，正是接受了荀子的唯物主义思想。[③] 另外，《九章算术》对数学概念不作定义，对数学公式、

---

① 西汉·刘向，春秋序。《春秋左传注疏》孔颖达疏引刘向《别录》。见：《十三经注疏》，中华书局，1980年。

② 战国·荀卿，荀子。荀子简注，上海人民出版社，1975年。本编凡引《荀子》，均据此。

③ 钱宝琮、《九章算术》及其刘徽注与哲学思想的关系。李俨钱宝琮科学史全集，第九卷，辽宁教育出版社，1998年。

解法没有推导和证明，也体现了荀子的上述思想。

严格划分张苍、耿寿昌的工作，资料太少，几乎是不可能的。他们的工作大体是：首先是收集秦朝焚书及秦末战乱所遗残的《九章算术》，加以删补，译成当时的语言。这就是刘徽为什么说"所论者多近语也"。其次是补充若干新的方法、例题。有的是对已有的术文补充新的例题。更多的补充是先秦所没有的例题及其解法。他们将这些题目分成三类：将一些简单的异乘同除类问题并入差分章，而将一些比较复杂的算术问题并入均输章，将解勾股形的各种问题以及立四表望远等问题并入旁要，并改称"勾股"。这就是刘徽为什么说"校其目则与古或异"。当然，张苍主要是收集、整理先秦之遗残，兼及删去一些他认为没有必要的内容，并补充一些新的题目与方法；而耿寿昌则主要是增补新的方法和例题。

三　《算数书》与《九章算术》

（一）《算数书》与《九章算术》的关系

学术界一直关心《算数书》与《九章算术》的关系。1985 年初，出土《算数书》的消息公布于世，到同年底，人们透露出来的消息说，《算数书》的"算法类包括《合分》（分数加法）、《增减分》、《分乘》（分数乘法）、《径（经）分》（分数除法）、《约分》等，算题类别还有《方田》、《粟米》、《衰分》、《少广》、《商功》、《均输》、《盈不足》等，它同《九章算术》有很多相同之处，而时代要比《九章算术》早二百多年，它是《九章算术》之源"。[①] 这段话模棱两可，容易理解成《九章算术》的方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足等七章的章名，都是《算数书》的标题。因此，学术界多数认为《算数书》是《九章算术》的前身。有的学者甚至认为《算数书》是由张苍编撰的。张苍整理好的数学官简，留在政府有关部门的那套便发展成了后来的《九章算术》。他又抄了一个复本，"病免"后带走，殁后随主人葬入张家山 247 号汉墓，就是《算数书》。目前，《算数书》已经面世，关于《算数书》与《九章算术》的关系，虽然还不能完全解决，但是，已经具备了使我们的认识向历史真实的彼岸推进一步的条件。

实际上，《算数书》的标题与《九章算术》的章名相同的只有方田、少广两条，其中《算数书》的方田条还不是传统的面积问题，而是用赢不足术求面积为 1 亩的方田的边长；两者术名相同的除以上两条外，也只有约分、合分、径分、少广、大广、里田等 6 条。其术名和内容相似的这 7 条，题目和文字也有相当大的差别，只是"少广"的 9 个题目与《九章算术》少广术的前 9 个例题的数字相同。另外，《算数书》的"女织"条的题目与《九章算术》衰分章"女子善织"问题基本相同，而答案繁简不同。由某些术文与题目相同得出《算数书》是《九章算术》前身的看法的学者忽视了一些重要事实：这部分内容在《算数书》中所占比例相当少，不足十分之一；《算数书》与《九章算术》有许多同类的题目，但却是完全不同的题目，文字差异亦较大；更重要的是，《算数书》有大量的题目与术文，超过《算数书》条目的三分之二，是《九章算术》所没有的。因此，就整体而言，《算数书》不可能是《九章算术》的前身。

---

① 陈跃钧、阎频，江陵张家山汉墓的年代及相关问题，考古，1985，12。

那么，《九章算术》与《算数书》是不是有血缘关系呢？由于无法搞清楚《九章算术》在先秦以“九数”为主体的某种形态的编纂年代，而且《算数书》所源自的数学著作不止一二部，这些著作又不是同时代的作品，其时间跨度相当长，因此，这个问题目前仍然无法得出确切的结论。不过，由于两者的约分、合分、减分、乘分、经分、大广、里田、少广等术，少广、女织等题目以及“粟米之法”等有相同或相似之处，它们的一部分有承袭关系或有一个共同的来源，这是无可怀疑的。至于孰早孰晚，有待于进一步考察。[①]

（二）《九章算术》规范了中国传统数学的表达方式

《九章算术》与《算数书》的表达方式有明显的不同。《九章算术》的表达方式十分规范、统一。而《算数书》中的数学表达方式十分繁杂，没有同一的格式。

人们自然要问，《算数书》中的纷杂表达方式是先秦数学固有的呢，还是原简中有舛误？不能完全排除《算数书》在传抄过程中出现舛误的可能性。但是，要说《算数书》与《九章算术》的这些不同或大部分不同都是舛误，则不可能。我们认为，《算数书》中关于分数、除法、问题的起首、发问和答案的各种各样的表示方式是先秦数学所固有的。起码同一表达方式有数条、十数条甚至数十条例证的情形绝大多数是先秦数学所固有的，而不是舛误。换言之，《算数书》数学术语纷杂的表示方式反映了张苍以前中国传统数学的真实情况。有的学者以《九章算术》为模式，改动《算数书》，将《算数书》纷杂的表达方式统一于《九章算术》[②]，这是不合适的。因为这篡改了反映先秦数学真实状况的极为宝贵的原始资料。事实上，《算数书》所反映的先秦时期数学术语表达方式的多样性，是一个不争的事实。这是数学早期发展的必然现象。当时，诸侯林立，列国纷争，诸子辩难，百家争鸣，全国各地语言文字相左，数学术语不可能统一。秦朝短命，也来不及统一、规范数学术语。

张苍、耿寿昌在整理、编定《九章算术》时，才完成了数学术语的统一与规范化。他们统一了分数的表示，选取先秦固有的一种方式，将非名数分数$\frac{a}{b}$统一表示为“b分之a”，将名数分数$m\frac{a}{b}$尺（或其他单位）表示为“m尺b分尺之a”。他们统一了除法的表示，选取先秦的一种固有方式，先指明“法”，再指明“实”，最后，对抽象性的术文，说“实如法而一”或“实如法得一”，对非抽象性的具体运算，说“实如法得一尺（或其他单位）”。他们以先秦数学中已有的一种方式统一了问题的起首与发问，对问题的起首一般用“今有”，在同一条术文有多个例题时，自第2个题目起用“又有”，而对发问则用“问：……几何？”或“问：……几何……？”对问题的答案，先秦数学是不是有“荅曰”的方式，不得而知，张苍等统一采用“荅曰”来表示。张苍、耿寿昌的这些工作实现了中国数学术语在西汉的重大转变，是规范中国传统数学术语的巨大贡献。

张苍等在《九章算术》中统一、规范数学术语的意义非常重大，它标志着中国传统数学发展到了一个新的阶段。此后，直到20世纪初中国传统数学中断，在中国数学著作中，分数、除法、答案的表示一直沿用《九章算术》的模式，对于数学问题的起首与发问方式，

---

① 郭书春，关于《算数书》与《九章算术》的关系，曲阜师范大学学报（自），2008，3（34）：1～9。

② 彭浩《张家山汉简〈算数书〉注释》等都以《九章算术》为模式改动了《算数书》的某些分数表示，补出了若干“法”、“实”或“实如法”。

唐以后有的著作虽有变化，但都是“今有”与“几何”的同义语。

四 《九章算术》的特点与弱点及其在世界数学史上的地位

（一）《九章算术》的特点

众所周知，古希腊数学家认为，数学是人们头脑思辨的产物，与实际应用是没有关系的。而数学理论密切联系实际，则是《九章算术》的突出特点。这是与古希腊数学的重要不同之处。刘徽关于《九章算术》各章功用的论述在第二节已经引出，表明《九章算术》的数学方法所解决的问题包括了人们日常生活、生产的实际问题的各个方面。

既然《九章算术》以实际应用为目的，必然重视计算。《九章算术》以术文为中心，大部分术文是抽象的计算公式或计算程序，即算法。长于计算，以计算为中心，是《九章算术》的又一显著特点。

在《九章算术》中，即使是面积、体积和勾股测望等几何问题，也没有关于图形的性质、三角形全等或相似条件的任何命题，尽管实际上不能不用到这些性质。《九章算术》所有的问题必须计算出线段的长度、面积、体积等数值，实际上是几何问题与算法相结合，或者说是几何问题的算法化。刘徽说“至于以法相传，亦犹规矩、度量可得而共”，十分精辟地概括了《九章算术》形、数结合的这一特点。这与古希腊数学是根本不同的。古希腊只考虑数和图形的性质，而很少考虑数值计算。例如，他们很早就知道圆的周长与直径之比是个常数，但是这个常数值是多少，几百年间没有人问津，直到阿基米德才去计算这个数值。

《九章算术》的算法都是计算程序，因而具有机械化和构造性的特点。吴文俊说：“我国古代数学，总的说来就是这样一种数学，构造性与机械化是其两大特色。”① 《九章算术》当然是这两大特色的奠基性著作和突出代表。

所谓构造性数学是指构造性地（即从某些初始对象出发，通过明确规定的操作）展开的数学理论。而非构造性观点主要考虑对象的一些性质，如存在性、可能性等问题，不大关心如何求出解答或将能行的方法予以有效的实现。然而，在实际上，人们更关心如何求解，而对存在性兴趣不大。在 1981 年第一届全国数学史年会（大连）上，吴文俊以打苍蝇比喻构造性数学和非构造性数学，非常形象。他说，非构造性是要证明房间里存在苍蝇，存在几只苍蝇；而构造性是要想出打苍蝇的办法，把苍蝇打死。吴文俊还以方程术即线性联立方程组解法为例说明了构造性和非构造性的区别。

吴文俊说：“中国的古代数学基本上是一种机械化的数学。”《九章算术》中的分数四则运算法则，开平方、开立方程序，方程术等，还有后来魏刘徽的求圆周率精确近似值的割圆术、方程新术，等等，都具有规格化的程序，是典型的机械化方法。

（二）《九章算术》的弱点

《九章算术》的弱点也是十分明显的。首先，对任何数学概念都没有定义。这是由于受到荀派儒学约定俗成的主张的影响。其次，《九章算术》对术文即数学公式、解法没有推

① 吴文俊，吴文俊论数学机械化，山东教育出版社，1995 年。本编凡引吴文俊语，均据此。

导，不做证明。这是《荀子·解蔽》“学至于行之而止矣”思想的体现。《九章算术》中的公式、解法，有一些是可以通过直观得出的，但是，有许多公式、解法非常复杂，如刍童的体积公式，是不可能由直观得出的。当时必有或形诸文字，或师徒相传的或严谨或粗疏的推导。实际上，刘徽注所记述的棊验法所构造的两个长方体的体积，恰恰是体积公式中的两项，说明棊验法是提出这些公式时使用的推导方法。数学著作中没有定义，没有推导和证明的弱点长期影响着中国古代数学。后来的数学著作除了刘徽的《九章算术注》等少数例外，大都没有定义和证明。我们反对中国古代数学没有理论、术文只是经验公式的堆砌等说法，但是，也不能不承认，中国古代数学对数学理论的研究是相对薄弱的。

（三）《九章算术》与世界数学的主流

吴文俊指出中国传统数学的算法具有构造性、机械化，以及几何问题的代数化特征，是有重大意义的。首先，它为从理论上回答了什么是世界数学发展的主流，为彻底解决中国传统数学是不是世界数学发展主流的问题，开辟了道路。

吴文俊指出：“贯穿在整个数学发展历史过程中有两个中心思想，一是公理化思想，另一是机械化思想。”后来，他又将“两个中心思想”改成“两条发展路线”，使表述更为清晰。接着，他提出这两条发展路线互为消长，并明确地指出了数学发展的主流问题：“在历史长河中，数学机械化算法体系与数学公理化演绎体系曾多次反复互为消长交替成为数学发展中的主流。”李文林指出，这从理论上回答了什么是世界数学发展主流的问题。而“中国古代数学，乃是机械化体系的代表”，从而彻底解决了中国传统数学属于世界数学发展主流，并且是主流的两个主要倾向之一的问题。这就是说，在吴文俊看来，“数学发展的主流并不像以往有些西方数学史家所描述的那样只有单一的希腊演绎模式，还有与之平行的中国式数学，而就近代数学的产生而言，后者甚至更具有决定性的（或者说是主流的）意义。”

五　《九章算术》的版本

一般说来，一部古籍越受重视，其版本越多，版本纷乱就越严重。《九章算术》是中国古代最重要、最受重视的数学著作，因而不仅版本多，而且歧异文字特别严重。《九章算术》成书后，甚至在刘徽、李淳风等先后注解之后，长期以抄本的形式流传。现在的传本主要有：北宋秘书省刻本的翻刻本即南宋本（前五卷），《永乐大典》本（存卷三后半卷及卷四），杨辉本（存卷五约半卷及后四卷），戴震由《永乐大典》辑录校勘而成的《武英殿聚珍版丛书》本和《四库全书》本，及由这些版本派生的各种校勘本。《永乐大典》的戴震辑录本今不存，不过，可以由聚珍版和《四库》本对校恢复之。

（一）《九章算术》的抄本

《九章算术》经过唐初李淳风等整理注释后而成定本，他们在整理时肯定进行了删节。一个明显的证据就是李淳风前不久的王孝通在《缉古算经》第一问注中录出《九章算术》均输章的犬追兔术，是现传《九章算术》中所没有的。王孝通说：

> 今按：《九章》均输篇有犬追兔术，与此相似。彼问：犬走一百步，兔走七十步。令兔先走七十五步，犬始追之，问：几何步追及？

答曰：二百五十步追及。

彼术曰：以兔走减犬走，余者为法。又以犬走乘兔先走为实。实如法而一，即得追及步数。

现传《九章算术》中有一“犬追兔”问，却与此不同。

李淳风等整理的《九章算术》在唐中叶就形成了不同的抄本。唐李籍的《九章算术音义》① 为我们探索这些版本提供了可以说是唯一的因而是最为珍贵的资料。② 我们将李籍提到的各版本的异文歧字罗列如下：

①刘徽序中，李籍释“索隐”，现传各本中无此二字。李籍所用的抄本当有“索隐”二字。

②卷一圆田术李淳风等注释，李籍释“擪摭”，字与《永乐大典》戴震辑录本相同，“擪”字，南宋本误。李籍说：“擪，或作掑。”是当时还有一作“掑摭”的抄本。

③卷一“宛田”问，李籍引作“畹”，字与《永乐大典》戴震辑录本相同。李籍云：“畹，当作宛，字之误也。”南宋本作“宛”。

④卷一“环田”问，李籍云，环，“或作鐶”。是当时还有一作“鐶田”的抄本。

⑤卷二反其率术买㹄问刘徽注，李籍引作“犹数草木称其根株也”，字与《永乐大典》戴震辑录本相同。“木”，南宋本讹作“本”。

⑥卷二反其率术买矢簳问，李籍释“榦”，字与《永乐大典》戴震辑录本相同。李籍又云：“一本作簳。”南宋本作“簳”。

⑦卷三禀粟问，李籍释“禀”，字与南宋本、《永乐大典》戴震辑录本相同。李籍又云：“或曰廪，非是。”是当时还有一作“廪”的抄本。

⑧卷四开立圆术刘徽注，李籍释“㮚氏”，字与南宋本、《永乐大典》本相同。李籍又云：“一本作栗。”是当时还有一作“栗”的抄本。

⑨卷四开立圆术李淳风等注释，李籍释“咍哂”。“咍”，南宋本、《永乐大典》本均作“贻”。

⑩卷五鳖腝问，李籍释“鳖臑”，字与《永乐大典》戴震辑录本相同。李籍又云：“臑，或作腝，非是。”南宋本、杨辉本作“腝”。

⑪卷五鳖腝术刘徽注，李籍释“臂节”，《永乐大典》戴震辑录本作“背节”，“背”似系“臂”之误。南宋本、杨辉本作“臂骨”。

⑫卷五刍甍术刘徽注，李籍云：“刍甍之形似屋盖上苫也。”“苫”，字与《永乐大典》戴震辑录本相同，而南宋本、杨辉本作“茨”。

⑬卷五，李籍引刍甍术刘徽注“正解方亭两边”，字与《永乐大典》戴震辑录本相同，南宋本、杨辉本作“正斩”。

⑭卷六均输粟问，李籍释“用车一万乘”之“乘”字云“一本作量”。《永乐大典》戴震辑录本、杨辉本均作“乘”。是当时还有一作“量”的抄本。

⑮卷六均输卒问，李籍释“薄塞”，字与《永乐大典》戴震辑录本、杨辉本相同。李籍又云：“薄，或作博，非是。”是当时还有一作“博”的抄本。

---

① 唐·李籍，九章算术音义。见：郭书春汇校，汇校《九章算术》增补版附录二。

② 郭书春，李籍《九章算术音义》初探，自然科学史研究，1989，3（8）：197～204。

⑯卷六“程传委输”问，李籍释“程传”，字与《永乐大典》戴震辑录本相同。杨辉本作“乘传”。

⑰卷七盈不足术刘徽注，李籍释“朒”，字与《永乐大典》戴震辑录本相同。李籍又云：朒，“或作肭，非是”。杨辉本作“肭”。

⑱卷七共买琎问，李籍释“琎”，字与《永乐大典》戴震辑录本、杨辉本相同。李籍又云：琎，“一本作准”。杨辉本亦注“一云准”。是当时还有一作“准”的抄本。

⑲卷七“之蜀贾”问，李籍释“之蜀贾”，字与《永乐大典》戴震辑录本、杨辉本相同。李籍又云：“贾，一本作价。”是当时还有一作“价”的抄本。

在以上19条中，李籍所用字与《永乐大典》本或其戴震辑录本相同的有16条，不同者仅2条；谈到的与现传各本不同者有11条。在前五卷12条中，与《永乐大典》本或其戴震辑录本相同者10条，不同者仅2条；与南宋本不同者9条，相同者仅3条；提到的另本与南宋本相同者3条。后五卷共10条，与《永乐大典》戴震辑录本相同者9条，不同者仅1条，可能是笔误；与杨辉本相同者4条，不同者6条。在南宋本、《永乐大典》戴震辑录本、杨辉本共存的卷五约半卷中，李籍与之有字词歧异者4条，李籍所用与南宋本、杨辉本都不相同，与《永乐大典》戴震辑录本相同者3条，如果考虑到戴震辑录本的“背节”是“臂节”的笔误，那么这4条李籍与《永乐大典》本则完全相同。这些事实说明：

首先，在李籍的唐中叶，《九章算术》除存在北宋秘书省本、《永乐大典》本、杨辉本的母本之外，还有一两个甚至更多的抄本。这些抄本内容基本一致而又有若干细微差别。

其次，李籍撰《九章算术音义》所使用的抄本与《永乐大典》的母本十分接近，或者就是同一个抄本。

再次，南宋本和杨辉本的母本最为接近，或者就是同一个母本。

最后，南宋本和杨辉本的母本在李籍时代就已与《永乐大典》本的母本不同。自清中叶戴震起，人们在谈到明编撰《永乐大典》时说将南宋本《九章算术》分类抄入，是犯了想当然的错误。

（二）传本

北宋秘书省刻本是世界数学史上首次印刷数学著作，可惜在北宋末年的战乱中大都散失，今已不传。《九章算术》的现传本有以下几种。

1. 南宋本

南宋历算学家鲍澣之于庆元六年（1200）在临安与杨忠辅讨论历法时找到北宋秘书省刻本《九章算经》，随即翻刻。它刻工精美，可惜到明末，已遗失后四卷及刘徽序，仅存前五卷，今藏于上海图书馆。1980年影印收入中华书局出版的《宋刻算经六种》。

2.《大典》本

明永乐间编纂《永乐大典》，《九章算术》被分类抄入算字条。今存卷16343、16344，藏于英国剑桥大学图书馆，1960年影印收入中华书局《永乐大典》。其中含有《九章算术》卷三下半卷和卷四。

3. 杨辉本

杨辉《详解九章算法》抄录的《九章算术》本文及刘、李注。今存卷三下半卷及卷四（《永乐大典》）、卷五约半卷及后四卷（清道光间郁松年据石研斋抄本刻入《宜稼堂丛

书》）。后者鲁鱼亥豕极为严重，只是此之所有正是南宋本之所缺，极可宝贵。

4. 汲古阁本

清康熙甲子年（1684）毛扆影抄南宋本，卷一至五。北平故宫博物院 1932 年影印，收入《天禄琳琅丛书》。原本今藏于台北故宫博物院。汲古阁本有几个字与南宋本不同，因此，不能将汲古阁本等同于南宋本。

（三）校勘本

清中叶以来，《九章算术》的校勘本有以下几种。

1. 戴震校本

清乾隆三十九年（1774）戴震从《永乐大典》辑录出《九章算术》，我们称之为戴震辑录本，今不存。不过我们可以将《武英殿聚珍版丛书》本与《四库全书》本对校，并借助于校勘记写出《大典》本原文，基本上恢复戴震辑录本。但是，戴震从《永乐大典》的辑录工作十分粗疏，以至于戴震辑录本与《永乐大典》本的差别远远超过《永乐大典》本与南宋本的差别。由于《九章算术》后四卷与刘徽序的南宋本和大典本均亡佚，戴震对《九章算术》整理校勘的贡献最大，其失误造成的恶果也最严重——使我们丧失了看到未经清人改窜的《九章算术》后四卷与刘徽序的原貌的机会。

戴震辑录出《九章算术》之后进行了校勘，几年内他做了三个校勘本。

（1）戴震辑录校勘本与《四库全书》本、《武英殿聚珍版丛书》本。

戴震的第一个校勘本是对戴震辑录本进行校勘，我们称之为戴震辑录校勘本。后来根据其正本抄入《四库全书》，但是错讹极多。在这之前，1774 年，根据其副本，用活字摆印了《武英殿聚珍版丛书》本，也有许多舛误。乾隆发现聚珍版有许多错误，遂命馆臣修订，只改正了十几处错讹，真是杯水车薪。此本原藏于承德避暑山庄，为乾隆御览本，今藏于南京博物院，见图 3-6-1。1993 年影印收入《中国科学技术典籍通汇 · 数学卷》第 1 册。

乾隆又命东南各省翻刻《武英殿聚珍版丛书》，只有福建于乾隆四十一年（1776）影刻了《九章算术》。字形相近者错讹较多。

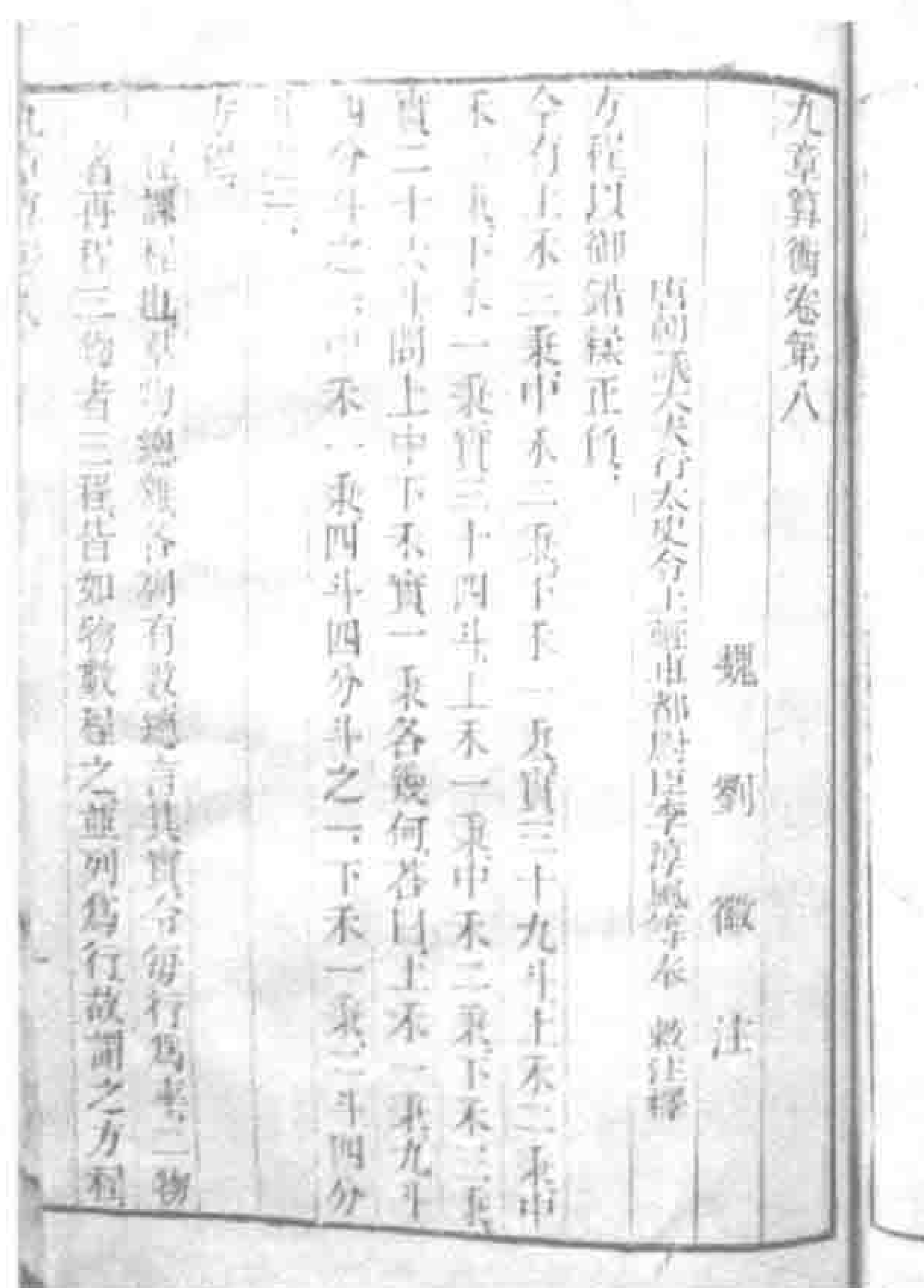
（2）豫赞堂本。

戴震的第二个校勘本是应屈曾发的要求于乾隆四十二年（1777）做的，此时他已经知道有汲古阁本。他以戴震辑录本为底本，以汲古阁本参校，坚持了戴震辑录校勘本中大多数校勘，改正了某些错校，也出现一些新的错校。同时戴震做了大量修辞加工。此本刻于豫赞堂，世称豫赞堂本。不到半个世纪，清人就将它误认为微波榭本的翻刻本，实际上此本比微波榭本早。

（3）微波榭本。

戴震的第三个校勘本是应孔继涵的要求做的微波榭本，如图 3-6-2 所示。它以汲古阁影宋本（前五卷）和戴震辑录本（后四卷与刘徽序）为底本，校勘基本同于豫赞堂本，有更多的修辞加工。孔继涵将其冒充汲古阁本的翻刻本，并将刻书年代提前到乾隆三十八年（1773）。此版在此后 200 余年间被多次翻刻、影印，影响极大。

戴震在这三个校勘本中提出了大量正确校勘，并且有了他的工作，我们才有足本的并且基本可以卒读的《九章算术》。但是，戴震或读不懂原文，或句读有误，或不清楚刘徽注有“采其所见”者，或师心自用，提出了大量错校，尤其是将大量刘徽注改成李淳风等注释。


九章算術卷第八

魏　劉　徽　注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉　敕注釋

方程以御錯糅正負

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？荅曰：上禾一秉，九斗四分斗之一；中禾一秉，四斗四分斗之一；下禾一秉，二斗四分斗之三。

方程

程，課程也。羣物總雜，各列有數，總言其實。令每行爲率，二物者再程，三物者三程，皆如物數程之，並列爲行，故謂之方程

图 3-6-1　御览本《九章算术》方程章书影


如圓徑爲弦版厚爲句

版廣爲股

術曰令徑二尺五寸自乘以七寸自乘減之其

餘開方除之即廣 此只以圓徑二尺五寸爲弦版厚七寸爲句所求廣爲股也

草曰置徑二尺五寸廣作二十五寸爲弦自乘

得六百二十五寸爲弦冪又置厚七寸爲句自

乘得四十九寸爲句冪以句冪減弦冪餘五百

图 3-6-2　微波榭本《九章算术》

2. 戴震和李潢共同影响下的刊本

（1）李潢《九章算术细草图说》。

清李潢（？～1812）撰《九章算术细草图说》，他以微波榭本为底本作细草图说，大多十分精当，是治《九章算术》的必读书。他提出大量校勘，有一部分是对的，也有许多的错校。尤其李潢不能理解刘徽的极限思想和无穷小分割方法，说不到位，甚至提出错校。

此外，此期间还有汪莱的校勘。汪莱撰“校正《九章算术》及戴氏订讹”，对《九章算术》校勘，绝大多数十分精当。收入《衡斋算学遗书》合刻本。

（2）补刊本和广雅书局本。

《武英殿聚珍版丛书》的《九章算术》原本今国内外馆藏已不多。国内外馆藏多数是福建光绪十九年（1893）根据李潢的《九章算术细草图说》修订的补刊本，还有光绪二十五年（1899）广东广雅书局翻刻的福建补刊本。这些版本与聚珍版原本有所不同，尤其是补刊本和广雅书局本，不仅有李潢的校勘，而且通过李潢本的底本微波榭本渗透进了汲古阁本的文字。因此，在使用聚珍版时需要认真考察，否则容易张冠李戴。

3. 钱校本

钱宝琮长期从事《九章算术》的校勘，贡献极大。他校点的《九章算术》（繁体字）收入中华书局 1963 年出版的钱宝琮校点《算经十书》上册，如图 3-6-3 所示。钱校本纠正了戴震、李潢等人的大量错校，指出了 20 世纪《九章算术》校勘的正确方向，还提出了若干正确的校勘。然而他以微波榭本在庚寅年（1890）的翻刻本为底本，沿袭了戴校本的大量失误，在南宋本和聚珍版等版本的使用上也有失误，另外，也有一些错校。

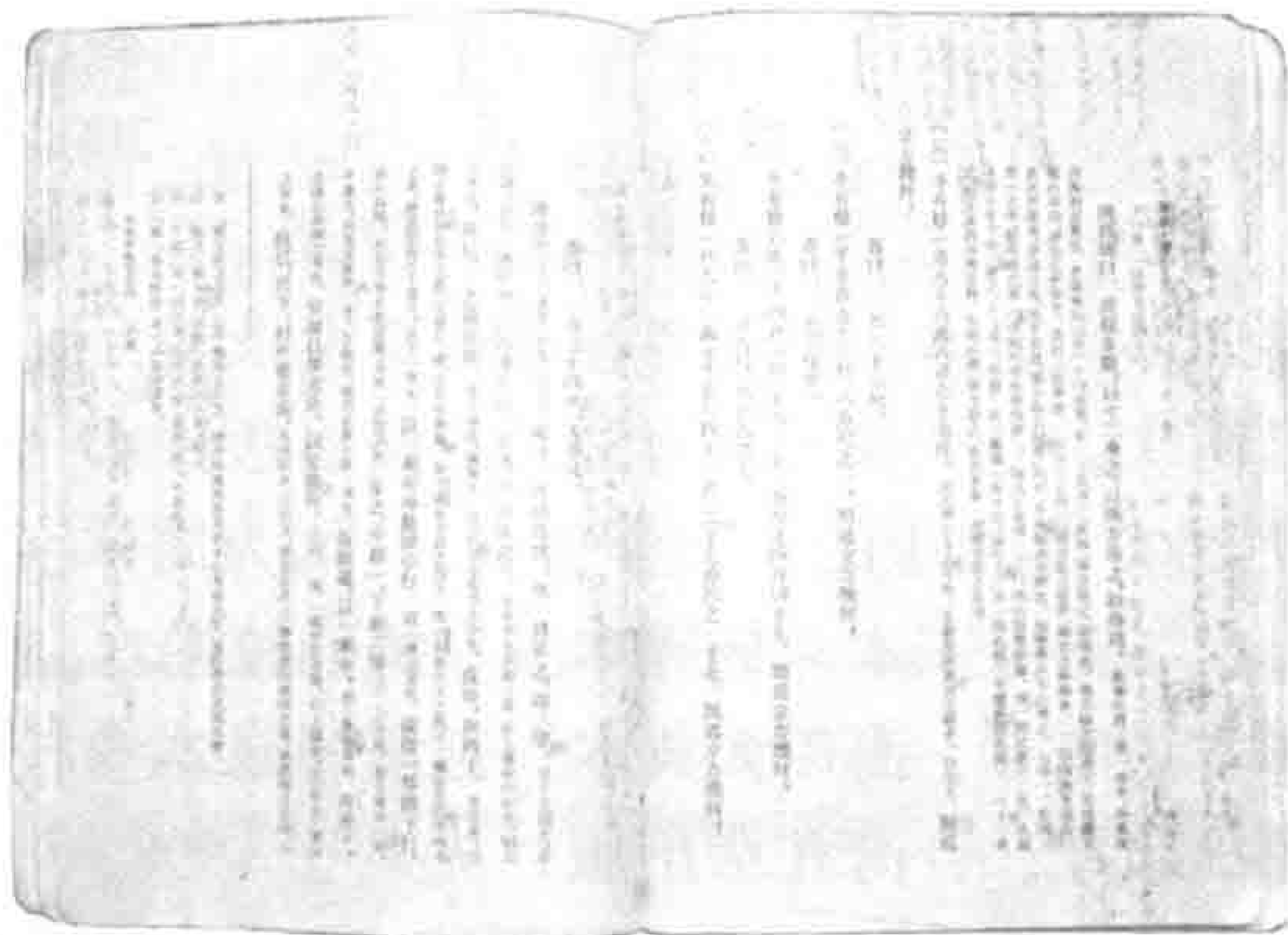


图 3-6-3　钱校本《九章算术》

此外，1983 年科学出版社出版了白尚恕的《九章算术注释》（简体字）。此本以钱校本为底本。1990 年山东教育出版社出版了白尚恕的《九章算术今译》。

4. 近 20 年的校勘本

近 20 年来，出版了十余个《九章算术》的校勘本，对版本和校勘研究取得重大进展，既汲取了戴震、李潢、钱宝琮等大量正确校勘，也在不同程度上纠正了前人的若干错校。但是良莠不齐，甚至出现据他人校勘成果为己有的不良现象。兹将这些版本摘要胪列如下：

（1）汇校本等郭书春的校勘本。

20 世纪 80 年代，郭书春通过对近 20 个《九章算术》版本的校雠，发现戴震之后 200 余年《九章算术》的版本十分混乱，决定重加校勘。其前五卷以南宋本为底本，以《永乐大典》本（残）和戴震辑录本参校，后四卷及刘徽序以戴震辑录本为底本，以杨辉本参校，采用了戴震、李潢、汪莱、李锐、钱宝琮等大量正确的校勘，恢复被戴震等人改错的南宋本、《永乐大典》本不误原文约 450 处，重新校勘了若干原文确有舛错而前人校勘亦不恰当之处，并对若干原文舛误而前人漏校之处进行了校勘。此外，还汇集了近 20 个不同版本的资料，是为汇校本（繁体字）。辽宁教育出版社 1990 年出版了汇校本。

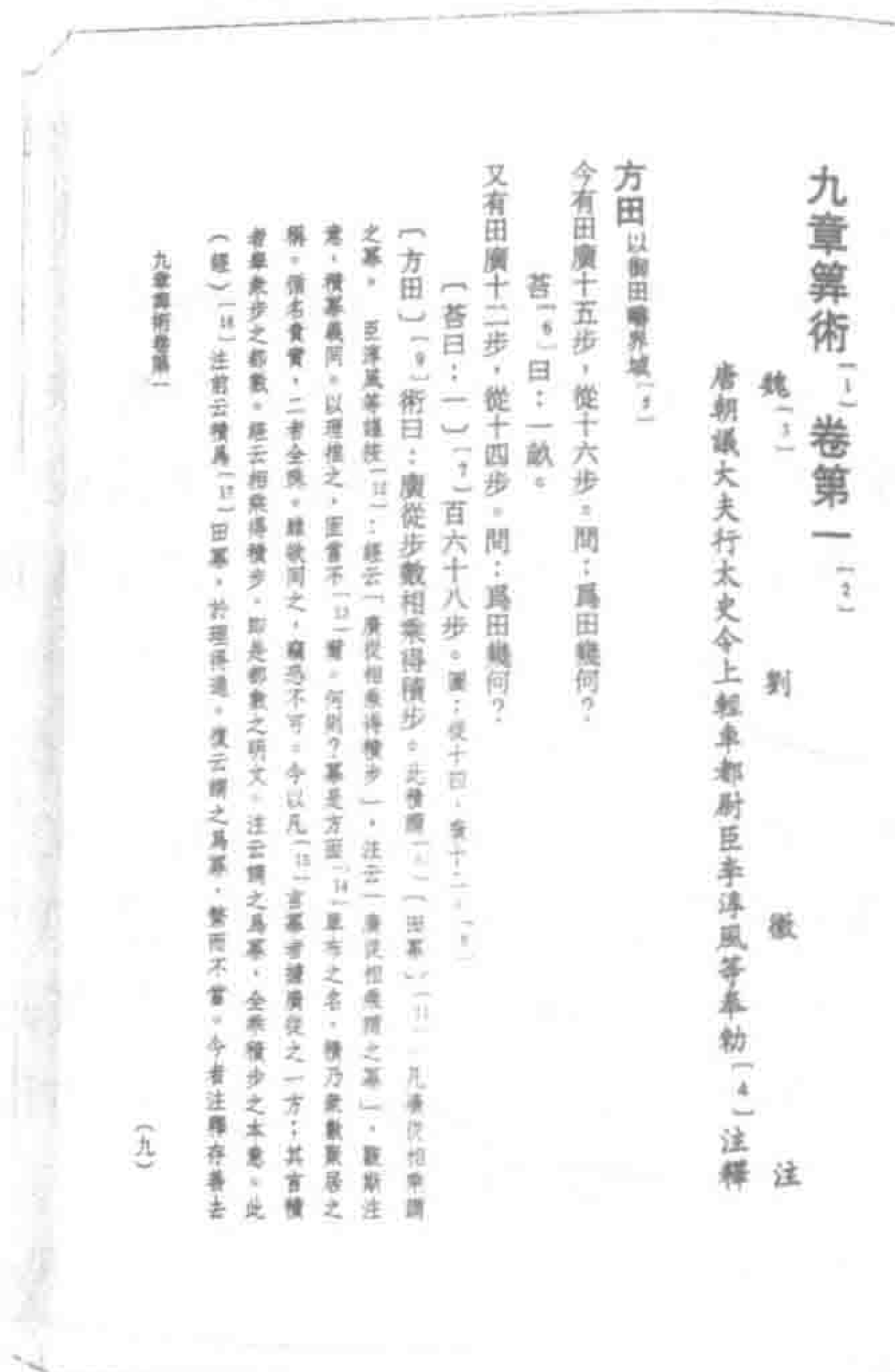

九章筭術[1]卷第一[2]
魏[3] 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅[4]注釋
方田 以御田疇界域[5]
今有田廣十五步，從十六步。問：爲田幾何？
荅[6]曰：一畝。
又有田廣十二步，從十四步。問：爲田幾何？
〔荅曰：一〕[7]百六十八步。圖：從十四，廣十二。[8]
〔方田〕[9]術曰：廣從步數相乘得積步。此積謂[10]〔田冪〕[11]。凡廣從相乘謂之冪。臣淳風等謹按[12]：經云「廣從相乘得積步」，注云「廣從相乘謂之冪」，觀斯注意，積冪義同。以理推之，固當不[13]然。何則？冪是方面[14]單布之名，積乃衆數聚居之稱。循名責實，二者全殊。雖欲同之，竊恐不可。今以凡[15]言冪者據廣從之一方；其言積者舉衆步之都數。經云相乘得積步，即是都數之明文。注云謂之爲冪，全乖積步之本意。此〔經〕[16]注前云積爲[17]田冪，於理得通。復云謂之爲冪，繁而不當。今者注釋存善去
九章筭術卷第一 （九）

图 3-6-4 汇校《九章算术》增补版

汇校本脱销后本应出版修订本，但由于发生了人们不愿看到的事情，再版时不得不照印汇校本原文，而将新的校勘意见和版本资料作为增补，这就是汇校本增补版，2004 年由辽宁教育出版社和台湾九章出版社出版，如图 3-6-4 所示。汇校本增补版恢复了该书原名《九章筭术》，并有“［西汉］张苍、耿寿昌编定”字样。

2009 年 12 月上海古籍出版社出版了《九章算术译注》，2010 年 4 月重印，以汇校《九章算术》增补版为底本，并作了某些新的校勘。

汇校本意在正本清源，所使用的底本实际上不属于同一个版本链：南宋本与《大典》本的母本在唐中叶就已不同。杨辉本与南宋本或者有同一个母本，或者它们的母本最为接近，然而它们都不是足本。因此，郭书春计划再做几个校勘本，并已于 2004 年全部完成、出版。

一是大典本版本链的校勘本。其卷三后半卷、卷四以大典本，其余各卷以戴震辑录本为底本，而以南宋本、杨辉本参校的校点本。先后校点两次，分别收入海南国际新闻出版中心 1997 年出版的《传世藏书》、首都师范大学出版社 2007 年出版的《国学备览》，均为简体字本。此旨在复原唐中叶的一个抄本的面貌。

二是南宋本－杨辉本版本链的校勘本。其前五卷以南宋本为底本，后四卷及刘徽序以杨辉本为底本，而以大典本和戴震辑录本参校的点校本，这就是《算经十书》本，由辽宁教育出版社、台湾九章出版社先后于 1998 年（简体字本）、2001 年（繁体字修订本）出版。此本首次加上“［西汉］张苍、耿寿昌编定”字样。1998 年辽宁教育出版社出版的《九章算术》译注本的底本亦如此。此旨在力图复原唐中叶另一个抄本的面貌。

三是在各传本中择善而从的校勘本，这就是与法国林力娜（K. Chemla）合作完成的中法对照本《九章算术》①，2004 年法国 Dunod 出版社出版，如图 3-6-5 所示，2005 年重印。

以上这三种校勘本都坚持了汇校本的绝大多数校勘，同时纠正了汇校本的个别错校。

（2）李继闵的《九章算术校证》、《〈九章算术〉导读与译注》。

1993 年陕西科学技术出版社出版了李继闵的简体《九章算术校证》，台湾九章出版社 2002 年出版了繁体字本。版本记述错乱甚多，依戴震将大量刘徽注改为李淳风等注释，还使用了汇校本的数百条校勘，并将其中百余条说成自己的"新校"。1998 年，陕西科学技术出版社出版了李继闵的《〈九章算术〉导读与译注》。

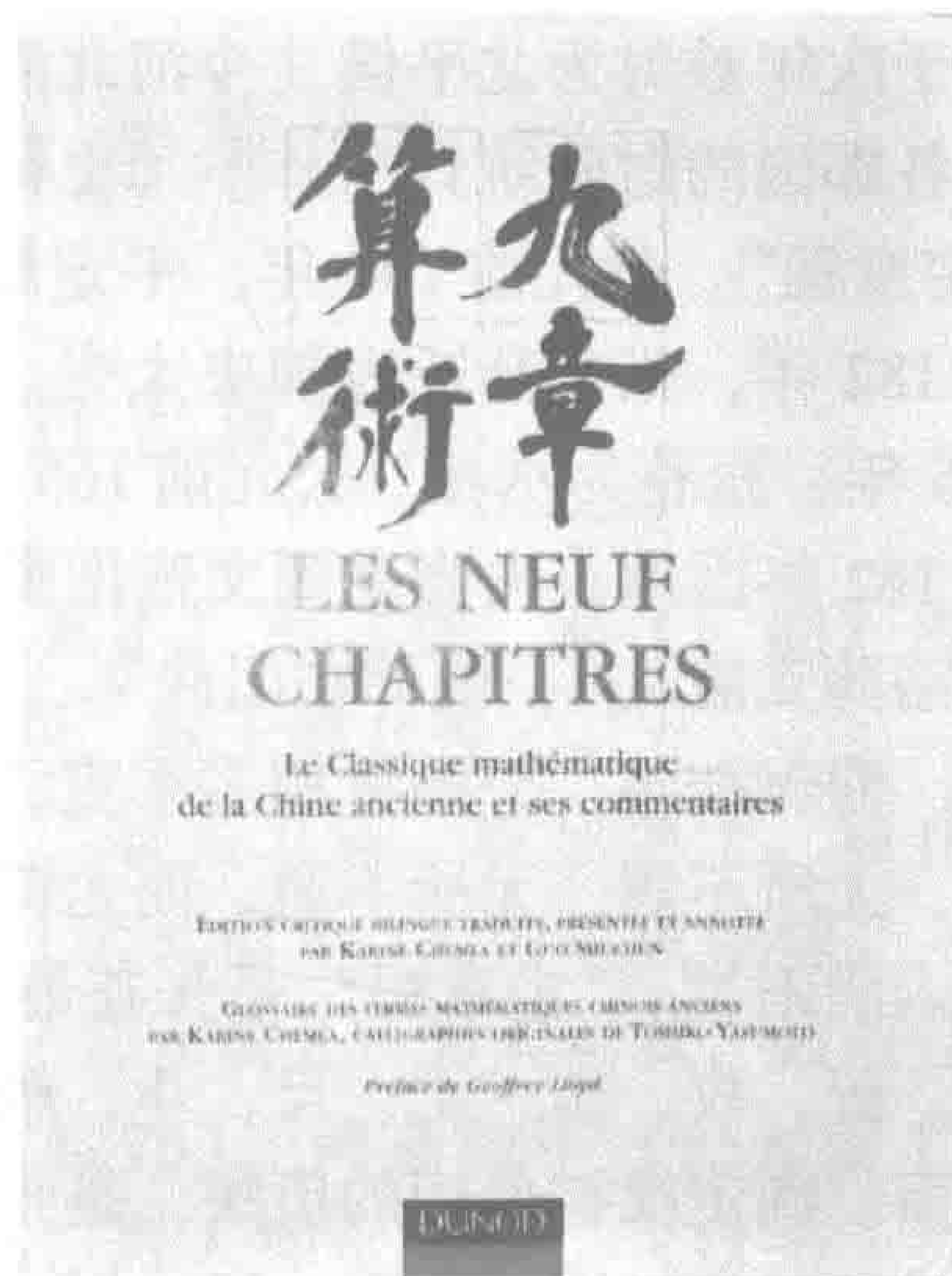


图 3-6-5　中法对照本《九章算术》封面

（3）沈康身的《九章算术导读》。

1996 年湖北教育出版社出版了沈康身的《九章算术导读》，不出校勘记，底本不清。2001 年科学出版社和剑桥大学出版社出版了沈康身等翻译的中英对照本《九章算术》。②

《九章算术》是世界古代数学名著之一，已被译成多种文字。《九章算术》本文早已译成日文、俄文、德文等，然都未译刘徽注。含有刘徽注的外文翻译除上面提到的中英对照、中法对照本外，1980 年日本朝日出版社出版了川原秀成的日译本"刘徽注《九章算术》"③。这是刘徽注第一次译成中国外的文字。2008 年出版了胡吉瑞翻译的捷克文本。④

六　张苍和耿寿昌

（一）张苍

张苍，阳武（今河南原阳东南）人，生于公元前 252 年以前，西汉初年政治家、数学家、天文学家。少年时从荀子受《春秋左氏传》。他仕秦为御史，主柱下方书，掌管文书、记事及官藏图书，明悉天下图书计籍。因获罪，逃归阳武。公元前 207 年，参加刘邦起义军，从攻南阳，入武关，至咸阳，定三秦。公元前 205 年，刘邦任命张苍为常山郡（今河北元氏）太守。次年，张苍从韩信攻赵，苍得陈余，刘邦以苍为代（今河北蔚县）相。公元前 203 年，张苍为赵（今河北邯郸）相，又徙代相。次年 9 月，张苍从刘邦平臧荼，因

---

① Karine Chemla，Guo Shuchun，*Les Neuf Chapitres：Le Classique Mathématique de la Chine Ancienne et ses Commentaires*，［法］Dunod，Paris，2004，2005.

② Shen Kangshen，John N. Crossley，Anthony W. - C. Lun，*The Nine Chapters on the Mathematical Art：Companion and Commentary*. Oxford University Press and Sciences Press. 1999.

③ ［日］川原秀城，刘徽注九章算术。见：中国天文学数学集，朝日出版社，1980 年。

④ ［捷］Jiri Hudecek（胡吉瑞），*Matematika V Deviti Kapitolach* Praha：Matfyzpress，2008。

功于次年被封为北平侯（今河北满城）。同年迁为计相，以列侯居萧何丞相府，为主计，掌管各郡国的财政统计工作。《史记 · 张丞相列传》说他善于计算，精通律历，受高祖之命“定章程”。公元前 196 年，平定黥布反叛后，高祖命张苍为淮南王相。吕后当政时，公元前 182 年，张苍升迁为御史大夫。吕后崩，张苍等协助周勃立刘恒为帝，为文帝。公元前 176 年，张苍为丞相。公元前 165 年与公孙臣进行水德土德的争论失败，由此起自绌。公元前 162 年因用人失当受到文帝指责，张苍遂以病辞职。公元前 152 年去世，享年百余岁。张苍陪葬安陵[①]，一说葬在阳武[②]。

西汉初年，公卿将相多军吏，像张苍这样的学者封侯拜相，实属凤毛麟角。“苍本好书，无所不观，无所不通，而尤善律历。”他还著《张苍》十八篇。《汉书 · 艺文志》将其列入阴阳类。“定章程”是张苍最重要的科学活动。如淳注“章程”曰：“章，历数之章术也。程，权、衡、丈、尺、斗、斛之平法也。”因此，它应包括算学、历法、度量衡等几个方面。确定汉初使用的历法，是张苍“定章程”中最重要的工作。《汉书 · 律历志上》说他比较了黄帝、颛顼、夏、殷、周、鲁六家历法，认为《颛顼历》“疏阔中最为微近”。司马迁说“汉家言律历者，本之张苍”，并非过誉之辞。张苍还“吹律调乐，入之音声，及以比定律令”，确定了汉初的律令。张苍又“若百工，天下作程品”，确立汉初的度量衡制度。汉承秦制，汉初的度量衡制度基本上沿袭秦制，肯定秦始皇统一度量衡的工作，也是张苍的贡献。

刘徽说张苍等“皆以善算命世”，因《九章》“旧文之遗残，各称删补”，是为《九章算术》编定过程中最重要的阶段，也是张苍“定章程”中最杰出的工作。张苍信奉荀派儒学，并以荀派儒学思想为指导删补《九章算术》。自戴震武断地否定刘徽关于《九章算术》编纂的论述以后，张苍就被赶出了中国古代著名数学家的队伍，这是很不公正的。

（二）耿寿昌

耿寿昌，数学家、理财家、天文学家。生卒及籍贯不详，宣帝（公元前 73 ~ 公元前 49 年在位）时为大司农中丞，是刘徽说的删补《九章算术》的第二位学者。《汉书 · 食货志上》说他“善为算，能商功利”，得到宣帝的信任。他“习于商功分铢之事”。五凤（公元前57 ~ 公元前 54）中，宣帝根据他的建议，“籴三辅、弘农、河东、上党、太原郡谷，足供京师，可以省关东漕卒过半。”耿寿昌又“令边郡皆筑仓，以谷贱时增其贾而籴，以利农。谷贵时减贾而粜，名曰常平仓，民便之。”皆收到了良好的社会效益，因而赐爵关内侯。耿寿昌还是天文历法学家。在浑天、盖天之争中，他主张浑天说。[③] 甘露二年（公元前 52），他奏称“以图仪度日月行，考验天运状”。[④]《汉书 · 艺文志》记载他还著《月行帛图》二百三十二卷、《月行度》二卷。他在大司农中丞任内，总结收集人们实际生产、生活中的数学问题，加以发展、提高，增补了《九章算术》。

---

① 黄展岳，张家山汉墓不会是张苍墓，中国文物报，1994 年 5 月 1 日。

② 阳武县志，卷一。

③ 西汉 · 杨雄，扬子法言 · 重黎，卷十：“或问浑天，曰：落下闳营之，鲜于妄人度之，耿中丞象之，几乎几乎莫之能违也。”见：二十二子，上海古籍出版社，1986 年，第 820 页。

④ 晋 · 司马彪，后汉书 · 律历志中，中华书局，1965 年，第 3029 页。

第七节　其他数学家和数学著作

一　许商和《许商算术》、《杜忠算术》

《汉书·艺文志》载《许商算术》二十六卷，《杜忠算术》十六卷。宋《广韵》卷四“算”字条下称：“又有《九章术》，汉许商、杜忠、吴陈炽、魏王粲并善之。”①

许商，一作许商，字长伯，长安人。著《五行论历》，官至九卿。曾任博士、将作大匠、河堤都尉、詹事、少府等职，治《尚书》。永始三年（公元前14），为汉成帝师，入讲《尚书》。元延元年（公元前12）为光禄大夫。绥和元年（公元前8）为大司农，数月迁为光禄勋。建始元年（公元前32），四年，河平三年（公元前26），鸿嘉四年（公元前17），多次受命参与治理黄河。许商凿滴水入海，“故以商为名，后人加水焉”②。《汉书·沟洫志》云，时人称许商“善为算，能度功用”，“明计算，能商功利”。

杜忠的生平无考。

《许商算术》、《杜忠算术》皆已佚，其内容不得而知。钱宝琮《中国数学史》因为将《九章算术》的成书定在1世纪下半叶，故将它们看成《九章算术》准备阶段的二部书。李学勤认同刘徽关于《九章算术》编纂的论述，他认为：“许、杜所为即是《九章》术，并非别为一书。所谓《许商算术》、《杜忠算术》，犹如《毛诗》、《左氏春秋》之类，只是推衍《九章算术》的两家作品。”③ 这种看法是有道理的。

二　尹咸和刘歆

尹咸，汝南（今河南省）人，谏大夫尹更始之子。尹咸官丞相史，太史令，治《左氏传》。汉成帝河平三年（公元前26），广求天下遗书，尹咸与刘歆共校经传类，尹咸校数术。

刘歆，字子骏，汉高祖同父弟刘交之五世孙。少为黄门郎，数术方技，无所不究。河平（公元前28～公元25）与父刘向（公元前77～公元6）领校秘书。王莽专权时为右曹太中大夫。元始五年（公元5）为羲和，后封红休侯。王莽篡位，刘歆为国师，嘉新公。更始元年（公元23）为王莽所杀。刘歆考定律历，撰《三统历谱》、《律历志》。后者是系统论述西汉以前度量衡制度演进的第一篇文献，被班固收入《后汉书》。其“备数”论算学之功能，历来被视为圭臬。为王莽做“新莽嘉量”，又称为王莽铜斛，今有传世，藏于台北故宫博物院。经核算，其中使用的圆周率相当于3.1547④，或为改进圆周率近似值的首次尝试。

---

① 宋·广韵，卷四。

② 北宋·司马光，资治通鉴，卷二七九注。隋置滴水县，即今山东省商河县。

③ 李学勤，汇校《九章算术》跋。郭书春，汇校《九章算术》增补版，辽宁教育出版社，九章出版社，2004年。

④ 刘复，新嘉量之校算与推算，辅仁学志，1928年。

三　张衡和马续

张衡（公元 78 ~ 139），字平子，南阳西鄂（今河南省）人。天文学家、文学家和数学家。性机巧，尤善阴阳、天文、历算。永初五年（公元 111）汉安帝公车召征，拜为郎中，后 18 年间，三任太史令，还曾为尚书郎。《后汉书 · 张衡列传》云，公元 115 年张衡初任太史令时，"乃研核阴阳，妙尽璇机之正，作浑天仪，著《灵宪》、《算网论》，言甚详明"。《灵宪》阐述了他的天文学理论。《算网论》今已亡佚。公元 126 ~ 133 年再度出任太史令时，张衡完成《浑天仪注》，记述了他对浑天说和历算的研究成果。阳嘉元年（公元 132）秋，张衡制成世界上第一台地震观测仪——候风地动仪，以及水运浑象。次年，上《驳图谶疏》。

《后汉书 · 天文志》梁刘昭注中引张衡《灵宪》云："悬象著明，莫大乎日月。其径当天周七百三十六分之一，地广二百四十二分之一。日者，阳精之宗。积而成鸟，象鸟而有三趾。阳之类，其数奇。月者，阴精之宗。积而成兽，象兔。阴之类，其数耦。"① 《经典集林》说"张衡《灵宪》一卷，内用重差、钩股"。② 唐《开元占经》引祖暅之《浑天论》云："张衡日月之径当周天七百三十六分之一，地广二百三十二分之一。按此而论，天周分母，圆周率也，地广分母，圆径率也。以八约之，得周率九十二，径率二十九。其率伤于周多径少，衡之疏也。"③ 在刘昭的引文中，由天周分母 736 和地广分母 242，得到圆周率 $\pi=\frac{736}{242}=3.04$。在祖暅之的引文中，得到圆周率 $\pi=\frac{92}{29}=3.1724$。钱宝琮认为，《后汉书注》中的"七百三十六"，当作"七百三十"；"二百四十二"当作"二百三十二"，那么张衡的圆周率值为 $\pi=\frac{730}{232}=3.1466$。④ 无论如何，张衡认识到圆周率 3 不准确，从而试图求更精确的圆周率值，则是无疑的。

刘徽《九章算术注》引张衡算云："张衡算又谓立方为质，立圆为浑。衡言质之与中外之浑：六百七十五尺之面，开方除之，不足一，谓外浑积二十六也。内浑二十五之面，谓积五尺也。今徽令质言中浑，浑又言质，则二质相与之率犹衡二浑相与之率也。衡盖亦先二质之率推以言浑之率也。衡又言质六十四之面，浑二十五之面。质复言浑，谓居质八分之五也。又：方八之面，圆五之面，圆浑相推，知其复以圆为方率，浑为圆率也，失之远矣。衡说之自然，欲协其阴阳奇耦之说而不顾疏密矣。虽有文辞，斯乱道破义，病也。"张衡亦发现《九章算术》之开立圆术的错误，试图纠正，但不得要领。张衡在这里得出圆周率 $\pi=\sqrt{10}$。这个值比传本《后汉书》和《开元占经》所引《灵宪》中的圆周率值精确，而比钱宝琮的校勘文字粗疏。刘徽批评张衡"欲协阴阳奇偶之说"，可与《灵宪》中的文字互相印证。

张衡还作《西京赋》、《东京赋》、《归田赋》、《四愁诗》等诗赋，尤其是《西京赋》、

---

① 梁 · 刘昭，后汉书 · 天文志注，志卷十。见：后汉书 · 天文志，中华书局，1964 年，第 3216 页。

② 清 · 洪颐煊，经典集林，卷二六。

③ 唐 · 瞿昙悉达，开元占经，卷一，第 25 ~ 26 页。恒德堂刻本。

④ 钱宝琮，张衡《灵宪》中的圆周率问题。见：李俨钱宝琮科学史全集，第九卷，辽宁教育出版社，1998 年。

《东京赋》，在中国文学史上占有重要地位。

马续，字季则，扶风茂陵（今陕西省）人。名将马援侄孙，马严（公元17～98）之子，经学家马融（公元79～166）之兄。《后汉书·马援传》云，马续7岁通《论语》，13岁明《尚书》，16岁之《诗经》。“博览群书，善《九章算术》。”汉顺帝（公元126～145年在位）时，马续“为护羌校尉，迁度辽将军”。多次率军击败羌人、匈奴等的侵掠。他既是屡建战功的将军，又是精通经史、历算的学者。班固著《汉书》（公元35～32），其八表及天文志未及竟而卒，马续与班昭（约公元49～120）完成《天文志》。钱宝琮认为马续的生年在公元70年前后，研究《九章算术》当在公元90年前后。持《九章算术》成书于1世纪下半叶之说者，均以马续治《九章算术》为断代参照。有人甚至认为马续就是《九章算术》的编纂者。[①] 钱宝琮认为证据虽不充分，但这是很可能的。

① 孙文青，九章算术源流考，《学术季刊》（女师大），1931，1（2）。

第四章　分数、率与盈不足

第一节　分数及其四则运算法则

在人类认识史上，人们认识分数比小数早得多。中华民族是世界上使用分数最早的民族之一。《算数书》、《九章算术》在世界数学史上第一次建立了完整的分数四则运算法则。

一　分数及其表示

（一）分数的产生

中国古代分数的产生起码有两个来源。一是实际生活中数量的奇零部分。刘徽说：

物之数量，不可悉全，必以分言之。

这是说，在实际生活中，物体的数量不可能都是整数，特别地，在确定了度、量、衡单位或其他数量单位后，某一物品不一定是某单位度量的整数倍，其奇零部分必须用分数表示，便产生了分数。

二是在数学上，分数是由整数除法产生的。整数除法中，不一定整除，便产生了分数。《九章算术》卷一合分术云“实如法而一。不满法者，以法命之”。约分术刘徽注曰：

法、实相推，动有参差，故为术者先治诸分。

分数的产生与应用是数系的第一次扩充。

（二）分数的表示

《算数书》、《周髀算经》与《九章算术》都没有分数的筹式记法的说明。根据后来的《孙子算经》，整数乘法的筹式作三行布算，上、下布置相乘的二数，积在中行。而“凡除之法，与乘正异。乘得在中央，除得在上方”。由此可见，分数的筹式记成二行，分母在下，分子在上。例如，$\frac{49}{91}$便记成图 4-1-1（a）的形式；若是带分数，则记成三行，整数部分在上，分母居下，分子居中。例如，18 $\frac{5}{7}$便记成图 4-1-1（b）的形式。

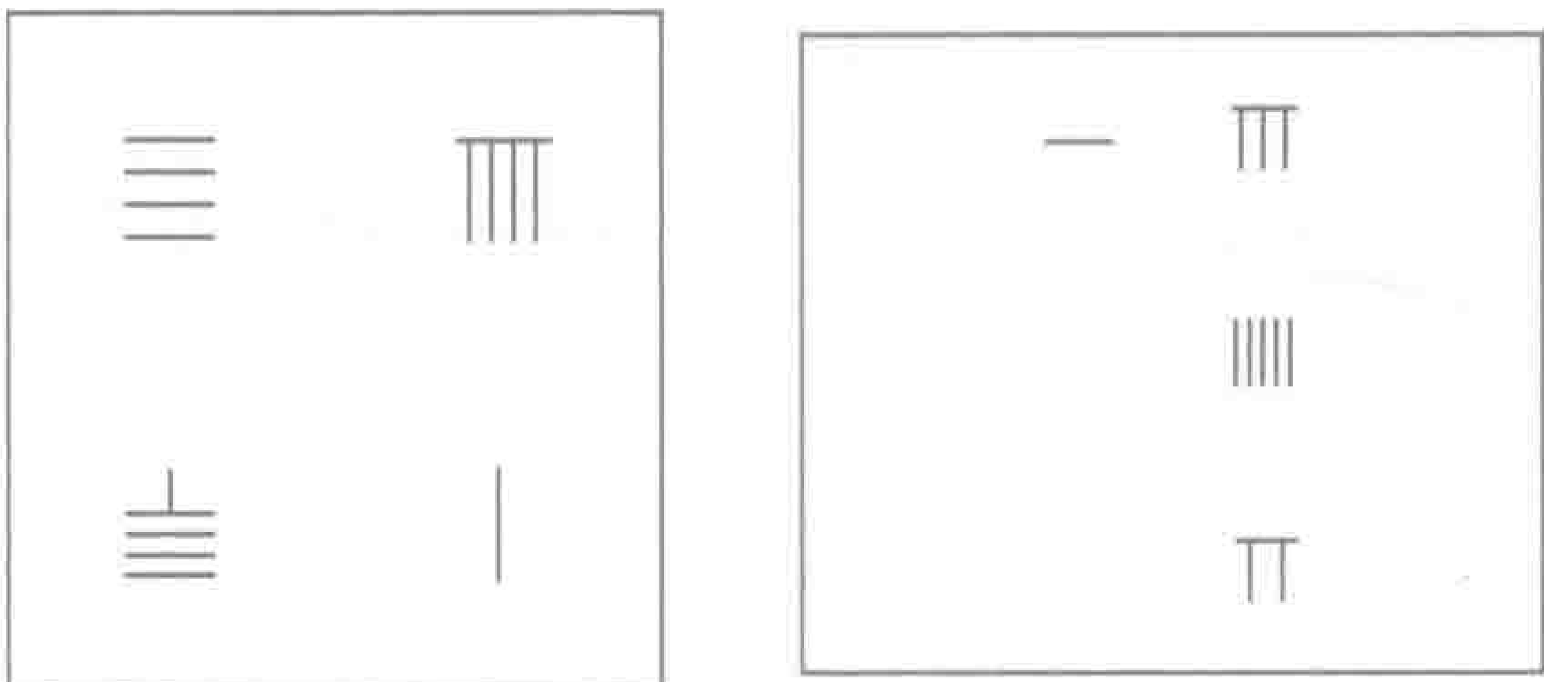


图 4-1-1　分数的表示

二　分数四则运算法则

（一）分数的性质

《算数书》有几条讨论了分数的性质，这是中国古代其他数学著作中所没有的。“增减分”条是：

增分者，增其子；减分者，增其母。

它的意思是明显的：要增加一个分数的值，可以通过增加它的分子来实现；要减小一个分数的值，可以通过增加它的分母来实现。“分当半者”条是：

诸分之当半者，倍其母；当少半者，三其母；当四分者，四其母；当五分者，五其母；当十、百分者，辄十、百其母。如欲所分，虽有百分，以此进之。

显然，此条是“增减分”条的具体应用。

（二）约分

约分是化简分数而不改变分数值的方法。刘徽说：

分之为数，繁则难用。设有四分之二者，繁而言之，亦可为八分之四；约而言之，则二分一也。虽则异辞，至于为数，亦同归尔。

《算数书》与《九章算术》都提出了约简分数的方法约分术。《算数书》约分条是：

约分术曰：以子除母，母亦除子，子母数交等者，即约之矣。有曰：约分术曰：可半，半之，可令若干一若干一。其一术曰：以分子除母，少，以母除子，子母等以为法，子母各如法而成一。不足除者可半，半母亦半子。二千一十六分之百六十二，约之，百一十二分之九。

其文字有重复，三条术文实际上两次叙述了两条内容：如果分母、分子都是偶数，可先取其半。若不都是偶数，便用更相减损的方法求其等数。然后用等数约分母、分子，就化简了分数。将这种方法应用于约简分数$\frac{162}{2016}$，其程序就是：$\frac{162}{2016}$以小减大，反复相减→$\frac{162}{72}$以小减大，反复相减，得18。18为2016和162的等数，以18分别约2016和162，得到最简分数$\frac{9}{112}$。

《九章算术》方田章提出的约分术，概括了这两种内容，并将“以子除母，母亦除子”概括为“更相减损”：

约分术曰：可半者半之。不可半者，副置分母、子之数。以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。

《九章算术》的约分术有2个例题，都比《算数书》的题目简单。

等或等数就是最大公约数。求等数的更相减损程序与欧几里得《几何原本》第七卷求最大公约数①的方法是相同的。可以证明，待约简的两个数必定是等数的整倍数，正如刘徽所指出的：

---

① ［希］欧几里得，几何原本，兰纪正等译，陕西科学技术出版社，1990年，第210～212页。

其所以相减者，皆等数之重叠，故以等数约之。

（三）合分术与减分术、课分术

1. 合分术

合分术即分数加法法则。《算数书》和《九章算术》都提出了合分术。《算数书》有四段抽象性术文，有重复，都是首先区分相加的各个分数是不是同分母。《算数书》将同分母称为“相类”，否则就是“不相类”。如果诸分数是同分母，则将诸分子相加。如果不是同分母，则要区分两种情况使用不同的程序。第一、四段术文是第一种情况，就是有的分母是其他某些分母的倍数，则将其他分数的分母分别或乘以 2，或乘以 3，或乘以 4…，化成同分母，分子亦分别乘同样的数，然后将诸分子相加。

第二、三段术文是第二种方法，这是将诸分母互乘，作为法，分子互乘分母，相加，作为实，实除以法。设两个分数分别为$\frac{b}{a}$、$\frac{d}{c}$。这个法则就是

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac} \tag{4-1-1}$$

分子、分母同乘以某一适当的数的方法类似于少广术，大约是通分的原始方法。

题目是求 5 个分数$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{6}$、$\frac{8}{10}$、$\frac{7}{12}$、$\frac{2}{3}$之和。其方法是先观察这几个分数的分母，第 3 个分母 10 是第 1 个分母 5 的 2 倍，于是将第 1 个分数的分母、分子同乘 2，再与第 3 个分数相加，得$\frac{12}{10}$；又发现第 4 个分母 12 是第 2 个分母的 2 倍，是第 5 个分母的 4 倍，于是将第 2 个分数的分母、分子同乘 2，将第 5 个分数的分母、分子同乘 4，再与第 4 个分数相加得$\frac{21}{12}$。最后将$\frac{12}{10}$与$\frac{21}{12}$相加。这就是：$\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\frac{8}{10}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{10}\right)+\left(\frac{3}{6}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4}{10}+\frac{8}{10}\right)+\left(\frac{6}{12}+\frac{7}{12}+\frac{8}{12}\right)=\frac{12}{10}+\frac{21}{12}=\frac{144}{120}+\frac{210}{120}=\frac{354}{120}=2\frac{114}{120}=2\frac{57}{60}$。

这个例题中分母不相类，含有两种情况，（5，10）是一组，（6，12，3）是一组，先分别使用“可倍，倍；可三，三；可四，四；可五，五；可六，六；子亦辄倍，倍，三、四、五之，如母”的程序，求出两组各自的和，再使两者相加。

《九章算术》的合分术前已引出，不赘。它只有法则（4-1-1），没有“母不相类”的程序。它有 3 个例题，都比《算数书》的简单。例如，第 3 道例题是：

又有二分之一，三分之二，四分之三，五分之四。问：合之得几何？

这就是$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{1\times3\times4\times5}{120}+\frac{2\times2\times4\times5}{120}+\frac{3\times2\times3\times5}{120}+\frac{4\times2\times3\times4}{120}=\frac{60}{120}+\frac{80}{120}+\frac{90}{120}+\frac{96}{120}=\frac{326}{120}=2\frac{43}{60}$。

2. 减分术与课分术

（1）减分术。

减分术即分数减法法则。与合分术的情况不同，《算数书》没有减分条，亦无减分术之名，其分数减法的方法及其例题在“出金”条中有说明。依照术文，《算数书》例题的解法

就是$3\frac{5}{9}-\frac{6}{7}=\frac{32}{9}-\frac{6}{7}=\frac{224}{63}-\frac{54}{63}=\frac{170}{63}=2\frac{44}{63}$。

《九章算术》的减分术更为概括：

> 减分术曰：母互乘子，以少减多，余为实。母相乘为法。实如法而一。

两者程序基本相同。设两个分数分别为$\frac{b}{a}$、$\frac{d}{c}$。《算数书》和《九章算术》的法则就是

$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}-\frac{ad}{ac}=\frac{bc-ad}{ac} \tag{4-1-2}$$

自然，在未认识负数之前，只有当$\frac{b}{a}\geqslant\frac{d}{c}$时，才能施行减分术。

（2）课分术。

怎样知道$\frac{b}{a}$是否大于$\frac{d}{c}$呢？这需要比较分数大小的方法，就是课分术。《算数书》亦无课分术之名，“出金”条中有求一个分数加上多少为另一个分数的方法，类似于课分术。

其题目的解法就是$\frac{7}{9}-\frac{3}{7}=\frac{49}{63}-\frac{27}{63}=\frac{22}{63}$。

《九章算术》提出了课分术：

> 课分术曰：母互乘子，以少减多，余为实。母相乘为法。实如法而一，即相多也。

可见它与减分术基本相同。其区别在于：减分是求余数是多少，课分术是求出一个比另一个多多少。课分术有3道例题，第3道题是：又有二十一分之八，五十分之十七。问：孰多？多几何？其算法是先将两个分数通分，以比较其大小：$\frac{8}{21}$，$\frac{17}{50}\longrightarrow\frac{400}{1050}$，$\frac{357}{1050}$。分母相同，比较其分子，便知$\frac{8}{21}$大，再由减分术，$\frac{8}{21}-\frac{17}{50}=\frac{400}{1050}-\frac{357}{1050}=\frac{43}{1050}$。$\frac{43}{1050}$就是$\frac{8}{21}$比$\frac{17}{50}$多的数值。

（四）平分术

平分术是求几个分数的平均值的方法。《九章算术》提出了平分术：

> 平分术曰：母互乘子，副并为平实。母相乘为法。以列数乘未并者各自为列实。亦以列数乘法。以平实减列实，余，约之为所减。并所减以益于少。以法命平实，各得其平。

设求诸分数$\frac{b_i}{a_i}$（$i=1,2,\cdots n$）的平均值，列数即个数是n。分母互乘分子：$b_ia_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$，则将它们相加：$\sum_{j=1}^{n}b_ja_1a_2\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n$称为平实。所有的分母相乘：$\prod_{i=1}^{n}a_i$称为法。以列数乘相加以前的各数：$nb_ia_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$，$i=1,2,\cdots n$，称为列实。又以列数乘法：$n\prod_{i=1}^{n}a_i$，仍称为法。那么，以平实减列实，$nb_ia_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n-\sum_{j=1}^{n}b_ja_1a_2\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n$，$i=1,2,\cdots n$。将它们与法$n\prod_{i=1}^{n}a_i$相约简，前者便是各分数分别与

平均值的差的分子，即应当损益的分子。换言之，正者就是应当减去的，负者就是应当加上的。而它们的平均值就是 $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} b_j a_1 a_2 \cdots a_{j-1} a_{j+1} \cdots a_n}{n \prod_{i=1}^{n} a_i}$。

值得注意的是，在这条术文中，“法”本来是诸分母相乘，即 $\prod_{i=1}^{n} a_i$。而“以法命平实”中“法”是“以列数乘法”，即 $n\prod_{i=1}^{n} a_i$。换言之，$\prod_{i=1}^{n} a_i$ 与 $n\prod_{i=1}^{n} a_i$ 都称为“法”。这是因为“以列数乘法”之后仍在原来“法”的位置上，故仍称为“法”。这再一次显示出地位制在中国传统数学中的作用。

平分术有 2 道例题，第 1 道题是：

今有三分之一，三分之二，四分之三。问：减多益少，各几何而平？

根据术文，其算法是：3 个分数$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$，分母互乘分子，分别得 $1\times3\times4=12$，$2\times3\times4=24$，$3\times3\times3=27$ 在旁边将它们相加，得 $12+24+27=63$，作为平实。分母相乘，$3\times3\times4=36$，作为法。以分数的个数即列数 3 乘相加前的数 12、24、27，分别得 36、72、81，作为列实。又以列数 3 乘法 36，得 108。以平实 63 分别减列实中大于它的数 72、81，余数分别是 9、18。与法 108 相约，分别得$\frac{9}{108}=\frac{1}{12}$，$\frac{18}{108}=\frac{2}{12}$。因此，从$\frac{3}{4}$中减去$\frac{2}{12}$，从$\frac{2}{3}$中减去$\frac{1}{12}$，将$\frac{2}{12}$与$\frac{1}{12}$相加，得$\frac{3}{12}$，加到$\frac{1}{3}$上，都得到它们的平均值$\frac{7}{12}$。或以法 108 与平实 63 命名一个分数，$\frac{63}{108}=\frac{7}{12}$就是平均值。

不难看出，《九章算术》平分术中求各分数损益之数的方法走了弯路。刘徽指出：

此当副置列数除平实，若然则重有分，故反以列数乘同齐。

这就是说，本来应当先以列数除平实：$\dfrac{\sum_{j=1}^{n} b_j a_1 a_2 \cdots a_{j-1} a_{j+1} \cdots a_n}{n}$，再与 $b_i a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n$，$i=1, 2, \cdots n$ 相减，即可得到诸分数的分子所当损益（加减）的数值。但是这样做的话，会出现重有分即繁分数的情形。所以反过来，用列数乘同，即法：$n\prod_{i=1}^{n} a_i$，又乘齐即未并者，得到列实：$nb_i a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n$，$i=1, 2, \cdots n$。可见在《九章算术》时代，运算是要避免重有分的。

（五）少广术

在合分术、减分术、课分术与平分术中，《算数书》、《九章算术》都是通过分母相乘为公分母，分母互乘子为分子来通分，而不是以诸分母的最小公倍数作为公分母。少广术则进了一步。“少广”顾名思义，就是小广。少广问题的模式是：

今有田广 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，步，求田 1 亩，问从几何？

《算数书》的例题 $n=9$，《九章算术》的例题 $n=12$。《算数书》和《九章算术》都提出了少广术。

《九章算术》的少广术是：

> 少广术曰：置全步及分母、子，以最下分母遍乘诸分子及全步，各以其母除其子，置之于左。命通分者，又以分母遍乘诸分子及已通者，皆通而同之。并之为法。置所求步数，以全步积分乘之为实。实如法而一，得从步。

《算数书》中求“法”的方法比较简括，《九章算术》则很完整，两者的程序基本上一致。遍乘即普遍地乘。将广的全步及分数部分自上而下排列，用最下分数的分母乘全步及所有的分数。如果得出的分子能被分母整除，就做除法。再由下而上分别用分母乘所有的数，直到都化为整数，也就是“皆通而同之”。求它们的和，就是法。最上面的数就是全步之积分，也就是《算数书》所说的“以一为若干”。以所求一亩之步数乘一步之积分，作为实，实除以法，即得到“从”。

显然，“以最下分母遍乘诸分子”与《算数书》合分术中的“母不相类，可倍，倍；可三，三；可四，四；可五，五；可六，六；子亦辄倍，倍，三、四、五之，如母”的方法一脉相承。

同时，由于计算程序中有“各以其母除其子”的步骤，除了广为 $1+\frac{1}{2}$、$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 的情形之外，其他题目都不必用所有的分母遍乘，就将所有的数化成了整数。因此，所谓“全步之积分”，并不是所有分母的乘积。

最后谈一下最小公倍数的问题。许多学者认为《九章算术》少广术是完整的求最小公倍数的方法。《算数书》释文公布后，又说《算数书》的少广术是求最小公倍数的完整方法。我们不敢苟同。确实，在《算数书》的 8 个题目中，除没有最小公倍数问题的第 1、2 两题外，其余 6 个题目全都使用了最小公倍数。《九章算术》的第 4、6、7、8、9、10 等 6 个题目也使用了最小公倍数，而第 5、11 两题则没有使用最小公倍数。我们认为，《九章算术》的术文在分母“遍乘”之后有“各以其母除其子”的规定，因此可以得到比较小的数，但是，由于没有“可约者约之”的规定，并不能保证求出最小公倍数。这就是有两题没有求出最小公倍数的原因。有的学者以为《九章算术》的第 5、11 两题是计算疏忽，这是站不住脚的。事实上，这两个题目的术文没有任何违背少广术的地方。至于《算数书》少广题目的全部、《九章算术》的大部得出了最小公倍数，显然是在这些题目的计算中使用了约简。如第 5 题：

> 今有田广一步半、三分步之一、四分步之一、五分步之一、六分步之一。求田一亩，问：从几何？

两者的计算程序分别是：

《算数书》					《九章算术》				
1	6	6	6×5	$6\times5\times2$	1	6	6	6×5	$6\times5\times4$
$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{2}$	3	3×5	$3\times5\times2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{2}$	3	3×5	$3\times5\times4$
$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{3}$	2	2×5	$2\times5\times2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{3}$	2	2×5	$2\times5\times4$

$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\times5}{2}$	3×5	$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6\times5}{4}$	6×5
$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	6	6×2	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	6	6×4
$\frac{1}{6}$	1	1	5	5×2	$\frac{1}{6}$	1	1	5	5×4
$\times6$		$\times5$	$\times2$		$\times6$		$\times5$	$\times4$	

《算数书》将$\frac{6}{4}$约简成$\frac{3}{2}$，故得出诸分母的最小公倍数60，而《九章算术》没有约简，只得出诸分母较小的公倍数120。须知，没有规定“可约者约之”，并不是说不能这样做。

（六）乘分术与经分术

乘分术是分数乘法法则，经分术是分数除法法则。

1. 乘分术

分数乘法在《算数书》第1条“相乘”中称为“乘分术”，与《九章算术》相同。在第2条“分乘”中称为“分乘分术”。两者完全相同：

> 乘分之术曰：母乘母为法，子相乘为实。

《九章算术》比《算数书》多“实如法而一”五字。

设两个分数分别为$\frac{b}{a}$、$\frac{d}{c}$，这个法则就是

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \tag{4-1-3}$$

《算数书》的乘分术除了第1、3条的分数乘法算表外，未给出其他例题。而《九章算术》的例题是关于田亩面积的计算，分数都是真分数。

值得注意的是，《九章算术》乘分术的第3个例题田广$\frac{4}{5}$步，从$\frac{5}{9}$步，显然广大于从。我们现在经常将古代的广、从分别理解为宽、长，一般说来这没有什么问题。但是实际上广、从主要不是表示大小，而是表示方向。广表示东西方向，从表示南北方向。如战国末年的“合从连横”。

2. 经分术

（1）经分。

经分在《算数书》中称为“径分”。古代经、径二字相通，都有度量、分割、划分的意思。《诗经 · 大雅 · 灵台》：“经始灵台，经之营之。”郑玄注曰：“经，度之也。”《周礼 · 天官冢宰》：“体图经野。”《孟子 · 滕文公》：“夫仁政必自经界始。”张衡《西京赋》：“通天沙以竦峙，径百常而茎擢。”李善注曰：“径，度也。”《算数书》说：“径分以一人命其实，故名。”因此，经分就是度量、分割一个分数。李淳风等注释云：“此乃直求一人之分，以人数分所分，故曰经分也。”似不符合《九章算术》之义。

（2）经分术。

《算数书》和《九章算术》的经分术都采取先通分以分子相除的方法。经分有除数是整数还是分数两种情形。

《算数书》的径分只是以整数除分数的除法，其第9条“径分”云：

故名。五人分三有半、少半，各受卅分之廿三。其术曰：下有少半，以一为六，以半为三，以少半为二，并之，为廿三。即值人数，因而六之，以命其实。五人分七钱少半钱、半钱。人得一钱卅分钱十七。术曰：下三分，以一为六，即因而六人以为法，亦六钱以为实。有曰，术曰：下有半，因而倍之；下有三分，因而三之；下有四分，因而四之。

这里有两个题目。其被除数都是两个分数之和。术文只说明了求两个分数之和时如何通分，大约因为在通分之后的程序是不言自明的。其通分方法与“少广术”相同。它的完整程序是

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\div e=\left(\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}\right)\div e=\frac{ad+cb}{bd}\div\frac{ebd}{bd}=\frac{ad+cb}{ebd}$$

其第二道例题$\left(7\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\div 5=?$的算法便是

$$\begin{matrix} 7\frac{1}{3} & \frac{22}{3} & \frac{22\times 2}{3} & 44 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ & \times 2 & \times 3 & \end{matrix}$$

5也因此变成$5\times 6=30$，以30除（44+3）$=47$，得到$\frac{47}{30}=1\frac{17}{30}$。

《九章算术》“经分术”是：

经分术曰：以人数为法，钱数为实。实如法而一。有分者通之，重有分者同而通之。

其程序是

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\div\frac{e}{f}=\left(\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}\right)\div\frac{e}{f}=\frac{ad+cb}{bd}\div\frac{e}{f}=\frac{(ad+cb)\ f}{bdf}\div\frac{bde}{bdf}=\frac{(ad+cb)\ f}{bde}\quad(4\text{-}1\text{-}4)$$

《九章算术》的第一个例题是整数除分数，在上式中令$c=0$，$d=1$，$f=1$，其程序便是

$$\frac{a}{b}\div e=\frac{a}{b}\div\frac{be}{b}=\frac{a}{be}$$

第二个例题是分数除分数：

又有三人三分人之一，分六钱三分钱之一、四分钱之三。问：人得几何？

根据经分术（4-1-4），其运算程序是$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{3}=\left(\frac{19}{3}+\frac{3}{4}\right)\div\frac{10}{3}=\left(\frac{76}{12}+\frac{9}{12}\right)\div\frac{10}{3}=\frac{85}{12}\div\frac{40}{12}=85\div 40=2\frac{5}{40}=2\frac{1}{8}$。这里是以带分数除一个带分数与一个真分数之和，也就是“重有分”的情形，即刘徽所说的“法、实俱有分”的情形，先将实中两分数通分相加，再将法、实通分，使之“同而通之”，然后将分子相除。

《九章算术》粟米章又提出分数除整数的除法，称为经率术（第二条）。其例题的模式是：

今有出钱a，买布（或其他物品）b匹某丈某尺（或其他单位），欲匹率之，问：匹几何？

由于以匹（或其他单位）率之，必须将除数中匹以下的丈、尺（或其他单位）化成以匹为单位的分数，这是分数除整数的除法。其术文没有反映出分数除法的程序。其术文是：

经率术曰：以所求率乘钱数为实，以所买率为法，实如法得一。

刘徽注曰："此术犹经分。"因此其程序是 $a\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{c}$

（3）颠倒相乘法。《算数书》"启从"条云：

广八分步之六，求田七分步之四，其从廿一分之十六。广七分步之三，求田四分步之二，其从一步六分步之一。求从术：广分子乘积分母为法，积分子乘广分母为实，实如法一步。即以广、从相乘，凡令分母相乘为法，分子相乘为实，实如法一。

这是处理已知面积与广都是分数而求从的问题，比《算数书》的"径分术"除数都是整数要广泛，术文也更抽象。值得注意的是，术文提出"广分子乘积分母为法，积分子乘广分母为实"，亦即

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \tag{4-1-5}$$

这就是颠倒相乘法。后来刘徽在《九章算术》经分术注中说："又以法分母乘实，实分母乘法"，也是公式（4-1-5）。数学史界过去认为，颠倒相乘法是刘徽首先在经分术注中提出的，显然是不妥的。《算数书》"启从"条的第 2 题是已知广 $\frac{3}{7}$ 步，面积 $\frac{2}{4}$ 步^2，求从。那么，从 $=\frac{2}{4}$ 步$^2\div\frac{3}{7}$ 步 $=\frac{2}{4}$ 步 $\times\frac{7}{3}=\frac{14}{12}$ 步 $=1\frac{2}{12}$ 步 $=1\frac{1}{6}$ 步。

第二节　今有术与衰分术、均输术

一　今　有　术

比例算法在《九章算术》和中国传统数学中称为今有术，即今天所谓"三率法"。它在《周髀算经》、《算数书》、《九章算术》等数学著作中都有应用。

《算数书》中的比例算法、《九章算术》的今有术，最先都借助于粟米互换给出。

（一）粟米之法

粟米互换是中国传统数学的重要内容。使用比例方法解决粟米互换问题，首先要确定粟米之间的比率，这就是"粟米之法"，是《九章算术》在粟米章卷首首先提出来的。《算数书》没有"粟米之法"之名，然而"程禾"、"粺毇"、"粟为米"等条也给出了某些粟米的互换比率。《九章算术》粟米章卷首的"粟米之法"提出了 20 种粟米的比率：

粟率	粝米	粺米	糳米	御米	小䵂	大䵂	粝饭	粺饭
50	30	27	24	21	$13\frac{1}{2}$	54	75	54
糳饭	御饭	菽荅麻麦	稻	豉	飧	熟菽	糵	
48	42	45	60	63	90	$130\frac{1}{2}$	175	

它们比《算数书》完整，多数也相同。但糳米、稻、粝的比率与《算数书》中的毇、稻粟、禾粟的相同，可能分别是同样的粟类。对“粟米之法”，刘徽注曰：

凡此诸率相与大通，其特相求，各如本率。可约者约之。别术然也。

刘徽将粟米之法归结为率关系。那么，它们两两或几个同时缩小或扩大同样的倍数，其关系不变。实际上，《九章算术》在今有术的31个例题中，都使用了最简的比率关系。

（二）今有术

《九章算术》今有术是比例问题的一般方法。它在粟米章“粟米之法”之后：

今有术曰：以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一。

此即

$$所求数=(所有数\times所求率)\div所有率$$

亦即，设 $A:B=a:b$，则

$$B=Ab\div a \tag{4-2-1}$$

《九章算术》用今有术解决了31个粟米互换问题。例如，其中一个题目（以下凡引算题，一般略去答案）是：

今有菽二斗，欲为豉。问：得几何？

术曰：以菽求豉，七之，五而一。

这是应用今有术，利用“粟米之法”中的菽、豉之率，由菽求豉。

后来的印度和西方也有同样的方法，被称为三率法（rule of three）。

刘徽认为今有术是解决比例算法的一般方法，他说：

此都术也。凡九数以为篇名，可以广施诸率，所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。诚能分诡数之纷杂，通彼此之否塞，因物成率，审辨名分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也。

就是说任何数学问题只要找出它们的率关系，再使用齐同术，都可以归结为今有术。特别，刘徽将衰分章、均输章等章的许多问题的解法，都使用今有术论述。

（三）异乘同除问题

明初《永乐大典》将《九章算术》衰分卷的后半卷的11个题目及其后数学著作中同类的内容编入“算”字条的卷16343，称为“异乘同除”。因为它们都是用与被乘数不同单位的数乘，而用与被乘数相同单位的数除，故名。《算数书》中有13条15个题目是异乘同除类问题，在《算数书》中是最多的。例如，息钱条。依术，息=(今贷钱×月百钱息×贷钱日数)÷(百钱×月日数)=(60钱×3钱×16日)÷(100钱×30日)=$\frac{24}{25}$钱

《九章算术》衰分章后11个题目都是“异乘同除”类问题，大部分与《算数书》不同。例如：

今有丝一斤，价直二百四十。今有钱一千三百二十八，问：得丝几何？

术曰：以一斤价数为法，以一斤乘今有钱数为实。实如法得丝数。

“实”是斤数乘钱数，“法”以钱数为单位，因而是异乘同除。刘徽注曰：“此术今有之义。以一斤价为所有率，一斤为所求率，今有钱为所有数，而今有之，即得。”以今有术论证了

《九章算术》解法的正确性。

（四）连比例问题

《算数书》、《九章算术》中许多题目可以归结为今之连比例问题。“九数”和《九章算术》中没有相应的卷章，在《九章算术》中被归于衰分章和均输章。

《算数书》中连比例问题只有一个，这就是负米条：

> 负米　人负米不智其数，以出三关，三税之一。已出，余米一斗。问：始行赍米几何？得曰：赍米三斗三升四分三。术曰：直一关而参倍为法，有直米一斗而三之，有三倍之而关数焉为实。

“参倍”依题意应该指 2^3。按术文，其算式是 1 斗 $\times 3 \times 3 \times 3 \div 2^3 = 3\frac{3}{8}$ 斗 $= 3$ 斗 $3\frac{6}{8}$ 升。此算式大约是这样得出的：每关“三税之一”，就是说每关米 3 余 2。设每关税前米为 a_1、a_2、a_3，那么每关税后米为 a_2、a_3、b。因此，$a_1 : a_2 = 3 : (3-1)$，$a_2 = \frac{2a_1}{3}$；$a_2 : a_3 = 3 : (3-1)$，$a_3 = \frac{2a_2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} a_1$；$a_3 : b = 3 : (3-1)$，$b = \frac{2}{3} a_3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} a_1$。由于 $b = 1$ 斗，于是 $a_1 = (b \times 3 \times 3 \times 3) \div 2^3 = 1$ 斗 $\times 3 \times 3 \times 3 \div 2^3$。

《九章算术》均输章解决了更多的连比例问题。它虽然没有提出一般性的抽象术文，然其解法却有共同性。对这些问题，《九章算术》没有使用今有术。例如，“络丝”问是：

> 今有络丝一斤为练丝一十二两，练丝一斤为青丝一斤一十二铢。今有青丝一斤，问：本络丝几何？
>
> 术曰：以练丝十二两乘青丝一斤一十二铢为法。以青丝一斤铢数乘练丝一斤两数，又以络丝一斤乘，为实。实如法得一斤。

就是说：

$$\text{用络丝斤数} = (\text{青丝 1 斤铢数} \times \text{练丝 1 斤两数}) \times \text{络丝 1 斤} \div (\text{青丝 1 斤 12 铢} \times \text{练丝 12 两})。$$

二　衰　分　术

衰分是比例分配问题，是中国传统数学的重要分支，九数之一。《数》、《算数书》和《九章算术》的衰分问题包括衰分术和返衰术两种方法。

（一）衰分术

1.《算数书》中的衰分术

《算数书》有 8 个衰分问题，在共买材、狐出关、狐皮、女织、传马、𣉻漆、米粟并、粟米并等条中，不过没有给出抽象性的衰分术。先以“狐出关”为例：

> 狐出关　狐、狸、犬出关，租百一十一钱。犬谓狸、狸谓狐：而皮倍我，出租当倍我。问：出各几何？得曰：犬出十五钱七分六，狸出卅一钱分五，狐出六十三钱分三。术曰：令各相倍也，并之，七，为法。以租各乘之，为实。实如法得一。

这里，犬、狸、狐以1、2、4的比例分配111钱。按术文，犬 =(111钱×1)÷(1+2+4)= 111钱÷7 = $15\frac{6}{7}$钱，狸 =(111钱×2)÷7 = $31\frac{5}{7}$钱，狐 =(111钱×4)÷7 = $63\frac{3}{7}$钱。

2.《九章算术》中的衰分术

《九章算术》的衰分类问题是先提出衰分术和返衰术，再分别给出若干例题。例题中不仅有问题和答案，而且有应用衰分术和返衰术的术文。

> 衰分术曰：各置列衰，副并为法。以所分乘未并者各自为实。实如法而一。不满法者，以法命之。

“副”是在旁边计算。设所分配的量为 A，各部分的分配比例称为列衰，刘徽认为它们是“相与率”，所以，“重叠，则可约”。设列衰为 m_i，分配所得的各部分为 a_i，$i=1, 2, \cdots n$。在旁边将列衰相加，计算出 $\sum_{j=1}^{n} m_j$，作为法。依次计算出 Am_i，$i=1, 2, \cdots n$，作为实。于是分配后的各部分为

$$a_i = Am_i \div \sum_{j=1}^{n} m_j, \quad i = 1,2,\cdots n \tag{4-2-2}$$

刘徽注曰：

> 法集而衰别。数本一也。今以所分乘上别，以下集除之，一乘一除适足相消，故所分犹存，且各应率而别也。

刘徽又将衰分术归结为今有术：

> 于今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，所分为所有数。

我们以第一道例题为例：

> 今有大夫、不更、簪袅、上造、公士凡五人，共猎得五鹿。欲以爵次分之，问：各得几何？
>
> 术曰：列置爵数，各自为衰。副并为法。以五鹿乘未并者各自为实。实如法得一鹿。

大夫、不更、簪袅、上造、公士都是秦汉爵位名，秦制定爵位二十级，此是最低的五级。《汉书·百官公卿表上》云：“爵：一级曰公士，二上造，三簪袅，四不更，五大夫。”簪袅就是簪袅。刘徽注曰：“爵数者，谓大夫五，不更四，簪袅三，上造二，公士一也。”即以5、4、3、2、1为列衰。而爵数的不等来源于“《墨子·号令篇》以爵级为赐”。那么，法就是5+4+3+2+1=15，未并者是没有相加的列衰。因此各人分得的鹿分别是：大夫 = 5鹿×5÷15 = $\frac{25}{15}$鹿 = $1\frac{2}{3}$鹿，不更 = 5鹿×4÷15 = $\frac{20}{15}$鹿 = $1\frac{1}{3}$鹿，簪袅 = 5鹿×3÷15 = 1鹿，上造 = 5鹿×2÷15 = $\frac{10}{15}$鹿 = $\frac{2}{3}$鹿，公士 = 5鹿×1÷15 = $\frac{5}{15}$鹿 = $\frac{1}{3}$鹿。

（二）返衰问题

如果各部分的列衰是 m_1，m_2，$\cdots m_n$，而要求按 $\frac{1}{m_1}$，$\frac{1}{m_2}$，$\cdots\frac{1}{m_n}$ 进行分配，就是返衰问题。

1.《算数书》中的返衰问题

《算数书》第 15 条“并租”是：

> 并租　禾三步一斗，麦四步一斗，荅五步一斗。今并之，租一石，问：租几何？得曰：禾租四斗卌七分十二，麦租三斗分九，荅租二斗分卄六。术曰：直禾三步，麦四步，荅五步。令禾乘麦为荅实，麦乘荅为禾实，荅乘禾为麦实，各副直之。以一石各乘之，为实。并诸实，卌七，为法而一斗。

依照题设，禾租、麦租、荅租的列衰是 3、4、5。根据术文，求禾租、麦租、荅租的方法是禾租 $=(10\times4\times5)\div(4\times5+3\times5+3\times4)=4\frac{12}{47}$斗，麦租 $=(10\times3\times5)\div(4\times5+3\times5+3\times4)=3\frac{9}{47}$斗，荅租 $=(10\times4\times3)\div(4\times5+3\times5+3\times4)=2\frac{26}{47}$斗。

2.《九章算术》中的返衰术

《九章算术》提出了非常抽象的返衰术。

> 返衰术曰：列置衰而令相乘，动者为不动者衰。

术文十分简括，根据刘徽注及各例题的解法，它的意思是：

> 人数不同，则分数不齐。当令母互乘子。母互乘子，则动者为不动者衰也。

此即

$$a_i = Am_1m_2\cdots m_{i-1}m_{i+1}\cdots m_n \div \sum_{j=1}^{n} m_1m_2\cdots m_{j-1}m_{j+1}\cdots m_n, i = 1,2,\cdots n$$

这实际上是将 $\frac{1}{m_1},\frac{1}{m_2},\cdots\frac{1}{m_n}$ 代入衰分术得到的。求某一部分 a_i 时，不是用其衰 m_i，而是用 $m_1m_2\cdots m_{i-1}m_{i+1}\cdots m_n$ 乘所分 A，故刘徽说“动者为不动者衰”。

刘徽提出新的方法：

> 亦可先同其母，各以分母约，其子为返衰。副并为法。以所分乘未并者，各自为实。实如法而一。

这实际上就是以 $m_1m_2\cdots m_{i-1}m_{i+1}\cdots m_n$，$i=1，2，\cdots n$ 为列衰，应用衰分术。

以其第一道例题为例：

> 今有大夫、不更、簪裛、上造、公士凡五人，共出百钱。欲令高爵出少，以次渐多，问：各得几何？
>
> 术曰：置爵数，各自为衰，而返衰之。副并为法。以百钱乘未并者，各自为实。实如法得一钱。

这是以爵数 5、4、3、2、1 进行返衰。先计算 $m_1m_2\cdots m_{i-1}m_{i+1}\cdots m_5$，$i=1，2，\cdots n$，得到 $4\times3\times2\times1=24$，$5\times3\times2\times1=30$，$5\times4\times2\times1=40$，$5\times4\times3\times1=60$，$5\times4\times3\times2=120$，按照“重叠，则可约”，将它们约简，得到 12、15、20、30、60，以为列衰。再计算法：$12+15+20+30+60=137$。于是：大夫出钱 $=100$ 钱 $\times12\div137=8\frac{104}{137}$钱，不更出钱 $=100$ 钱 $\times15\div137=10\frac{130}{137}$钱，簪裛出钱 $=100$ 钱 $\times20\div137=14\frac{82}{137}$钱，上造出钱 $=100$ 钱 $\times30\div137=21\frac{123}{137}$钱，公士出钱 $=100$ 钱 $\times60\div137=43\frac{109}{137}$钱。

三　均　输　术

均输也是九数之一。《九章算术》均输章实际上只有4个标准的均输问题，分别是均输粟、均输卒、均赋粟（2题）。这是一种更为复杂的比例分配问题，亦用衰分术解决。而在对它们运用衰分术之前，必须根据各县户数或人数，行道日数及物价、僦价、佣价等因素计算出使各县的每户（人）劳费均等的均平之率，以求出各县的列衰。

以第二问均输卒、第三问均赋粟为例。第二问是：

今有均输卒：甲县一千二百人，薄塞；乙县一千五百五十人，行道一日；丙县一千二百八十人，行道二日；丁县九百九十人，行道三日；戊县一千七百五十人，行道五日。凡五县赋输卒一月一千二百人。欲以远近、人数多少衰出之。问：县各几何？

术曰：令县卒各如其居所及行道日数而一，以为衰：甲衰四，乙衰五，丙衰四，丁衰三，戊衰五，副并为法。以人数乘未并者，各自为实。实如法得一。有分者，上下辈之。

刘徽认为此问是“以日数为均，发卒为输”。设总输卒数为A，各县行道日数为p_i，人数为q_i。刘徽指出，“欲为均平之率者”，即要使各县每人的负担均等，就必须使各县每$(30+p_i)$人而出1人，$i=1，2，\cdots n$，其中30为输卒服役一月的日数。刘徽说：

出一人者，计役则皆一人一日，是以可为均平之率。

就是说，每$(30+p_i)$人而出1人，就会使各县都是每一人负担一日。因此，各县按$\frac{q_i}{30+p_i}$，$i=1，2，\cdots n$的比例分配输卒数，就会使各县的负担均等，换言之，$\frac{q_i}{30+p_i}$就是各县的列衰。于是，各县输卒数就是

$$a_i=\left(A\times\frac{q_i}{30+p_i}\right)\div\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{30+p_j},i=1,2,\cdots n$$

在本题中，甲衰原本是$\frac{1200}{30+0}=40$，乙衰是$\frac{1550}{30+1}=50$，丙衰是$\frac{1280}{30+2}=40$，丁衰是$\frac{990}{30+3}=30$，戊衰是$\frac{1750}{30+5}=50$。它们“重叠，则可约”，因此甲衰4，乙衰5，丙衰4，丁衰3，戊衰5。法为$4+5+4+3+5=21$。于是各县输卒数分别为：甲县输卒$=(1200\times4)\div21=228\frac{12}{21}=228\frac{4}{7}$，乙县输卒$=(1200\times5)\div21=285\frac{15}{21}=285\frac{5}{7}$，丙县输卒$=(1200\times4)\div21=228\frac{12}{21}=228\frac{4}{7}$，丁县输卒$=(1200\times3)\div21=171\frac{9}{21}=171\frac{3}{7}$，戊县输卒$=(1200\times5)\div21=285\frac{15}{21}=285\frac{5}{7}$。

答案中出现分数。这是一个实际应用题，刘徽在均输章第一题注曰：“车、牛、人之数不可分裂。推少就多，均赋之宜。”因此《九章算术》说：“有分者，上下辈之。”刘徽注曰：

辈，配也。今按：丁分最少，宜就戊除。不从乙者，丁近戊故也。满法除之，有余从乙。丙分又少，亦就乙除。有余从甲，除之适尽。从甲、丙二分，其数正等。二者于乙远近皆同，不以甲从乙者，方以下从上也。

就是说，化成整数的原则是以小从大，以下从上，从近不从远。

第三题更为复杂一些：

今有均赋粟：甲县二万五百二十户，粟一斛二十钱，自输其县；乙县一万二千三百一十二户，粟一斛一十钱，至输所二百里；丙县七千一百八十二户，粟一斛一十二钱，至输所一百五十里；丁县一万三千三百三十八户，粟一斛一十七钱，至输所二百五十里；戊县五千一百三十户，粟一斛一十三钱，至输所一百五十里。凡五县赋输粟一万斛。一车载二十五斛，与僦一里一钱。欲以县户赋粟，令费劳等。问：县各粟几何？

术曰：以一里僦价乘至输所里，以一车二十五斛除之，加以斛粟价，则致一斛之费。各以约户数，为衰：甲衰一千二十六，乙衰六百八十四，丙衰三百九十九，丁衰四百九十四，戊衰二百七十。副并为法。所赋粟乘未并者，各自为实。实如法得一。

刘徽认为“此以出钱为均也”。这里的关键是求出各县的列衰。先由各县一斛粟不同的价钱、到输所不同的里数、一辆车所装载的斛数、租赁一辆车运一里的费用，求出各县“致一斛之费”，即缴纳一斛粟所付出的费用

某县致一斛费 = (一里僦价 × 某县至输所里数) ÷ 一车斛数 + 某县一斛粟价

一里僦价乘某县至输所里就是某县僦一车到输所所用钱，除以一车斛数，就是僦 1 斛所用钱，再加某县一斛粟价，就是某县致一斛的费用。计算出甲县致一斛的费用 20，乙县 18，丙县 18，丁县 27，戊县 19。刘徽认为，要使各县每户费用相等，必须使甲县 20 户共出 1 斛，乙县、丙县各 18 户共出 1 斛，丁县 27 户共出 1 斛，戊县 19 户共出 1 斛。刘徽说：

计其所费，则皆户一钱，故可为均赋之率也。

就是说，如此各县都是每户负担一钱。因此，以各县致一斛之费分别约各县户数，就得到各县的列衰：甲: 乙: 丙: 丁: 戊 = 1026: 684: 399: 494: 270，最后用衰分术求解。

杨辉《九章纂类》还将“粟为粝、粺、糳米”、“禀粟”、“金箠”、“五人分五钱”、“九节竹”等五问列为均输法的例题。①

第三节 盈不足术

盈不足构成《九章算术》的第七章，《数》、《算数书》和二郑之“九数”作“赢不足”。大约此项内容在先秦称做“赢不足”，汉代张苍等整理《九章算术》时，才改称“盈不足”。

中国传统数学著作中关于盈不足类的问题大都含有两种内容：一是盈不足问题，二是应用盈不足术解决的一般数学问题。《数》、《算数书》和《九章算术》都有这两种内容。《九章算术》第七章的前半章提出了“盈不足术”与“其一术”，“两盈、两不足术”与“其一

① 杨辉：详解九章算法。见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷第 1 册，河南教育出版社，1993 年。

术"，"盈适足、不足适足术"五条术文及其8道例题。后半章有11道一般数学问题，都是化成盈不足问题，用盈不足术求解，另有玉石互隐问未用到盈不足术。

钱宝琮①、李约瑟②等学者都认为，中国的盈不足术后来传入阿拉伯和欧洲，成为他们解题的主要方法。

一　盈不足诸术

（一）《算数书》中的赢不足问题

赢不足类问题在《算数书》中有分钱、米出钱、方田等3条，分量不可谓多，却十分重要。其"分钱"条是：

> 分钱　分钱人二而多三，人三而少二，问：几何人？钱几何？得曰：五人，钱十三。术曰：赢不足互乘母，并之为实，子相从为法。皆赢若不足，子互乘母而各异直之，以子少者除子多者，余为法，以不足为实。

其术文十分抽象，包含了赢不足、两赢、两不足3种情形，与《九章算术》的术文大体相同。用赢不足术解"分钱"题十分简单：

$$\begin{matrix} 人分 & 2 & 3 \\ 赢不足 & 3 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{维乘} \begin{matrix} 2\times2 & 3\times3 \\ 3 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{相并} \begin{matrix} 实 & 4+9 \\ 法 & 3+2 \end{matrix}$$

这里将每人所分称为母，将赢、不足称为子。"赢不足互乘母"即赢不足互乘所分，"以子少者除子多者"即赢、不足以少减多。此题赢不足相减余1，以约法、实，分别为人数与钱数。

（二）《九章算术》中的盈不足术及其例题

1.《九章算术》的盈不足术及其例题

《九章算术》首先给出了盈不足术：

> 盈不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并，以为实。并盈、不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈、不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数。

《九章算术》的例题都是共买物的问题：今有人共买物，每人出A，盈（或不足）a，每人出B，不足（或盈、或适足）b，求人数、物价。这里给出了求不盈不朒之正数、物价、人数3个公式。首先计算：

$$\begin{matrix} A & B \\ a & b \end{matrix} \xrightarrow{维乘} \begin{matrix} Ab & Ba \\ a & b \end{matrix} \xrightarrow{相并} \begin{matrix} Ab+Ba & （实） \\ a+b & （法） \end{matrix}$$

---

① 钱宝琮，《九章算术》盈不足术流传欧洲考。科学，1927，6（12）：701～714。李俨钱宝琮科学史全集，第九卷，辽宁教育出版社，1998年。

② 李约瑟，中国科学技术史第3卷，数学，科学出版社，1978年，第264～268页。

接着提出了求不盈不朒之正数，即每人出多少才既不盈又非不足的公式：

$$\text{不盈不朒之正数} = \frac{Ab + Ba}{a + b} \tag{4-3-1}$$

这条术文在《九章算术》中主要用来解决一般数学问题。戴震不明此理，乱加改动，遗不知而作之讥。一位前辈和钱宝琮纠正了戴震的错校。

然后《九章算术》给出了求物价、人数的公式：

$$\text{物价} = \frac{Ab + Ba}{|A - B|} \tag{4-3-2}$$

$$\text{人数} = \frac{a + b}{|A - B|} \tag{4-3-3}$$

例如，第 1 道例题是：

今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问：人数、物价各几何？

应用公式（4-3-3），得到人数 $= \frac{3+4}{|8-7|} = 7$。应用公式（4-3-2），得到物价 $= \frac{8\times4+7\times3}{|8-7|} = 53$。

当所出是分数时，要先通分。对此，刘徽注曰：

若两设有分者，齐其子，同其母。令下维乘上。讫，以同约之。

如第 3 道例题：

今有共买琎，人出半，盈四；人出少半，不足三。问：人数、价各几何？

所出分别是$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$。则

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & & 3 & 2 & & 3\times18+2\times24=102 & (\text{实}) \\ & & \xrightarrow{\text{通分}} & & & \xrightarrow{\text{通分}} & & & \xrightarrow{\text{维乘}} & & \\ 4 & 3 & & 4 & 3 & & 24 & 18 & & 24+18=42 & (\text{法}) \end{matrix}$$

于是由公式（4-3-3），人数 $= \frac{42}{|3-2|} = 42$。“同”是 6，所以由公式（4-3-2），物价 $= \frac{102}{|3-2|\times6} = 17$。

《九章算术》还给出了求人数、物价的其一术：

其一术曰：并盈、不足为实。以所出率以少减多，余为法。实如法得一人。以所出率乘之，减盈、增不足，即物价。

其求人数的公式同盈不足术［公式（4-3-3）］。而物价则为

$$\text{物价} = \frac{a+b}{|A-B|}\times A - a = \frac{a+b}{|A-B|}\times B + b \tag{4-3-4}$$

2.《九章算术》的两盈、两不足术

《九章算术》给出两盈、两不足术：

两盈、两不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，以少减多，余为实。两盈、两不足以少减多，余为法。实如法而一。有分者，通之。两盈、两不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，

法为人数。

此即给出了与盈不足术（4-3-1），（4-3-2），（4-3-3）相应的3个公式：

$$不盈不朒之正数=\frac{|Ab-Ba|}{|a-b|} \tag{4-3-5}$$

$$物价=\frac{|Ab-Ba|}{|A-B|} \tag{4-3-6}$$

$$人数=\frac{|a-b|}{|A-B|} \tag{4-3-7}$$

以第1道例题为例：

今有共买金，人出四百，盈三千四百；人出三百，盈一百。问：人数、金价各几何？

依术文［式（4-3-6）、式（4-3-7）］，人数、物价分别是人数 $=\frac{|3400-100|}{|400-300|}=33$，物价 $=\frac{|400\times100-300\times3400|}{|400-300|}=9800$。

《九章算术》亦给出求人数、物价的其一术：

其一术曰：置所出率，以少减多，余为法。两盈、两不足以少减多，余为实。实如法而一，得人数。以所出率乘之，减盈、增不足，即物价。

$$物价=\frac{|a-b|}{|A-B|}\times A-a=\frac{|a-b|}{|A-B|}\times B+b \tag{4-3-8}$$

3.《九章算术》的盈适足、不足适足术

《九章算术》又给出了盈适足、不足适足术：

盈适足、不足适足术曰：以盈及不足之数为实。置所出率，以少减多，余为法。实如法得一人。其求物价者，以适足乘人数，得物价。

若每人出 A，盈或不足为 a；若每人出 B，则适足，此即

$$人数=\frac{a}{|A-B|} \tag{4-3-9}$$

$$物价=\frac{a}{|A-B|}\times B \tag{4-3-10}$$

实际上此相当于上述的其一术公式（4-3-3）、公式（4-3-4）、公式（4-3-7）、公式（4-3-8）中 $b=0$ 的情形。

以此术的第二道例题为例：

今有共买豕，人出一百，盈一百；人出九十，适足。问：人数、豕价各几何？

依术文［公式（4-3-9）］，人数、物价分别为人数 $=\frac{100}{|100-90|}=10$，物价 $=\frac{100}{|100-90|}\times90=900$。

二　盈不足术在一般数学问题中的应用

古代，人们了解复杂算术问题的能力较低。但是发现，对于任何一个数学问题，任意假设一个答案，代入原题验算，必定会出现盈、不足、适足三者之一。那么，两次假设，必定

是上述各种盈不足情形之一。因此，都可以化为盈不足问题来解决。《算数书》“分钱”条术文说“赢不足互乘母，并之为实，子相从为法”，也求出实与法，说明其作者通晓这个公式。实际上，《算数书》有 2 条 3 个题目就是将赢不足术应用于求解一般算术问题例子。

在一般数学问题中，有的是线性问题，有的是非线性问题。对线性问题使用盈不足术，可以求出精确解。然而，对非线性问题应用盈不足术，则只能求出近似解。

（一）线性问题

《算数书》的米出钱条是一个线性问题：

> 米出钱　粺米二斗，三钱；粝米三斗，二钱。今有粝、粺十斗，卖得十三钱，问粝、粺各几何？曰：粺七斗五分三，粝二斗五分二。术曰：令偕粺也，钱赢二；令偕粝也，钱不足六少半。同赢、不足以为法，以赢乘十斗为粝，以不足乘十斗为粺，皆如法一斗。米斗一钱三分钱二，黍斗一钱半钱。今以十六钱买米、黍凡十斗，问：各几何？用钱亦各几何？得曰：米六斗、黍四斗，米钱十、黍六。术曰：以赢不足，令皆为米，多三分钱二；皆为黍，少钱。下有三分，以一为三，命曰多二少三，并多而少为法。更异直二、三，以十斗各乘之，即贸其得。如法一斗。

此条有两个题目。在第 1 个题目中，假设 10 斗都是粺米，1 斗粺米值$\frac{3}{2}$钱，10 斗为 15 钱，赢为 15 钱 $-$ 13 钱 $=$ 2 钱；假设 10 斗都是粝米，1 斗粝米值$\frac{2}{3}$钱，10 斗为$\frac{20}{3}$钱，不足为 13 钱 $-\frac{20}{3}$钱 $=\frac{19}{3}$钱 $=6\frac{1}{3}$钱。应用赢不足术：粺米 $=\left(10\text{ 斗}\times\frac{19}{3}+0\times 2\right)\div\left(2+\frac{19}{3}\right)=\frac{190}{3}$斗 $\div\frac{25}{3}=\frac{190}{25}$斗 $=7\frac{3}{5}$斗。同样可以求出粝米 $=2\frac{2}{5}$斗。

同样在第 2 个题目中，假设 10 斗都是米，赢为$\frac{50}{3}$钱 $-$ 16 钱 $=\frac{2}{3}$钱；假设 10 斗都是黍，不足为 16 钱 $-$ 15 钱 $=$ 1 钱。因赢是以 3 为分母的分数，便以 1 为 3，赢化为 2，不足化为 3，应用赢不足术：米 $=(10\text{ 斗}\times 3+0\times 2)\div(2+3)=6$ 斗，米钱 $=1\frac{2}{3}$钱 $\times 6=10$ 钱。同样求出黍 $=4$ 斗，黍钱 $=6$ 钱。

《九章算术》用盈不足术解决一般算术问题的例子更多，仅以油自和漆问为例（略去答案）：

> 今有漆三得油四，油四和漆五。今有漆三斗，欲令分以易油，还自和余漆。问：出漆、得油、和漆各几何？
>
> 术曰：假令出漆九升，不足六升；令之出漆一斗二升，有余二升。

这是一个混合分配问题。用盈不足术则十分简单。由求不盈不朒之正数的公式（4-3-1），得出：出漆 $=\frac{Ab+Ba}{a+b}=\frac{9\times 2+12\times 6}{6+2}=11\frac{1}{4}$升。再由今有术，求出：得油 $=11\frac{1}{4}$升 $\times 4\div 3=$ 15 升，和漆 $=15$ 升 $\times 5\div 4=18\frac{3}{4}$升。

（二）非线性问题

《算数书》的方田条是一个非线性问题：

方田　田一亩，方几何步？曰：方十五步卅一分步十五。术曰：方十五步不足十五步，方十六步有余十六步。曰：并赢、不足以为法。不足子乘赢母，赢子乘不足母，并以为实。复之，如启广之术。

这是已知田1亩为正方形，求其边长的问题。这本来是面积问题的逆运算，若在《九章算术》中，可以用开方$\sqrt{240}$求解。《算数书》却用赢不足术求解：假设其边长为15步，面积=15步×15步=225步^2，不足为240步^2 - 225步^2 = 15步^2；假设其边长为16步^2，面积=16步×16步=256步^2，赢为256步^2 - 240步^2 = 16步^2。应用赢不足术：边长 =（15步×16+16步×15）÷（15+16）=$15\frac{15}{31}$步。这是一个二次问题，用赢不足术只能求出近似解。

又如《九章算术》的“二鼠穿垣”问：

今有垣厚五尺，两鼠对穿。大鼠日一尺，小鼠亦日一尺。大鼠日自倍，小鼠日自半。问：几何日相逢？各穿几何？

术曰：假令二日，不足五寸；令之三日，有余三尺七寸半。

由术文，用盈不足术求不盈不朒之正数的公式（4-3-1）得：日数 $=\frac{Ab+Ba}{a+b}=\frac{2\times 37\frac{1}{2}+3\times 5}{5+37\frac{1}{2}}=2\frac{2}{17}$日。这只是近似解。因为二鼠所穿呈等比数列。设$n$日相逢，则大鼠所穿为：$S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$ 小鼠所穿为 $S'_n=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$尺，$S_n+S'_n=$ 5尺。整理得 $2^{2n}-4\times 2^n-2=0$。因此得到精确解 $n=\frac{\lg(2+\sqrt{6})}{\lg 2}$。

《算数书》和《九章算术》的作者及后来的注释者刘徽、李淳风、贾宪、杨辉等都没有认识到盈不足术对非线性问题只能求出近似解。不过，由于盈不足术实际上是一种线性插值方法，它对求解一些复杂的不容易计算其实根的方程，仍不失为一种有效的求解根的近似值的方法。如图4-3-1所示，钱宝琮指出：

设$f(x)$是一个在区间$a_1\leqslant x\leqslant a_2$上的单调连续函数，$f(a_1)=b_1$，$f(a_2)=-b_2$，正、负相反，那么，方程$f(x)=0$在$a_1$、$a_2$间的实根约等于

$$\frac{a_2f(a_1)-a_1f(a_2)}{f(a_1)-f(a_2)}=a_2+\frac{(a_2-a_1)f(a_2)}{f(a_1)-f(a_2)}=a_1+\frac{(a_2-a_1)f(a_1)}{f(a_1)-f(a_2)}$$

事实上，这个公式所表示的x的近似值是经过二点(a_1, b_1)和$(a_2, -b_2)$的直线在ox轴上的截距，和曲线$y=f(x)$的ox轴上截距相差很小。在现在的高等数学教科书中，这种求方程实根的方法叫做“假借法”，也叫“弦位法”。我们

不要数典忘祖，这个方法应该叫做"盈不足术"。①

我们认为，钱宝琮的意见是正确的。

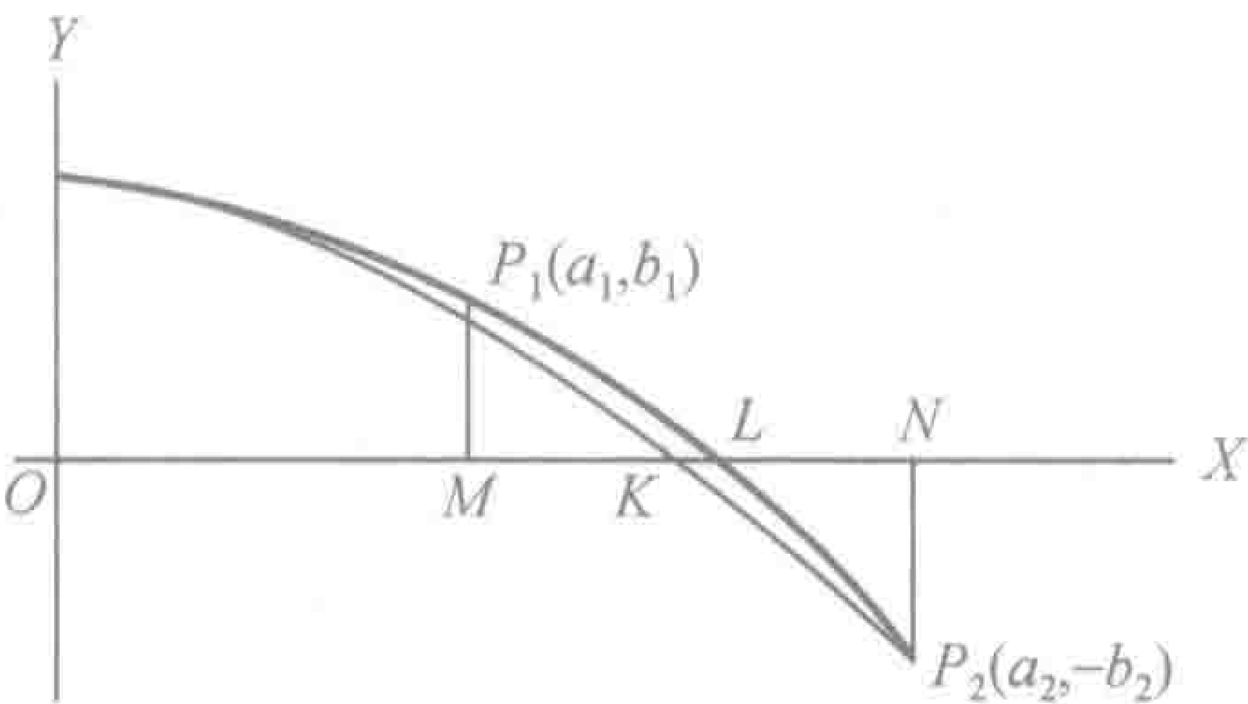


图 4-3-1　盈不足术

① 钱宝琮，中国数学史话，中国青年出版社，1957 年，第 34 ~ 35 页。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第二卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 525 ~ 526 页。

第五章　面积、体积、勾股与测望

春秋战国秦汉数学中的圆与方的关系以及面积、体积、勾股与测望等内容，今天可以归结为几何问题，不过全然没有今之几何学中的定义、定理及性质等内容。所有问题都是求各种元素的数量，如圆周、直径的长度及其比值，某些图形的面积、体积，勾、股、弦的长度及所测望目标的高、深、广、远等。

第一节　面　　积

《算数书》的面积问题有“大广”、“里田”等条，与其有关的还有“方田”、“启广”、“启从”、“少广”等条，这在上面已经谈过，它们都是面积问题的逆运算。《九章算术》的面积问题集中在方田章中，既有直线形的面积，也有曲线形的面积，还有个别的曲面形面积。

一　直线形面积

《九章算术》中的直线形有方田、圭田、邪田、箕田 4 种。《算数书》实际上只有方田。

（一）方田

《九章算术》的方田一般指长方形，与《算数书》的方田条中的方田是正方形不同。方田后来又叫做直田，即今之矩形，如图 5-1-1 所示。从数学上说，《算数书》和《九章算术》的大广田术和里田术都可以归结于方田术。

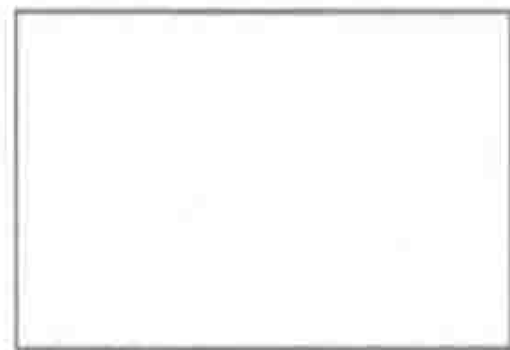


图 5-1-1　方田

《九章算术》提出的方田求积方法是：

方田术曰：广从步数相乘得积步。

设广为 a，从为 b，方田术就是给出公式：

$$S = ab \tag{5-1-1}$$

《九章算术》方田术的第一道例题是：

今有田广十五步，从十六步。问：为田几何？

由公式（5-1-1），得到此田的面积：$S = ab = 15 \times 16 = 240$（步）。当时 1 亩 =240 步，称为“亩法”。故面积为 1 亩。

大广田是广、从为带分数的田地。《算数书》的“大广”条是：

大广　广十二步卌九分步之七，从十三步七分步之四，问：为田几何？曰：为百六十四步有三百卌三分步之二百七十三。大广术曰：直广从，而各以其分母乘其上全步，令分子从之，令相乘也为实。有各令分母相乘为法。如法得一步。不盈

步，以法命之。

其求积公式仍是公式（5-1-1），不过这不是整数乘法，而是要先通分，将带分数化为假分数，应用乘分术求得。应用于“大广”条的例题，便得 $12\frac{7}{49}$ 步 $\times 13\frac{4}{7}$ 步 $= \frac{595}{49}$ 步 $\times \frac{95}{7}$ 步 $= \frac{56525}{343}$ 步^2 $= 164\frac{273}{343}$ 步^2。

《九章算术》的大广田术与《算数书》的大广术基本相同，只是没有明确说“不盈步，以法命之”。实际上必须经过这一步。

里田是以里为单位的田地。《算数书》中里田条含有几条术文和几道例题。其广从不相等者的术文是：“其广从不等者，先以里相乘，已，乃因而三之，有三五之，乃成。”这里是以广、从里数相乘，再化成顷数和亩数。顷法是 1 顷 = 100 亩。其中“三五之”，就是 5^3。那么 1 里^2 $= 1\times3\times5^3$（亩）= 375 亩 = 3 顷 75 亩。里田条有一道数值特别大的例题：

今有广二百廿里，从三百五十里，为田廿八万八千七百五十顷。直提封以此为之。

“封”是古代地积单位。《汉书 · 刑法志》：“地方一里为井，井十为通，通十为成，成方十里；成十为终，终十为同，同方百里；同十为封，封十为畿，畿方千里。”就是说：1 畿 = 10 封 = 100 同 = 1000 终 = 10000 成 = 100000 通 = 1000000 井 = （1000 里）^{2} = 1000000（里^2）。因此 220 里 × 350 里 = 77000 里^2 = 288750 顷。显然是用于计算分封或占据的大面积的土地的。

（二）圭田

圭田是等腰三角形，如图 5-1-2 所示。其实，理解成三角形，亦无大碍。《九章算术》的求积方法是：

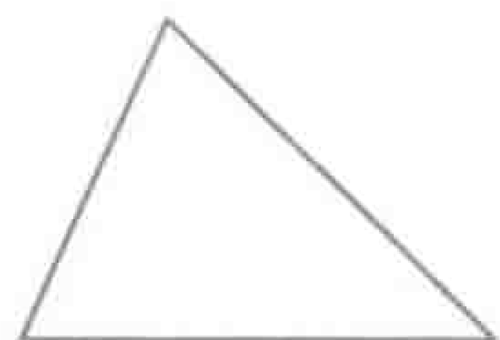


图 5-1-2　圭田

术曰：半广，以乘正从。

其正从就是高，设广为 a，正从为 h，圭田术就是给出公式：

$$S = \frac{1}{2}ah \tag{5-1-2}$$

《九章算术》圭田术的第三道例题是：

又有圭田广五步二分步之一，从八步三分步之二。问：为田几何？

依圭田术［公式（5-1-2）］，则 $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\times5\frac{1}{2}$ 步 $\times 8\frac{2}{3}$ 步 $= \frac{1}{2}\times\frac{11}{2}$ 步 $\times\frac{26}{3}$ 步 $= \frac{286}{12}$ 步^2 $= 23\frac{10}{12}$ 步^2 $= 23\frac{5}{6}$ 步^2。

（三）邪田与箕田

邪田是一腰垂直于底的梯形，如图 5-1-3 所示。箕田是一般梯形，一说为等腰梯形，如图 5-1-4 所示。《九章算术》给出邪田求积方法为：

术曰：并两邪而半之，以乘正从若广。又可半正从若广，以乘并。亩法而一。

正从是高，两邪指与邪相邻的两底。设正从为 h，两底分别为 a,b，这就是

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h \tag{5-1-3}$$

或

$$S = (a+b) \times \frac{1}{2}h \tag{5-1-4}$$

邪田术有两道两个例题，一道是已知两头广和正从如图5-1-3（a）所示：

今有邪田，一头广三十步，一头广四十二步，正从六十四步。问：为田几何？

依邪田术（5-1-3），则其面积为$S = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}(30+42)$步$\times 64$步$= 2304$步$^2 = 9$亩144步^2。

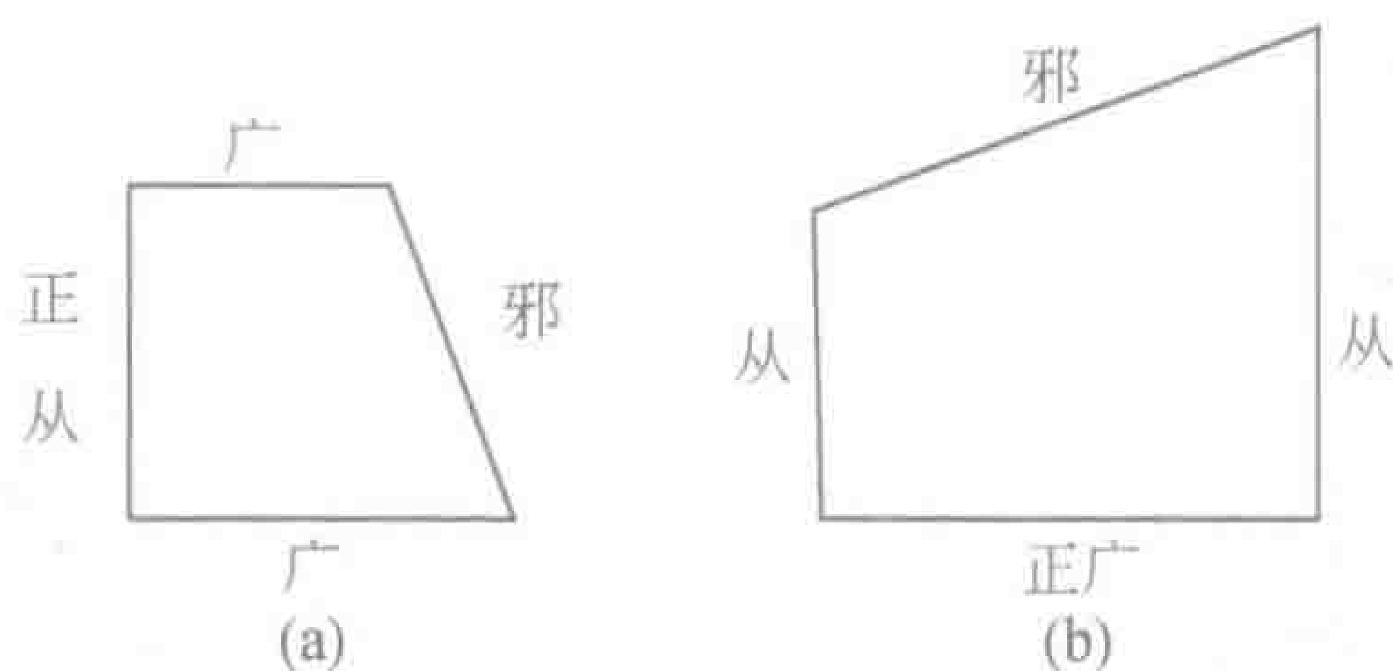


图5-1-3　邪田

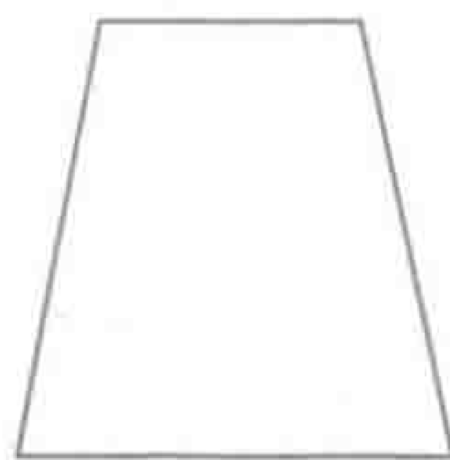


图5-1-4　箕田

另一道已知正广和两畔从，如图5-1-3（b）所示：

又有邪田，正广六十五步，一畔从一百步，一畔从七十二步。问：为田几何？

依邪田术公式（5-1-3），则其面积为$S = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}(100+72)$步$\times 65$步$= 5590$步$^2 =$ 23亩70步^2。

此术中的“两邪”系南宋本、《大典》本原文，不误。有人改作“并两广若袤而半之”，不妥。邪田的“两头广”或“两畔从”因位于“邪”的两端，故称为“两邪”。此系古汉语修辞中的实词活用。此处“若”不训“如”，而训“或”。《九章算术》的邪田术的公式（5-1-3）包含了已知两头广和正从（现今称为高），与已知两畔从和正广（现今亦称为高）两个例题的全部情形，无任何讹误。

箕田是簸箕形的田地，因为一块箕田可以分解成两块邪田，故其公式与邪田相同。

二　曲线形面积

现能辨认的《算数书》竹简没有关于曲边形面积的条目，但是“旋粟”、“ 囷盖”、“圜亭”、“井材”等条实际上蕴涵了圆面积公式。《九章算术》方田章讨论的平面曲线形有圆田、弧田、环田。《数》也有圆面积公式，其中3个与《九章算术》相同。

（一）圆

《九章算术》提出了圆面积的四个公式，这就是：

术曰：半周半径相乘得积步。

设圆周长为 l，半径为 r，圆面积为 S，如图 5-1-5 所示，这就是

$$S = \frac{1}{2}lr \tag{5-1-5}$$

又术曰：周径相乘，四而一。

设圆直径是 d，这就是

$$S = \frac{1}{4}ld \tag{5-1-6}$$

又术曰：径自相乘，三之，四而一。

此即

$$S = \frac{3}{4}d^2 \tag{5-1-7}$$

又术曰：周自相乘，十二而一。

此即

$$S = \frac{1}{12}l^2 \tag{5-1-8}$$

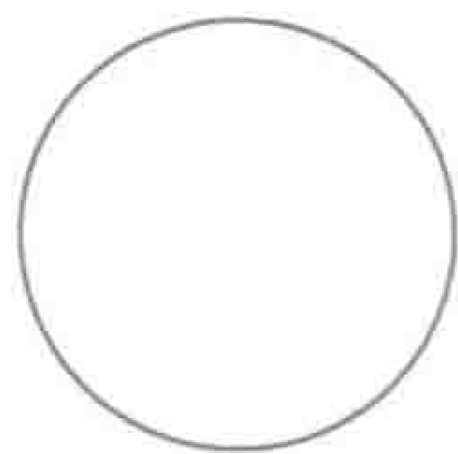


图 5-1-5　圆

公式（5-1-5）与公式（5-1-6）在理论上是正确的，只是两个例题的周径之比均为3∶1，故无法算出精确值。公式（5-1-7）和公式（5-1-8）两式的系数都是基于 $\pi = 3$ 得出的，因而是不准确的，后来刘徽对之做了修正。《九章算术》没有给出使用公式（5-1-6）～（5-1-8）的例题，只给出了使用公式（5-1-5）的两道例题。其第二道例题是：

又有圆田，周一百八十一步，径六十步三分步之一。问：为田几何？

显然，周、径之比也就是圆周率为3。应用公式（5-1-5），则 $S = \frac{1}{2} \times 181$ 步 $\times \frac{1}{2} \times 60\frac{1}{3}$ 步 $= \frac{32761}{12}$ 步^2 $= 2730\frac{1}{12}$ 步^2 $= 11$ 亩 $90\frac{1}{12}$ 步^2。

（二）弧田

弧田即今之弓形，如图 5-1-6 所示。《九章算术》给出求积方法：

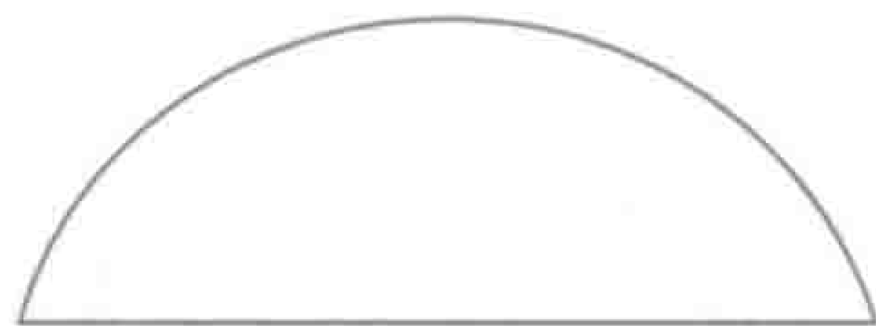


图 5-1-6　弧田

术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一。

设弧田的弦为 c，矢为 v，则面积 S 为

$$S = \frac{1}{2}(cv + v^2) \tag{5-1-9}$$

后来，刘徽证明了公式（5-1-9）是不准确的。《九章算术》有两道例题，其第二道是：

又有弧田，弦七十八步二分步之一，矢十三步九分步之七。问：为田几何？

依弧田术公式（5-1-9），则 $S = \frac{1}{2}(cv + v^2) = \frac{1}{2}[78\frac{1}{2}$ 步 $\times 13\frac{7}{9}$ 步 $+ (13\frac{7}{9}$ 步$)^2] = \frac{51491}{81}$ 步^2 $= 2$ 亩 $155\frac{56}{81}$ 步^2。

（三）环田

环田即今之圆环。《九章算术》提出其求积方法：

术曰：并中外周而半之，以径乘之，为积步。

圆环是两个同心圆之间的部分，如图5-1-7（a）。设中圆（即内圆）的周长l_1，外圆的周长l_2，径（两圆半径之差）为d，则圆环的面积为

$$S = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)d \tag{5-1-10}$$

这个公式在理论上也是正确的。

此术只有一道例题：

今有环田，中周九十二步，外周一百二十二步，径五步。问：为田几何？

依据公式（5-1-10），其面积为$S = \frac{1}{2}(92\text{步} + 122\text{步}) \times 5\text{步} = \frac{1}{2} \times 214\text{步} \times 5\text{步} = 535\text{步}^2 = 2\text{亩}55\text{步}^2$。

《九章算术》还提出环田的密率术：

密率术曰：置中、外周步数，分母、子各居其下。母互乘子，通全步，内分子。以中周减外周，余半之，以益中周。径亦通分内子，以乘周为密实。分母相乘为法。除之为积步。余，积步之分。以亩法除之，即亩数也。

戴震辑录本无“密率”、“密实”之“密”字，与南宋本两通。当时凡是比较精确的值都可称为密率。例如，刘徽将弧田面积的精确近似值称为“密率”。这里用分数表示中、外周和径，比整数精确，故称为“密率术”。它与公式（5-1-10）没有什么不同，只是需要通分。此术也只有一道例题：

又有环田，中周六十二步四分步之三，外周一百一十三步二分步之一，径十二步三分步之二。问：为田几何？

刘徽指出：“此田环而不通匝，故径十二步三分步之二。”经验算，此环缺之角为240°强。故知《九章算术》是以240°的环缺为模型设题，如图5-1-7（b）所示。依据公式（5-1-10），其面积为$S = \frac{1}{2}(62\frac{3}{4}\text{步} + 113\frac{1}{2}\text{步}) \times 12\frac{2}{3}\text{步} = 4\text{亩}156\frac{1}{4}\text{步}^2$。

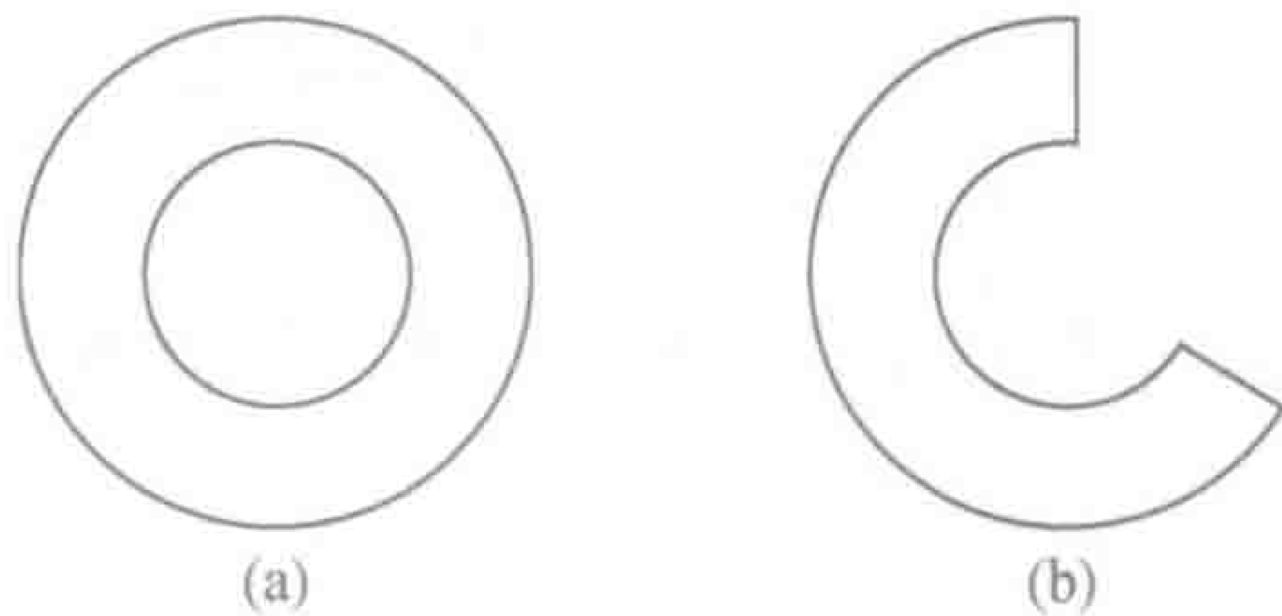


图5-1-7　环田

三　圆方与方圆

（一）圆方与方圆

前面已讲到，《周髀算经》商高答周公问谈到圆方和方圆：

万物周事而圆方用焉，大匠造制而规矩设焉，或毁方而为圆，或破圆而为方。

方中为圆者谓之圆方，圆中为方者谓之方圆也。


萬物周事而圓方用焉大匠造制而規矩設焉
或毀方而爲圓或破圓而爲方方中爲圓者謂
之圓方圓中爲方者謂之方圓也

圓方圖

方圓圖

图 5-1-8 圆方与方圆

这是讨论方与圆的内切及外接关系，如图 5-1-8 所示。这段文字，南宋本、胡刻本《周髀算经》在陈子答荣方问中之宇宙模型与“七衡图”之间。我们认为，此段文字应是商高答周公问的内容，窜入陈子答荣方问中。盖此处既为“勾股圆方图”，却只有勾股图，而无圆方图，必有脱误。江晓原认为此段文字在彼处前后不连贯，十分突兀。察北宋李诫《营造法式》所引《周髀》中这些文字正在此处，与勾股相连。[①] 可见南宋本、胡刻本系错简。

《九章算术》没有明确谈到方圆之法。但是，其圆田又术公式（5-1-7）、（5-1-8）及求诸圆体的体积公式，必然要用到圆与外切方的面积之比为 3∶4，这是基于 $\pi=3$ 得到的。其编纂者对这方面的知识非常娴熟，是不言而喻的。

（二）以圜材方与以方材圜

《算数书》有“以圜材方”、“以方材圜”两条，错讹严重，学术界对其含义至今争论不休，校勘者已有六七家。我们认为，刘金华的校勘与理解庶几可信。他的校勘是：

以圜材方　以圜材为方材，曰大四韦二寸廿五分寸十四，为方材几何？曰：方七寸五分寸三。术曰：〔圜材之径即方材之一面也〕，因而五之为实，令七而一，四［而成一］。

以方材圜　以方为圜曰材，方七寸五分寸三，为圜材几何？曰：四韦二寸廿五分十四。术曰：方材之一面即圜材之径也，因而四之以为实，［又七之］，令五而成一。[②]

“韦”通“围”，量词。刘金华谓“盖‘韦’本亦为长短之谓，相当于十寸”。“取枲程”条“取枲程十步三韦束一”，“韦”即一尺。此处亦是一尺。因此，“以圜材方”条就是已知圆周长 $42\frac{14}{25}$ 寸，求其外切正方形的边长：圆外切正方形边长 $=42\frac{14}{25}\times5\div7\div4=7\frac{3}{5}$ 寸。

“以方材圜”就是已知圆外切正方形的边长 $7\frac{3}{5}$ 寸，求圆周长：圆周长 $=7\frac{3}{5}\times4\times7\div5=42\frac{14}{25}$ 寸。

四　曲面形面积

《九章算术》的宛田是一种中央隆高的曲面形，如图 5-1-9 所示。“宛田”在《孙子算经》、《五曹算经》中称为丘田，赝本《夏侯阳算经》中称为丸田，《算学启蒙》、《四元玉鉴》中作“畹田”，又有“窊田”，其形状同“宛田”。只是“宛田”是上部空缺的优球冠，

① 北宋·李诫，营造法式。

② 刘金华，张家山汉简《算数书》研究，香港华夏文化艺术出版社，2008 年。“又七之”，刘金华校为“又因而七之”。方括号中的文字系校补。

“窊田”是下部空缺的优球冠。也有人认为宛田不是球冠形田地，而是优扇形。《九章算术》提出的宛田的求积方法是：

术曰：以径乘周，四而一。

设 l 是宛田下周，d 是宛田的表面径，则其面积 S 为

$$S = \frac{1}{4}ld \qquad (5\text{-}1\text{-}11)$$

与圆面积公式（5-1-6）取同样的形式。刘徽指出“此术不验”。不过，这个错误的公式在中国古代一直沿用下来。宛田术有二道例题，其第二道例题

又有宛田，下周九十九步，径五十一步。问：为田几何？

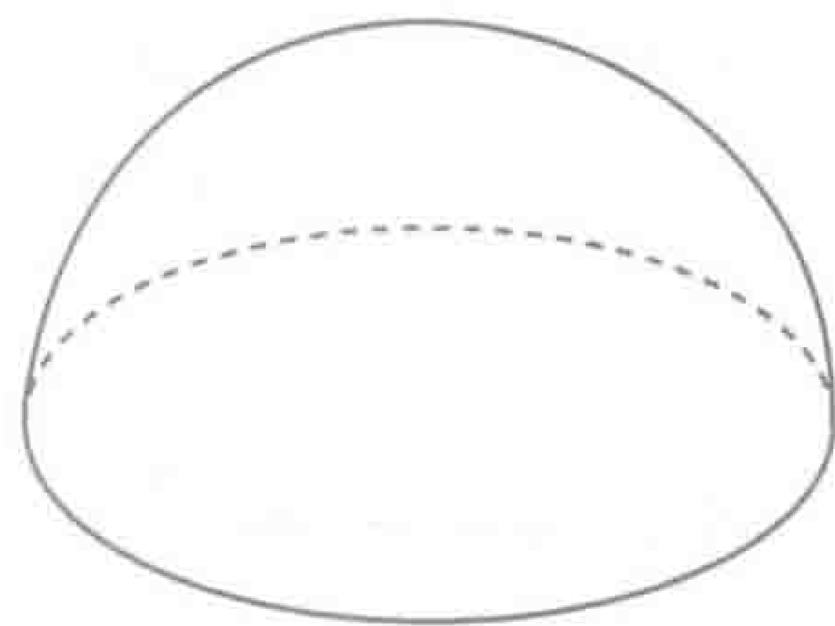


图 5-1-9　宛田

依据公式（5-1-11），则 $S = \frac{1}{4} \times 99$ 步 $\times 51$ 步 $= 5$ 亩 $62\frac{1}{4}$ 步^2。

第二节　体　　积

体积问题在《数》、《算数书》和《九章算术》中占有重要地位。《算数书》中有除、郓都、刍、旋粟、囷盖、圜亭、井材 7 条。《九章算术》的体积问题集中于商功章。“商功”本来要解决工程量的分配，是一般算术问题。但要分配工作量，首先要计算土木工程中某些立体的体积、容积，体积问题遂成为商功章中最重要的内容。此外，《九章算术》少广章有体积的逆运算开立方术、开立圆术，后者蕴涵了球体积公式。《九章算术》共有 23 种立体体积公式。

一　多面体体积

《算数书》和《九章算术》共有 19 种多面体，不过，有些多面体在数学上是同一种形状，实际上只有 12 条体积公式。《算数书》和《九章算术》都没有立体的定义，我们只能按照题设、术文及刘徽注来理解它们的形状。

（一）长方体

方垛壔即今之正方柱体，如图 5-2-1（a），刘徽说：“垛，垛城也。壔，音丁老切，又音纛，谓以土拥木也。”《九章算术》给出的求积方法为：

术曰：方自乘，以高乘之，即积尺。

设其底每边长 a，高 h，则其体积为

$$V = a^2h \qquad (5\text{-}2\text{-}1)$$

《九章算术》只有一道例题，即：

今有方堡壔者，方一丈六尺，高一丈五尺。问：积几何？

依据公式（5-2-1），其体积为 $V = (1$ 丈 6 尺$)^2 \times 1$ 丈 5 尺 $= 3840$ 尺^3。

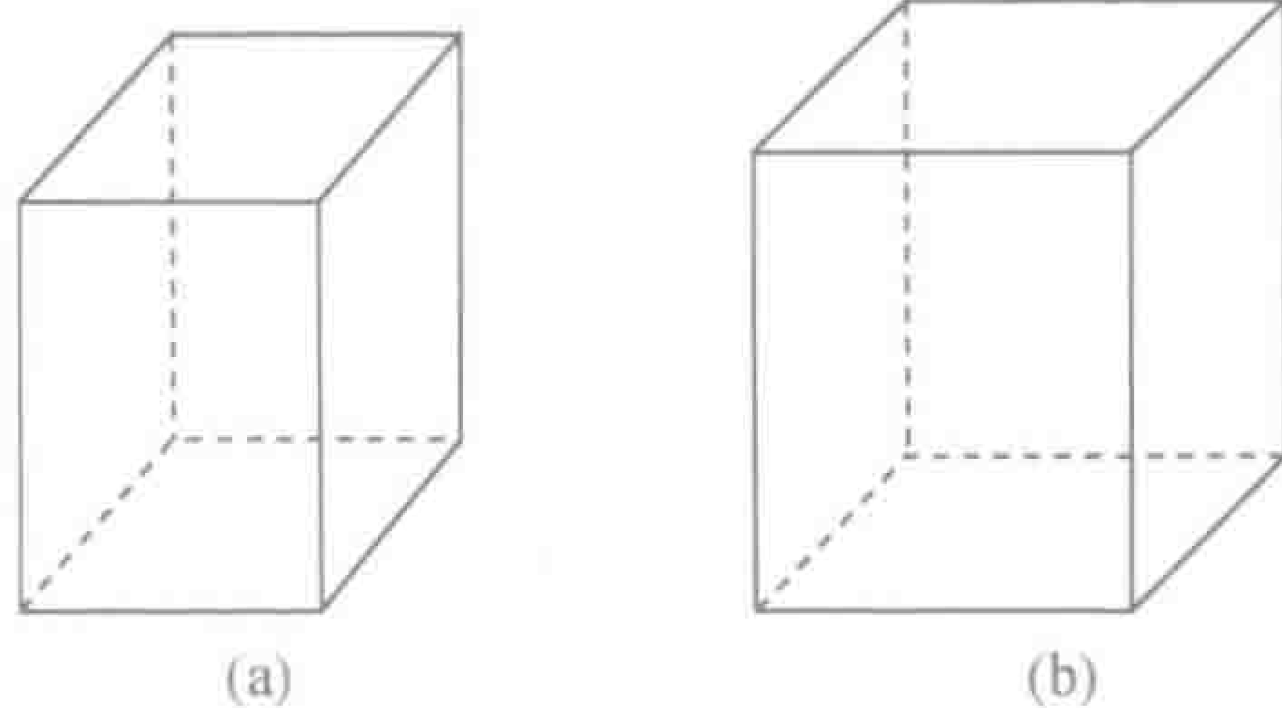


图 5-2-1　长方体

《数》给出了计算长方体［图5-2-1（b）］体积的公式，《九章算术》没有但商功章有一已知长方体粮仓的容积及广、袤，求仓高的问题：

今有仓，广三丈，袤四丈五尺，容粟一万斛。问：高几何？

《九章算术》给出其求法：

术曰：置粟一万斛积尺为实，广、袤相乘为法，实如法而一，得高尺。

这是长方体体积的逆运算，即 $h = \frac{V}{ab}$。其中，V 为容积，a,b,h 分别为广、袤、高。因此，《九章算术》使用了长方体体积公式：

$$V = abh \tag{5-2-2}$$

（二）城、垣、堤、沟、堑、渠

城、垣、堤、沟、堑、渠的形状都是上底、下底为其长相等而宽不等的互相平行的两矩形，两侧为相等的两矩形，两端为垂直于底的相等的两等腰梯形。不过，城、垣、堤是地面上的土方工程，其上广小于下广；而沟、堑、渠都是挖成的地面下的工程，其上广大于下广；并且，前者是计算其体积，后者是计算其容积。其形状如图5-2-2所示。《九章算术》说它们同术，其求积方法是：

城、垣、堤、沟、堑、渠皆同术。术曰：并上、下广而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺。

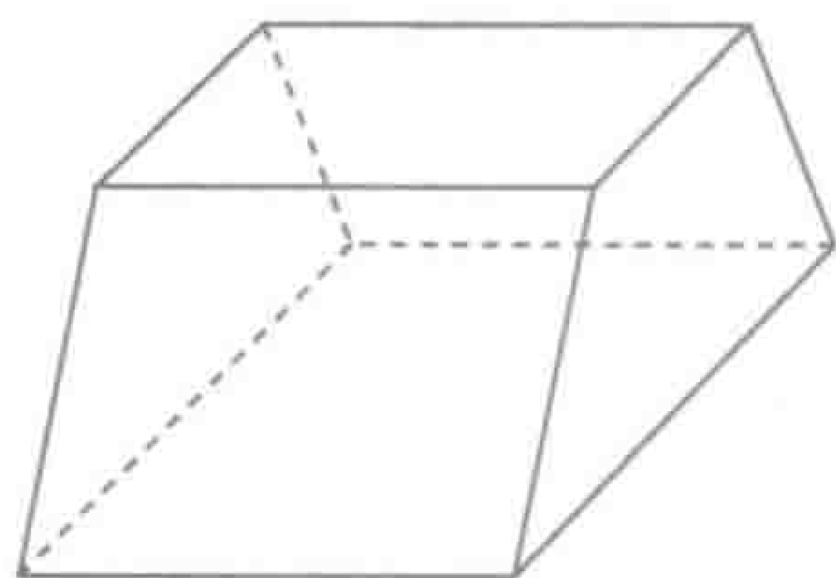


图5-2-2　城、垣、堤、沟、堑、渠

设上、下广，袤，高分别是 a_1,a_2,b,h，则其体积公式便是

$$V = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)bh \tag{5-2-3}$$

《九章算术》对城、垣、堤、沟、堑、渠分别给出了一道例题，并且对堤、沟、堑、渠，除了计算其体积外，还分别设计了冬、春、夏、秋不同人功的工程分配问题。以穿渠问为例：

今有穿渠，上广一丈八尺，下广三尺六寸，深一丈八尺，袤五万一千八百二十四尺。问：积几何？

依据公式（5-2-3），其体积为 $V=\frac{1}{2}$（18尺+3尺6寸）×51824尺×18尺=10074585 $\frac{3}{5}$尺^3。

《九章算术》又提出问题：

秋程人功三百尺，问：用徒几何？

其用徒人数自然是以秋程人功300尺^{3}除穿渠的体积10074585 $\frac{3}{5}$尺^3，不尽。但人数不应该是分数，而在体积中补14 $\frac{2}{5}$尺^3，则可整除。故得33582人，体积内缺14 $\frac{2}{5}$尺^3。

《九章算术》又提出问题：

一千人先到，问：当受袤几何？

《九章算术》给出解法：

术曰：以一人功尺数乘先到人数为实。并渠上下广而半之，以深乘之为法。实

如法得袤尺。

这实际上是已知穿渠的1000人所应完成的那一段的体积 $V_1 = 300$ 尺$^3 \times 1000$，上广18尺，下广3尺6寸及深18尺，求袤的逆运算：$b = \frac{300\text{尺}^3 \times 1000}{\frac{1}{2}(18\text{尺} + 3\text{尺}6\text{寸}) \times 18\text{尺}} = 1543$ 尺 $2\frac{8}{81}$ 寸。

（三）堑堵、方锥、阳马和鳖臑

1. 堑堵

堑堵是沿长方体相对两棱剖开所得的楔形体。如图5-2-3所示。刘徽说："邪解立方得两堑堵。虽复随方，亦为堑堵。"随，音、义通椭。随方即长方体。《九章算术》的堑堵求积方法是：

术曰：广袤相乘，以高乘之，二而一。

若堑堵的下广、袤、高分别为 a、b、h，则

$$V = \frac{1}{2}abh \tag{5-2-4}$$

《九章算术》也只有一道例题：

今有堑堵，下广二丈，袤一十八丈六尺，高二丈五尺。问：积几何？

依据公式（5-2-4），其体积为 $V = \frac{1}{2} \times 2$ 丈 $\times 18$ 丈6尺 $\times 2$ 丈5尺 $= 46500$ 尺^3。

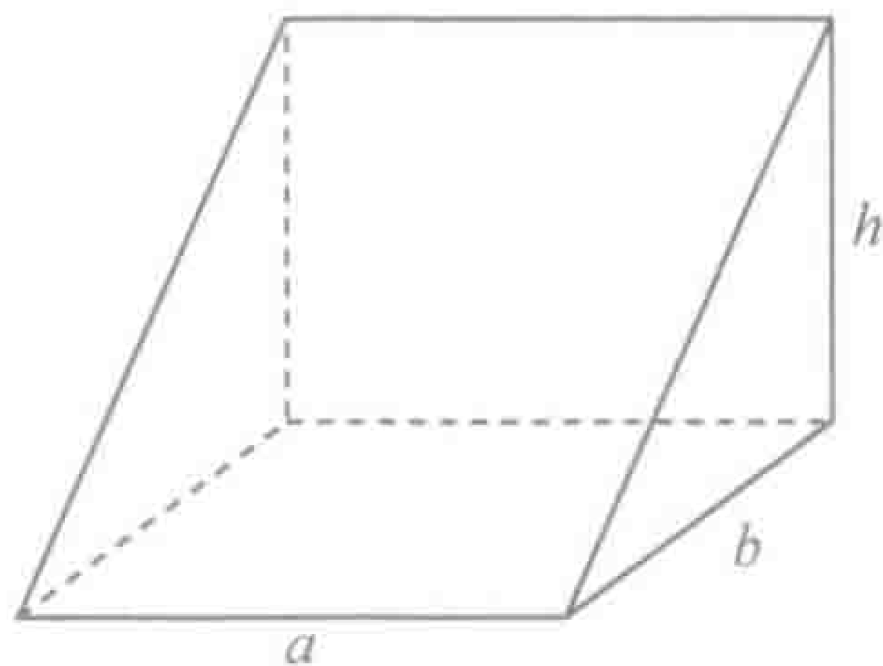


图5-2-3　堑堵

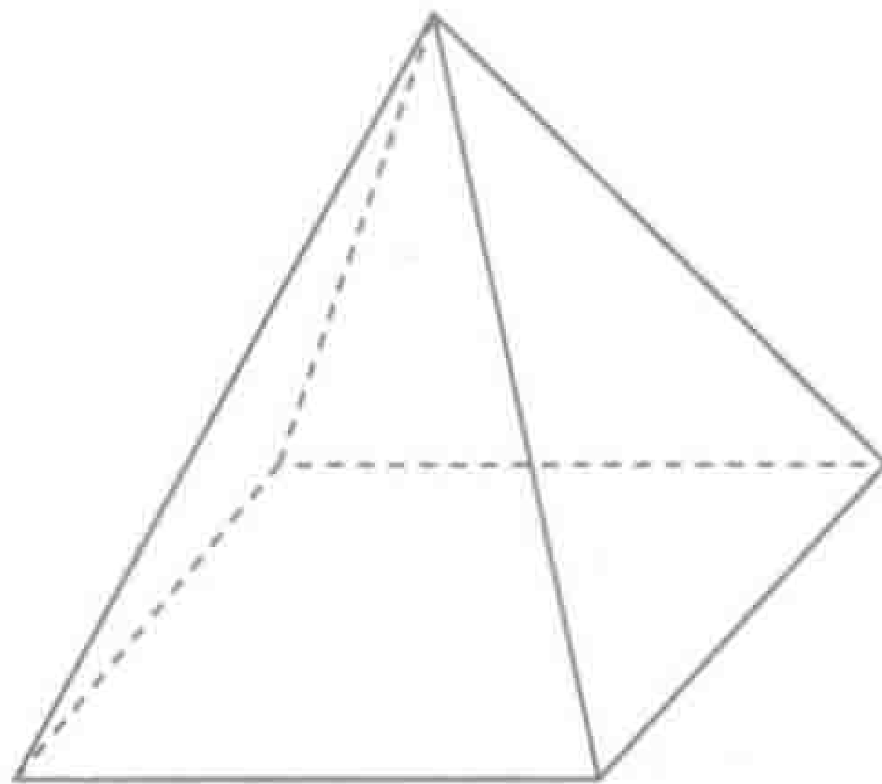


图5-2-4　方锥

2. 方锥

方锥是大家所熟知的，如图5-2-4所示，《九章算术》给出其求积方法为：

术曰：下方自乘，以高乘之，三而一。

设下方为 a，高 h，则：

$$V = \frac{1}{3}a^2h \tag{5-2-5}$$

《九章算术》也只有一道例题：

今有方锥，下方二丈七尺，高二丈九尺。问：积几何？

依据公式（5-2-5），其体积为 $V = \frac{1}{3} \times (2$ 丈7尺$)^2 \times 2$ 丈9尺 $= 7047$ 尺^3。

3. 阳马

阳马是直角四棱锥，如图5-2-5所示。刘徽说："阳马之形，方锥一隅也。今谓四柱屋隅为阳马。"阳马是古代的建筑零件术语。《九章算术》提出阳马的求积方法为：

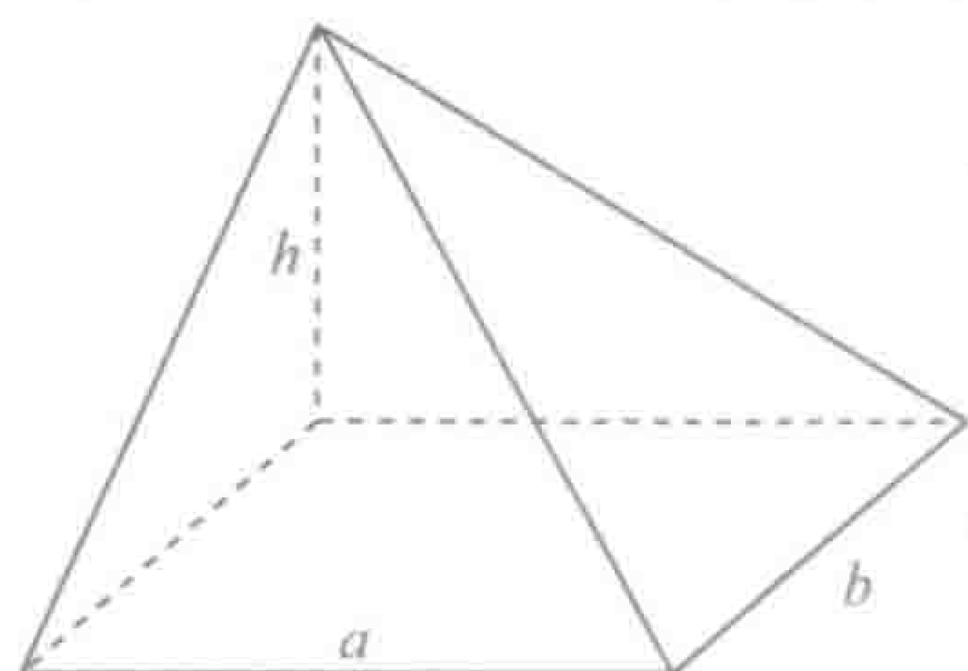


图5-2-5　阳马

术曰：广、袤相乘，以高乘之，三而一。

设阳马的广、袤、高分别为 a、b、h，则体积公式为

$$V = \frac{1}{3}abh \tag{5-2-6}$$

与方锥的公式相同。

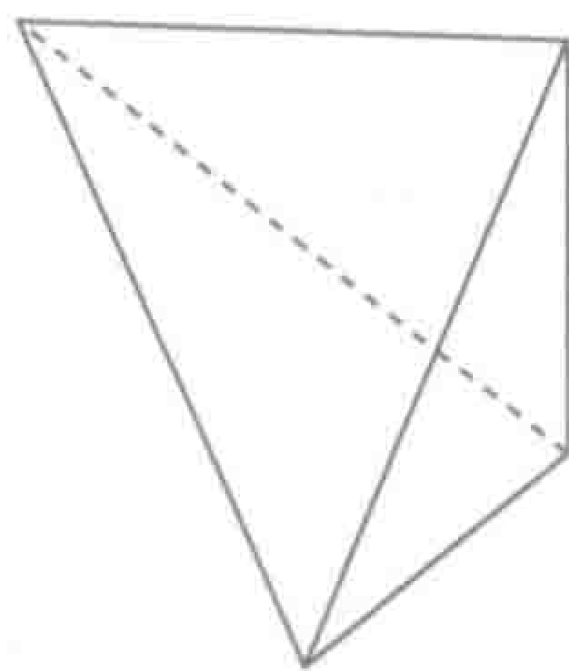
《九章算术》也只有一道例题：

今有阳马，广五尺，袤七尺，高八尺。问：积几何？

依据公式（5-2-6），其体积为 $V = \frac{1}{3} \times 5\text{尺} \times 7\text{尺} \times 8\text{尺} = 93\frac{1}{3}\text{尺}^3$。

4. 鳖臑

鳖臑是一个有下广，无下袤，有上袤，无上广的四面体，如图5-2-6所示。它的四面都是勾股形。刘徽说："臑者，臂骨也。或曰半阳马，其形有似鳖肘，故以名云。"斜解一堑堵，就得到一个阳马、一个鳖臑。刘徽说："鳖臑之物，不同器用。"就是说，鳖臑不是如其他立体那样来源于实际应用，而是立体分割的产物。《九章算术》提出它的求积方法是：


图5-2-6　鳖臑

术曰：广、袤相乘，以高乘之，六而一。

若下广为 a，上袤为 b，高为 h，则其体积为

$$V = \frac{1}{6}abh \tag{5-2-7}$$

《九章算术》也只有一道例题：

今有鳖臑，下广五尺，无袤；上袤四尺，无广；高七尺。问：积几何？

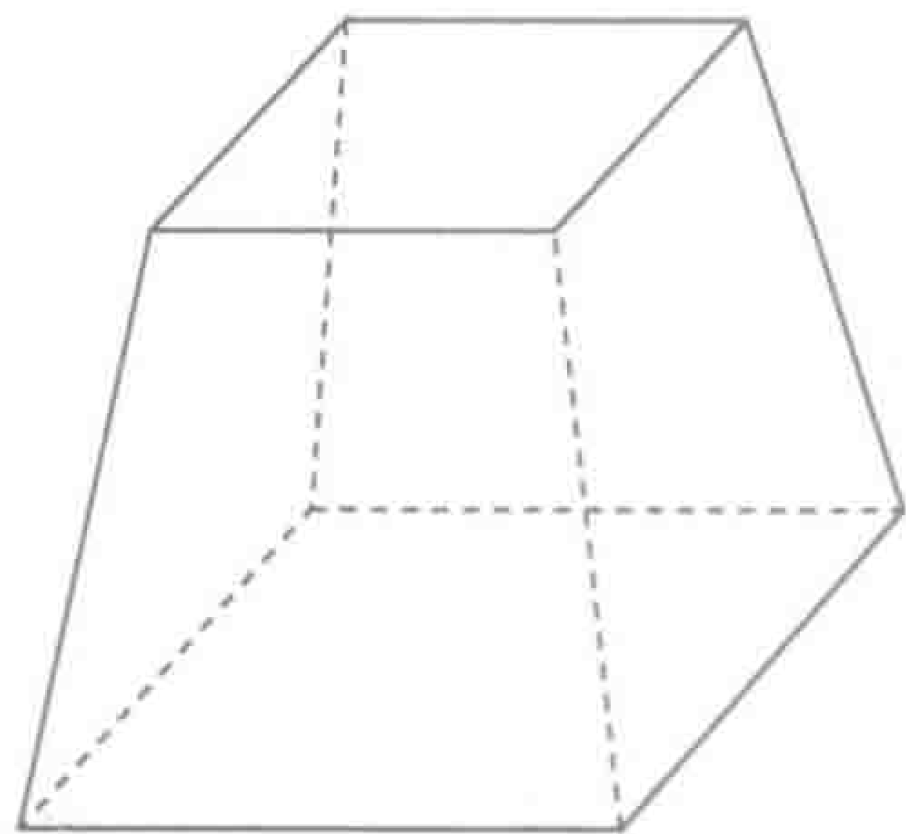
依据公式（5-2-7），其体积为 $V = \frac{1}{6} \times 5\text{尺} \times 4\text{尺} \times 7\text{尺} = 23\frac{1}{3}\text{尺}^3$。

（四）方亭、刍甍、刍童和羡除

1. 方亭

方亭即今之正锥台，如图5-2-7所示。《九章算术》给出其求积方法是：

术曰：上、下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。


图5-2-7　方亭

设上、下底边长分别为 a_1、a_2，高 h，则其体积公式为

$$V = \frac{1}{3}(a_1a_2 + a_1^2 + a_2^2)h \tag{5-2-8}$$

《九章算术》也只有一道例题：

今有方亭，下方五丈，上方四丈，高五丈。问：积几何？

依据公式（5-2-8），其体积为 $V = \frac{1}{3}[4\text{丈} \times 5\text{丈} + (4\text{丈})^2 +$

$(5丈)^2] \times 5丈 = 101666\frac{2}{3}尺^3$。

2. 刍甍和斩都

《九章算术》的刍甍与《算数书》的斩都是形状相近的楔形体。

（1）刍甍。

刍甍如图 5-2-8 所示，下有广、袤，上有袤无广，下袤大于上袤。刍是草，甍是屋脊。刘徽引用旧说云："凡积刍有上下广曰童，甍谓屋盖之茨也。"他又说："正斩方亭两边，合之即刍甍之形也。"《九章算术》提出刍甍的求积方法为：

图 5-2-8　刍甍

术曰：倍下袤，上袤从之，以广乘之，又以高乘之，六而一。

设上、下袤分别为 a_1、a_2，广为 b，高为 h，则刍甍体积公式是

$$V = \frac{1}{6}(2a_2 + a_1)bh \qquad (5\text{-}2\text{-}9)$$

《九章算术》也只有一道刍甍的例题：

今有刍甍，下广三丈，袤四丈；上袤二丈，无广；高一丈。问：积几何？

依据公式（5-2-9），其体积为 $V = \frac{1}{6}(2 \times 4丈 + 2丈) \times 3丈 \times 1丈 = 5000尺^3$。

（2）斩都。

《算数书》有"斩都"条，它是：

斩都　斩都下厚四尺，上厚二尺，高五尺，袤二丈，责百卅三尺少半尺。术曰：倍上厚，以下厚增之，以高及袤乘之，六成一。

设上、下厚分别为 a_1、a_2，袤为 b，高为 h，则"斩都"的体积公式为

$$V = \frac{1}{6}(2a_1 + a_2)bh \qquad (5\text{-}2\text{-}10)$$

将例题的数值代入公式（5-2-10），便得到"斩都"体积：$V = \frac{1}{6}(2 \times 2 + 4) \times 5 \times 20 = 133\frac{1}{3}尺^3$。

彭浩将"斩都"释为"郓都"，认为是"堑堵"，未允。日本大阪工业大学的张家山汉简《算数书》研究会重新释读原简，将"都"前之字认读为"斩"，不过仍校勘为"堑堵"。[①] 斩都求积公式(5-2-10)与刍甍求积公式（5-2-9）相似。郭书春等曾认为"郓（斩）都"就是刍甍，是不妥当的。我们认为，依题画出图形，应如图 5-2-9 所示[②]。

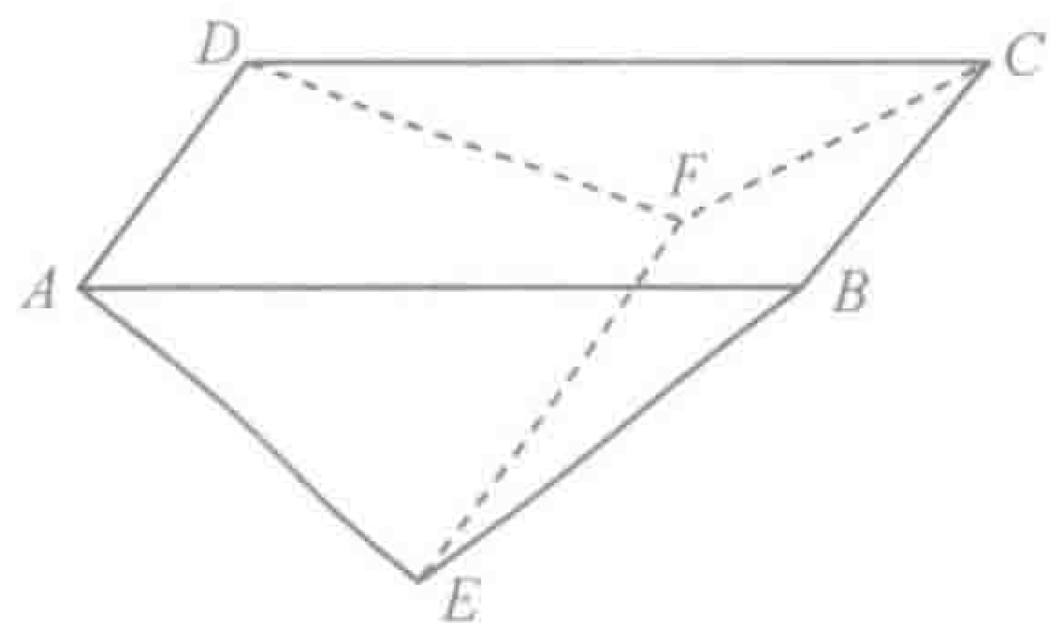


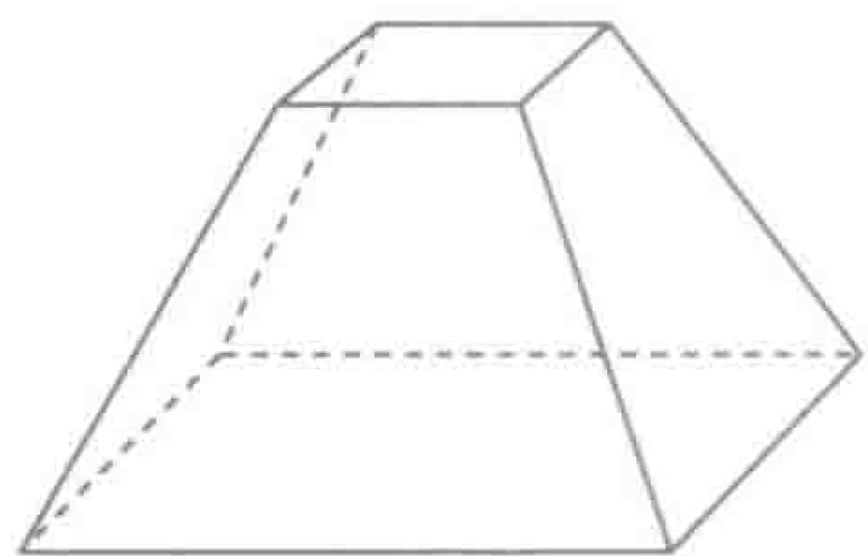
图 5-2-9　斩都

3. 刍童

《算数书》和《九章算术》都提出了刍童的体积求法。

① [日] 张家山汉简《算数书》研究会，汉简《算数书》——中国最古的数学书，朋友书店，2006 年，第 36 页。本编凡引此书文字，均据此。

② 郭书春，《算数书》"斩都"求积公式造术初探，曲阜师范大学学报（自），第 36 卷第 3 期（2010 年）。


图 5-2-10　刍童、盘池、冥谷

刍童也是草垛，若刍甍有上广，便为刍童，如图 5-2-10 所示。

(1)《算数书》的刍童与方阙。

《算数书》的刍条是讨论刍童的体积问题。“刍”条是：

刍　刍童及方阙，下广丈五尺，袤三丈；上广二丈，袤四丈；高丈五尺。积九千二百五十尺。术曰：上广袤、下广袤各自乘；又上袤从下袤，以乘上广；下袤从上袤，以乘下广；皆并。以高乘之，六成一。

这里包括刍童与方阙两种形状相同的立体。设刍童的上广、袤分别为 a_1、b_1，下广、袤分别为 a_2、b_2，高为 h，则其体积公式为

$$V = \frac{1}{6}[a_1b_1 + a_2b_2 + (b_1 + b_2)a_1 + (b_1 + b_2)a_2]h \qquad (5\text{-}2\text{-}11)$$

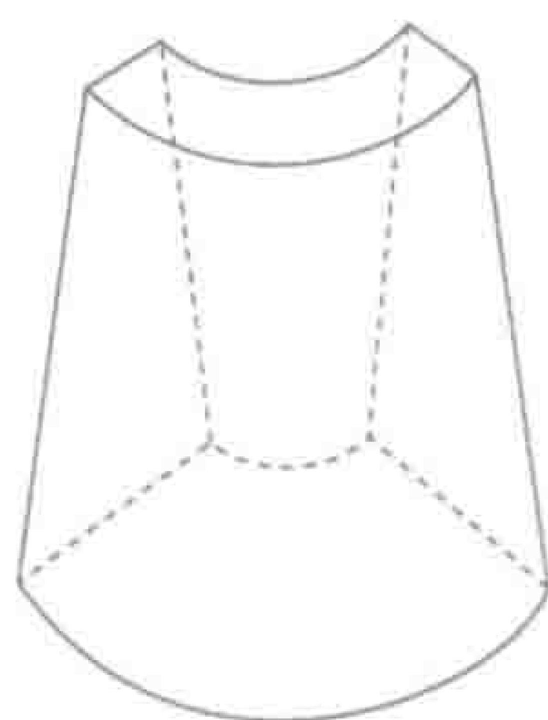
将例题的数值代入式（5-2-11），便得到其体积：

$$V = \frac{1}{6}[20 \times 40 + 15 \times 30 + (40 + 30) \times 20 + (40 + 30) \times 15] \times 15 = 9250 \text{ 尺}^3$$

(2)《九章算术》的刍童。

《九章算术》也有刍童，但是没有方阙。此外，《九章算术》还提出了盘池、冥谷等立体，其形状与刍童相同，不过是地下工程。还有曲池，是上宽下窄、上长下短的环缺状深槽，如图 5-2-11 所示。经过求出上、下袤的变换之后，也与刍童相类。《九章算术》提出的求积方法前已引出，不赘。其公式是

$$V = \frac{1}{6}[(2b_1 + b_2)a_1 + (2b_2 + b_1)a_2]h \qquad (5\text{-}2\text{-}12)$$


图 5-2-11　曲池

可见，《算数书》与《九章算术》的刍童体积公式表达形式稍异，但其实质是相同的。

《九章算术》分别给出了刍童、盘池、冥谷的例题。以盘池为例：

今有盘池，上广六丈，袤八丈；下广四丈，袤六丈；深二丈。问：积几何？

依据公式（5-2-12），其体积为

$$V = = \frac{1}{6}[(2 \times 8 \text{ 丈} + 6 \text{ 丈}) \times 6 \text{ 丈} + (2 \times 6 \text{ 丈} + 8 \text{ 丈}) \times 4 \text{ 丈}] \times 2 \text{ 丈} = 70666\frac{2}{3} \text{ 尺}^3$$

(3)《九章算术》的负土术与载土术。

《九章算术》在盘池后提出了负土问题和负土术，在冥谷后提出了载土问题和载土术，并将载土术归结为负土术。其负土问题是：

负土往来七十步。其二十步上下棚、除，棚、除二当平道五；踟蹰之间十加一；载输之间三十步，定一返一百四十步。土笼积一尺六寸；秋程人功行五十九里半。问：人到积尺及用徒各几何？

术曰：以一笼积尺乘程行步数，为实。往来上下棚、除二当平道五。置定往来步数，十加一，及载输之间三十步以为法。除之，所得即一人所到尺。以所到约积尺，即用徒人数。

刘徽注曰：“棚，阁；除，邪道；有上下之难，故使二当五也。”《九章算术》已经算出了定

往返距离：(70 步 − 20 步) + 20 步 × 5 ÷ 2 + [(70 步 − 20 步) + 20 步 × 5 ÷ 2] × $\frac{1}{10}$ + 30 步 = 140 步。那么，人到积尺即每人每日的工作量为人到积尺 =（笼积 × 程行）÷ 定往返 =（$1\frac{6}{10}$ 尺^3 × $59\frac{1}{2}$ 里）÷ 140 步 = 204 尺^3，用徒 = 盘池积尺 ÷ 人到积尺 = $70666\frac{2}{3}$ 尺^3 ÷ 204 尺^3 = $346\frac{62}{153}$(人)。

(4) 曲池。

关于曲池，《九章算术》补充道：

> 其曲池者，并上中、外周而半之，以为上袤；亦并下中、外周而半之，以为下袤。

设曲池上中、外周分别为 l_1、L_1，下中、外周分别为 l_2、L_2，则以上袤 $b_1 = \frac{1}{2}(l_1 + L_1)$，下袤 $b_2 = \frac{1}{2}(l_2 + L_2)$ 代入公式（5-2-12），便是曲池的体积。曲池实际上是一种曲面体。关于曲池的例题是：

> 今有曲池，上中周二丈，外周四丈，广一丈；下中周一丈四尺，外周二丈四尺，广五尺；深一丈。问：积几何？

代入公式（5-2-12），求得曲池容积 1883 尺 $3\frac{1}{3}$ 寸^3。

4. 羡除与除

(1) 羡除。

羡，音 yán，通埏，墓道。羡除也是一种楔形体，如图 5-2-12 所示，有三广，至少有一广不与另外二广相等，长所在的平面与高所在的平面垂直。刘徽说："羡除，实隧道也。其所穿地，上平下邪，似两鳖臑夹一堑堵，即羡除之形。"《九章算术》提出的羡除体积公式为：

> 术曰：并三广，以深乘之，又以袤乘之，六而一。

设羡除上广、下广、末广分别是 a、b、c，深是 h，袤是 l，则其体积为

$$V = \frac{1}{6}(a + b + c)hl \qquad (5\text{-}2\text{-}13)$$

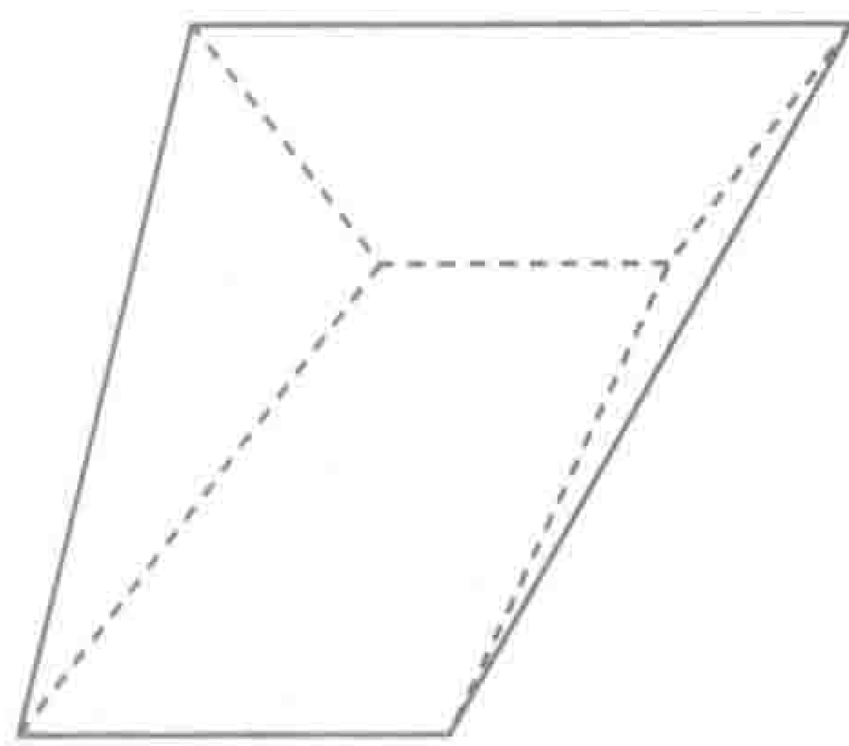


图 5-2-12　羡除

《九章算术》也只有一道羡除的例题：

> 今有羡除，下广六尺，上广一丈，深三尺；末广八尺，无深；袤七尺。问：积几何？

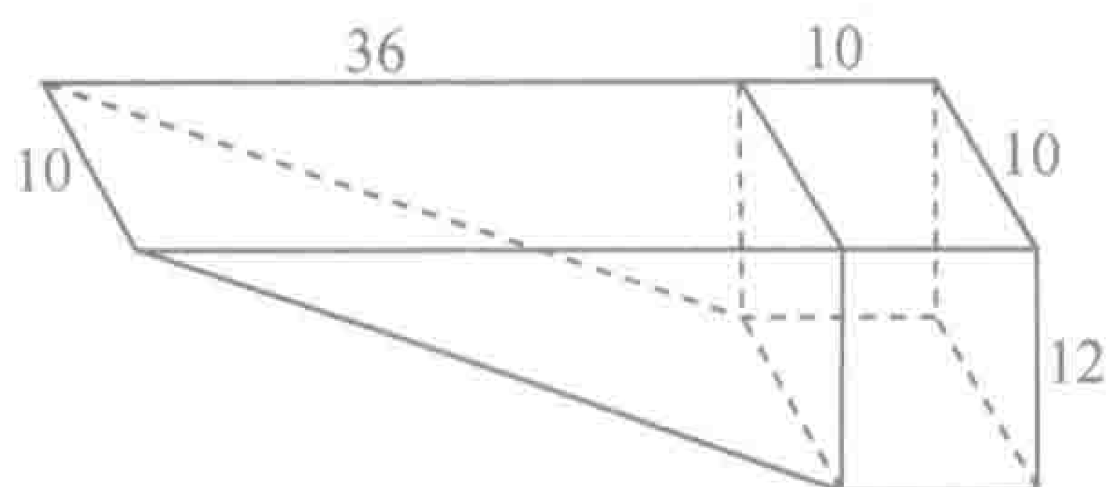


图 5-2-13　除

依据公式（5-2-13），其体积为 $V = \frac{1}{6}$(6 尺 + 10 尺 + 8 尺) × 3 尺 × 7 尺 = 84 尺^3。

(2) 除。

《算数书》有"除"条，讨论的是一种特殊的隧

道。此条日本张家山汉简《算数书》研究会识别的文字是：

> 除　羡除，其定方丈，高丈二尺；其除广丈，袤三丈六尺，其一旁毋高。积三千三百六十尺。术曰：广积……广袤乘之即定。

他们认为，此是一墓穴，由“定”和“除”两部分组成，如图 5-2-13 所示。“定”是墓道顶端的一长方体墓室，其尺寸为方 1 丈，深 1 丈 2 尺，体积为 1200 尺^3。“除”是墓道，广 1 丈，袤“三丈六尺”，原简误作“三丈九尺”，一头高即“定”之高 1 丈 2 尺，一头无高，实际上是一堑堵，其体积为 $\frac{1}{2}(10\times36\times12)=2160$ 尺^3。两者之和：1200 尺^3 + 2160 尺^3 = 3360 尺^3。他们在秦代临潼墓葬中发现了这种形状的墓道和墓室①。

（五）棋验法

已知长方体的体积公式（5-2-2），堑堵的体积公式（5-2-4）是容易得到的。那么方锥、阳马、鳖臑、方亭、刍甍、斩都、刍童、羡除等多面体的体积公式（5-2-5）~公式（5-2-13）是怎样得到的呢？有人说中国古代数学是非逻辑的，强调中国古代数学的直观性和悟性，好像中国古代的主要数学成就都是靠直观或悟性得到的。直观和悟性当然是数学研究的一种重要方法，任何民族任何时代数学的发展都离不开直观和悟性。公式（5-2-5）~公式（5-2-7）或许可以由直观或悟性得到，但是，像公式（5-2-8）~公式（5-2-13）这样复杂的公式，靠直观和悟性是不能得出的，当时必定有某种推导。

1. 棋验法

我们认为，刘徽注中的棋验法透露了推导这些公式的方法。我们知道，刘徽对上述这些多面体的公式的论述都分几段。其中第一段往往是棋验法。我们以刍童的体积公式（5-2-12）的推导为例说明棋验法。刘徽注云：

> 按：此术假令刍童上广一尺，袤二尺；下广三尺，袤四尺；高一尺。其用棋也，中央立方二，四面堑堵六，四角阳马四。倍下袤为八，上袤从之，为十。以高、广乘之，得积三十尺。是为得中央立方各三，两端堑堵各四，两旁堑堵各六，四角阳马亦各六。后倍上袤，下袤从之，为八。以高、广乘之，得积八尺。是为得中央立方亦各三，两端堑堵各二。并两旁，三品棋皆一而为六，故六而一，即得。

就是说，人们取这样一个刍童：上底宽 a_1 为 1 尺，长 b_1 为 2 尺，下底宽 a_2 为 3 尺，长 b_2 为 4 尺，高 h 为 1 尺，我们将其称为标准刍童。将它分解为三品棋，得到 2 个立方，6 个堑堵，4 个阳马，如图 5-2-14（a）所示，然后构造 2 个长方体。一个长为 $2b_2+b_1=10$ 尺，宽为 $a_2=3$ 尺，高为 $h=1$ 尺，如图 5-2-14（b）所示。其体积是 $(2b_2+b_1)a_2h=30$ 尺^3，可以分解为 6 个中央立方，8 个两端堑堵，24 个两旁堑堵，24 个四角阳马。一个长为 $2b_1+b_2=8$ 尺，宽为 $a_1=1$ 尺，高为 $h=1$ 尺，如图 5-2-14（c）所示。其体积是 $(2b_1+b_2)a_1h=8$ 尺^3，可以分解为 6 个中央立方，4 个两端堑堵。其中，两端堑堵、两旁堑堵和阳马的分解分别如图 5-2-14（d），（e），（f）所示。它们所含三品棋的数目及与标准刍童之比如表 5-2-1 所示。

① 秦俑考古队，《临潼上焦村秦墓清理简报》，《考古与文物》，1980，2。

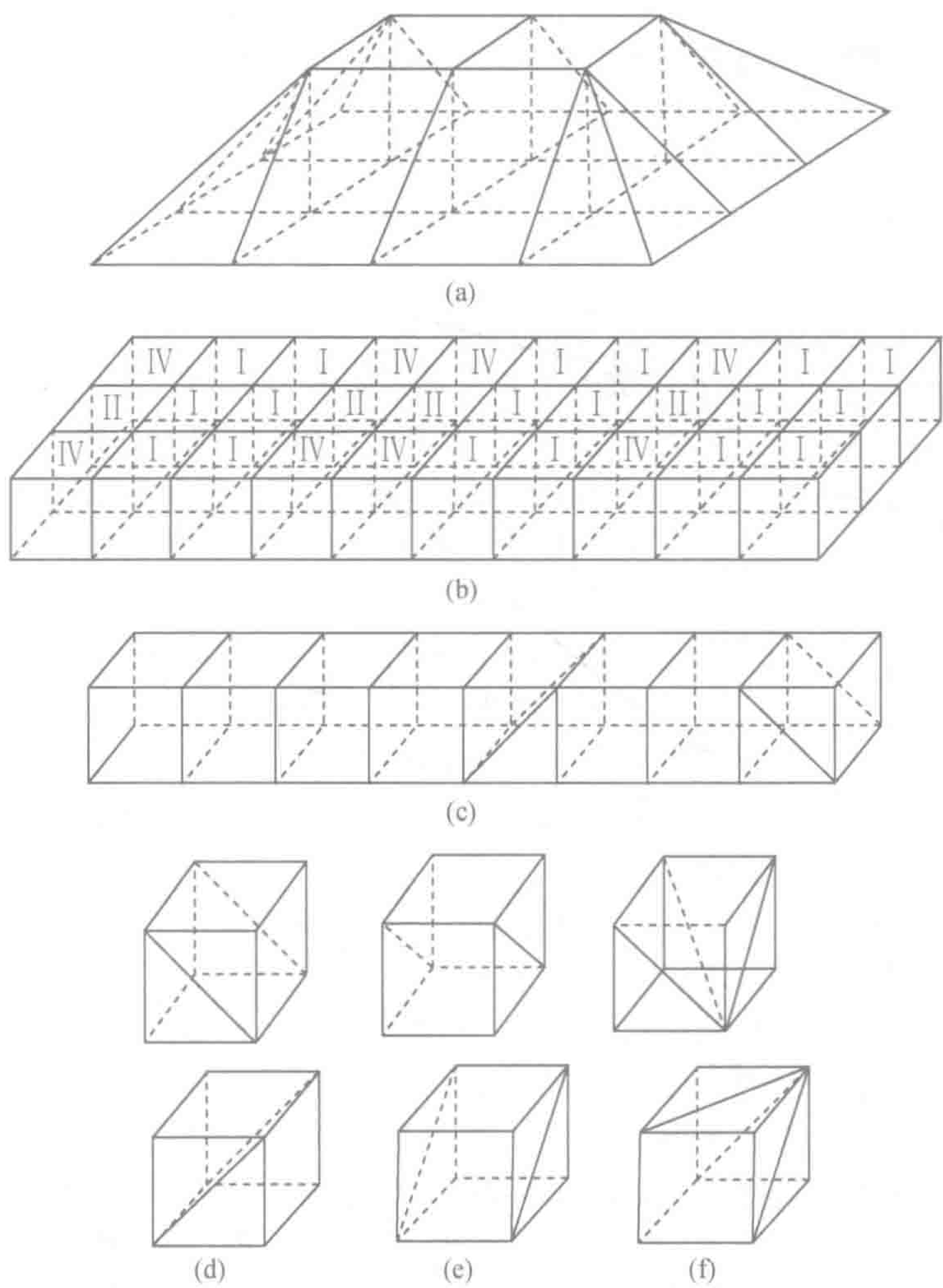


图 5-2-14　刍童之棋验法

表 5-2-1　标准刍童与两长方体含三品棋数

项目	中央立方	两端堑堵	两旁堑堵	四角阳马
标准刍童	2	2	4	4
长方体 $(2b_2+b_1)a_2h$	6	8	24	24
长方体 $(2b_1+b_2)a_1h$	6	4	0	0
两长方体之和	12	12	24	24
与标准刍童之比	6∶1	6∶1	6∶1	6∶1

两个长方体共含中央立方 12 个，两端堑堵 12 个，两旁堑堵 24 个，四角阳马 24 个。于是，标准刍童中的三品棋 1 个都变成了 6 个。换言之，将这两个长方体中的三品棋重新拼合，可以成为 6 个标准刍童。因此，一个标准刍童的体积就是这两个长方体体积之和的$\frac{1}{6}$。

从而得出了公式（5-2-12）。[1]

我们再以阳马和鳖腝的体积为例。《九章算术》给出了阳马体积公式（5-2-6）和鳖腝体积公式（5-2-7）。刘徽叙述其棋验法是：

> 假令广、袤各一尺，高一尺，相乘之，得立方积一尺。……合两鳖腝成一阳马，合三阳马而成一立方，故三而一。验之以棋，其形露矣。悉割阳马，凡为六鳖腝。观其割分，则体势互通，盖易了也。

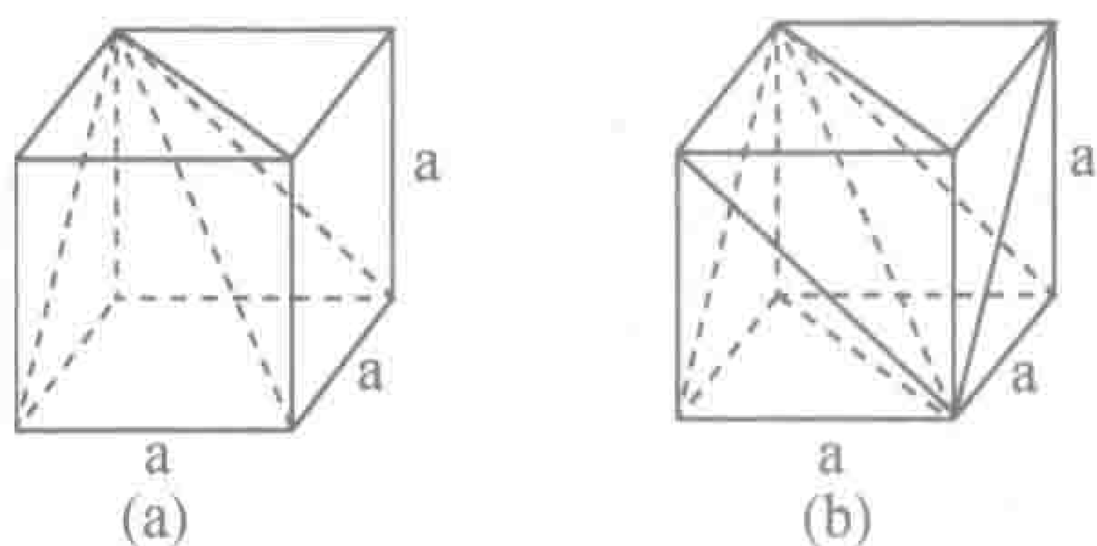


图 5-2-15　阳马、鳖腝之棋验法

这是说，3 个长、宽、高皆为 1 尺的阳马棋，可以拼合成 1 个立方棋，如图 5-2-15（a）所示，从而得到公式（5-2-6）。而 2 个互相对称的长、宽、高皆为 1 尺的鳖腝可以拼合成 1 个阳马棋，6 个两两对称、三三全等的鳖腝可以拼合成 1 个立方棋，如图 5-2-15（b）所示，从而得到公式（5-2-7）。

因此，我们可以将棋验法概括为：考虑要求积的多面体的标准形状，即能分解或拼合成三品棋的标准多面体，将其分解或拼合成三品棋。然后构造一个或几个特定的长方体，使它们所含三品棋的个数分别是标准多面体所含三品棋个数的同一倍数，从而推出：标准多面体的体积是这一个或几个长方体体积之和的该倍数之一。

2. 棋验法是《数》、《算数书》、《九章算术》推导多面体体积公式的方法

对棋验法，有几点值得注意：

首先，我们注意到，在刍童的棋验法中，所构造的两个长方体的体积，如果将其中的尺寸换成其广、袤、高，恰恰就是公式（5-2-12）脱去中括号之后的两项。这使我们有理由相信，公式(5-2-12)是由棋验法推导出来的。实际上，根据刘徽注，方亭、刍甍的棋验法中所构造的长方体也分别是公式（5-2-8）（5-2-9）的各项。羡除的情形更复杂一些，不过也用到棋验法。对斩都体积公式（5-2-10）如何推导，没有记载，但是，利用棋验法构造的长方体也恰恰是该式脱去括号后的各项。因此，我们断定，《数》、《算数书》、《九章算术》中的多面体体积公式是由棋验法推导出来的。换言之，棋验法是《数》、《算数书》、《九章算术》推导多面体体积公式时创造的方法。当时是以标准情形立论，得出其算法后，又推广到一般情形。有的学者认为棋验法是刘徽的创造，实在是不妥当的。

其次，棋验法只适应于能分解或拼合成三品棋的标准型多面体。对一般形状的多面体则不适用。有的学者认为棋验法是证明一般多面体体积公式的有效方法，并认为刘徽由此建立其体积理论，是没有看懂刘徽有关的注。因为对不能分解为三品棋的多面体，所分解出来的长方体、壍堵、阳马，不管增加多少倍数，都不可能用其拼合成长方体，更不可能重新拼合成该倍数个原来的多面体。例如，一般形状的刍童所分解出来的四角阳马，尽管它们全等，但是不管取哪 3 个，都不可能像图 5-2-14（b），（c），（f）那样拼合成一个长方体。

再次，使用棋验法，只需知道长方体的体积公式，尽管它使用壍堵、阳马棋，有时还使用鳖腝棋，但是在推导其他多面体体积时，并不涉及壍堵、阳马、鳖腝的体积。

还有，棋是古代处理体积问题的立体模型，棋验法必须使用三品棋。但是，使用棋的并

---

① 郭书春，刘徽的体积理论，《科学史集刊》第 11 集，地质出版社，1984 年，第 49～51 页。

不一定是棋验法。刘徽在解决体积问题时还使用其他形状的棊，如刘徽说“棊或脩短，或广狭”，便是长、宽、高不等的棊，祖暅之原理说“夫叠棊成立积，缘幂势既同，则积不容异”，其棊甚至不是多面体。

二　圆体体积

《数》、《算数书》和《九章算术》都讨论了圆柱、圆锥、圆亭等圆体的体积问题。

（一）圆柱

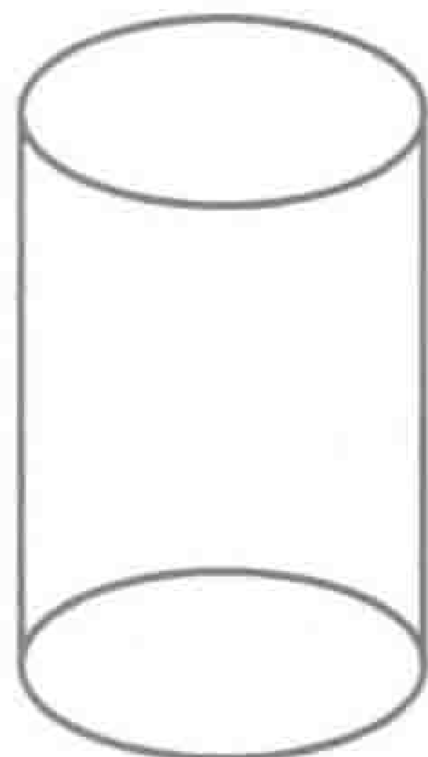


图5-2-16　圆柱

圆柱在《算数书》中称为井材、圜材或井窌。在《九章算术》中称为圆堢壔，又称为圆囷。井窌即井窖，圆囷即圆形谷仓。如图5-2-16所示。《算数书》第61条“井材”是：

井材　圜材、井窌若它物，周二丈四尺，深丈五尺，积七百廿尺。术曰：耤周自乘，以深乘之，十二成一。一曰：以周乘径，四成一。积一百尺半，问：径几何？

设圆柱周长为l，深或高为h，《算数书》给出体积公式：

$$V = \frac{1}{12}l^2h \tag{5-2-14}$$

因此，所给出的圜材的体积为$V = \frac{1}{12}(2\text{丈}4\text{尺})^2 \times 1\text{丈}5\text{尺} = 720\text{尺}^3$。

《算数书》“井材”条还给出了圜柱底面积的公式（5-1-6）。

《九章算术》的圆堢壔求积方法是：

术曰：周自相乘，以高乘之，十二而一。

即公式（5-2-14）。《九章算术》也只有一道圆堢壔的例题：

今有圆堢壔，周四丈八尺，高一丈一尺。问：积几何？

依据公式（5-2-14），其体积为$V = \frac{1}{12}(4\text{丈}8\text{尺})^2 \times 1\text{丈}1\text{尺} = 2112\text{尺}^3$

（二）圆锥

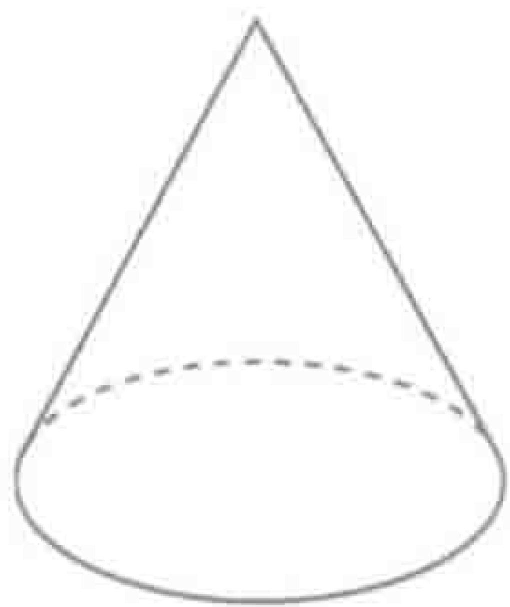


图5-2-17　圆锥

圆锥就是《九章算术》中的名称，其“委粟”也是圆锥的形状，如图5-2-17所示。圆锥在《算数书》中称为“旋粟”或“囷盖”，其第58条“旋粟”是：

旋粟　旋粟高五尺，下周三丈，积百廿五尺。二尺七寸而一石，为粟卌六石廿七分石之八。其术曰：下周自乘，以高乘之，卅六成一。大积四千五百尺。

设圆锥下周长为l，高为h，则圆锥体积为

$$V = \frac{1}{36}l^2h \tag{5-2-15}$$

它相当于《九章算术》商功章的“委粟术”，先通过圆锥体积公式计算出堆成圆锥形状的粟米的体积，再求出粟米的数量。将例题的高、下周的数值代入公式（5-2-15），便得到旋粟

的体积 $= \frac{1}{36} \times (30 尺)^2 \times 5 尺 = 125 尺^3$。为粟 $= 125 尺^3 \div 2\frac{7}{10} 尺^3 = 46\frac{8}{27}$ 石。

《九章算术》提出的圆锥的求积方法是：

术曰：下周自乘，以高乘之，三十六而一。

与《算数书》相同，亦取公式（5-2-15）。《九章算术》亦只有一道圆锥的例题：

今有圆锥，下周三丈五尺，高五丈一尺。问：积几何？

依据公式（5-2-15），其体积为 $V = \frac{1}{36}(3 丈 5 尺)^2 \times 5 丈 1 尺 = 1735\frac{5}{12} 尺^3$。

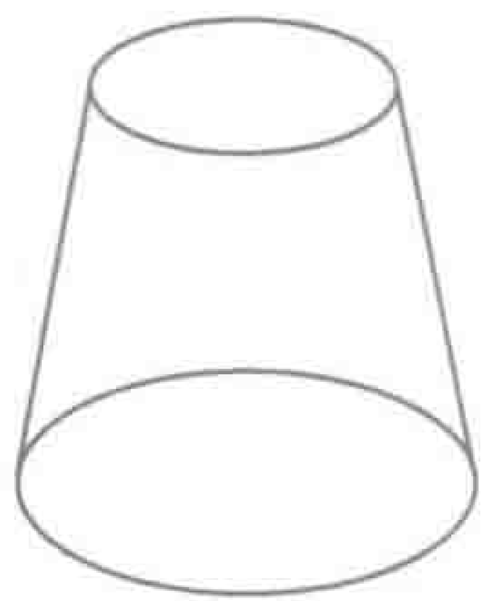


图 5-2-18　圆亭

（三）圆亭

《九章算术》之圆亭，《算数书》作“圜亭”。圆亭即今之圆台，如图 5-2-18 所示。

《算数书》的圜亭条是：

圜亭　圜亭上周三丈，大周四丈，高二丈。积二千五十五尺卅六分尺廿。术曰：下周乘上周，周自乘，皆并，以高乘之，卅六成一。

设上周为 l_1，大周即下周为 l_2，高为 h，则圜亭体积公式为

$$V = \frac{1}{36}(l_1 l_2 + l_1^2 + l_2^2)h \tag{5-2-16}$$

将例题的数值代入公式（5-2-16），便得到圆亭体积：$V = \frac{1}{36}(30 \times 40 + 30^2 + 40^2) = 2055\frac{20}{30} 尺^3$

《九章算术》给出的圆亭的求积方法是：

术曰：上、下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三十六而一。

也是公式（5-2-16），而文字更准确。

《九章算术》也只有一道圆亭的例题：

今有圆亭，下周三丈，上周二丈，高一丈。问：积几何？

依据术文，其体积为 $V = \frac{1}{36}[(2 丈) \times (3 丈) + (2 丈)^2 + (3 丈)^2] \times 1 丈 = 527\frac{7}{9} 尺^3$。

（四）球

球在《九章算术》中称为“立圆”。如图 5-2-19 所示。《九章算术》商功章没有球的求积方法，而少广章开立圆术实际上使用了球体积公式：

$$V = \frac{9}{16}d^3 \tag{5-2-17}$$

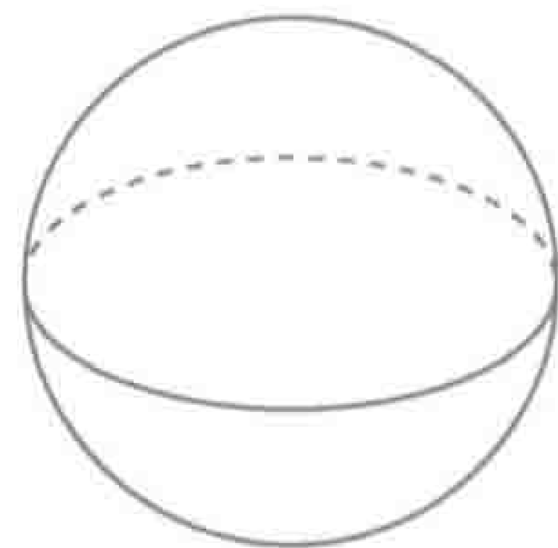


图 5-2-19　球

其中，d 为球的直径。

公式（5-2-14）～公式（5-2-16）在理论上是正确的，但对应于圆面积公式（5-1-8），其系数是由周三径一导出的，因而不准确，正如刘徽所出的：“此章诸术亦以周三径一为

率，皆非也。”公式（5-2-17）不仅使用了周三径一，而且推导时犯了数理错误，正如刘徽所指出的：“此意非也。”

第三节　勾股定理与解勾股形

勾股知识在两汉得到蓬勃发展，但中国人对勾股定理的认识却是相当早的。因为它载在《数》、《周髀算经》与《九章算术》中，所以将它与解勾股形问题一并在此介绍。

一　勾股定理

根据《周髀算经》的记载，公元前11世纪，商高答周公问时已经知道：“勾广三，股脩四，径隅五。”这就是 $3^2+4^2=5^2$。而在陈子求斜至日的方法应用了完整的勾股定理：

若求邪至日者，以日下为勾，日高为股。勾、股各自乘，并而开方除之，得邪至日。

《九章算术》勾股章明确提出了勾股术：

勾股术曰：勾、股各自乘，并，而开方除之，即弦。

又，股自乘，以减弦自乘，其余，开方除之，即勾。

又，勾自乘，以减弦自乘，其余，开方除之，即股。

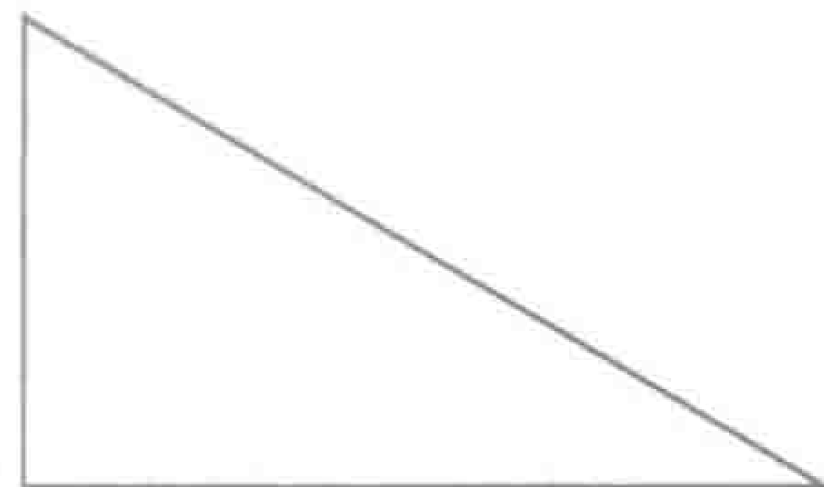


图5-3-1　勾股形

如图5-3-1所示。这就是

$$c=\sqrt{a^2+b^2} \tag{5-3-1}$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2} \tag{5-3-2}$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2} \tag{5-3-3}$$

《九章算术》给出的三道例题全都是勾为3，股为4，弦为5应用公式（5-3-1）~公式（5-3-3）的勾、股、弦互求。（3，4，5）是最小的一组勾股数，它在中国数学发展的早期占有重要地位。

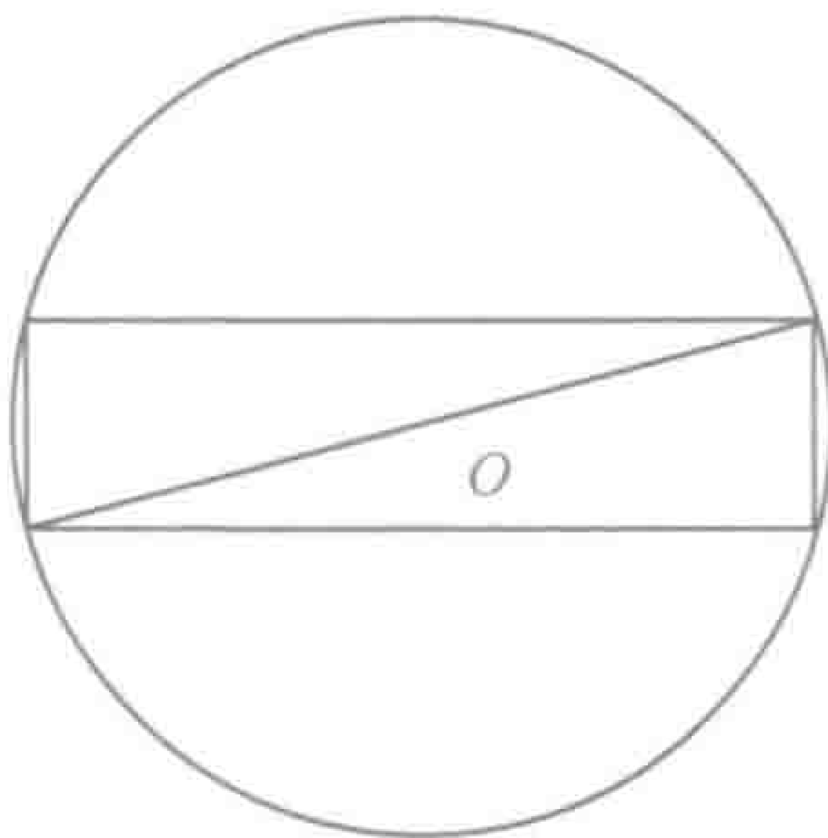


图5-3-2　圆材为方版

《九章算术》接着给出了应用公式（5-3-3）、公式（5-3-1）的两个例题。勾股章第4问是：

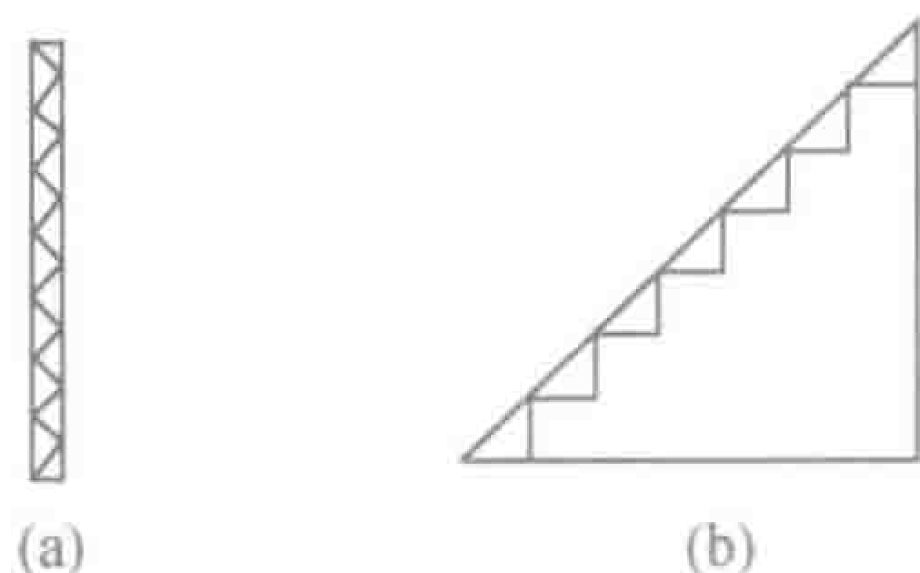
今有圆材径二尺五寸，欲为方版，令厚七寸。问：广几何？

如图5-3-2所示，方版的截面的对角线是圆的直径，它与方版的厚、广形成一个勾股形。这是已知勾、弦求股的问题。故《九章算术》云：

术曰：令径二尺五寸自乘，以七寸自乘减之，其余，开方除之，即广。

由公式（5-3-3），方板广 $=\sqrt{(2\text{尺}5\text{寸})^2-(7\text{寸})^2}=2\text{尺}4\text{寸}$

值得注意的是，此问的解法表明，当时对圆径对应的圆周角必定是直角这一圆的重要性质及其应用，已经十分娴熟。


图 5-3-3　葛缠木

勾股章第 5 问是：

今有木长二丈，围之三尺。葛生其下，缠木七周，上与木齐。问：葛长几何？

术曰：以七周乘围为股，木长为勾，为之求弦。弦者，葛长。

这里，作者巧妙地将一条绕木宛转向上的曲线化成直线，从而化成勾股形，如图5-3-3 所示。木长20 尺为勾，每围是3 尺，7 周是21 尺，为股，葛长为弦，应用勾股定理（5-3-1），得葛长 $=\sqrt{(20\text{尺})^2+(21\text{尺})^2}=29$ 尺。

二　解勾股形

解勾股形是已知勾、股、弦的某些和差关系，应用勾股定理求勾、股、弦的问题。《数》、《九章算术》解决了四种情形：

（一）已知勾与股弦差，求股、弦

《数》的"0304"号简，以及《九章算术》勾股章引葭赴岸、系索、倚木于垣、勾股锯圆材、开门去阃等问都是已知勾与股弦差，求股、弦的问题。以引葭赴岸问为例。

今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问水深、葭长各几何？

术曰：半池方自乘，以出水一尺自乘，减之。余，倍出水除之，即得水深。加出水数，得葭长。

这是一条具体应用的术文，而原理却具有普适性。刘徽将其抽象化："此以池方半之，得五尺为勾，水深为股，葭长为弦。"如图 5-3-4 所示。因此，上述术文便是

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}$$
$$c=b+(c-b) \tag{5-3-4}$$

因此，水深 $=\frac{(5\text{尺})^2-(1\text{尺})^2}{2\times1\text{尺}}=12$ 尺，葭长 $=12$ 尺 $+1$ 尺 $=13$ 尺。

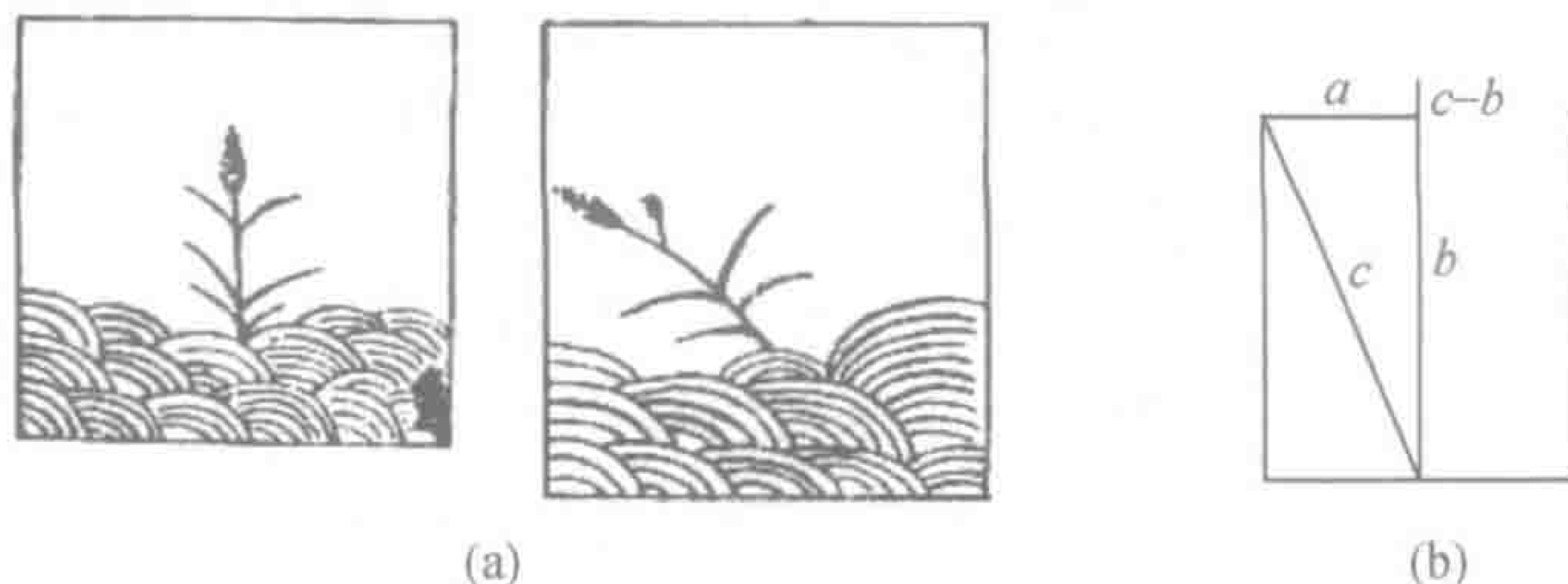


图 5-3-4　引葭赴岸

20 世纪许多趣味数学读物中的印度莲花问题，实际上与此问属于同一类型，是拜斯迦逻（Bhaskara，1114～1186）提出的，但晚 1000 余年。

在其他题目中，《九章算术》又将求弦的公式写为

$$c = \left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{c-b} + (c-b)\right] \tag{5-3-5}$$

（二）已知勾与股弦和，求股、弦

勾股章竹高折地问是已知勾与股弦和求股的问题：

今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺。问折者高几何？

术曰：以去本自乘，令如高而一。所得，以减竹高而半余，即折者之高也。

同样，此问也是具体解法。刘徽说："此去本三尺为勾，折之余高为股。" 如图 5-3-5 所示。术文便是应用公式

$$b = \frac{1}{2}\left[(c+b) - \frac{a^2}{c+b}\right] \tag{5-3-6}$$

容易发现公式（5-3-6）与公式（5-3-4）的对称性。

因此，应用公式（5-3-6）便求出余高：余高 $= \frac{1}{2}\left[1\text{丈} - \frac{(3\text{尺})^2}{1\text{丈}}\right] = 4\frac{11}{20}$尺。

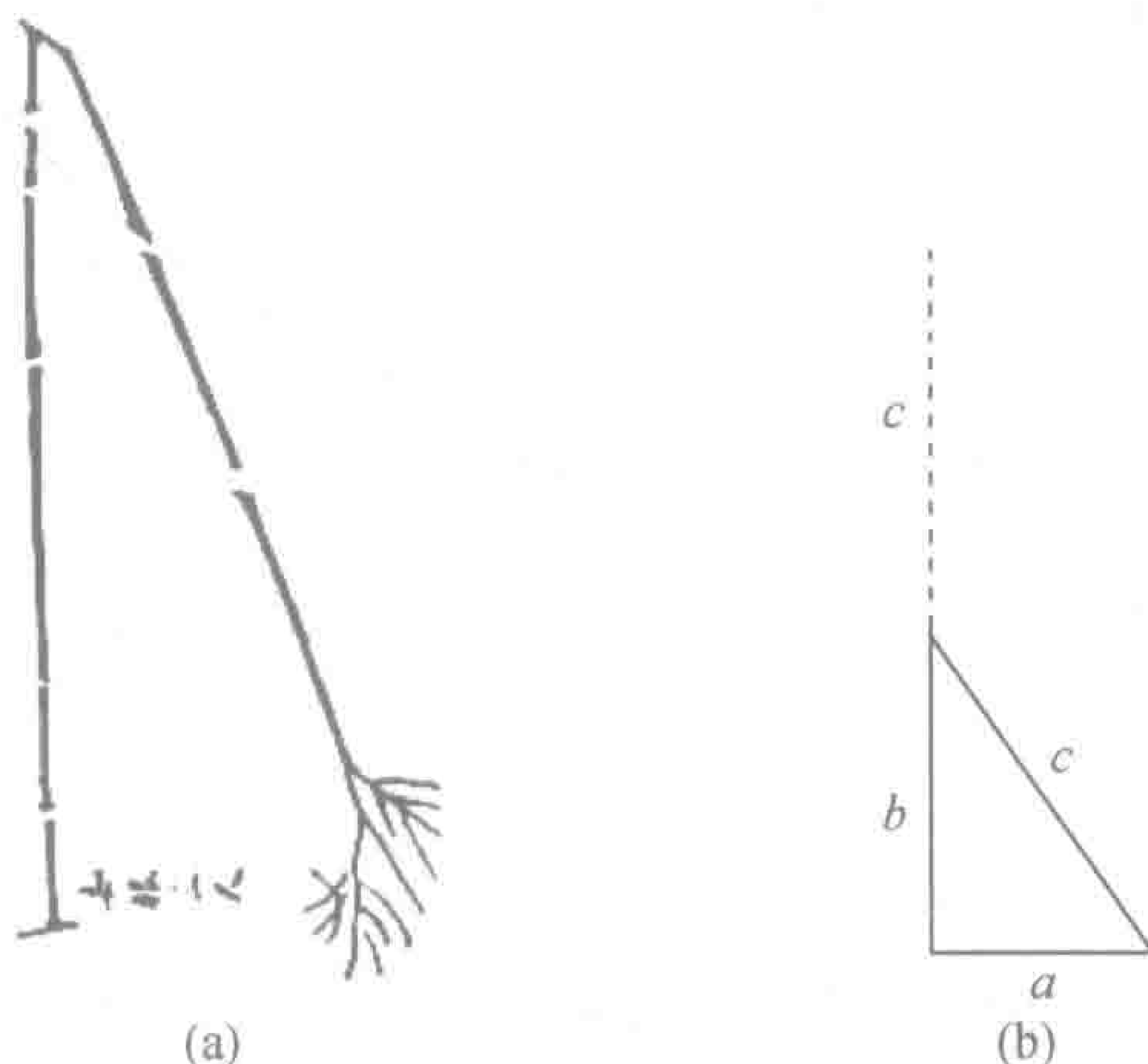


图 5-3-5 竹高折地

（三）已知弦与勾股差，求勾、股

勾股章户高多于广问是这类问题：

今有户高多于广六尺八寸，两隅相去适一丈。问户高、广各几何？

术曰：令一丈自乘为实。半相多，令自乘，倍之，减实。半其余，以开方除之。所得，减相多之半，即户广；加相多之半，即户高。

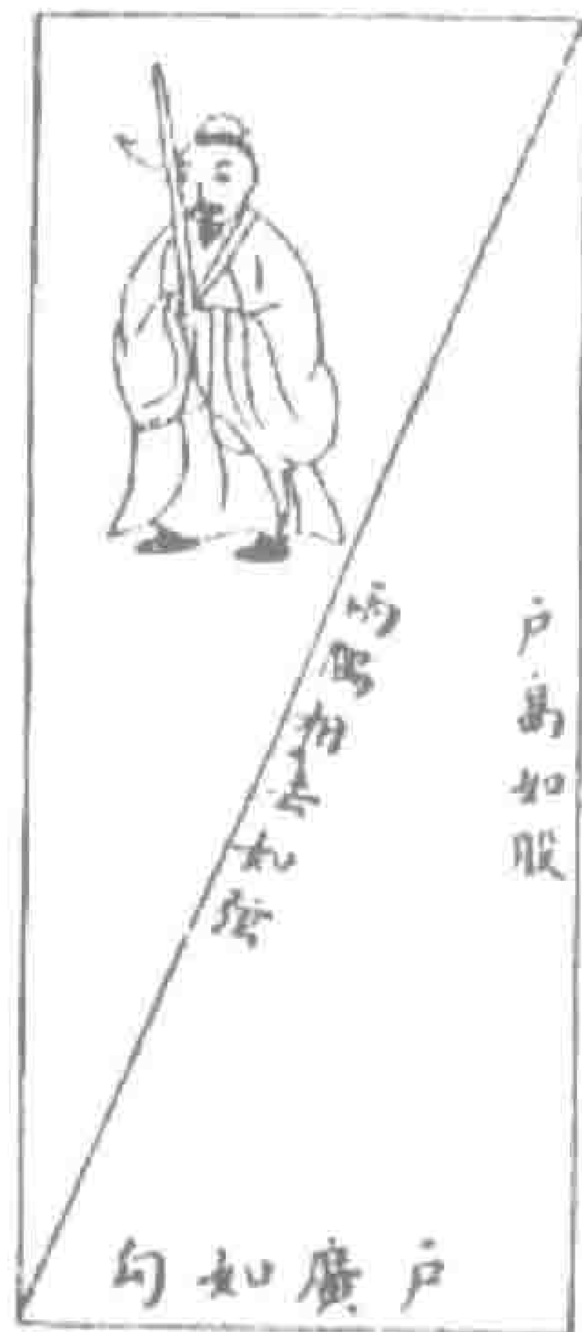


图 5-3-6 户高多于广

如图 5-3-6 所示，刘徽说："令户广为勾，高为股，两隅相去一丈为弦，高多于广六尺八寸为勾股差。" 那么，此术实际上应用了公式

$$a = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}} - \frac{b-a}{2}$$

$$b = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}} + \frac{b-a}{2} \tag{5-3-7}$$

应用公式（5-3-7），便求出门广和高：

$$\text{户广} = \sqrt{\frac{(1\text{丈})^2 - 2\left(\frac{6\text{尺}8\text{寸}}{2}\right)^2}{2}} - \frac{6\text{尺}8\text{寸}}{2} = 2\text{尺}8\text{寸},$$

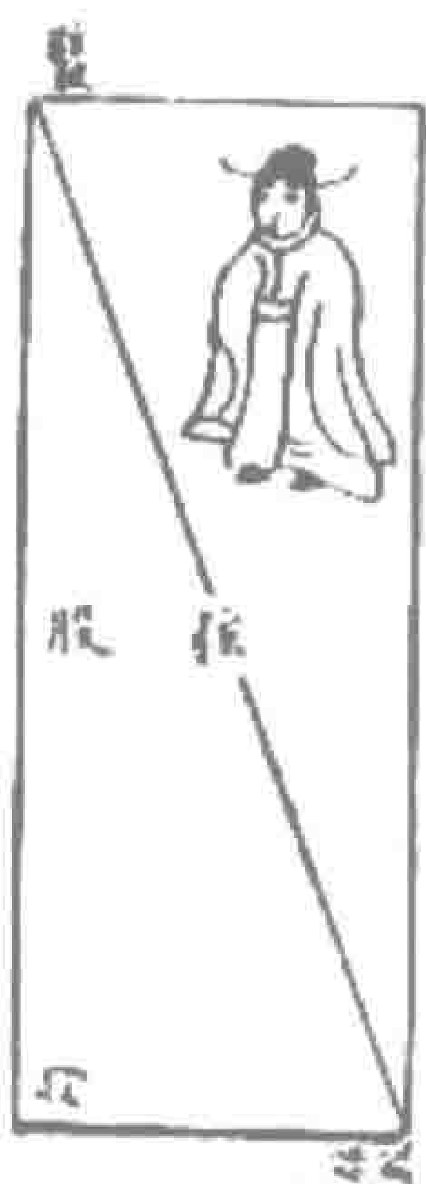


图 5-3-7　持竿出户

$$户高 = \sqrt{\frac{(1丈)^2 - 2\left(\frac{6尺8寸}{2}\right)^2}{2}} + \frac{6尺8寸}{2} = 9尺6寸。$$

（四）已知勾弦差、股弦差，求勾、股、弦

这类问题也只有一个题目，即持竿出户问：

今有户不知高、广，竿不知长短。横之不出四尺，从之不出二尺，邪之适出。问：户高、广、袤各几何？

术曰：从、横不出相乘，倍，而开方除之。所得，加从不出，即户广；加横不出，即户高；两不出加之，得户袤。

如图 5-3-7 所示，刘徽说："此以户广为勾，户高为股，户袤为弦。"术文给出了公式：

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-b) \\ b &= \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a) \\ c &= \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a) + (c-b) \end{aligned} \qquad (5\text{-}3\text{-}8)$$

应用公式（5-3-8），便得到户广 $= \sqrt{2 \times 4尺 \times 2尺} + 2尺 = 6尺$，户高 $= \sqrt{2 \times 4尺 \times 2尺} + 4尺 = 8尺$，户邪 $= \sqrt{2 \times 4尺 \times 2尺} + 4尺 + 2尺 = 10尺$。

三　勾股数组

勾股数组，又称整数勾股形，是指满足公式（5-3-1）的所有正整数解。自古希腊起，人们就开始寻求勾股数的通解公式，包括毕达格拉斯、柏拉图、欧几里得等大师在内，其成果都不理想。一般认为，西方最先给出其通解公式的是 3 世纪的丢番图，他用

$$\begin{aligned} a &= \frac{2mc}{m^2+1} \\ b &= ma - c = \frac{m^2-1}{m^2+1} \end{aligned} \qquad (5\text{-}3\text{-}9)$$

表示勾股形的有理数边。但是，只有做 $m = \frac{u}{v}, c = u^2 + v^2$ 的变换，公式（5-3-9）才是勾股数通解公式。

而在丢番图以前的三四百年的《九章算术》勾股章"二人同所立"问已经使用了勾股数通解公式。这个题目是：

今有二人同所立。甲行率七，乙行率三。乙东行。甲南行十步而邪东北与乙会。问：甲、乙行各几何？

术曰：令七自乘，三亦自乘，并而半之，以为甲邪行率。邪行率减于七自乘，余为南行率。以三乘七为乙东行率。置南行十步，以甲邪行率乘之。副置十步，以乙东行率乘之，各自为实。实如南行率而一，各得行数。

刘徽说："此以南行为勾，东行为股，邪行为弦。并勾弦率七。"如图 5-3-8 所示。此问设 $(c+a):b = 7:3$。若以 m 表示并勾弦率，n 表示股率，即 $(c+a):b = m:n$，术文便是

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(m^2 - n^2) \\ b &= mn \\ c &= m^2 - \frac{1}{2}(m^2 + n^2) = \frac{1}{2}(m^2 + n^2) \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}10)$$

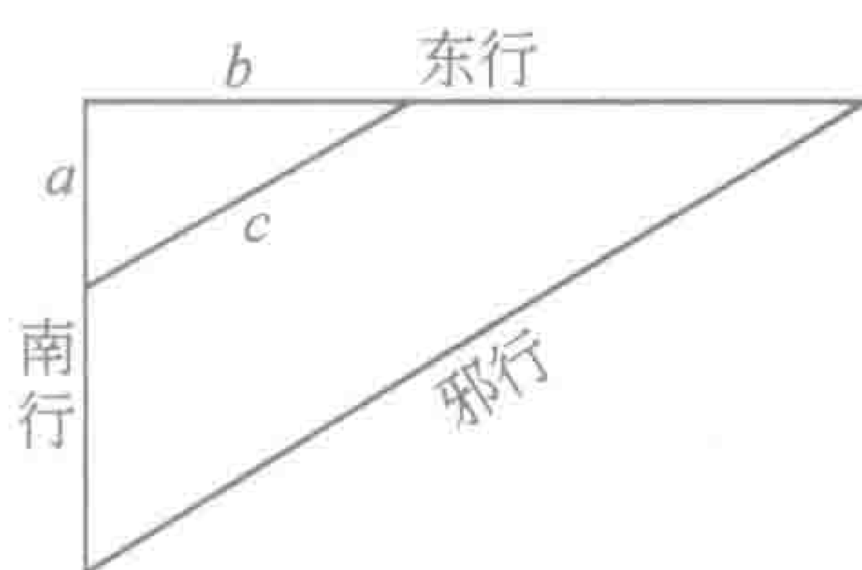


图 5-3-8　二人同所立

或

$$a : b : c = \frac{1}{2}(m^2 - n^2) : mn : \frac{1}{2}(m^2 + n^2) \quad (5\text{-}3\text{-}11)$$

若 m, n 互素，则公式（5-3-10）或公式（5-3-11）就是勾股数组的通解公式。①

在这个题目中，$m : n = 7 : 3$，因此：$a : b : c = 20 : 21 : 29$ 于是，根据已知甲南行，即勾为 10 步，由今有术，便可求出股，即乙东行及弦，即甲邪行步数：乙东行 $= a \times \dfrac{mn}{\frac{1}{2}(m^2 - n^2)}$ $= 10$ 步 $\times \dfrac{21}{20} = 10\dfrac{1}{2}$ 步，甲邪行 $= a \times \dfrac{\frac{1}{2}(m^2 + n^2)}{\frac{1}{2}(m^2 - n^2)} = 10$ 步 $\times \dfrac{29}{20} = 14\dfrac{1}{2}$ 步。

勾股章“俱出邑中央”问也使用了勾股数公式（5-3-11）。这个题目是：

今有邑方一十里，各中开门。甲、乙俱从邑中央而出：乙东出；甲南出，出门不知步数，邪向东北，磨邑隅，适与乙会。率：甲行五，乙行三。问：甲、乙行各几何？

术曰：令五自乘，三亦自乘，并而半之，为邪行率。邪行率减于五自乘者，余为南行率。以三乘五为乙东行率。置邑方，半之，以南行率乘之，如东行率而一，即得出南门步数。以增邑方半，即南行。置南行步，求弦者，以邪行率乘之；求东行者，以东行率乘之，各自为实。实如法，南行率，得一步。

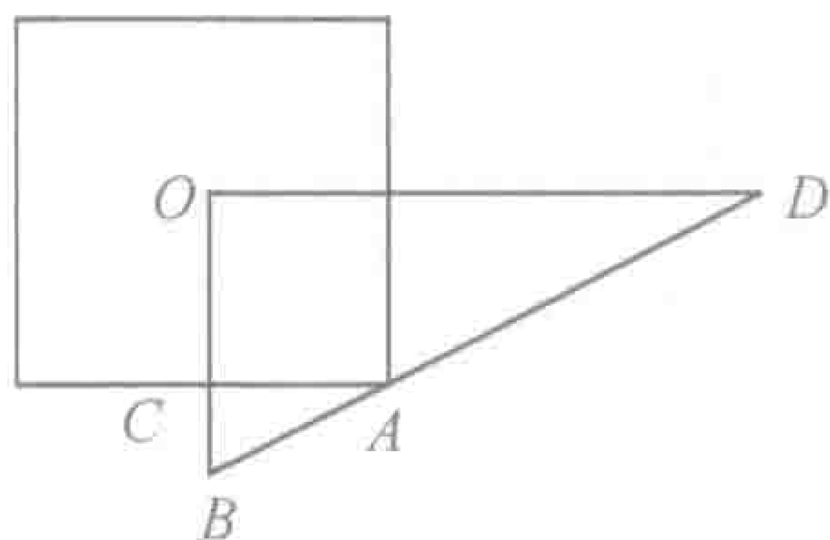


图 5-3-9　甲乙出邑

在这个题目中，$m : n = 5 : 3$，因此 $a : b : c = 8 : 15 : 17$ 如图 5-3-9 所示，由于 $\triangle ABC \sim \triangle DBO$，故 $BC : AC = 8 : 15$，而 AC 是半邑方 5 里，即 1500 步，那么，出南门行 $BC = \dfrac{1500\text{步} \times 8}{15} = 800$ 步。而甲南行 $OB = OC + CB = 1500$ 步 $+ 800$ 步，由于 $OB : BD = 8 : 17$，故甲邪行为甲邪行 $BD = \dfrac{OB \times 17}{8} = \dfrac{2300\text{步} \times 17}{8} = 4887\dfrac{1}{2}$ 步。由于 $OB : OD = 8 : 15$，故乙东行为乙东行 $OD = \dfrac{OB \times 15}{8}$ $= \dfrac{2300\text{步} \times 15}{8} = 4312\dfrac{1}{2}$ 步

值得注意的是，这两个题目中，前者 $m : n = 7 : 3$，后者 $m : n = 5 : 3$，m, n 皆互素，说明《九章算术》的编纂者对公式（5-3-10）或公式（5-3-11）作为勾股数组的通解公式的条件

① 李继闵，刘徽对整数勾股形的研究，《科技史文集 · 数学史专辑》，第八集，上海科学技术出版社，1982 年，第 51 ~ 53 页。

已有相当的认识。

第四节　勾股容方、容圆

《九章算术》勾股章提出了勾股容方、容圆问题，开中国古代此项研究之先河。

一　勾股容方

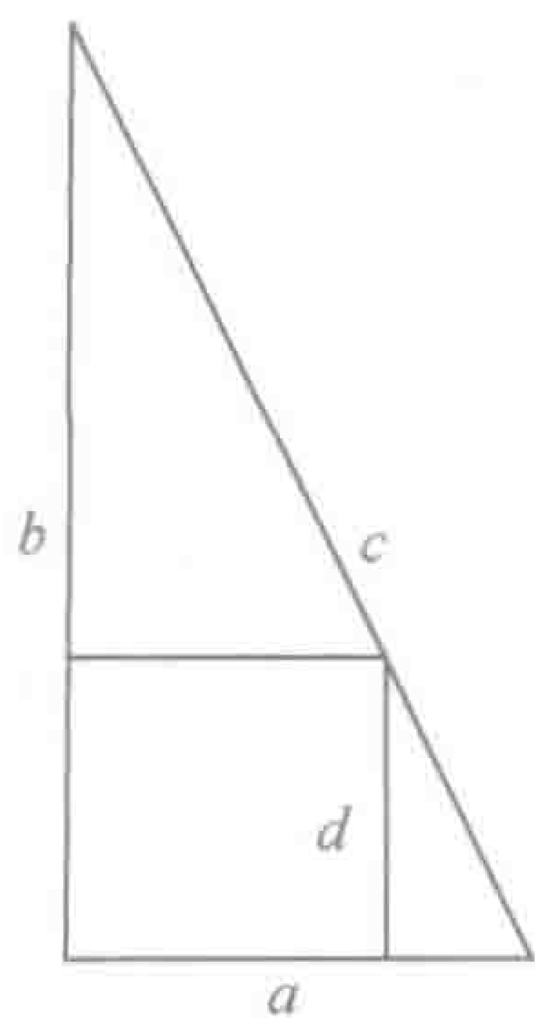


图 5-4-1　勾股容方

勾股容方是已知勾股形的勾、股，求勾股形所容的正方形的边长，如图 5-4-1 所示。《九章算术》提出的方法是：

术曰：并勾、股为法，勾、股相乘为实。实如法而一，得方一步。

设勾股形所容之正方形的边长为 d，这就是

$$d = \frac{ab}{a+b} \tag{5-4-1}$$

《九章算术》的例题是：

今有勾五步，股一十二步。问：勾中容方几何？

将勾、股代入公式（5-4-1），得出勾股容方之边长 $d = 3\frac{9}{17}$ 步

二　勾股容圆

勾股容圆是已知勾股形的勾、股，求勾股形的内切圆直径，如图 5-4-2所示。已知勾、股，由勾股术可以求出弦，则求所容圆直径的方法便是：

术曰：……三位并之为法。以勾乘股，倍之为实。实如法得径一步。

此即

$$d = \frac{2ab}{a+b+c} \tag{5-4-2}$$

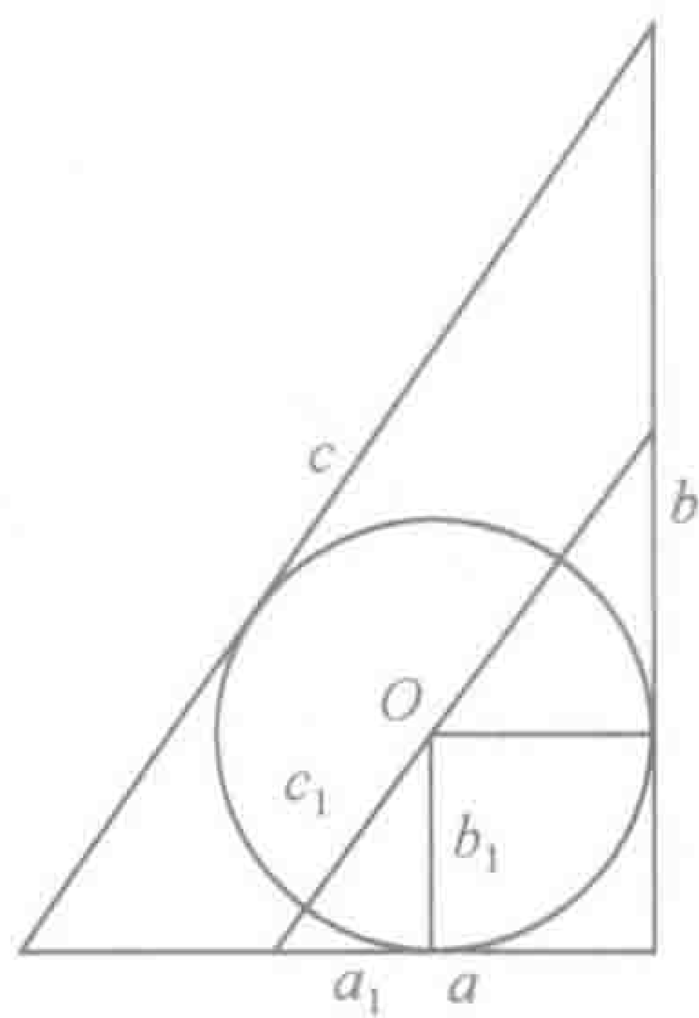


图 5-4-2　勾股容圆

《九章算术》的例题是：

今有勾八步，股一十五步。问：勾中容圆径几何？

由勾 8、股 15 求出弦 17，代入公式（5-4-2），得出勾股容圆之径 $d = 6$ 步。

宋元时期勾股容圆问题得到高度发展，产生了洞渊九容，李冶由此演绎成《测圆海镜》，讨论了 10 个勾股形与圆的关系。其渊源便是《九章算术》的勾股容圆问。

第五节　测　　望

《周髀算经》与《九章算术》中都有大量的测望问题。这里着重介绍《九章算术》中

的一次测望方法及《淮南子》中的重差方法。《九章算术》的方法可以涵盖《周髀算经》。

一　一次测望

《九章算术》勾股章的测望问题可分为两部分，一部分是测望方邑，这一部分相当古老，与勾股术、勾股容方、容圆等一起，应该是旁要的内容。一部分是立四表望远、因木望山及求井深等，根据刘徽的看法，是张苍等补充的。

（一）测方邑

《九章算术》勾股章共有5个测方邑的题目，其术文都比较抽象。其中，“俱出邑中央”问用到勾股数通解公式，这在上面已经提及；“出邑南北门”问归结到开带从方，在第六章第一节中要谈到，此不赘述。另外三个题目都比较简单，如“出东门有木”问：

今有邑东西七里，南北九里，各中开门。出东门一十五里有木。问：出南门几何步而见木？

术曰：东门南至隅步数，以乘南门东至隅步数，为实。以木去门步数为法。实如法而一。

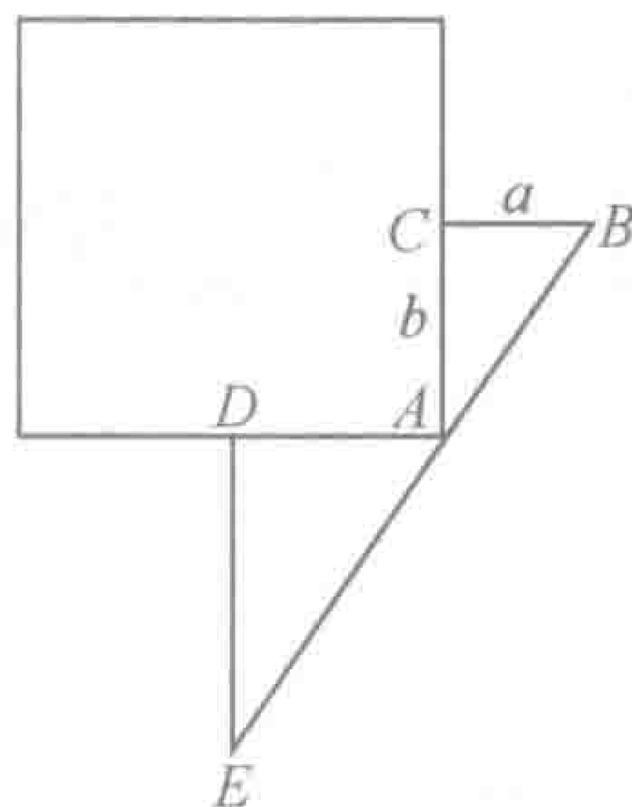


图5-5-1　出东门见木

如图5-5-1所示，设东门南至隅步数为 a ，东门至木步数为 b ，南门东至隅步数为 d ，出南门 c 步而见木。则：$c = \frac{ad}{b}$。

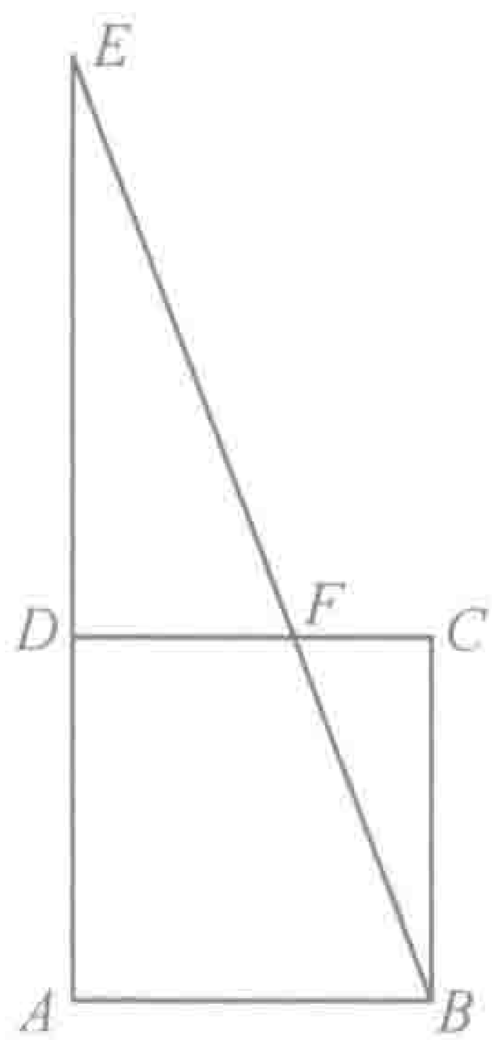


图5-5-2　立四表望远

（二）立四表望远等问题

《九章算术》勾股章“立四表望远”、“因木望山”、“求井径”等问的术文都是具体的解法。以“立四表望远”问（略去答案）为例：

今有木去人不知远近。立四表，相去各一丈。令左两表与所望参相直。从后右表望之，入前右表三寸。问：木去人几何？

术曰：令一丈自乘为实，以三寸为法。实如法而一。

如图5-5-2所示，设四表分别为 A,B,C,D ，木为 E ，入前右表为 CF ，那么，《九章算术》的解法就是 $AE = \frac{BC \times AB}{CF} = \frac{BC^2}{CF}$。

刘徽认为：“此以入前右表三寸为勾率，右两表相去一丈为股率，左右两表相去一丈为见勾。所问木去人者，见勾之股。”这是利用勾股形 BAE 与勾股形 FCB 相似，将其归结为今有术。

刘徽也将“因木望山”及“求井深”问归结为今有术。

二　重差的萌芽

《周髀算经》虽有测日高的内容，但未用重差术。刘徽在记述了《周礼》关于日高的记载之后说：

按：《九章》“立四表望远”及“因木望山”之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻“九数”有“重差”之名，原其指趣乃所以施于此也。

重差术产生于什么时候，尚不清楚。二郑说“今有‘重差’”，大约不会产生于西汉以前。西汉刘安（公元前179～前122）主编的《淮南子·天文训》说：

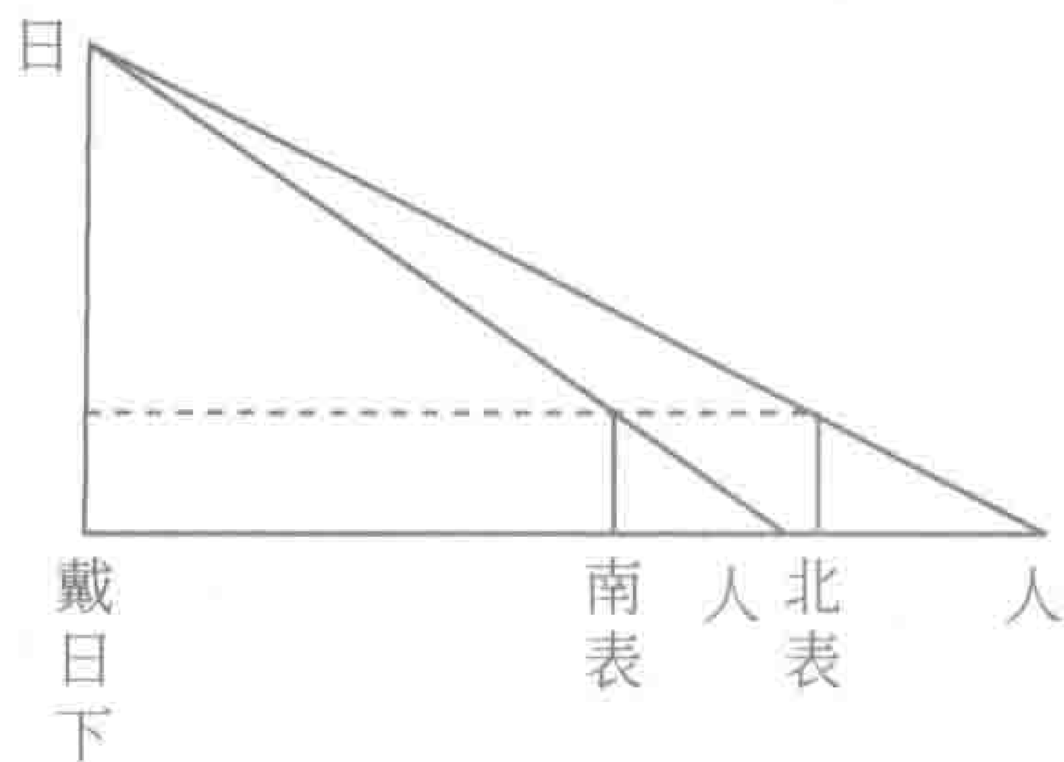


图 5-5-3 刘安测日

欲知天之高，树表高一丈，正南北相去千里。同日度其阴，北表二尺，南表尺九寸，是南千里阴短寸。南二万里则无景，是直日下也。阴二尺而得高一丈者，南一而高五也。则置从此南至日下里数，因而五之，为十万里，则天高也。若使景与表等，则高与远等也。①

这里实际上是求日高，而不是求天高。如图5-5-3所示，其中用到两表，相距1000里，两表阴差是1寸。设南表去日为 L，表距为 D，南表阴为 l_1，北表阴为 l_2。因此，刘安提出的求南表去日的方法就是

$$L = \frac{D \times l_1}{l_2 - l_1} = \frac{1000 \times 19}{20 - 19} = 19000 \text{ 里}$$

这正是重差公式之一。其中，两表相距是两表距日下之差，两表阴差又是一差，因此是重差。这是我们所看到的关于重差的最早记录。由此，北表去日 = 南表去日 + 表距 = 19000 里 + 1000 里 = 20000 里。由北表高1丈其阴2尺，根据相似勾股形原理：日高 = 20000 里 × 5 = 100000 里。

应该说，刘安时代，尚是重差术的初创时期，后来到三国时代的赵爽、刘徽，才发展得比较完备。

① 汉·刘安，《淮南子·天文训》，见：《二十二子》，上海古籍出版社，1986年，“北表二尺”。“二”，《二十二子》本讹作“一”，郭书春校正。

第六章　开方术、正负术、方程术与数列

在现今数学名词中，方程是 equation（拉丁文 oequatio）的翻译。oequatio 有相等的意思，即含有未知数的等式。它相当于中国古代的开方式，与中国古代“方程”的含义是不同的。equation 在清初《阿尔热巴拉算法》中译做相等式；在 1859 年李善兰和伟烈亚力（A. Wylie）合译棣么甘（De Morgan）《代数学》时译做方程；1872 年华衡芳和傅兰雅（J. Fryer）合译华里司（J. Wallis）《代数术》时译为“方程式”。1934 年，数学名词委员会确定用“方程（式）”表示 equation，而用线性方程组表示中国古代的“方程”。1956 年，科学出版社出版《数学名词》，又去掉“方程（式）”中的“（式）”字，最终改变了中国传统数学术语“方程”的含义。

中国传统数学中的开方术、方程术及由方程术导入的正负术，是《九章算术》中长期在世界上领先的重大成就，在现今数学中都归于代数的内容。下面我们分别叙述。

第一节　开　方　术

今之开平方法，汉魏南北朝都称之为开方术，其开方过程称为“开方除之”或“开方除”。赝本《夏侯阳算经》始将开平方称为“开平方除”。开立方的术语则古今无殊，只是对开立方的过程，古代仍称之为“开立方除之”或“开立方除”。宋元时期将开方术推广到开 n 次（$n \geqslant 4$）方，则称之为“开 $n-1$ 乘方”，或“开 $n-1$ 乘方除之”，或“$n-1$ 乘方开之”。

今之开方，一般仅指求形如 $x^n = A$（$n \geqslant 2$）的二项方程的根的过程，而对求解形如 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = A$ 的方程的根，则称为解方程；中国古代对这两种过程都称为开方，甚至在金元时期对 $n=1$ 的情形也称为“开无隅平方而一”。①

开方术是什么时候产生的，无可稽考。《周髀算经》中陈子用勾股定理求“邪至日”的距离，就用到开平方，但未给出开方程序，大约是不言自明的。《九章算术》则在少广章中提出了完整的开平方、开立方程序。从数学方法上说，开方术与少广术是两类不同的方法。

《九章算术》少广章有四种开方术：开方术即开平方法；开圆术即已知圆面积求圆周的方法，归结为开方术；开立方术；开立圆术即已知球体积求球径的方法，归结为开立方术。因此，实际上是两种开方程序。此外，勾股章还有一测望问题归结到开带从（平）方。

---

① 元·朱世杰，四元玉鉴卷上，郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年。

一　开平方术

（一）开方术

1. 开方程序

《九章算术》提出的开方程序是：

> 开方术曰：置积为实。借一算，步之，超一等。议所得，以一乘所借一算为法，而以除。除已，倍法为定法。其复除，折法而下。复置借算，步之如初。以复议一乘之，所得，副以加定法，以除。以所得副从定法。复除，折下如前。

这是一个具有普遍性的开平方程序：

①作四行布算：第一行是“议得”。第二行布置积，称为实，即被开方数。第三行是法。在最下一行的个位上布置一枚算筹表示未知数的平方，称为“借算”。设实为 A，这实际上赋予所列筹式以一个二次代数方程的意义：$x^2 = A$。

②将借算自右向左移动，隔一位移一步，移到与实的最高位（当 A 的位数 n 为奇数时）或次高位（当 n 为偶数时）对齐为止。那么，借算移 $\frac{n-1}{2}$（n 为奇数）或 $\frac{n}{2}-1$ 步（n 为偶数），根就有比步数多一位的数字（n 为奇数时为 $\frac{n+1}{2}$ 位，n 为偶数时为 $\frac{n}{2}$ 步）。经过这种变形之后，借算由代表 x^2，变成表示 $10^{n-1}x_1{}^2$（n 为奇数）或 $10^{n-2}x_1{}^2$（n 为偶数）。开方式变成 $10^{n-1}x_1{}^2 = A$ 或 $10^{n-2}x_1{}^2 = A$。

③议得根的第一位得数 a_1，使其一次方乘借算为法：$10^{n-1}a_1$ 或 $10^{n-2}a_1$，并且，以法除实时，其商的整数部分恰好为 a_1。即 $A \div 10^{n-1}a_1 = a_1 + \frac{A_1}{10^{n-1}a_1}$ 或 $A \div 10^{n-2}a_1 = a_1 + \frac{A_1}{10^{n-2}a_1}$。其中，$A_1$ 为余实。同时，借算自动消失。

④为求根的第二位得数，将法加倍：$2 \times 10^{n-1}a_1$ 或 $2 \times 10^{n-2}a_1$，作为定法。将法退一位，再在下行个位上置借算。

⑤像②那样，将借算自右向左隔一位移一步，相当于求方程（在 n 为奇数时，偶数类此）$10^{n-3}x_2{}^2 + 2 \times 10^{n-2}a_1x_2 = A_1$ 的正根。

⑥复议得根的第二位得数 a_2，在旁边以 a_2 的一次方乘借算得 $10^{n-3}a_2$，加到定法上，为 $2 \times 10^{n-2}a_1 + 10^{n-3}a_2$，同样，使得 $A_1 \div (2 \times 10^{n-2}a_1 + 10^{n-3}a_2) = a_2 + \frac{A_2}{2 \times 10^{n-2}a_1 + 10^{n-3}a_2}$，其中，$A_2$ 亦为余实。如此继续下去。

值得注意的是，此处“而以除”中的“除”，不是以第一位得数的平方减实，即不是 $A - a_1{}^2$，而是“以法除实”，“法”、“实”都是除法中的意义。这就是为什么开方术又称做“开方除之”。有的著作将“以除”理解成 $A - a_1{}^2$，是以刘徽对开方术的改进取代《九章算术》的程序。

设 n 位奇数，记 A 为 $10^{n-1}b_n + 10^{n-2}b_{n-1} + \cdots + 10b_2 + b_1$，《九章算术》的开方程序按上述序号列式如下：

	①	②
议得		
实	$b_n\ b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_{\frac{n+1}{2}}\cdots b_2\ b_1$	$b_n\ b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_{\frac{n+1}{2}}\cdots b_2\ b_1$
法		
借算	1	1

	③	④
议得	a_1	a_1
实	$b_n{}'\ b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_{\frac{n+1}{2}}\cdots b_2\ b_1$	$b_n{}'\cdots\ b_{n-1}\ b_{\frac{n+1}{2}}\ b_{\frac{n-1}{2}}\cdots b_2\ b_1$
法	a_1	$2\ a_1$
借算	1	1

	⑤	⑥	
议得	$a_1\quad a_2$	$a_1\quad a_2$	
实	$b_n{}'\ b_{n-1}\ b_{n-2}\cdots b_{\frac{n+1}{2}}\ b_{\frac{n-1}{2}}\cdots b_2\ b_1$	$b_n{}'\ b_{n-1}\ b_{n-2}\cdots b_{\frac{n+1}{2}}\ b_{\frac{n-1}{2}}\cdots b_2\ b_1$	
法	$2\ a_1$	$2\ a_1\ a_2$	$a_2\times 10^{n-3}$
借算	1	1	副

我们再以少广章开方术的第 3 个例题说明开方程序。

又有积五十六万四千七百五十二步四分步之一，问：为方几何？

这是求解 $\sqrt{564752\,\frac{1}{4}}$。首先将被开方数通分，$564752\,\frac{1}{4}=\frac{2259009}{4}$，以 2259009 为被开方数。其开方程序如下：

	①	②
议得		
实	2 2 5 9 0 0 9	2 2 5 9 0 0 9
法		
借算	1	1

	③	④
议得	1	1
实	1 2 5 9 0 0 9	1 2 5 9 0 0 9
法	1	2
借算	1	1

议得				1	5			
实	1	2	5	9	0	0	9	
法		2						
借算			1					

⑤

议得				1	5			
实	1	2	5	9	0	0	9	
法		2	5					5×10^4
借算			1					副

⑥

议得		1	5		
实		9	0	0	9
法	2	5			
借算					

⑦

议得	1	5		
实	9	0	0	9
法	3	0		
借算				1

⑧

议得	1	5	0	3	
实	0	0	0	0	
法	3	0	0	3	3×1
借算				1	副

⑨

①～⑥与上述程序中的序号仍然对应。于是

$$\sqrt{564752\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2259009}}{\sqrt{4}}=\frac{1503}{2}=751\frac{1}{2}$$

2. 几种情形的处理方法

《九章算术》还对开方中出现的几种情况提出了处理方法：

> 若开之不尽者，为不可开，当以面命之。若实有分者，通分内子为定实，乃开之。讫，开其母，报除。若母不可开者，又以母乘定实，乃开之。讫，令如母而一。

这里处理了两种情形。一是开方不尽的情况。这相当于求无理根，称为不可开，“当以面命之”，即以其根命名一个分数。此处以面命之，不是指 $\sqrt{A}=a+\frac{r}{a}$，而是指 $\sqrt{A}$。刘徽注“开方”说：“求方幂之一面也。”当 A 可开时，面 $\sqrt{A}$ 就是有理数，当 A 不可开时，面 $\sqrt{A}$ 就表示一个无理数。刘徽开立圆术注以“面”入算者，包括了上述两者。

二是若被开方数带有分数，要通分约子。若分母为完全平方数，则分别开分子、分母，然后以母除实。即 $A=\frac{b}{a}$，a 为完全平方数，则 $\sqrt{A}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$。若分母不可开时，则以分母乘分

子，开分子后，以分母除。即 a 为非完全平方数，$A = \frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2}$，则 $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$。

（二）开圆术

《九章算术》把开方术应用于已知圆面积求圆周的问题，提出了开圆术：

开圆术曰：置积步数，以十二乘之。以开方除之，即得周。

设圆面积为 S，周长为 l，此即 $l = \sqrt{12S}$。显然，它是圆面积公式（5-1-8）的逆运算。刘徽指出："此术以周三径一为率，与旧圆田术相返覆也。"

（三）开带从平方

《九章算术》勾股章"邑方出南北门"问要用开带从平方解决，即求解形如 $x^2 + bx = c$（$b \geqslant 0, c \geqslant 0$）的正根。此题是：

今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木，出南门一十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问：邑方几何？

术曰：以出北门步数乘西行步数，倍之，为实。并出南、北门步数，为从法。开方除之，即邑方。

如图 6-1-1 所示，设邑方 FG，北门 D，北门外之木为 B，南门 E，折西处为 C，西行见木处为 A，设 FG 为 x，BD 为 k，EC 为 l，AC 为 m，《九章算术》的术文表示用二次方程：

$$x^2 + (k + l)x = 2km \qquad (6\text{-}1\text{-}1)$$

求邑方 FG。

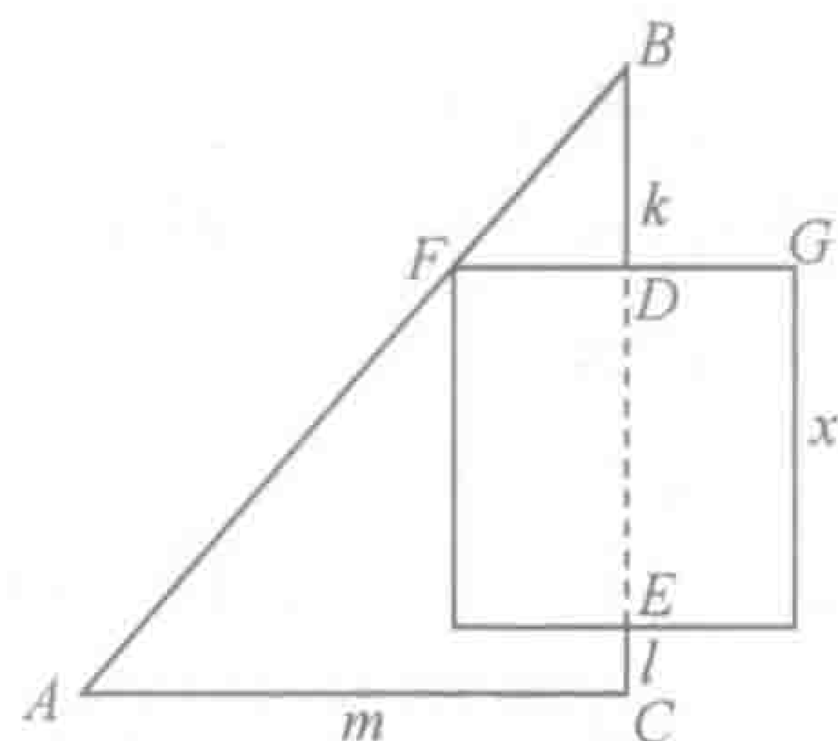


图 6-1-1　邑方出南北门

《九章算术》未给出开带从平方程序。但是，开方术从求根的第二位得数起，便是求形如 $x^2 + bx = c$（$b \geqslant 0, c \geqslant 0$）的方程正根的程序。因此，实际上《九章算术》已经包含了开带从方的程序。

二　开立方术

（一）开立方术

1. 开立方程序

《九章算术》开立方术是：

开立方术曰：置积为实。借一算，步之，超二等。议所得，以再乘所借一算为法，而除之。除已，三之为定法。复除，折而下。以三乘所得数，置中行。复借一算，置下行。步之，中超一，下超二等。复置议，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定除，除已，倍下、并中，从定法。复除，折下如前。

这也是一个具有普适性的开方程序，其原理与开平方术一致。我们不再重复术文的阐释。

2. 几种情形的处理方法

与开平方的情形一样，《九章算术》也提出开立方中几种情形的处理方法：

开之不尽者，亦为不可开。若积有分者，通分内子为定实。定实乃开之。讫，开其母以报除。若母不可开者，又以母再乘定实，乃开之。讫，令如母而一。

《九章算术》也提出了不可开的问题，虽未说如何处理，应该与开平方时的情形一样，“以面命之”。

同样，当被开方数是分数时，《九章算术》提出：被开方数是带分数：$A = c\frac{b}{a}$，若 a 为完全立方数，则 $\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{ac+b}}{\sqrt[3]{a}}$。若 a 不可开，即 a 为非完全立方数，$A = c\frac{b}{a} = \frac{ac+b}{a} = \frac{(ac+b)a^2}{a^3}$，则 $\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{(ac+b)a^2}}{a}$。

谨以少广章开方术第3个例题说明“积有分”时的开立方程序：

又有积六万三千四百一尺五百一十二分尺之四百四十七。问：为立方几何？

此即求解 $\sqrt[3]{63401\frac{447}{512}}$。先将被开方数通分：$\sqrt[3]{63401\frac{447}{512}} = \sqrt[3]{\frac{32461759}{512}}$。将分母、分子分别开立方：分母开立方得：$\sqrt[3]{512} = 8$，分子开立方得：$\sqrt[3]{32461759} = 319$。因此：$\sqrt[3]{63401\frac{447}{512}} = \sqrt[3]{\frac{32461759}{512}} = \frac{319}{8} = 39\frac{7}{8}$。求 $\sqrt[3]{32461759} = 319$ 的程序是：

①作五行布算：第一行记议得，即根。第二行布置32461759，作为实。第三行留作法，第四行留作中行。最下行于个位上布置借算1。这就赋予开方式一个三次方程的意义：$x^3 = 32461759$。

②将借算由个位自右向左隔两位移一步，移两步，至百万位，不能再移，说明根是三位数。它表示代数方程：$10^6 x_1^{\ 3} = 32461759$。

③于百位之上，议得根的第一位得数3，使得借算乘3的平方 $10^6 \times 3^2$ 除实所得商的整数部分恰为3：$32461759 \div 10^6 \times 3^2 = 3 + \frac{5461759}{10^6 \times 3^2}$。

④以3乘 $10^6 \times 3^2$，得 $3 \times 10^6 \times 3^2$，为定法。为了进行求第二位得数的除法，将其退一位：$3 \times 10^5 \times 3^2$。

⑤以3乘3，布置于中行，再借一算布置于下行个位。

⑥使中行 3×3 由右向左隔一位移一步，借一算隔二位移一步。这相当于减根方程：

$$10^3 \times x_2^{\ 3} + 3 \times 10^4 \times 3 \times x_2^{\ 2} + 3 \times 10^5 \times 3^2 \times x_2 = 5461759$$

⑦于十位上议得根的第二位得数1，在中、下行的旁边计算 $3 \times 10^4 \times 3 \times 1$ 及 $10^3 \times 1^2$，加到定法 $3 \times 10^5 \times 3^2$ 上，为 $3 \times 10^5 \times 3^2 + 3 \times 10^4 \times 3 \times 1 + 10^3 \times 1^2 = 2719000$。使得以它除实5461759所得商的整数部分恰为1：$5461759 \div 2719000 = 1 + \frac{2670759}{2791000}$。

⑧以2乘下行 $10^3 \times 1^2$，得 $2 \times 10^3 \times 1^2$，以1乘中行得 $3 \times 10^4 \times 3 \times 1$，加到定法上，定法成为 $3 \times 10^5 \times 3^2 + 6 \times 10^4 \times 3 \times 1 + 3 \times 10^3 \times 1^2 = 2883000$。定法退一位，中行退二位。

⑨以3乘第2位得数1，得 $3 \times 10 \times 1$，加入中行，中行成为 $3 \times 10^2 \times 3 \times 1 + 3 \times 10 \times 1 = 930$。再借一算布置于下行个位，不再步之。这相当于求解减根方程 $x_3^{\ 3} + (3 \times 10^2 \times 3 + 3 \times 10 \times 1)\ x_3^{\ 2} + (3 \times 10^4 \times 3^2 + 6 \times 10^3 \times 3 \times 1 + 3 \times 10^2 \times 1^2)\ x_3 = 2670759$，即求如下

方程的正根：

$$x_3^3 + 930x_3^2 + 288300x_3 = 2670759。$$

⑩议得第三位得数 9，布置在个位数上。以 9 的一次方乘中行 $3 \times 10^2 \times 3 \times 1 + 3 \times 10 \times 1$，得 $(3 \times 10^2 \times 3 \times 1 + 3 \times 10 \times 1) \times 9$。以其与 9 的二次方 9^2，加到定法上，得 $9^2 + (3 \times 10^2 \times 3 \times 1 + 3 \times 10 \times 1) \times 9 + 3 \times 10^4 \times 3^2 + 6 \times 10^3 \times 3 \times 1 + 3 \times 10^2 \times 1^2 = 296751$ 作为法，除实 2670759，恰得 9，无剩余。因此分子的开立方 $\sqrt[3]{32461759} = 319$。

（二）开立圆术

《九章算术》把开立方术应用于已知球体积求球直径的问题，提出了开立圆术：

> 开立圆术曰：置积尺数，以十六乘之，九而一。所得，开立方除之，即立圆径。

立圆即球。若 d 为球径，V 为球体积，《九章算术》认为

$$d = \sqrt[3]{\frac{16V}{9}} \qquad (6\text{-}1\text{-}2)$$

刘徽指出：这个公式是错误的，它是错误的球体积公式（5-2-17）的逆运算。后面还要详细讨论这个问题。

《九章算术》的开方术是世界上最早的多位数开方程序。① 它奠定了中国开方术的基础。后来，开方术经过刘徽、《孙子算经》、王孝通、贾宪、刘益、秦九韶、李冶、朱世杰等的不断改进、发展，成为中国传统数学的一个重要分支，取得了具有世界意义的重大成就。

第二节　方程术与正负术

方程术就是现今的线性方程组解法，是《九章算术》最杰出的数学成就。《九章算术》第一问提出方程术，是全章的纲。第二问提出损益术，是列方程的方法。第三问提出正负术，是解决消元过程中或方程本身出现负数时的处理方法，是方程术的必要补充。这三问之后的问题的解决，或者“如方程，损益之”，或者“如方程，以正负术入之”，或者是这三者的结合，只有第 7、9 问仅说“如方程”。

一　方程和方程术

（一）方程的本义

自古迄今，方程术作为一种重要数学方法流传下来，并不断改进、发展。但是，关于“方程”的本义却存在着若干分歧。有代表性的看法是：

①魏刘徽《九章算术注》云：

> 程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之方程。行之左右无所同存，且为有所

---

① 梁宗巨，世界数学史简编，辽宁人民出版社，1980 年，第 350 页。

据而言耳。

②唐李籍《九章算术音义》云：

方者，左右也；程者，课率也。左右课率，总统群物，故曰方程。

③北宋贾宪《黄帝九章算经细草》云：

谓方者，数之形也。程者，量度之总名。①

④明程大位《算法统宗》云：

方，正也；程，数也。②

⑤清梅文鼎《方程论》云：

方，比方也；程者，法程也，程课也。数有难知者，据现在之数以比方而程课之，则不可知而可知。③

⑥清屈曾发《九数通考》云：

方者，比也；程者，式也。设问中诸物繁冗，诸价错杂，无可置算，必须布置行列，定为一成之式。然后递互遍乘，同异加减，求其有等，作为比例，故曰方程。④

⑦近人钱宝琮主编《中国数学史》云：

联立一次方程组各项未知量的系数用算筹表示时有如方阵，所以叫做“方程”。

二十世纪七八十年代还有一些看法，大都接近梅文鼎、屈曾发与钱宝琮的看法。上述各种看法中，只有刘徽和李籍的看法符合“方程”的本义。后来的看法多少离开了“方程”的本义，我们对此稍作考察。

方，并也。汉许慎《说文解字》：“方，并船也。象两舟，省总头形。”⑤《诗经 · 周南 · 汉广》：“江之永矣，不可方思。”毛传曰：“方，泭也。”，泭同桴，柎，小木筏。《仪礼 · 乡射礼》：“左足履物，不方足。”郑玄注曰：“方，犹并也。”⑥ 可见，“方”的本义是指用竹木并合编成的筏，引申为并。

程的本义是度量名。许慎《说文解字》：“十发为程，十程为分，十分为寸。”引申为事物的标准。《荀子 · 致仕》：“程者，物之准也。”《算数书》中“程禾”、“程竹”等，《九章算术》中“冬程人功”、“春程人功”、“夏程人功”、“秋程人功”、“程功尺数”、“程行步数”、“程粟”等，都是指某种标准度量。程，又引申为计量、考核。《左传 · 宣公十一年》：“称畚筑，程土物。”刘徽说的“程，课程也”，正是这个意思。

因此，“方程”的本义，就是“并而程之”，即把诸物之间的各数量关系并列起来，考核其度量标准。刘徽的诠释完全符合方程本义。形象地说来，一个数量关系排成一行，像一支竹，或一条木棍，把它们一行行并列起来，恰似一条竹筏或木筏，这正是方程的形状。

---

① 北宋 · 贾宪，黄帝九章算经细草，见：杨辉，详解九章算法，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 962 页。

② 明 · 程大位，算法统综卷十一，见：中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第二册，河南教育出版社，1993 年，1395 页。

③ 清 · 梅文鼎，方程论，见：中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第四册，河南教育出版社，1993 年，第 324 页。

④ 清 · 屈曾发，九数通考卷九，同治十一年（1872 年）刻，第 1 页。

⑤ 汉 · 许慎，说文解字，中华书局，1963 年。本编凡引《说文解字》，均据此。

⑥ 周 · 仪礼，见：《十三经注疏》，中华书局，1980 年。本编凡引《仪礼》，均据此。

方程要并列为行，当然出现左右，李籍说："方者，左右也。"接近本意。李籍的话源于《仪礼·大射礼》："左右曰方。"郑玄注："方，出旁也。"贾宪所说"谓方者，数之形也"，如果数之形指并列，则也是正确的。

自程大位到屈曾发的理解则都离开了方程的本义。这段时间正是《九章算术》失传的时候，他们都看不到这段刘徽注，不免望文生义。后来关于方程理解的偏颇，也受他们的影响。

（二）方程术

《九章算术》方程章共18道问题，都要用方程术解决。其第1问是：

> 今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问：上、中、下禾实一秉各几何？

《九章算术》给出答案之后，提出了方程术：

> 方程术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方。中、左禾列如右方。以右行上禾遍乘中行，而以直除。又乘其次，亦以直除。然以中行中禾不尽者遍乘左行，而以直除。左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实。求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实。余，如中禾秉数而一，即中禾之实。求上禾，亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实。余，如上禾秉数而一，即上禾之实。实皆如法，各得一斗。

这是线性方程组的普遍解法。只是当时用抽象的语言难以表达明白，因而借助于禾实来阐述，正如刘徽所说："此都术也。以空言难晓，故特系之禾以决之。"因而，我们仍借助禾实阐释。

①首先列出方程。若以 x, y, z 分别表示上、中、下禾各一秉的实的斗数，它相当于线性方程组：

$$3x + 2y + z = 39 \qquad (6\text{-}2\text{-}1)$$

$$2x + 3y + z = 34 \qquad (6\text{-}2\text{-}2)$$

$$x + 2y + 3z = 26 \qquad (6\text{-}2\text{-}3)$$

②以右行上禾系数3乘左行、中行的所有的项，减去右行，即3×公式（6-2-3）－公式（6-2-1），3×公式（6-2-2）－公式（6-2-1），一直减至左行、中行上禾的系数为0。方程组变成：

$$3x + 2y + z = 39$$

$$5y + z = 24 \qquad (6\text{-}2\text{-}4)$$

$$4y + 8z = 39 \qquad (6\text{-}2\text{-}5)$$

③再以中行中禾新的系数5，乘左行所有的项，减去中行：5×公式（6-2-5）－公式（6-2-4），一直减至左行中禾的系数为0，方程组变成：

$$3x + 2y + z = 39$$

$$5y + z = 24$$

$$4z = 11 \qquad (6\text{-}2\text{-}6)$$

④公式（6-2-6）中 z 的系数4称为法，11就是4秉下禾之实。以法4乘中行下实24，

减去下禾之实 11，再除以中禾乘数 5，$(24\times4-11)\div5=17$，就得到 4 秉中禾之实；以法 4 乘右行下实 39，减去下禾之实 11 及中禾之实 17×2，再除以上禾乘数 3，$(39\times4-11-17\times2)\div3=37$，就得到 4 秉上禾之实 37。方程组变成：

$$\begin{aligned}4x\qquad\quad &=37\\ 4y\quad\ &=17\\ 4z&=11\end{aligned}$$

皆以法除实，得上禾一秉实 $x=9\frac{1}{4}$ 斗，中禾一秉实 $y=4\frac{1}{4}$ 斗，下禾一秉实 $z=2\frac{3}{4}$ 斗。其筹式（我们用阿拉伯数字代替算筹数字）如下：

1	2	3				3			3			4
2	3	2	4	5	2		5	2			4	
3	1	1	8	1	1	4	1	1	4			
26	34	39	39	24	39	11	24	39	11	17	37	
	①			②			③			④		

方程术有几个特点。

首先，方程的建立及消元变换采用位值制记法，每个数字不必标出它是什么物品的系数，而是用所在的位置表示出来，与现代数学中的分离系数法完全一致。

其次，《九章算术》方程的表示，相当于列出其增广矩阵，其消元过程相当于矩阵变换。上述筹式①～④相当于现今增广矩阵的变换：

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&1&1\\26&34&39\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&3\\4&5&2\\8&1&1\\39&24&39\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&3\\0&5&2\\4&1&1\\11&24&39\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&4\\0&4&0\\4&0&0\\11&17&37\end{bmatrix}$$

再次，这里不用互乘相消法消元，而是用直除法。所谓直除就是整行与整行对减。它比后来刘徽创造的互乘相消法繁琐，其实质却是相同的，都符合现代数学中矩阵变换的理论。

还有，方程术并未自始至终地使用直除法。它在求出一未知数的答案之后，采用从该行的实中减去已求出的未知数的相应的值的方法求另外的未知数，相当于现今的代入法。

二　损　益　术

损益术是《九章算术》建立方程时要用到的重要方法，方程章第 2 问提出：

　　损之曰益，益之曰损。

“损之曰益”是说关系式一端损某量，相当于另一端益同一量；同样，“益之曰损”是说关系式一端益某量，相当于另一端损同一量。虽没有赋予“损益术”之名，但从许多题目声明“损益之”来看，它与正负术等术文具有同等的功能。《九章算术》用“损益之”和“方程术”建立和解决的方程有第 2、10、11 三问，既用到“损益之”和“方程术”，又要用到“正负术”的有第 4、5、6、8、15 五问，共八问。除第 8、15 问是三元方程外，都是二元方程。

损益是增减的意思。损益之说本是先秦哲学家的一种辩证思想。《周易·损》："损下益上，其道上行。"①《老子·四十二章》："物或损之而益，或益之而损。"② 其他学者也经常用到"损益"。《九章算术》的编纂者借用"损益"这一术语，仍是增减的意思，与《老子》之说十分接近。当然，其涵义稍有不同。我们看几个例子。方程章第2问是：

今有上禾七秉，损实一斗，益之下禾二秉，而实一十斗；下禾八秉，益实一斗，与上禾二秉，而实一十斗。问：上、下禾实一秉各几何？

术曰：如方程。损之曰益，益之曰损。损实一斗者，其实过一十也；益实一斗者，其实不满一十斗也。

由题设，设上、下禾实分别是 x,y，根据题设最先列出的关系式用现今符号相当于：

$$(7x-1)+2y=10$$
$$2x+(8y+1)=10$$

原关系式通过损益之，变成方程：

$$7x+2y=11$$
$$2x+8y=9$$

显然，"损益之"相当于现今由关系式的一端向另一端移项，移项后改变符号。这是常数项移项的情况。

第6问是：

今有上禾三秉，益实六斗，当下禾一十秉；下禾五秉，益实一斗，当上禾二秉。问：上、下禾实一秉各几何？

设上、下禾实分别是 x,y，依题设，列出关系式：

$$3x+6=10y$$
$$5y+1=2x$$

互其算，得

$$3x-10y=-6$$
$$-2x+5y=-1$$

所列出的方程的实为负数，突破了实为正的限制。

第11问是更为复杂的情形。题设是：

今有二马、一牛价过一万，如半马之价；一马、二牛价不满一万，如半牛之价。问：牛、马价各几何？

其术文很简单：

术曰：如方程，损益之。

设马、牛价分别是 x,y，依题设列出关系式：

$$(2x+y)-10000=\frac{1}{2}x$$

$$10000-(x+2y)=\frac{1}{2}y$$

---

① 周·周易·损，见：十三经注疏，中华书局，1979年，第52页。

② 周·老子，见：朱谦之，老子校释，中华书局，1984年，第176页。

损益之，为

$$1\frac{1}{2}x + y = 10000$$

$$x + \frac{3}{2}y = 10000$$

通分内子，方程变成：

$$3x + 2y = 20000$$
$$2x + 5y = 20000$$

其中，既有未知数和常数项的互其算，又有未知数的合并同类项，还有通分内子。

分数系数的方程在第10问就出现了。根据刘徽注，《九章算术》也是通过通分内子，得到整系数方程。刘徽指出："诸物有分者放此。"

这些例子都表明，损益术是方程术必不可少的辅助方法。

一般认为，代数"algebra"来自阿拉伯文 al jabr，是因为花拉子米（Al-Khowârizmî，约公元783～约850）写了一部代数著作《算法与代数学》（*al-Kitāp al-mukhata-sar fi hisāp al-jabr wa al-muquābala*）。al jabr 在阿拉伯文中的意思是"还原"或"移项"，解方程时将负项由一端移到另一端，变成正项，就是"还原"；wa al muquābala 是"对消"，即将两端相同的项消去或合并同类项。① 显然，《九章算术》使用还原与合并同类项，要比花拉子米早1000年左右。

三　正　负　术

引入负数，提出正负数的加减法则，是中国古代的重要成就。

（一）正负数

中国古代正负数的引入，根据《算数书》和《九章算术》，有两条不同的途径。

《算数书》医条中有"负几何"、"负十七算二百六十九分算十一"、"负算"等概念，在题设与比例运算中都使用了负数。不过，也有的学者认为此处的"负"不是"负数"，而是"负担"。

《九章算术》方程章通过两种途径引入负数，一是正系数方程在消元过程中会以大减小，出现负数；二是有的方程本身就是负数方程。负数的引入是数系的又一重要扩展。这一扩展的意义十分重大。倘不引入负数，方程术便只能应用于很少一部分方程。

（二）正负术

《九章算术》方程章提出了正负数完整的加减法则：

正负术曰：同名相除，异名相益。正无人负之，负无人正之②。其异名相除，

① D. E. Smith，History of Mathematics，vol. Ⅱ，Dover Publications，1925，382.

② "无人"系《大典》本、杨辉本原文。"人"训"偶"，"无人"即"无偶"，不误。戴震改"人"作"入"，不妥。李潢、汪莱已指出戴校之非，但此后近200年间所有校勘本《九章算术》均依戴校。郭书春《九章算术译注》（上海古籍出版社，2009，2010）恢复原文。

同名相益。正无人正之，负无人负之。

名，名分，这里表示数的符号。同名即同号，异名即不同号。除是减的意思，益是加的意思。

前四句是正负数减法法则。设 a,b 皆为正数。如果两者是同号的，则是其两绝对值相减：

$$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b)\quad a\geqslant b$$
$$(\pm a)-(\pm b)=a-b\quad a\leqslant b$$

如果两者是异号的，则其绝对值相加：

$$(\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b)$$

正数如果没有与之相减的数，则为负数：

$$0-a=-a$$

负数如果没有与之相减的数，则为正数：

$$0-(-a)=a$$

后四句是正负数加法法则。如果两者是异号的，则绝对值相减：

$$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b),\quad a\geqslant b$$
$$(\pm a)+(\mp b)=\mp(b-a),\quad a\leqslant b$$

若两者是同号的，则绝值相加：

$$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b)$$

正数没有与之相加的，则为正数：

$$0+a=a$$

负数没有与之相加的，则为负数：

$$0+(-a)=-a$$

《九章算术》没有提出正负数的乘除法则，但在实际上有大量正负数乘除法的运算。现存中国古代数学著作中首次明确提出正负数乘法法则的是《算学启蒙》①。事实上，早在《算数书》的“医”条就已经使用了正负数的乘除法。此条是：

医　程曰：医治病者得二百一十一算百九十一分算九十九，负六十算二百六十九分算廿，……得六十算而负几何？曰：负十七算二百六十九分算十一。其术曰：以今得算为法，令六十乘负算为实。

它在中医医政学中的意义还不清楚，值得进一步探讨。然而它的数学意义是明确的，这就是医病得 $211\frac{99}{191}$ 算，而为 $-60\frac{20}{269}$ 算问得 60 算而负多少？因此，负算 $=\left(-60\frac{20}{269}\right.$ 算 $\times 60$ 算$\left.\right)\div 211\frac{99}{191}$ 算 $=-17\frac{11}{269}$ 算。这里明确施行了负数乘以正数、负数除以正数的运算。

中国负数概念和正负数加减法则的提出超前其他民族几个世纪，甚至上千年。公元 628 年，印度婆罗门笈多（Brahmagupta）使用负数表示欠债，使用正数表示所有。他是中国以外最早使用负数的学者。后来，负数传入欧洲，15～17 世纪许多学者还不承认负数是数。

① 元·朱世杰，算学启蒙·总括，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 1129 页。

(三) 正负术在方程术中的应用

正负术在《九章算术》中只用于解方程,《九章算术》的行文用“如方程,以正负术入之”表示。第3问本来是一个正系数方程。题目是:

今有上禾二秉,中禾三秉,下禾四秉,实皆不满斗。上取中、中取下、下取上各一秉而实满斗。问:上、中、下禾实一秉各几何?

术曰:如方程。各置所取。以正负术入之。

列出方程就是

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

设上、中、下禾一秉实分别是 x,y,z,即现今:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3y + z &= 1 \\ x + 4z &= 1 \end{aligned}$$

以右行上位系数2乘左行,减去右行,左行上位为0,中位为 $0-1=-1$,方程化为

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

即

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3y + z &= 1 \\ -y + 8z &= 1 \end{aligned}$$

左行中位出现系数 -1。以中行中位系数3乘左行,与中行相加,左行中位为 $-1\times3+3=0$,下位25为法,下禾之实为4。方程化为

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 25 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{matrix}$$

即

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3y + z &= 1 \\ 25z &= 4 \end{aligned}$$

以法25乘中行实1得25,减下禾实4,除以中禾秉数3得7。中行变为 $25y=7$。又以法25乘右行实1得25,减中禾实7,除以上禾秉数2,右行变成 $25x=9$。方程变为

0	0	25
0	25	0
25	0	0
4	7	9

即

$$25x = 9$$
$$25y = 7$$
$$25z = 4$$

第8问建立的方程本身就含有负系数：

今有卖牛二、羊五，以买一十三豕，有余钱一千；卖牛三、豕三，以买九羊，钱适足；卖六羊、八豕，以买五牛，钱不足六百。问：牛、羊、豕价各几何？

术曰：如方程。置牛二、羊五正，豕一十三负，余钱数正；次，牛三正，羊九负，豕三正；次，五牛负，六羊正，八豕正，不足钱负。以正负术入之。

损益之，互其算，建立方程：

−5	3	2
6	−9	5
8	3	−13
−600	0	1000

设牛、羊、豕价分别是 x,y,z，即现今：

$$2x + 5y - 13z = 1000$$
$$3x - 9y + 3z = 0$$
$$-5x + 6y + 8z = -600$$

应用直除法，以右行上位2乘中行，三度减右行，中行上位为0，中位为 $-9\times2-5\times3=-33$（此以 -5×3 表示三度减，下同），下位为 $2\times3-(-13)\times3=45$，实为 $0-1000\times3=-3000$，即 $-33y+45z=-3000$。以 −3 约，$(-33)\div(-3)=11$，$45\div(-3)=-15$，$(-3000)\div(-3)=1000$。以原左行上位3乘左行，5度加中行，左行上位为0，中位为 $18+(-9)\times5=-27$，下位为 $24+3\times5=39$，实为 −1800，以3约，中位为 $-27\div3=-9$，下位为13，实为 $-1800\div3=-600$。方程变为

0	0	2
−9	11	5
13	−15	−13
−600	1000	1000

即

$$2x + 5y - 13z = 1000$$
$$11y - 15z = 1000$$
$$-9y + 13z = -600$$

以中行中位乘左行，九度加中行，左行中位为 $-9\times11+9\times11=0$，下位为 $13\times11+9\times(-15)=8$，实为 $-600\times11+9\times1000=2400$，以8约，为 $z=300$。方程变为

$$\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 5 \\ 1 & -15 & -13 \\ 300 & 1000 & 1000 \end{array}$$

即

$$2x + 5y - 13z = 1000$$
$$11y - 15z = 1000$$
$$z = 300$$

得出 $z = 300$。然后，在中行下实加 15×300，中行变成 $11y = 1000 + 15 \times 300 = 5500$，$y = 500$。在右行下实中减 5×500，加 13×300，变成 $2x = 1000 - 5 \times 500 + 13 \times 300 = 2400$，$x = 1200$。

在这些运算中，不仅使用了正负数加减法则，而且必须使用正负数的乘、除法。

第三节　数　　列

《算数书》、《周髀算经》与《九章算术》中有大量数列问题。其中，最重要的是等差数列与等比数列这两类。

《周髀算经》的"七衡图"给出了衡径、周长、日度三串等差数列。《周髀算经》说：

> 是故一衡之间万九千八百三十三里三分里之一，即为百步。欲知次衡径，倍而增内衡之径。二之以增内衡径，得三衡径。次衡放此。

因此，相邻两衡的直径之差为 $2 \times 19833\frac{1}{3}$里 $=39666\frac{2}{3}$里，这就是公差 d，利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 求得各衡的直径。第二串数列是利用周三径一，由各衡的直径乘 3 求出的。第三串数列是由各衡的周长除以 $365\frac{1}{4}$ 求出的。

《周髀算经》所载二十四节气的晷长也是一个等差数列。

《九章算术》的等差数列更多一些，分别在衰分、均输、盈不足章，大部分用衰分术求各项。盈不足章的良驽二马问给出了等差数列前 n 项和的公式。兹分别叙述如下：

1. 用衰分术求解的等差数列

《九章算术》衰分章的"五人猎五鹿"问及"六人禀粟"问都是以 5，4，3，2，1 为列衰，用衰分术便求出了等差数列。均输章的"金箠"、"五人分五钱"、"九节竹"等问题在用衰分术求解之前，都用很巧妙的方法求出列衰，很有特色。"五人分五钱"问是：

> 今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等。问：各得几何？
>
> 术曰：置钱，锥行衰。并上二人为九，并下三人为六。六少于九，三。以三均加焉。副并为法。以所分乘未并者，各自为实。实如法得一钱。

刘徽认为，所谓锥行衰就是 5，4，3，2，1。上 2 人之和是 9，下 3 人之和是 6，上比下少 1 人，而其和多 3。若每人都加 3，以 8，7，6，5，4 作为列衰，则上 2 人与下 3 人相等。用衰分术，以此作为列衰，便求出各人应分得的钱数为 $1\frac{2}{6}$，$1\frac{1}{6}$，1，$\frac{5}{6}$，$\frac{4}{6}$。这是公差为 $\frac{1}{6}$ 的

等差数列。

刘徽认为，“五人分五钱”类的问题，也可以用“九节竹”问题的方法解决。“九节竹”问是：

> 今有竹九节，下三节容四升，上四节容三升。问：中间二节欲均容，各多少？
>
> 术曰：以下三节分四升为下率，以上四节分三升为上率。置四节、三节，各半之，以减九节，余为法。实如法得一升，即衰相去也。下率一升少半升者，下第二节容也。

这里是先求出公差，《九章算术》称为“衰相去”，即相邻两节之差。为此，先求出下率：$\frac{4}{3}$升，是下三节的中间一节所容，亦即下第二节所容；上率：$\frac{3}{4}$升，是上四节的中间一节所容。下三节的中间与上四节的中间相距为9节－（3节×$\frac{1}{2}$+4节×$\frac{1}{2}$）=5$\frac{1}{2}$节；下率－上率=$\frac{4}{3}$升－$\frac{3}{4}$升=$\frac{7}{12}$升，是中间5$\frac{1}{2}$节的总差；所以，相邻两节之差=$\frac{7}{12}$升÷5$\frac{1}{2}$=$\frac{7}{66}$升，便是公差。下第二节容$\frac{4}{3}$升，依次加减公差$\frac{7}{66}$升，便得到$1\frac{29}{66}$，$1\frac{22}{66}$，$1\frac{15}{66}$，$1\frac{8}{66}$，$1\frac{1}{66}$，$\frac{60}{66}$，$\frac{53}{66}$，$\frac{46}{66}$，$\frac{39}{66}$为各节所容。这也是一个等差数列。

2. 等差数列前 n 项和公式

《九章算术》盈不足章“良驽二马”问的术文，《永东大典》本和杨辉本全部讹作注，戴震认为开头应用盈不足术的文字是经文，以下是刘徽注。汪莱、李潢认为“求良马行者”与“求驽马行者”两段文字也是经文。我们赞同汪、李二先贤的看法。这两段文字是：

> 求良马行者：十四乘益疾里数而半之，加良马初日之行里数，以乘十五日，得良马十五日之凡行。又以十五日乘益疾里数，加良马初日之行。以乘日分子，如日分母而一。所得，加前良马凡行里数，即得。其不尽而命分。求驽马行者：以十四乘半里，又半之，以减驽马初日之行里数，以乘十五日，得驽马十五日之凡行。又以十五日乘半里，以减驽马初日之行。余，以乘日分子，如日分母而一。所得，加前里，即驽马定行里数。其奇半里者，为半法。以半法增残分，即得。其不尽者而命分。

这两段文字实际上使用了等差数列前 n 项和公式

$$S_n = (a_1 + \frac{n-1}{2}d)n \tag{6-3-1}$$

以及等差数列第 n 项 a_n 公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

其中，a_1 是首项，在本题是良、驽二马第一日所行；d 是公差，在本题是良马日疾里数或驽马日迟里数。若 $d>0$，便是良马的情形；若 $d<0$，便是驽马的情形。这是中国数学史上第一次给出等差数列的第 n 项的公式及前 n 项和的公式。

《算数书》、《九章算术》中有几个等比数列，都十分简单，所达到的深度远不如等差数列。兹简述如下。

前面提到的《算数书》用衰分术解决的“狐出关”条中犬、狸、狐按1、2、4的比例

分配 111 钱，分别得 $15\frac{6}{7}$ 钱，$31\frac{5}{7}$ 钱，$63\frac{3}{7}$ 钱，就是一个以 2 为公比的等比数列。《九章算术》衰分章有与之类似的“牛马羊食人苗”问：

> 今有牛、马、羊食人苗，苗主责之粟五斗。羊主曰：“我羊食半马。”马主曰：“我马食半牛。”今欲衰偿之，问：各出几何？
>
> 术曰：置牛四、马二、羊一，各自为列衰。副并为法。以五斗乘未并者各自为实。实如法得一斗。

这是以 4、2、1 为列衰，用衰分术求出 2 斗 $8\frac{4}{7}$ 升，1 斗 $4\frac{2}{7}$ 升，$7\frac{1}{7}$ 升为答案。这实际上是以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列。

《算数书》和《九章算术》都有“女织”问题，题设和答案一致，只是《算数书》的答案没有约简。《九章算术》的题目是：

> 今有女子善织，日自倍，五日织五尺。问：日织几何？
>
> 术曰：置一、二、四、八、十六为列衰，副并为法。以五尺乘未并者，各自为实。实如法得一尺。

这是以 1、2、4、8、16 为列衰，用衰分术求出 $1\frac{19}{31}$ 寸、$3\frac{7}{31}$ 寸、$6\frac{14}{31}$ 寸、1 尺 $2\frac{28}{31}$ 寸、2 尺 $5\frac{25}{31}$ 寸为答案。这实际上是一个以 2 为公比的等比数列。

盈不足章“两鼠对穿”问题设“大鼠日自倍，小鼠日自半”，实际上也是等比数列。

《九章算术》中没有任何等比数列的求第 n 项或求其和公式的探讨。

第三编　中国传统数学理论体系的完成

——东汉末至唐中叶的数学

第七章　东汉末至唐中叶数学概论

东汉末年至唐中叶，尤其魏晋，是中国传统数学理论体系形成的时期。

第一节　汉末魏晋开始的社会变革与汉末至唐中叶的数学

一　汉末魏晋的社会变革与传统数学理论的奠基

东汉末年起，中国的经济、政治和社会思潮发生了重大变革。

东汉末年，社会矛盾加剧，东汉政权已经腐朽透顶。光和七年（公元184）爆发了黄巾农民起义。这次起义尽管很快被地主武装镇压下去，却从根本上动摇了东汉政权。此后，东汉名存实亡。在镇压农民起义中壮大起来的若干地方武装集团经过互相攻伐，到建安五年（公元200），曹操统一北方。在赤壁之战（公元208）后，逐渐形成了魏、蜀、吴三个政权，中国进入三国时代。公元220～222年，三国先后称帝，东汉正式灭亡。公元263年，魏灭蜀。公元265年，晋代魏，史称西晋。公元280年，晋灭吴，中国在分裂近一个世纪后复归统一。公元316年，匈奴人建立的割据政权汉灭西晋，晋皇族在建康（今江苏南京）建立政权，史称东晋。这100余年，尽管统一只有30几年，并且还有汉末战乱及三国的征战，西晋的贾后及八王之乱，但在曹操统一北方之后的90余年间，中原地区、长江中下游、巴蜀地区还是相对稳定的，社会经济得到一定程度的恢复发展。尤其是长江中下游经济崛起，开始了超过北方，改变全国经济重心的历程。魏晋时期，大量北方少数民族内迁中原，中原人南迁长江流域，造成了春秋战国之后又一次民族大融合。这提高了中华民族的素质。同时，社会经济、政治、乃至社会思潮发生了极大的变革，促进了数学的发展。

（一）庄园经济与门阀世族制度的初步形成

在汉末战乱和军阀混战中，世家大族或聚族自保，或举宗避难，组织自己的武装，屯坞筑堡，使东汉开始出现的自给自足的庄园经济，得到进一步发展，到魏晋已成为主要的经济形态。这些庄园占有大量依附农民、佃客和部曲。部曲成为一个人数相当广泛的社会阶层，并带有世袭的性质。他们平时为庄园主劳动，战时为庄园主打仗。佃客、部曲与庄园主有极强的依附关系，他们的社会地位有所下降，却使失去土地的农民重新与土地结合起来，缓和了社会危机。这有利于遭到破坏的农业和手工业的恢复，是社会的进步。这种庄园经济不仅生产农、牧、渔业产品，而且经营各种手工业，可能除了晒盐之外，人们日常生活所需的，几乎都可以制造。

与庄园经济相适应的是门阀世族制度的确立。门阀世族发轫于西汉末年，东汉出现了若干世代公卿的家族。曹操主张用人“唯才是举”，对门第观念给以沉重打击。曹丕实行九品

中正制，其本意是不论世族高低，以人才优劣选士，但由于各州郡的中正官大都被著姓世族把持，反而出现了“上品无寒门，下品无势族”的局面。西晋实行“二品系资”制，在才德之外，强调阀阅作为关键性资格，世家大族最终从法律上获得了政治、经济特权。魏、蜀、吴三国都在不同程度上以门阀世族为其统治骨干。门阀世族取代了秦汉的世家地主，占据了政治舞台的中心。

地主庄园经济和门阀世族制度固然会使少数人过着不劳而获的奢靡生活，而且按等级分配权力，世族与庶族的严格界限也不利于社会的进步。但同时也应该看到，这也会使一部分世族及其子弟，或自己，或供养的一些门客，取得比以往的读书人更加有利的条件，专注于脑力劳动，从事科学、文化的创造。魏晋玄学的兴起，辩难之风的开展，乃至数学上理论创造的卓著，不能不说与此有密切关系。

（二）时代精神——魏晋玄学与辩难之风

西汉占据思想界统治地位的是今文经学。西汉末年和新莽时期提倡古文经学。东汉基本上是古文经学与今文经学并行，两者不断争斗。相对说来，古文经学派比较注重自然科学和社会科学的研究。但是，不管是古文学派还是今文学派，注经都越来越繁琐，甚至自相矛盾，谬误百出，使后学无所适从。东汉末年随着外戚和宦官这两种最腐朽势力互相倾轧加剧的政治大动荡，社会大分化中，多数所谓读经的“名士”或依附于外戚，或依附于宦官。也有少数知识分子羞于与外戚、阉寺为伍，以清流自居，抨击戚阉浊流，遭到残酷镇压，出现了两次“党锢”。正是在这种情况下，郑玄（公元127～200）立足于古文经学，兼采今文经学，不尊师说、家传，成为一代经学大师。他所注的诸经，在三国两晋成为官方儒学，在南北朝、隋、唐乃至整个中国历史上影响极大。郑玄还精通数学、天文历法以及其他自然科学。

社会动乱的加剧，中央集权体制的瘫痪，伦理纲常的颓败，满口仁义道德的“名士”的丑行，迫使人们对儒家的说教进行反思。儒学在思想界的统治地位动摇了。人们试图从先秦诸子或两汉异端思想家那里寻求思想武器，作为维护封建秩序、名教纲常的理论根据，并为乱世中的新贵们服务。思想界面临着一次大解放。敢于“问孔”、“刺孟”的王充（公元27～97）的《论衡》被埋没了一百多年，此时由于蔡邕（公元132～192）、王朗（？～288）等学者的推崇流传开来。繁琐的两汉经学退出了历史舞台，而西汉独尊儒术之后受到压制的先秦诸子，甚至被视为异端的墨家，重新活跃起来。思想解放最突出的是玄学与辩难之风的兴起。何晏（？～249）、王弼（公元226～249）等思想家研究《老子》、《庄子》和《周易》，将道家的“道法自然”与儒家的名教融会在一起，主张“名教本于自然”，用道家的“无为”取代儒家的“有为”。他们主要在正始年间（公元240～248）阐发他们的思想，故史称“正始之音”。他们用以谈资的《老子》、《庄子》和《周易》称为“三玄”，后来人们将他们的学问称为“玄学”。玄学家们经常在一起辩论一些命题，互相诘难，称为“辩难之风”。正始之音是魏晋玄学的开篇，它几乎支配了魏晋南北朝思想史的发展流向，玄学已经取代了儒家的正统思想地位，成为社会主要思潮。公元249年，司马懿发动政变，杀死曹魏的代表人物及何晏等正始名士，控制了政权，迫使一些名士走上玄虚淡泊的道路。此后，嵇康（公元223～262）、阮籍（公元210～263）等竹林七贤任性不羁，蔑视礼法，

主张“越名教而任自然”①，宣称“非汤武而薄周孔”②，突破了正始之音力图调和儒道的观点，学术界的思想进一步解放。

玄学是研究自然与人本性的学问，主张顺应自然的本性。这是先秦道家思想的继承和发展，是对两汉主要注重感性经验的思维方式的升华和突破。玄学的主要创始人王弼认为事物的变化不是杂乱无章的，是遵循着必然性、规律性而运动，王弼称之为“理”。他说：“物无妄然，必由其理。”③ 嵇康提出：“夫推类辨物，当先求自然之理。”④ 这里的“理”都是指具体事物所遵循的规律。他们反对谶纬迷信，否定现象背后的神意，在很大程度上摆脱了“天人感应”思想的束缚，力求从自然本身去观察、理解自然界，去分析历代积累的资料和科研成果。玄学思想对以自然界为研究对象的自然科学和技术的发展当然是有利的因素。

（三）“析理”与魏晋数学

玄学名士特别重视“理胜”。因此，探讨“理胜”的途径，探讨思维规律，成为学者们的一项重要任务，这就是“析理”。“析理”最先见之于《庄子·天下篇》：“判天地之美，析万物之理。”⑤ 但在此后很长一段时间内，“析理”并未具有方法论的意义。在魏晋时代，它却成为正始之音和辩难之风的要件。⑥ “析理”是名士们进行辩论的主要方法，甚至成为辩难之风的代名词。一般认为，“析理”是郭象（？～公元312）注《庄子》时概括出来的。实际上，嵇康、刘徽早已使用“析理”。嵇康说：“非夫至精者，不能与之析理。”⑦ 刘徽自述他注《九章算术》的宗旨便是“解体用图，析理以辞”⑧。

玄学名士“析理”时遵循“易简”的规范。“易简”本来是先秦诸子的重要原则。但是两汉的经学家们注经却十分繁琐。经书中一句话，经学家常常用千百言阐述其“微言大义”。东汉末年以后社会动荡，繁琐的经学无法适应瞬息万变的世事发展，必然遭到抛弃。王弼说“约以存博，简以济众”，嵇康说“析理贵约而尽情”，玄学名士们无一不主张易简。

先秦诸子的抽象能力大都是比较强的，两汉学者的抽象思维能力却明显低于先秦。最杰出的学者董仲舒、扬雄、刘歆、王充、张衡等的观念大都是图画式的具体思维。玄学家们辩难的命题大都十分抽象，他们的“贵无”论、“崇有”论，才性同、异、合、离的四本论以及专门的命题，思辨水平相当高。这是中华民族抽象思维的空前发展。⑨

数学由于是最严密、最艰深的学问，经常成为玄学家们析理的论据。王弼《周易略例》说：“夫情伪之动，非数之所求也。故合散屈伸，与体相乖，形燥好静，质柔爱刚，体与情

---

① 魏·嵇康，释私论，见：《嵇康集》第六卷。《全上古三代秦汉三国六朝文·全三国文》（二）卷五〇，嵇康《释私论》之眉批，中华书局，1958年，第1334页

② 魏·嵇康，与山巨源绝交书，《全上古三代秦汉三国六朝文·全三国文》（二）卷四七，中华书局，1958年，第1320页

③ 魏·王弼，周易略例，《四库全书》，商务印书馆，1986年。本编凡引《周易略例》的文字，均据此。

④ 魏·嵇康，声无哀乐论，《全上古三代秦汉三国六朝文·全三国文》（二）卷四九，中华书局，1958年。第1330页，本编凡引的文字，均据此。

⑤ 周·庄周，庄子，见：郭庆藩辑：庄子集释，中华书局，1961年。本编凡引用《庄子》的文字，均据此。

⑥ 侯外庐等，中国思想通史第三卷，人民出版社，1957年，第76页。

⑦ 魏·嵇康，琴赋，《全上古三代秦汉三国六朝文·全三国文》（二）卷四七，中华书局，1958年，第1320页。

⑧ 魏·刘徽，九章算术注，郭书春，汇校《九章算术》增补版，辽宁教育出版社，九章出版社，2004年。本编凡引用《九章算术》及刘徽注原文，如不另加说明，均据此。

⑨ 冯友兰，中国哲学史新编第4册，人民出版社，1986年，第44页。

反，质与愿违，巧历不能定其算数。”嵇康《声无哀乐论》也说：“今未得之于心，而多恃前言以为谈证，自此以往，恐巧历不能纪耳。”巧历是高明的天文学家和数学家。思想界公认，数学家是析理至精之人。嵇康还以数学知识之未尽说明摄生之理亦不能尽：“况天下微事，言所不能及，数所不能分，是以古人存而不论。……今形象著名有数者，犹尚滞之，天地广远，品物多方，智之所知未若所不知者众也。”①

同样，数学的发展也深受魏晋玄学的影响。刘徽析《九章算术》之理，当然与思想界的析理有不同的内容。但是，刘徽对数学概念进行定义，追求概念的明晰；对《九章算术》的命题进行证明或驳正，追求推理的正确、证明的严谨等，即在追求数学的“理胜”上，与思想界的析理是一致的，格调是合拍的。在析理的原则上，刘徽与嵇康、王弼、何晏等都认为“析理”应“要约”，“约而能周”，主张“举一反三”，“触类而长”，反对“多喻”，“远引繁言”。不难看出，刘徽析数学之理，深受辩难之风中“析理”的影响。

事实上，刘徽不仅思想上与嵇康、王弼、何晏等有相通之处，而且许多用语、句法都与这些思想家相近。例如，刘徽的“数同类者无远，数异类者无近。远而通体知，虽异位而相从也；近而殊形知，虽同列而相违也”，显然脱胎于何晏的“同类无远而相应，异类无近而不相违”②，而其旨趣迥异。刘徽的“少者多之始，一者数之母”，是《老子》“无名天地之始，有名万物之母”与王弼《老子注》“一，数之始而物之极也”③的缩合，但其寓意径庭。刘徽的“数而求穷之者，谓以情推，不用筹算”，与嵇康《养生论》的“夫至物微妙，可以理知，难以目识”④，有异曲同工之趣。这类例子还可以举出很多。因此，刘徽在数学中“析理”应是当时辩难之风的一个侧面，他与魏晋玄学的思想家们应该有某种直接或间接的联系。

辩难之风中活跃起来的先秦诸子也成为刘徽数学创造的重要思想资料。在汉武帝之后，儒家在思想界一直居统治地位，魏晋时虽有削弱，但仍不失为重要的思想流派。刘徽自然受到儒家的影响。他直接引用孔子的话很多。例如，反映他的治学方法的“告往知来”，源于《论语·学而》，“举一反三”源于《论语·述而》；他阐述出入相补原理的“各从其类”，源于孔子为《周易》乾卦写的“文言”。至于他受到被儒家视为经典的《周易》、《周礼》的影响更明显：“算在六艺”，“周公制礼而有九数”，都是《周礼》的记载。⑤ 刘徽序中还引用了《周礼》用表影测太阳的记载及其郑玄注；刘徽关于八卦的作用及两仪四象的论述，反映他的分类思想的“方以类聚，物以群分”，治学方法的“引而申之”，“触类而长之”，治学中要“易简”的思想，反映他对“言”与“意”关系的“言不尽意”，等等，都来自于《周易·系辞》。

道家在汉初地位较高，汉武帝独尊儒术之后，道家部分思想融于儒家，成为中国封建社会统治思想的一部分。同时，道家作为一个学派仍然存在。辩难之风的三玄中，专门的道家著作居其二，即《老子》、《庄子》。《周易》实际上是各家都尊崇的经典。《九章算术》方

① 魏·嵇康，难张辽叔《宅无吉凶摄生论》，《全上古三代秦汉三国六朝文·全三国文》（二）卷五〇，中华书局，1958 年，第 1338 页。

② 魏·何晏，无名论，晋·张湛，《列子注·仲尼篇》引，见：《列子集释》，中华书局，1979 年，第 121 页。

③ 魏·王弼，《老子注·三十九章》，见：《二十二子》，上海古籍出版社，1986 年，第 5 页。

④ 魏·嵇康，养生论，见：《全上古三代秦汉三国六朝文·全三国文》卷四十八，中华书局，1958 年，第 1324 页。

⑤ 周·周礼，见：十三经注疏，中华书局，1980 年。本编凡引《周礼》的文字，均据此。

程章建立方程的损益术与《老子》的有关论述相近。刘徽说明数学家应该像庖丁了解牛的身体结构那样了解数学原理，应该像庖丁使用刀刃那样灵活运用数学方法。庖丁解牛的故事便出自《庄子·养生主》。刘徽在使用无穷小分割方法证明刘徽原理时提出的“至细曰微，微则无形”的思想，源于《庄子·秋水》中“至精无形”，“无形者，数之所不能分也”。

不过，在先秦诸子中，刘徽最推崇的应该是墨家。一个明显的事实是，刘徽序及注中引用过《周易》、《周礼》、《管子》、《论语》、《庄子》、《墨子》、《考工记》、《左传》、《荀子》等先秦典籍中的文字，但是，明确提出书名的只有《周礼·大司徒》、《周礼·考工记》、《左氏传》及《墨子》。事实上，刘徽割圆术中的“割之又割，以至于不可割”的思想与《墨经》中“不可斮”的端的命题是一脉相承的，而与名家“万世不竭”的思想明显不同。

这些都说明，当时思想界的析理与数学是相辅相成，相得益彰的。

（四）中国传统数学理论的奠基

玄学与辩难之风成为魏晋时代精神，风流所及，直接影响到数学的发展。刘徽的《九章算术注》，便是魏晋玄学与辩难之风影响下的产物。在这之前，东汉末徐岳致力于记数法和计算工具的改革，赵爽以简洁的文字证明了当时的勾股知识。魏晋尽管时间跨度不长，在中国数学史上的地位却极其重要，不仅大大超过秦汉数学，而且再次登上了世界数学发展的高峰，特别是理论高峰。数学家们的业绩主要在数学方法、数学证明和数学理论方面。主要是：

刘徽大大发展了《九章算术》的率概念和齐同原理，将其应用从《九章算术》的少量术文和题目拓展到大部分术文和200多个题目。他指出今有术是“都术”，率和齐同原理是“算之纲纪”，借助率将中国古代数学的算法提高到理论的高度。

赵爽和刘徽继承发展了传统的出入相补原理。刘徽对有限次的出入相补无法解决圆和四面体的求积问题有明确的认识。

在世界数学史上第一次将极限思想和无穷小分割方法引入数学证明，是这一时期数学上最杰出的贡献。刘徽用极限思想和无穷小分割方法严格证明了《九章算术》提出的圆面积公式和他自己提出的刘徽原理，将多面体的体积理论建立在无穷小分割的基础之上。刘徽极限思想的深度超过古希腊的同类思想。刘徽明确认识了截面积原理，是为中国人完全认识祖暅之原理的关键一步。据此，他设计了牟合方盖，为后来的祖暅之开辟了解决球体积问题的正确途径。

刘徽将极限思想应用于近似计算，在中国首创求圆周率的科学方法以及开方不尽求其“微数”的思想，奠定了中国的圆周率近似值的计算领先世界千余年的基础。

刘徽修正了《九章算术》的若干错误和不精确之处，提出了许多新的公式和解法，大大改善并丰富了《九章算术》的内容。

刘徽给若干重要的数学概念做出了明确的定义，改变了《九章算术》约定俗成的做法。他的定义基本上符合现代数学和逻辑学关于定义的要求，并在使用中保持了同一性。

刘徽全面论证了《九章算术》的算法。他的论证继续使用在他以前广泛使用的归纳推理和类比，但更主要地则是使用演绎逻辑，包括三段论、关系推理、联言推理、假言推理、二难推理，甚至数学归纳法的雏形。可以说，刘徽达到了中国古代逻辑学的最高峰。因此，

他的论证常常是真正的数学证明，为世界数学的算法证明做出了伟大的贡献。

刘徽分析了各种数学概念、数学方法和命题之间的关系，梳理了各个分支乃至整个数学的逻辑系统。他认为，数学像一株枝繁叶茂、条缕分析而具有同一木干的大树，发其一端。刘徽说：

> 虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于以法相传，亦犹规矩、度量可得而共，非特难为也。

刘徽《九章算术注》标志着中国传统数学理论体系的完成。

二　南北朝的社会与数学

公元420年，刘裕篡夺了东晋政权，建宋；公元479年，萧道成代宋，建齐；公元502年，萧衍代齐，建梁；公元557年，陈霸先代梁，建陈。在东晋偏安江南的百年间，位于中国北部、西部的匈奴、羯、鲜卑、氐、羌等五个少数民族分别入主中原，互相割据，建立了十六个政权，史称十六国。在各民族政权的混战中，鲜卑族的拓跋部于公元386年建立的魏国强大起来，史称北魏，经过四五十年的兼并战争，于公元439年统一了北方。公元534～535年，北魏分裂成了东魏与西魏。公元550年，齐代东魏，史称北齐；7年后，周代西魏，史称北周。公元577年，北周灭北齐，又统一了中国北方。公元581年，杨坚代北周，建立隋朝。公元589年，隋灭陈，分裂二百七十余年的中国复归统一。公元420～589年，中国南北方基本上处于南北两个政权对峙状态中，史称南北朝。

南北朝时期，庄园农奴制经济发展到成熟的阶段，门阀世族继续占据着政治舞台的中心。各个政权的首领，或起于寒门，或是少数民族贵族，无一不是依靠门阀世族维持其统治的。这一段尽管战乱频仍，但各个政权内部都有或长或短的相对安定时期。南朝政权更迭数次，但都是以强大的军事力量为后盾，用和平方式进行的，没有引起大的社会动乱；北朝的北魏百余年间也相当安定。许多政权统治者以统一中国为己任，开明的少数民族贵族积极主张汉化，氐族建立的前秦符坚，羌族建立的后秦（首都皆在长安）姚兴，卢水胡族建立的北凉的沮渠蒙逊（首都在张掖），都设立学校，提倡儒学，为科学文化的发展提供了一定的条件。魏孝文帝将北魏首都从平城（今山西大同）迁到洛阳，他以及后来的周武帝，都推行文治，采取了若干有利于促进民族融合，推动经济、科学和文化发展的改革措施。

魏晋玄学到南朝后流入清淡。东汉传入而很长一段时间内被认为是一种方术的佛教在南北朝更加流行，一些读书人试图用儒、道的理论解释佛经，逐步使佛教中国化。许多统治者佞佛，南北各地大量修建寺院，劳民伤财，严重破坏了生产力。梁武帝甚至几次出家为僧。佛教宣扬因果报应，鬼神迷信。许多思想家、科学家进行了反佛、提倡科学精神的斗争。晋、宋间思想家、天文学家何承天（公元370～447）著《达性论》、《报应论》，认为“生必有死，形毙神散”①，不可能转生来世，批评佛教的因果报应说。科学家祖冲之（公元429～500）为捍卫自己的先进历法，撰《大明历议》，不畏权贵，坚持科学真理。思想家范缜（公元450～515）撰《神灭论》，提出“形者神之质，神者形之用。是则形称其质，神言其用。形之与神，不得相异也”。他认为：“知即是虑，浅则为知，深则为虑。”“是非之

---

① 宋·何承天，达性论，见：《全上古三代秦汉三国六朝文·全宋文》卷二十四，中华书局，1958年，第2569页。

虑，心器所主。"① 从而反驳了佛教"虑体无本"，认识产生于宿慧的谬论，并在实际上把人的认识分成感性（知）和理性（虑）两个阶段。这些认识是以数学与其他科学的发展为基础的，同时，也进一步发扬了研究自然科学的精神。

南北朝时期，传统数学在魏晋数学基础上继续发展。颜之推（公元531～约591）说："算术亦是六艺要事。自古儒士论天道、定律历者，皆学通之。然可以兼明，不可以专业。江南此学殊少，唯范阳祖暅精之，位至南康太守。河北多晓此术。"② 这段话既反映了封建社会士大夫阶层对数学的基本态度，也大体概括了南朝与北朝的数学状况。南方通晓数学的有何承天、祖冲之父子。祖冲之父子在圆周率近似值的计算、解决球体积问题等方面取得的成就，至今是中国人民的骄傲。然而，他们的著作对士大夫而言，犹如天书，只能知其名而不能究其事。

与此相对照的是，北方出现了一批普及性的数学著作，如《孙子算经》、《夏侯阳算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》以及注释儒家经典的数学内容的《五经算术》等，并在社会上广泛流传。《孙子算经》、《夏侯阳算经》等记载的算筹记数制度，是其他现存古籍中所没有的。《孙子算经》中的一次同余方程组解法，《张丘建算经》中的百鸡术等不定问题，开辟了新的数学分支，在中国乃至世界数学史上占有重要地位，也都是《九章算术》及其刘徽注所未讨论过的。《孙子算经》、《张丘建算经细草》在改进开方术，《张丘建算经》在解决等差数列方面，等等，都作了可贵的努力。但是，《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》等的编纂并没有继承《九章算术》的主体部分以术文统率例题的模式，而是采用了应用问题集的形式，就其抽象程度与理论水平而言，是不如《九章算术》的，更无法望刘徽注之项背。而《孙子算经》将学习数学的预备知识置于卷首，开宋、元、明此类体例之数学著作之先河。南北朝是中国数学发展史上的一个重要时期。

三　隋至唐中叶的社会与数学

隋朝采取了某些与民生息的政策，社会经济得到恢复发展，还展开了挖掘南北大运河等土木工程。然而，由于隋炀帝骄奢淫逸、穷兵黩武、政治腐败，隋朝仅历38年便被农民起义推翻。公元618年唐朝建立，它与隋朝一样是在黄河、长江两大流域经济、文化相结合基础上的多民族的统一大国。唐初继承隋初的与民生息的政策，并以隋为戒，出现了贞观之治、开元之治，农业、手工业、商业、文化和中外交通等事业都得到空前发展，号称盛世。隋唐还建立、完善了科举制度，打破了沿袭一千多年的靠家族的社会地位出将入相的陋习，为一些出身卑贱的读书人提供了入仕的机会，扩大了统治阶级的社会基础，在中国历史上意义重大。

适应土木工程发展的需要，隋唐出现了《缉古算经》等数学著作。隋唐国子监设置算学馆，在科举考试中设明算科，将数学正式列入官方教育和选拔官僚的机制，是个创举。李淳风等奉诏整理、注释十部算经，使中国传统数学奠基时期的著作有了定本，影响深远。

此外，在历法制定中，创造了某些新的数学方法，主要是隋刘焯（公元544～610）创

---

① 梁·范缜，神灭论，见：《全上古三代秦汉三国六朝文·全梁文》卷四十五，中华书局，1958年，第3209页。
② 南北朝·颜之推，颜氏家训·杂艺，见：《百子全书》第六册，浙江人民出版社，1984年。

造等间距二次内插公式，唐僧一行（公元683～727）创造不等间距二次内插公式。

然而，总的说来，隋唐的数学水平不高，甚至低于以前的魏晋南北朝时期。这一时期没有出现过一位可以与其前刘徽、祖冲之，其后贾宪、秦九韶、李冶、朱世杰等比肩的数学家，也没有创作过一部可以与其前《九章算术》及其刘徽注、《缀术》，其后《黄帝九章算经经细草》、《数书九章》、《测圆海镜》、《四元玉鉴》等等量齐观的数学著作。除了历法制定中的数学方法有所创造外，数学上几无创新。王孝通对祖冲之的指责，说明他不能理解祖冲之父子的数学成果。李淳风等整理十部算经，除《周髀算经注释》比赵爽注有所推进外，对其他算经的注释，意义都不大。尤其是对《九章算术》的注释，从整体上讲，无论是数学成就还是理论水平，都远远低于刘徽注。[①] 李淳风等多次指责刘徽，事实证明，错误的不是刘徽，而是李淳风等人。王孝通、李淳风是唐朝最有名的两位数学家。他们尚且如此，遑论其他。事实上，李淳风已经发现隋和唐初的数学不如前代，《隋书·律历志》直言当时的算学馆学官对《缀术》"莫能究其深奥，是故废而不理"[②]。应该说，隋唐是中国数学史上的第二个低潮。乾嘉时期人们被贞观之治和隋唐设算学馆的假象所迷惑，也因为对中国数学史尚缺乏系统研究，认为中国数学"显于唐，晦于宋"[③]，显然是不符合事实的。

第二节　徐岳《数术记遗》和赵爽《周髀算经注》

一　刘洪、徐岳与《数术记遗》

《数术记遗》一卷，南宋本题"汉徐岳撰，北周汉中郡守、前司隶、臣甄鸾注"。

（一）刘洪和徐岳

1. 刘洪

刘洪，字元卓，泰山蒙阴（今山东省）人，约永建四年（公元129）生，约建安十五年（公元210年）卒。[④] 东汉末年天文学家、数学家。《宋书·律历志下》云，延熹年间（公元158～166），刘洪以校尉应太史征，拜郎中。与蔡邕等人一道经过十余年的工作，于熹平三年（公元174）"晷仪众数"[⑤]，完成二十四节气时"日所在"、"黄道去极"、"晷景"、"昼夜漏刻"及"昏旦中星"等五种天文数据的测定。这些天文量及其计算方法遂成为中国传统历法的重要内容。约在该年，迁常山国（今河北省元氏县）长史。同年撰《七曜术》，后又修订为《八元术》，均失传，应是研究日、月、五星运动的专著。四年，以父忧去官，守孝三载。约在此时，完成关于《九章算术》的注释。后为主管财政事务的上计

---

① 参考郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，山东科学技术出版社，1992年。繁体字修订本，明文书局，1995年。本编凡引用此书的论述，不再出注。

② 唐·魏徵等，隋书，中华书局，1973年。本编凡引《隋书》的文字，均据此。

③ 清·戴震，九章算术提要，见：郭书春汇校，汇校《九章算术》增补版。

④ 参见陈美东，刘洪，见：金秋鹏主编，中国科学技术史·人物卷，科学出版社，1998年。又，陈美东，刘洪，见：杜石然主编，中国古代科学家传记，上册，科学出版社，1992年。本编关于刘洪和《乾象历》的论述主要依据此二文。

⑤ 梁·沈约，宋书，中华书局，1974年。本编凡引用《宋书》文字，均据此。

椽。光和元年（公元178），复为郎中，在东观与蔡邕一同补续《律历志》，蔡邕在推荐他时说“郎中刘洪密于用算”①。人称“邕能著文，清浊钟律，洪能为算”②，二人优势互补，出色完成了任务。同年，刘洪提出改革当时行用的四分历的设想。二年，刘洪任谒者。不久，任谷城门（洛阳十二城门之一）侯。约中平元年（公元184）出任会稽郡东部都尉（太守的副手）。任内初步完成了《乾象历》。六年奉诏返洛阳。适朝廷变乱，改任山阳郡（治今山东省金乡县）太守。后还任曲城（今山东省莱州市）侯。这期间，刘洪继续天文历法研究，于建安十一年（公元206）最后审定了《乾象历》。然而，《乾象历》在刘洪生前未能颁行。徐岳、郑玄都是他的弟子。

2. 徐岳

徐岳，字公河，生卒不详，东汉末东莱（今山东省莱州、龙口一带）人。东汉末年数学家、天文学家，撰《数术记遗》一卷。自云其内容传自刘洪。

徐岳还从刘洪学习《乾象历》，为普及《乾象历》做出了贡献。东吴重臣、数学家、天文学家阚泽是他的学生。阚泽精通《乾象历》和《九章算术》

王朗云：“余所与游处，唯东莱徐先生素习《九章》，能为计数。”③《隋书·经籍志》记载徐岳有两部关于《九章算术》的著作：《九章算术》二卷，徐岳撰，甄鸾重述；《九章算经》二十九卷，徐岳、甄鸾等撰。这是两部不同的著作还是同一部著作的不同抄本，因它们都已亡佚，无可详考。

《宋史·艺文志》还记载徐岳有《大衍算术法》一卷。④

3. 乾象历

刘洪制定的《乾象历》使中国传统历法的基本内容和模式更加完备。他所创造的一系列方法成为后世历法的经典方法，《乾象历》的完成标志着中国古代历法体系的最终形成。

《乾象历》最突出的贡献是关于月亮运动和交食的研究。刘洪指出，四分历等以前的历法使用的朔望月和回归年长度都偏大，《乾象历》取一朔望月的长度为$29\frac{773}{1457}$日，误差从东汉四分历的20余秒降低到4秒左右；取一回归年长度为$365\frac{145}{589}$日，误差从四分历的660余秒降低到330秒左右。这两个数据不仅更加精确，而且是长达600余年停滞不前后的首次突破，为后世的研究开辟了道路。《乾象历》总结了月亮运动的迟疾，给出了定量描述方法。经测算，刘洪得知，月亮每经过一个近点月（月亮连续两次经过近地点的时间间隔），近地点总向前推进$1825\frac{7}{47}$分，约为3.1度。《乾象历》进而得出一近点月的长度为$27\frac{3303}{5969}$日，误差仅有104秒。这些结果比以往准确得多。刘洪还确立了中国古代计算月亮运动不均匀性改正值的传统方法，通过长期观测给出了中国古代第一份月离表。欲求任意时刻月亮相当于平均运动的改正值，可用一次内插法得到。这种方法也是后世历法中定朔计算的一个关

① 梁·刘昭，后汉书·律历志下注，见：《后汉书》，中华书局，1965年。

② 晋·司马彪，后汉书·律历志，见：《后汉书》，中华书局，1965年。本编凡引用《后汉书·律历志》的文字，均据此。

③ 东汉·王朗，塞势。见：《全上古三代秦汉三国六朝文·全宋文》，卷二十四，中华书局，1958年，第2569页。

④ 元·脱脱等，宋史，中华书局，1977年。本编凡引《宋史》的文字，均据此。

键问题。《乾象历》的每日月亮实行度的误差为11.7分，月亮过近地点时刻的误差为0.8日，就精确度而言，中国古代只有元代的《授时历》稍高于它。

刘洪确立了黄白交点退行的概念，给出黄白交点每1日退行$\frac{1488}{47}$分，称为“退分”。若已知一回归年的长度A、食年长度B以及1度 = 589分，则退分 = $\frac{A-B}{B}\times 589$。刘洪还确立了月亮运行轨道——白道的概念，提出黄白交角为6度1分。刘洪还给出了月亮从黄白交点出发每经1日距黄道南或北的极黄纬度值（称为“兼数”）表格。欲求任一时刻的月亮极黄纬M，可由该表格通过一次内插法得出。刘洪和蔡邕已计算出任一时刻太阳距天球赤极的度距N，刘洪给出了计算月亮距赤极的度距P的方法：$P = N \pm M$。刘洪关于白道的概念、黄白交角值的测定、月亮极黄纬数值表以及月亮极黄纬、月亮距赤极的度距的计算方法，对后世历法影响深远。

刘洪积极参加或主持当时关于交食周期的讨论，在《乾象历》中，提出11045个朔望月正好同941个食年相当的交食周期值，得出1食年为346.6151日，误差仅为370余秒，其精确度大大超过前人。他还提出，交点月个数 = 朔望月个数 + 食年个数。刘洪还指出，在朔（或望）时，只有当太阳与黄白交点的度距小于14度33分时才可能发生交食现象。

4. *以刘洪为首的历算研究流派*

刘洪在《乾象历》中的杰出贡献，是以他深邃的数学造诣，特别是对《九章算术》的深入研究为基础的。他多次用到的一次内插法，实际上就是《九章算术》的盈不足术。徐干论历数说：“营仪以准之，立表以测之，下漏以考之，布算以追之。然后元首齐乎上，中朔正乎下，寒暑顺序，四时不忒。”① 《后汉书 · 律历志下》梁刘昭注引蔡邕云：“治律历，以筹算为本，天文为验。”徐干和蔡邕都是通历算的经学家，刘洪的同代人，他们的话形象地概括了天文历法的发展与数学的关系。刘洪终生研究天文历法和数学，同时教书授徒。著名学者郑玄、徐岳、杨伟、韩翊等都是他的学生。刘洪及其弟子甚或再传弟子的科学工作有两个显著特点：一是精通《九章算术》，刘洪本人及其弟子徐岳、再传弟子阚泽都有关于《九章算术》的著作。这些著作必定成为刘徽注《九章算术》时“采其所见”的素材。二是研制、精通《乾象历》，并为普及发展《乾象历》而努力。据《晋书 · 律历志》记载，三国魏黄初（公元220～226）年间，刘洪的学生徐岳与韩翊展开关于《乾象历》和《黄初历》优劣的辩论，徐岳指出：“熹平（公元172～178）之际，时洪为郎，欲改‘四分’，先上验日食……事御之后如洪言，海内识真，莫不闻见。”② 捍卫了《乾象历》。刘洪逝世二十多年后，在徐岳的学生阚泽的力争下，《乾象历》于吴嘉禾元年（公元232）在东吴施行，一直到吴灭亡（公元280）。因此，可以说，在2世纪下半叶至3世纪上半叶，形成了一个以刘洪为首的以研究《九章算术》和《乾象历》为主的天算学流派。

（二）《数术记遗》

1. *《数术记遗》非伪书辨*

清戴震以《数术记遗》书中自称“于太山见刘会稽”，又考得刘洪“官会稽后未尝家

① 汉 · 徐干，中论 · 历数第十三，见：《百子全书》，第二册，浙江人民出版社，1984年。
② 唐 · 房玄龄等，晋书，中华书局，1974年。本编凡引《晋书》的文字，均据此。

居，不得言于太山见之。且洪在会稽乃官都尉，其为太守实在丹阳，而以为官会稽，错误殊甚"，否定徐岳为《数术记遗》的作者，定为唐人的伪托之作。[①] 清周中孚进而举出《数术记遗》中有"未识刹那之赊促，安知麻姑之桑田"等佛典语句，而麻姑的故事出自晋代葛洪的《神仙传》，不可能为徐岳所知，支持戴震的论点。[②] 钱宝琮认为："震辨此书非徐岳所撰，考据甚确。"[③] 不过，他将《数术记遗》定为"北周甄鸾依托伪造的书"。[④] 自20世纪30年代以后约半个世纪中，学术界基本上遵从钱宝琮的观点。[⑤] 李培业又就大数进法提出《数术记遗》是伪书的新的论据："汉代注经，只有十进、万进二法，至南北朝受佛典影响，始出现万万进、倍进，所以徐岳尚不可能提出三等数之说。"[⑥]

自20世纪80年代起，周全中[⑦]、姜可毕[⑧]、冯立昇[⑨]等学者认为断定《数术记遗》是伪书的理由不充分。我们将其主要论据归纳补充如下：

首先，《数术记遗》中出现"大千"、"刹那"等几个佛经词汇与史实并不相悖。佛教在西汉已经传入中国。从汉明帝到汉献帝154年间，翻译佛经292部，东汉翻译的《四十二章经》中就有"大千世界如一沙子"之语。"刹那"当时译为"须臾"，以后所附注疏中就有"刹那"的译名。刘洪活动的地区佛教活跃，刘洪也有《七曜术》等著作，他与佛教方面有交往，是无可怀疑的。因此，上述佛教用语出现在东汉末年刘洪的学生徐岳的书中，当不在意外。

其次，麻姑的故事在现存文献中虽见于葛洪的《神仙传》，但这是汉桓帝（公元147～167年在位）时的神话。东汉以来，神仙之说盛行。鲁迅《古小说钩沉》辑《列异传》50则，其中有麻姑的故事。《列异传》在南朝刘宋裴松之的《三国志注》和北魏郦道元的《水经注》中都有征引。《隋书·经籍志》作魏文帝曹丕撰，《旧唐书·经籍志》作晋张华撰，二人大约与徐岳的活动时间相合或接近。麻姑的故事在刘洪、徐岳时代已流传，是毫不奇怪的。

再次，现传《后汉书·律历志》刘昭注所引袁山松《后汉书》的文字确实没有刘洪任会稽太守的记载。但北周甄鸾《数术记遗注》云："《历志》称：灵帝光和中，谷城中门侯太山刘洪造《乾象历》。又制月行迟疾阴阳历，自洪始也。方于《太初》、《四分》，转精密矣。洪后为会稽太守。"[⑩] 自三国到刘宋，不同的作者所撰各种《后汉书》、《续汉书》甚多。目前，除刘宋范晔《后汉书》及梁刘昭为之作注时补入的晋司马彪《续汉书·律历志》等八志外，其他基本散佚。然而，这些《后汉书》、《续汉书》，甄鸾、刘昭都是能

---

① 清·戴震，数术记遗提要，《四库全书》，第797册，商务印书馆，1986年，第161页。

② 清·周中孚，郑堂读书记，第四十五卷，第850页。

③ 钱宝琮，戴震算学天文著作考，浙江大学科学报告，1934，(1)。见：李俨钱宝琮科学史全集，第九卷，辽宁教育出版社，1998年，第100页。

④ 钱宝琮，数术记遗提要，见：钱宝琮校点，《算经十书》下册，第531页。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第四卷，辽宁教育出版社，1998年，第403页。

⑤ 华印椿，中国珠算史稿，中国财政经济出版社，1987年，第22，23页。

⑥ 李培业，唐代创始算盘论，珠算研究，1982，(3)。

⑦ 周全中，《数术记遗》成书年代问题，珠算研究，1983，(3)：第5～6页。

⑧ 姜可毕，《数术记遗》初考，珠算研究，1983，(4)：7～11。

⑨ 冯立昇，《数术记遗》及甄鸾注研究，内蒙古师范大学学报（自然科学版），1989，(1)：58～65。

⑩ 北周·甄鸾，《数术记遗注》，郭书春点校，见：郭书春、刘钝点校，《算经十书》，辽宁教育出版社，1998年。繁体字修订本，九章出版社，2001年。本编凡引用《数术记遗》及其甄鸾注原文，如不另加说明，均据九章版。

够见得到的。甄鸾关于刘洪生平的记载除会稽太守外，其他事迹都与别的史籍的记载相符合，因此，甄鸾说刘洪为会稽太守，必有所本。实在说来，对刘洪，甄鸾没有必要伪造会稽太守之事。

最后，《数术记遗》的内容与徐岳所处时代也相吻合。当时人们把佛教看成一种方术，与汉末盛行的道家有相通之处。《数术记遗》受道家思想影响较大，但也掺入某些佛教词语。其语言风格也与汉末魏初的文风颇相一致。正如明人毕拱辰所说："《数术记遗》'皆握算成法，备记与刘会稽问答微旨，即未满百言，而削质奥，思维淹通，依然东京风骨。'"①

至于说根据汉代只有十进、万进，而南北朝才有万万进定《数术记遗》为伪书，这是先肯定《数术记遗》非汉末徐岳所作，而是北周甄鸾伪托，由此将万万进排除在汉进位制之外。那么《数术记遗》有万万进，便就不会是汉末的著作。这种推理方式之悖谬是不言自明的。

总之，我们认为，《数术记遗》不是伪书，乃是东汉末徐岳撰，北周甄鸾注。

2.《数术记遗》的内容

徐岳所撰《数术记遗》仅600余字，非常简括。开头便说作者在泰山问数于刘洪，刘洪向徐岳转述了他在天目山向天目先生学到的数学知识。其内容主要有三项：

第一项是阐发了数量的有限与无限的关系。他从空间上的"川人迷其指归"与司方辨别东西南北的关系，时间上的"刹那之赊促"与"麻姑之桑田"的关系，引申到数量上的"积微之为量"以及"百亿"与"大千"的辩证关系。天目先生在回答刘洪"上数者数穷则变。既云终于大衍，大衍有限，此何得无穷"的问题时说："数之为用，言重则变，以小兼大，又加循环。循环之理，岂有穷乎？"重，大也。数量从微少，逐渐积累，不断变大，通过进位法和大数记法，再通过循环，可以达到无穷。

第二项是大数进法。

第三项是十四种算法。后者是此前人们改革计算工具的尝试的总结，然而太简括，没有甄鸾注是很难理解的。这两项内容后面再谈。

3.《数术记遗》的版本

《数术记遗》有北周甄鸾的注，两者一直一体行世。它在隋唐算学馆中作为"兼习"教材，并作为明算科考试中的"帖读"科目。② 当然，当时只以抄本流传。

北宋元丰七年（1084）秘书省刊刻《周髀算经》、《九章算术》等汉唐算经，南宋王应麟《玉海》、陈振孙《直斋书录解题》、元马端临《文献通考》等没有元丰间刊刻《数术记遗》的记载。明程大位《算法统宗 · 算经源流》所载刊于元丰七年，又刻于汀州学校的"十书"中有《算术拾遗》。无论如何，现存最早的版本是嘉定五年（1212）鲍澣之从杭州七宝山（今紫阳山的一部分）三茅宁寿观所藏道书中发现而刊刻的。今藏于北京大学图书馆。文物出版社1980年影印收入《宋刻算经六种》。明数学衰微，《九章算术》等算经几乎失传，而《数术记遗》与《周髀算经》还有几个刻本，即赵开美校订的由胡震亨刊刻的《秘册汇函丛书》本和毛晋刻的《津逮秘书》本。赵开美校订了几个错字，但又产生了更多的错字。

---

① 明 · 毕拱辰，徐岳考，《掖县全志》，光绪十九年（1893）刻本。

② 唐 · 元宗御，《唐六典》，卷二十一，卷四，广雅书局本，1895。

清乾隆三十八年（1773）修《四库全书》，戴震以明刻本《数术记遗》为底本，略加校订，收入子部天文算法类。孔继涵在1777年或其后刊刻戴震校订的微波榭本《算经十书》，以《数术记遗》作为附录，其底本仍是明刻本，未见以汲古阁本参校的痕迹。此后，清代的《学津讨原》本、《槐庐丛书》本、《古今算学丛书》本和民国的《万有文库》本都是明刻本或微波榭本的翻刻本或排印本。

1963年中华书局出版了钱宝琮校点的《算经十书》，附录《数术记遗》。钱校本以微波榭本为底本，以汲古阁本参校，提出了若干中肯的校勘意见。

1998年，2001年，辽宁教育出版社和台湾九章出版社先后出版了郭书春、刘钝点校的《算经十书》，亦附录《数术记遗》，是郭书春以南宋本为底本的点校本。

2007年，中国财政经济出版社出版了李培业的《数术记遗释译与研究》。

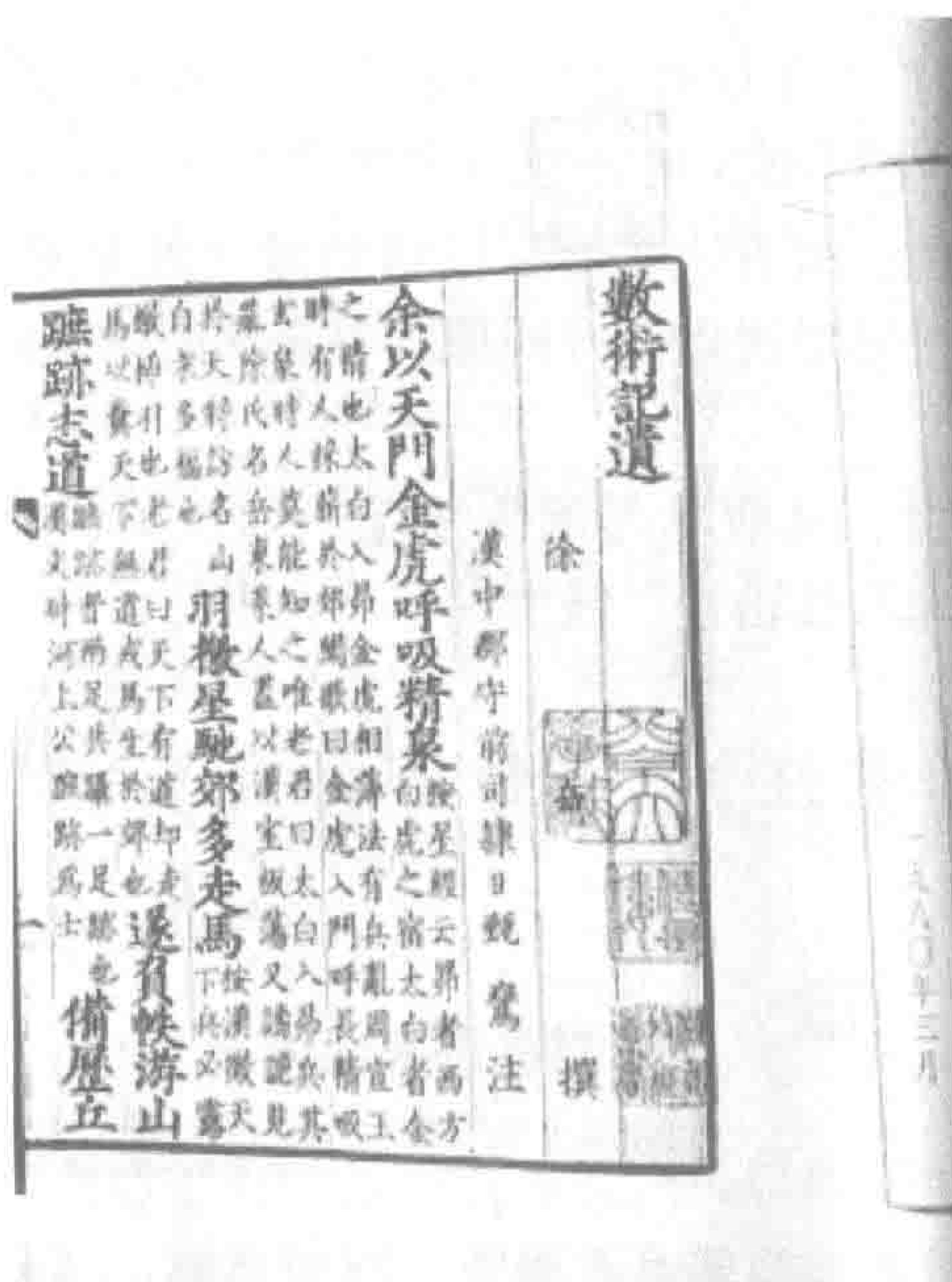

數術記遺
徐　　撰
漢中郡守前司隸甄鸞注
余以天門金虎呼吸精泉
羽檄星馳郯多走馬
遂負帙游山
躡跡志道
備歷丘

图7-2-1　《数术记遗》书影（南宋本）


周髀筭經序
趙君卿撰
夫高而大者莫大於天厚而廣者莫廣於地體
恢洪而廓落形脩廣而幽清可以玄象課其進
退然而宏遠不可指掌也可以晷儀驗其長短
然其巨闊不可度量也雖窮神知化不能極其
妙探賾索隱不能盡其微是以詭異之說出則
兩端之理生遂有渾天蓋天兼而並之故能彌
綸天地之道有以見天地之賾則渾天有靈憲

图7-2-2　《周髀算经注》书影（南宋本）

二　赵爽与《周髀算经注》

赵爽《周髀算经注》是中国现存最早的算经注，见图7-2-2。南宋本、明刻本《周髀算经》皆题云"赵君卿注"，而《周髀算经注》中屡次自称"爽"①，然《隋书·经籍志》、《旧唐书·经籍志》②、《新唐书·艺文志》③均云"赵婴注"《周髀算经》。一般认为，其作者姓赵，名爽，字君卿，号婴；一说婴系爽之讹。赵爽，生平、籍贯均不详。《周髀算经

① 吴？·赵爽，周髀算经注，刘钝、郭书春校点，《周髀算经》，郭书春、刘钝校点，《算经十书》，辽宁教育出版社，1998年。繁体字修订本，九章出版社，2001年。以下凡引《周髀算经》及赵爽注原文，均据九章版。

② 后晋·刘昫，旧唐书，中华书局，1975年。本编凡引《旧唐书》的文字，均据此。

③ 北宋·欧阳修，新唐书，中华书局，1975年。本编凡引《新唐书》的文字，均据此。

注》的成书年代亦不可详考。自南宋至今，有汉、魏晋间及三国吴等各种说法，而以后者比较流行。持三国吴之说者，是因为注中两次引用《乾象历》，而《乾象历》只在吴国颁行过。汉末、三国间不仅吴国的阚泽、王蕃，而且北方的郑玄、徐岳、杨伟等也都通《乾象历》。显然，引用《乾象历》并不是《周髀算经注》成书于吴颁行《乾象历》之后的必要条件。因此，《周髀算经注》的成书年代并没解决。不过，它成书于刘徽撰《九章算术注》的公元263年前是没有问题的。

赵爽注对《周髀算经》原文逐句逐段进行了忠实的解释，并引用了《灵宪》、《周易》、《周礼》、《吕氏春秋》、《淮南子》、《左氏传》等典籍以及若干纬书来阐释《周髀》的内容，将古《四分历》与《乾象历》进行比较研究，将《周髀》的数学内容与《九章算术》做比较研究，对后世大有裨益。

赵爽注指出了若干内容“非周髀本文”，对了解《周髀算经》的编纂过程是有力的提示。它的“勾股圆方图”注用500余字系统总结了《九章算术》以来的勾股算术知识及其用出入相补原理进行证明的成就；其“日高图”注用出入相补证明了重差公式，并提到重表、累矩等测望方法；赵爽注还多次提到齐同原理；所有这些都可以与刘徽《九章算术注》互相印证，说明出入相补原理、重差术中的重表、累矩法以及齐同原理等是当时学者们的共同知识。

《周髀算经注》与《周髀算经》正文一体行世，其版本与流传情况一如《周髀算经》，不再赘述。对它研究贡献最大的当推戴震、顾观光、孙诒让、钱宝琮。

第三节　刘徽与《九章算术注》、《海岛算经》

一　刘　徽

刘徽，史书无传，生平不详。他自述：

> 徽幼习《九章》，长再详览，观阴阳之割裂，总算术之根源。探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。

《隋书 · 律历志》说：“魏陈留王景元四年刘徽注《九章》。”《晋书 · 律历志》有同样的记载。关于刘徽的生平，可靠的记载仅此而已。

刘徽《九章算术注》原10卷，后来刘徽自撰自注的第10卷《重差》单行，改称《海岛算经》。刘徽还著《九章重差图》1卷，已佚。

（一）刘徽籍贯考

我们根据现有资料推定，刘徽的籍贯是淄乡，属今山东省邹平县。

严敦杰（1917～1988）最先注意到《宋史 · 礼志》算学祀典中，刘徽被封为淄乡男。[①]同时受封66人，黄帝至殷、西周期间10人，多系传说人物或记载不详。春秋之后56人，其爵名来源有四种：①以其籍贯，有祖冲之等41人，占七成以上；②少数以其郡望；③少

① 严敦杰，刘徽简传，科学史集刊，第11集，地质出版社，1984年。本编凡引此文，均据此。

数以其主要活动地区之名；④个别的以其生前的爵名升级。后三种情况共9人。刘徽等6人现存史籍中未找到他们籍贯的记载。他们的爵名不出以上四种情况。淄乡男不可能是刘徽生前爵名升级，淄乡也不可能是刘姓郡望。那么，淄乡或者是刘徽的籍贯，或者是刘徽生前的主要活动地区。这两者中以前者的可能性较大。总之，我们认为，淄乡是刘徽的籍贯。[①]

北宋邹平县有一淄乡镇。宋王存《元丰九域志》淄州条载："邹平，……孙家、赵岩口、淄乡、临河、啀婆五镇。"淄乡在金朝仍然存在。《金史·地理志》："邹平，镇三：淄乡、齐东、孙家岭。"清康熙间及其后几次修《邹平县志》，均引《金史》资料，未云淄乡在当时何处。《元丰九域志》成于元丰三年（1080），刘徽受封于大观三年（1109），两者相去不到30年。因此，宋朝所封的淄乡男之淄乡，即当时淄州邹平县淄乡。淄乡，又作甾乡。古文淄、甾、菑相通。因此，淄乡、菑乡、甾乡相通，应是一个地方。

邹平县淄乡起码可以追溯到西汉。西汉有甾乡，据《汉书·王子侯表》，甾乡是西汉菑乡厘侯刘就的封国，封于建昭元年（公元前38），子逢喜嗣，免。据《汉书·诸侯王表》[②]，刘就是梁敬王刘定国之子，刘定国是文帝刘恒子梁孝王刘武的玄孙。因此，菑乡侯刘就是文帝的七世孙。《汉书》中有两处淄乡的记载。一是《汉书·地理志》载山阳郡有一县级侯国淄乡。山阳郡在今山东西南部。二是《王子侯表》注明甾乡侯的封国在济南郡。两者不同。"地理志"出自班固之手，"王子侯表"是班昭参考东观藏书写的。我们认为后者应更可靠些：菑乡侯的封地在济南郡。汉时邹平县属济南郡，联系到宋、金两朝邹平县有淄乡镇。因此，西汉所封之菑乡侯国就位于宋、金时邹平县的淄乡镇。菑乡侯二世而免，而菑乡的名称则保留了下来。班固写"地理志"时，大约因为刘就是梁敬王之子，而将其窜入梁国旧地山阳郡。

总之，刘徽是汉文帝刘恒之子梁孝王刘武的五世孙菑乡侯刘就的后裔，淄乡人，其地在今山东省邹平县境内。

（二）刘徽的思想品格

通过对刘徽籍贯的考察，可以探知他的生平与社交的某些线索，大体了解他成长的文化传统和氛围。刘徽成长的齐鲁地区，自先秦至魏晋，一直是中国文化最重要的中心之一，魏晋时还是辩难之风的中心之一。齐鲁地区的数学自先秦至魏晋也居全国的前列，两汉时期研究《九章算术》的学者许商、刘洪、郑玄、徐岳、王粲等，或是齐鲁人，或在齐鲁地区活动过。这些都为刘徽注《九章算术》，在数学上做出的空前的贡献，提供了良好的客观环境和坚实的数学基础。

但是，在同样的条件下，是刘徽而不是别人，写出了《九章算术注》这样的杰作，完成数学上的突破，除了刘徽超人的才智外，则是由他的思想品格和治学态度决定的。

刘徽博览群书，精心研究了墨家、儒家、道家等先秦诸子的著述以及《周易》、《周礼》、《考工记》、《左传》等经典及注疏，研究了司马迁、刘安、王充、郑玄、徐干等两汉学者的著作。他博采众长，善于从思想界辩难之风中及在辩难中泛起的先秦诸子、两汉典籍中汲取大量的思想资料，或者以某些命题作外壳，加以改造，融会贯通，赋予数学

---

① 郭书春，刘徽祖籍考，自然辩证法通讯，1992，14（3）：60～63。

② 东汉·班固，汉书，中华书局，1962年。本编凡引《汉书》的文字，均据此。

内容，得出正确或比较正确的结论，或者撷取其正确部分指导自己的数学研究。在中国古代数学家中，能够明确指出受如此多的思想家和文史典籍影响的，刘徽的《九章算术注》是仅见的。刘徽的深邃的思想方法和数学理论蕴含着对传统文化的深刻理解。

特别地，刘徽受嵇康、王弼等玄学名士的思想影响较大，有许多语句相类。由此，我们可以推断，刘徽的生年大约与嵇康、王弼相近或稍晚一些，就是说，刘徽应该生于3世纪20年代后期至公元240年。换言之，公元263年他完成《九章算术注》时，年仅30岁上下。有的画家将正在注《九章算术》的刘徽画成一位满脸皱纹的耄耋老人，有悖于魏晋的时代精神和特点。① 这是别话。

坚持实事求是，一切从实际出发，是刘徽治学的又一特点。整个刘徽注，言必有据，不讲空话。《世本》有“隶首作数”的说法，刘徽说“其详未之闻也”。汉代盛行谶纬迷信，数字神秘主义开始出现。大科学家张衡计算圆周率时使用错误公式：圆周∶圆径 = $\sqrt{10}$∶1，刘徽批评张衡是“欲协其阴阳奇耦之说而不顾疏密矣”。刘徽把自己的数学知识和创造完全建立在必然性基础之上。他的推理不仅方式正确，而且前提都是人们从无数事实中抽象出来的得到公认的原理或已经证明的命题，没有任何猜测或神秘的成分。

刘徽认为人们的数学知识是不断进步的，他不迷信古人。他批评千百年来人们“踵古”，沿袭“周三径一”的错误。《九章算术》最迟在东汉已被官方奉为经典，刘徽为之作注，自然对之很推崇。但他并不迷信《九章算术》，指出了它若干不准确之处甚或错误。刘徽是在中国数学史上批评《九章算术》最多的数学家。

刘徽《九章算术注》的创新非常多。在一部著作中，新的思想、新的方法、新的成就这么多，在中国数学史上是少见的。敢于创新，是刘徽治学的突出特点。这是他实事求是精神的升华。

刘徽具有知之为知之，不知为不知，不图虚名，敢于承认自己的不足，寄希望于后学的高尚品格。他设计了牟合方盖，指出了解决球体积公式的正确途径。然而，他功亏一篑，没能求出牟合方盖的体积，便老老实实地说：“欲陋形措意，惧失正理，敢不阙疑，以俟能言者。”这反映了一位真正的科学家的光辉本色。

刘徽还善于灵活运用数学方法。他常常在《九章算术》的术文之外，提出另外的方法，或者对《九章算术》的同一条术文，提出不同的思路。有时候他提出的新方法明知不如原来的方法简便，为什么还要提出呢？他说：“广异法也。”

二　《九章算术注》

（一）《九章算术注》的结构——“悟其意”与“采其所见”

自戴震起，人们把刘徽的《九章算术注》（图7-3-1）都看成刘徽自己的创造，是一种误解。刘徽关于注《九章算术》的自述表明，他的《九章算术注》包括两种内容：一是他“探赜之暇，遂悟其意”者，亦即自己的数学创造。二是“采其所见”者，即他搜集到的他

① 郭书春．重温吴先生关于现代画家对古代数学家造像问题的教诲——庆祝吴文俊先生90华诞。内蒙古师范大学学报（自）——纪念吴文俊院士九十寿诞数学史专刊，2009年10月。HPM通讯，第12卷第1期。

的前代和同代人研究《九章算术》的成果。

钱宝琮已经注意到了这个问题。在《中国数学史》中，他把圆周率和圆面积、圆锥体和球体积、十进分数、方程新术等内容称做刘徽在“《九章算术注》中的几个创作”，而把齐同术、图验法、棋验法视为《九章算术注》中“整理了各项解题方法的思想系统，提高了《九章算术》的学术水平”的部分。他指出：

> 刘徽少广章开方术注“术或有以借算加定法而命分者，虽粗相近不可用也”。方程章正负术注“方程自有赤黑相取，左右数相推求之术”。据此可知刘徽的注释是有所依据的。少广章开立圆术注引张衡的球体积公式，勾股章第5题、第11题注引赵爽勾股图说，这些无疑是他的参考资料。①

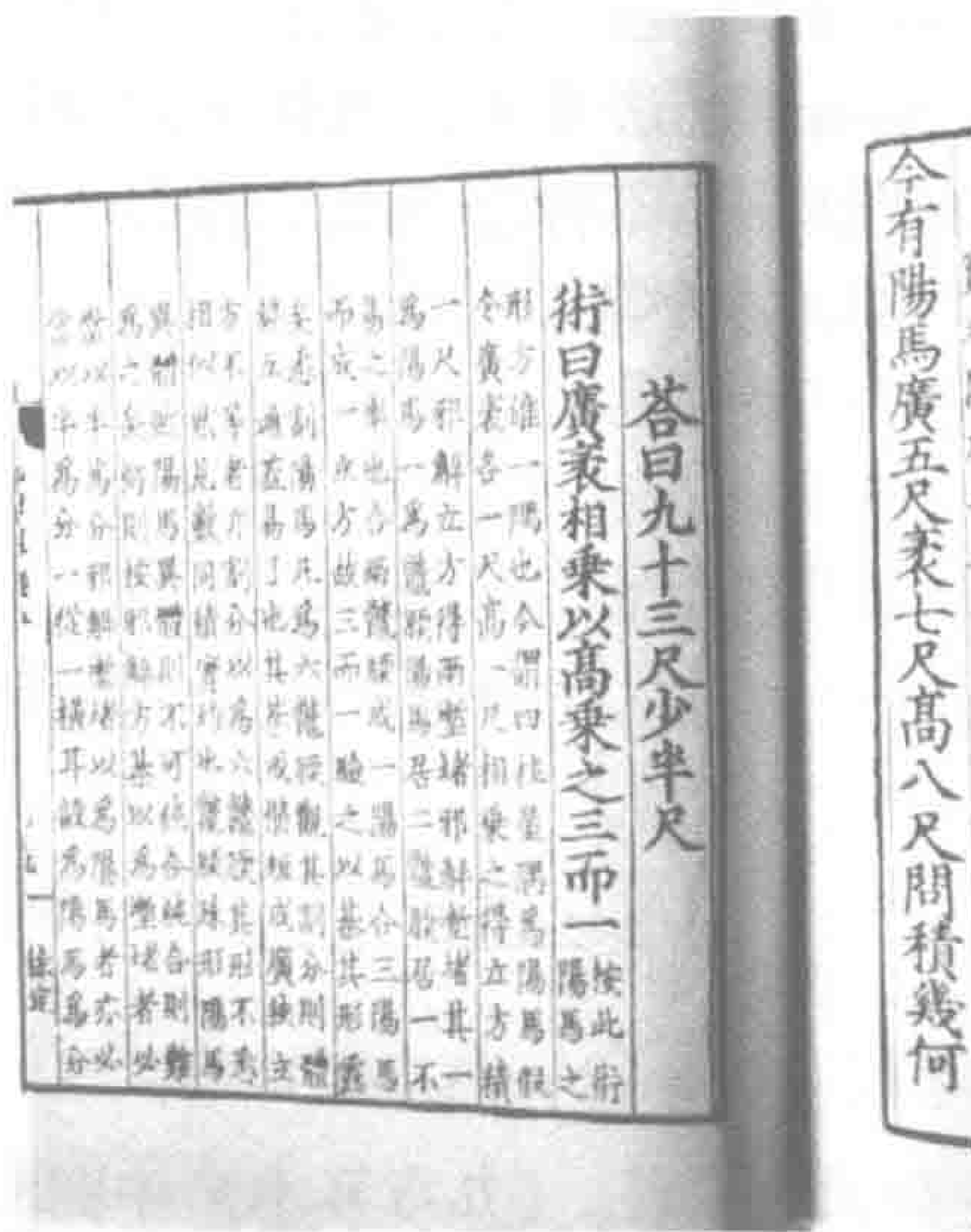

今有陽馬廣五尺袤七尺高八尺問積幾何
荅曰九十三尺少半尺
術曰廣袤相乘以高乘之三而一

图 7-3-1　《九章算术注》书影（南宋本）

后来，严敦杰《刘徽简传》也谈到了这个问题。他把刘徽学习《九章算术》分成“刘徽注文引《九章》以前的旧说”，与“刘徽参考了他稍前或同时的各家《九章》”两种情况。

只是，钱宝琮和严敦杰两位前辈没有把这种论述与刘徽自述的“采其所见”联系起来，论述稍显不充分。

刘徽《九章算术注》中“悟其意”者，在本章第一节已有概述，并在后面各章中详细论述，此不赘述。

（二）刘徽注中“采其所见”者

刘徽注中“采其所见”的内容大体如下：

周三径一。刘徽在圆田术注中批评使用周三径一之率的做法：“世传此法，莫肯精核，学者踵古，习其谬失。”在圆垛垮术注中又指出：“此章诸术亦以周三径一为率，皆非也。”都明确否定使用周三径一的做法。然而，刘徽注在以徽率 $\frac{157}{50}$ 修正原术之前都有基于周三径一论证原术的文字。可见，这类内容都不是刘徽的方法，而是“采其所见”者。

出入相补。刘徽使用出入相补原理对解勾股形诸方法的论证与赵爽“勾股圆方图”基本一致。这说明出入相补的方法不是刘徽的创造，而是刘徽以前就流行的传统方法，被刘徽采入自己的注中的。

多面体中的出入相补最主要的是棋验法。刘徽方亭术注说：“此章有堑堵、阳马，皆合而成立方。盖说算者乃立棋三品，以效广深之积。”所谓三品棋，就是长、宽、高各一尺的立方体、堑堵、阳马，如图 7-3-2 所示。商功章方亭、阳马、羡除、刍甍、刍童等术

① 钱宗琮主编，中国数学史，科学出版社，1964 年。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第五卷，辽宁教育出版社，1998 年。本编凡引用钱宝琮的论述，如不说明，均据此。

刘徽注的第一段及方锥术注、鳖腝术注都是棋验法。“说算者”无疑是刘徽以前的数学家，说明棋验法并不是刘徽所创造的，而是先人们传下来的。有人说出入相补原理是刘徽的首创，是不符合历史事实的。第五章已经指出，它的创造应该追溯到《数》、《算数书》《九章算术》时代。

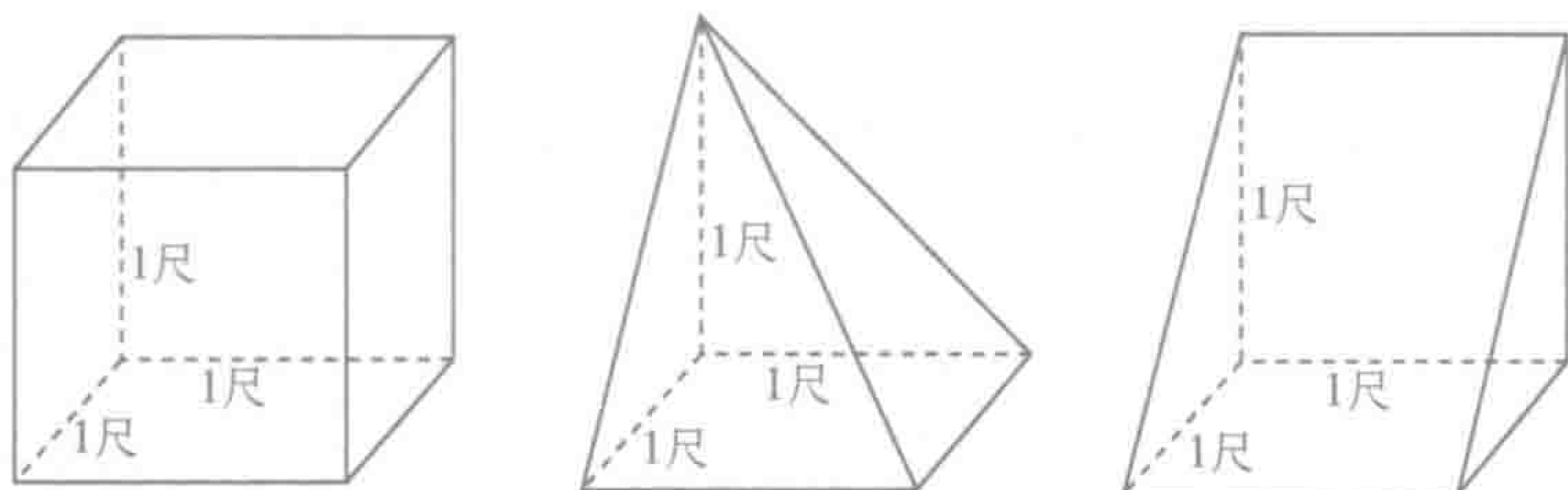


图 7-3-2　三品棋

截面积原理。《九章算术》中圆堢壔与方堢壔、圆亭与方亭、圆锥与方锥都是成对出现的，说明是通过比较等高的圆体与方体的底面积从方体推导圆体体积公式。刘徽开立圆术注指出《九章算术》犯了把球与外切圆柱体体积之比作为 3∶4，亦即球与外切圆柱体的大圆与大方的面积之比的错误，可为佐证。这是祖暅之原理的最初阶段。刘徽将其采入自己的注中。

无理根近似值的表示。当开方不尽时，刘徽说：“术或有以借算加定法而命分者，虽粗相近，不可用也。”就是说，设被开方数为 N，求得其根的整数部分为 a，即在开平方时，刘徽前，人们以 $a+\frac{N-a^2}{2a+1}$ 为根的近似值，并且 $a+\frac{N-a^2}{2a+1}<\sqrt{N}<a+\frac{N-a^2}{2a}$；在开立方时以 $a+\frac{N-a^3}{3a^2+1}$ 为根的近似值。

齐同原理。刘徽注中大量使用了齐同原理。齐同原理也不是刘徽首先使用的。《算数书》、《九章算术》都已有“同”的概念。赵爽《周髀算经注》多次使用齐同术。可见，齐同方法是刘徽之前的传统方法。

还有一些。但是，要完全区分算术、代数部分哪些是刘徽采其所见者，哪些是刘徽的创新，不像面积、体积问题那么容易。

总之，刘徽之前的数学家，包括《九章算术》、《数》、《算数书》的历代编纂者在内，为推导、论证当时的算法做了可贵的努力。然而，这些努力大多很朴素、很原始，许多重要算法的论证停留在归纳阶段，因而并没有在数学上被严格证明；同样，《九章算术》的一些不准确或错误的公式没有被指出、被纠正。可以说，从《九章算术》成书提出近百条抽象性算法之后到刘徽的三四百年间，数学理论建树并不显著，其数学思想和方法，其逻辑方法没有在《九章算术》基础上有大的突破。这就为刘徽进行数学创造留下了广阔的空间。

（三）认识《九章算术注》的结构的意义

正确认识《九章算术注》的结构，意义十分重大，起码有三点值得注意。

首先，可以准确认识刘徽之前的中国数学史。例如，从刘徽“采其所见”者，可以明确认识到，出入相补原理等贡献不是刘徽或赵爽的首创，而是刘徽、赵爽之前的传统方法；

对算法的论证不是从赵爽、刘徽才开始的，而是早已存在，甚至是《数》、《算数书》、《九章算术》得出这些算法时就已经使用的方法；等等。这在某种意义上填补了中国数学史的空白。

其次，可以准确地认识刘徽。如果将刘徽注全部看成刘徽的思想甚或其创造，那么刘徽就是一位成就虽大但是思想混乱、自相矛盾的人。认识到刘徽注不全是刘徽本人的思想或方法，剔除了"采其所见"者，那么刘徽就是一个成就伟大、思想深邃、逻辑清晰的学者。

还有，是正确校勘《九章算术》的基础。关于《九章算术》的校勘主要是对刘徽注的校勘。自戴震起，不断有人在发现同一术的刘徽注有不同的思路时，便武断地将第二种思路改成李淳风等注释，盖导源于对刘徽《九章算术注》结构的认识发生偏颇。

三 《海岛算经》

《海岛算经》本为刘徽《九章算术注》的第十卷，系刘徽自撰自注。后单行，因第一问是测望一海岛的高、远而改是名。图 7-3-3 是其聚珍版御览本。

刘徽《九章算术注序》说：

> 按：《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差之名，原其指趣乃所以施于此也。凡望极高，测绝深而兼知其远者必用重差、勾股，则必以重差为率，故曰重差也。

在《海岛算经》中，刘徽设计了用重差术测望山高、海广、谷深、邑方等各种问题，使用了重表、累矩、连索三种基本测望方法。刘徽进而说：

> 虽夫圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史籍且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美，辄造《重差》，并为注解，以究古人之意，缀于《勾股》之下。度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。

刘徽在这里阐明了"重差"的涵义，著《重差》的宗旨以及重差术的基本方法。《重差》即今之《海岛算经》。

《海岛算经》除题目与术之外，还有图及自注。图在《九章重差图》中，宋以前已经亡佚。南宋杨辉《续古摘奇算法》卷下有"海岛小图"，可能是刘徽的重差图之幸存者。《海岛算经》现存9问，是戴震在《四库全书》馆从《永乐大典》中辑录出来的，已无刘徽自注。这里9问，与鲍澣之所述及杨辉说的"刘徽以旁要之术，变重差减积，为《海岛》九问"相吻合。此后《海岛算经》的各种版本皆是戴震辑录本的校勘本。


海島算經

晉 劉 徽 撰

唐 李 淳 風 注

今有望海島立兩表齊高三丈前後相去千步令後表與前表參相直從前表卻行一百二十三步人目著地取望島峯與表末參合從後表卻行一百二十七步人目著地取望島峯亦與表末參合問島高及去表各幾何答曰島高四里五十五步去表一百二里一百五十步

術曰以表高乘表間爲實相多爲法除之所得加表高即得島高

淳風等按此術意宜云島謂山之頂上兩表謂立表木之端直……

人去表一百二十三步爲前表之始後立表末至人目于木末相望去表一百二十七步二表相去爲相多以爲法……

图 7-3-3 《海岛算经》书影（武英殿聚珍版）

《海岛算经》的9个题目含有重表、连索、累矩三种测望的基本方法。南宋鲍澣之说："是以松山高下，方邑大小，其重表也；岸望深谷，山望津广，其累矩也；登望

楼高、遥望波口，非三望之术乎；清渊白石、登山临邑，非四望之术乎；海岛去表，为之篇首，因以名书。”① 其中，望海岛、望方邑、望深谷 3 个问题需要二次测望，望松、望楼、望波口、望津 4 个问题需要三次测望，望清渊、登山临邑 2 个问题需要四次测望。

关于《海岛算经》单行的时间，许多著作说是李淳风等整理十部算经时将《重差》从《九章算术注》中分离出来的。这是一种想当然的说法。实际上，《宋史 · 艺文志》载，甄鸾时就有《海岛算术》，而且，王思辩建议整理汉唐算经时，已称“十部算经”。可见，《海岛算经》从《九章算术注》独立出来，起码在甄鸾时代。

第四节　南北朝的数学著作和数学家

一　关于《九章算术》的研究

研究《九章算术》，并为之作注，仍是南北朝数学的重要内容。除了下面要谈到的祖冲之父子和甄鸾的著述之外，史书中提到研究《九章算术》的还有：

成公兴、法穆、释昙影、殷绍　《魏书 · 术艺 · 殷绍》云成公兴，字广明，胶东人，游循大儒。②《魏书 · 释老志》云，成公兴尝佣赁于道士寇谦之。谦之“学算累年，而近算《周髀》不合”，自觉惭愧。成公兴见状，曰：“先生试随兴语布之。”谦之“俄然便决”，甚觉叹服，“请师事之”。殷绍，一作商绍，长乐（今河北冀县）人，好术数，达《九章》、《七曜》，北魏世祖（公元 424 ~ 451 年在位）时为算生博士。《魏书 · 术艺》云，太安四年（公元 458）殷绍上《四序堪舆表》，谈到他在后秦时向成公兴、释昙影、法穆学习《九章算术》的过程：殷绍在伊川（位于今河南嵩县、伊阳）时，遇到成公兴，“从求《九章》要术”。成公兴将他带到阳翟（今河南禹州）见释昙影。殷绍“依止影所，求请《九章》”。释昙影又将殷绍带到长广（今山东平度）见道人法穆。法穆与释昙影一起为殷绍“开述《九章》数家杂要，披释章次意况大旨”。可见，成公兴、法穆、释昙影、殷绍都精通《九章算术》。

元延明、信都芳　元延明（公元 484 ~ 530）是北魏一位开明、博学的鲜卑族贵族，袭父元猛爵，为安丰王。延昌初（公元 512）散家财拯饥。官至给事黄门郎、侍中、尚书右仆射、徐州大都督、刺史，兼尚书令、大司马。《魏书 · 文成五王列传》云延明撰《九章》十二图。时元颢入洛，延明受灏委寄。永安二年（公元 529），灏败，延明遂南奔，次年死于江南。元延明性清俭，不营产业。为政清廉，甚得民誉。他博极群书，著述甚多。以信都芳工算术，引之在馆。信都芳，河间（今河北省）人，字玉琳。《北史 · 艺术》记载他好学，善天文算数，每精心研究，或坠坑坎。自谓“算历玄妙，机巧精微，我每一沉思，不闻雷霆之声也”。性清俭物质朴，狷介自守，无求于物。公元 525 年，祖暅之在边境被俘，在延明家，先不为重视。信都芳谏延明礼遇之。次年，祖暅之南还，留诸法授芳，由是弥复精

---

① 南宋 · 鲍澣之，海岛算经后序，见：《诸家算法及序记》，郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 1451、1452 页。

② 北齐 · 魏收，魏书，中华书局，1974 年。本编凡引用《魏书》文字，均据此。

密。①元延明欲抄集《五经》算事为《五经宗略》及古今乐事为《乐书》，又聚浑天、欹器、地动、铜乌漏刻、候风诸仪器，并画图，为《器准》九篇，并令芳算之。后来，延明南奔，芳乃自撰注。《北史·艺术上》云，信都芳入东魏，为齐神武帝高欢馆客，授中外府四曹参军。又注重差、勾股，复撰《史宗》。他认为"浑天覆观，以《灵宪》为文；盖天仰观，以《周髀》为法"，撰《四术周髀宗》，又撰历书，名曰《灵宪历》。他的著述皆失传，唯《北史·艺术》引述了《四术周髀宗序》，李淳风等《周髀算经注释》引用过《四术周髀宗》的个别段落。

刘祐　荥阳人，隋开皇初（公元581）为大都督，封索卢县公。《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》载刘祐的"《九章杂算文》，二卷"。刘祐曾与张宾、刘晖、马显定历，著《律历术文》一卷等。

此外，《隋书·经籍志》记载关于《九章算术》的著述还有：

九章算术　一卷，李遵义疏。

九九算术　二卷，杨淑撰。

九章推图经法 一卷，张峻撰。

李遵义、杨淑、张峻的生平无考。他们的著作在《隋志》中夹在徐岳、刘徽及《缀术》、《孙子算经》等著作之间，是南北朝时人，当无疑问。《隋书·经籍志》还著录了《九章算术》二卷、《九章六曹算经》一卷，未云作者。

以上关于《九章算术》的著作都是注释，但是没有一部流传到现在，我们对他们的成就可以说一无所知。

二　《孙子算经》

《孙子算经》，原名《孙子算术》，现传本为三卷。《隋书·经籍志》云"二卷"，未云作者。《旧唐书·经籍志》云"《孙子算经》三卷，甄鸾撰注"，《新唐书·艺文志》亦记甄鸾撰此书，并云李淳风注。但传本中既无甄鸾注，亦无李淳风等的注释。大约唐初李淳风等注释十部算经后，将《孙子算经》厘为三卷，并与其他算书一道，将"算术"改称"算经"。

（一）孙武并非《孙子算经》的作者

清朱彝尊认为此书的作者是春秋末年写《孙子兵法》的军事家孙武，"非伪托也"。②戴震则根据书中有长安、洛阳、佛书等用语否定朱说。③近人钱宝琮则"依据书中有历史意义的点滴资料，认为《孙子算经》的原著年代是在公元400年前后"。④这些点滴资料主要

① 唐·李延寿，北史，中华书局，1974年。本编凡引用《北史》文字，均据此。

② 清·朱彝尊，跋孙子算经，见：《曝书亭集》，卷五十五，《四库全书·集部·别集类》，第1318册，台湾商务印书馆，1986年，第266，267页。

③ 清·戴震，孙子算经提要，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年，第227页。

④ 钱宝琮，孙子算经提要，见：钱宝琮校点，《算经十书》，下册，第275页。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第四卷，辽宁教育出版社，1998年，第217页。

是：晋武帝时始实行户调，而本书卷下有“户输绵二斤八两”之调法。三国时吴邯郸淳《艺经》尚称围棋十七道，而本书有“棋局十九道”之题。其他含有的时代性之问题，无可证明为先秦作品者。本书非孙武子原著，显而易见。尽管东汉已有19道的围棋，但钱宝琮关于《孙子算经》的时代的介定，总体说来还是可信的。

（二）《孙子算经》的内容

《孙子算经序》除阐述了数学在通神明、类万物方面的作用这一传统看法外，提出：

> 夫算者，天地之经纬，群生之元首，五常之本末，阴阳之父母，星辰之建号，三光之表里，五行之准平，四时之终始，万物之祖宗，六艺之纲纪。①

把数学推崇到这样的地步，在传统数学著作中是不多见的。

总体说来，《孙子算经》是一部供数学初学者学习的入门读物。卷上是一些必要的预备知识，依次列出度、量、衡的进位制度，万万进的大数进法，周三径一、方五斜七的近似算法，金、玉等的比重表，算筹记数制度，乘、除运算的筹算方法，粟米互换法，减 $\frac{1}{10}$，$\frac{2}{10}$，…，$\frac{9}{10}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{8}$，…，$\frac{1}{5}$ 的算法，九九乘法表及其得数的平方，以及相应的除法，最后是11个关于乘除法的例题。这种将预备知识列入卷首的体例影响了宋、元、明许多著作。

《孙子算经》卷中有28个问题。其中，关于分数的约简、加减，粟米互换以及女子善织等9个题目，与《九章算术》卷一、二、三的相应题目相同。此外，还有面积、体（容）积及商功问题、开方、盈不足、方程及关于等差数列的问题等，都是《九章算术》已经讨论过的类型。只是方程术为了避免出现负数，使用了与《九章算术》不同的消元法。等差数列中求各项的方法很独特，其开方术比《九章算术》有所改进。但有的问题的解法相当繁琐。

卷下36个问题。其“物不知数”问是中国乃至全世界数学著作中第一个同余方程组解法问题。此外，还有复杂的分数计算、均输、方程、盈不足、衰分以及用相似勾股形进行测望的问题；另有20多个整数乘除法问题，有的方法十分繁琐，有的问题将乘数40化成乘10乘4，开唐宋化多位乘法为个位乘法之先河；最后一问推算孕妇生男生女，荒诞不经。

《孙子算经》卷中、下都采取应用问题集的形式，每一题有一条也只有一条术，其术文都是具体解法，类似于后世数学著作中的细草，没有抽象性的术文。这与《九章算术》的卷三、六的后半部及卷九的解勾股形问题相类似，而与《九章算术》主体部分采取术文统率例题的形式是迥然不同的。

（三）《孙子算经》的版本与校勘

《孙子算经》是启蒙读物，流传较广，被不少著作引用。清光绪己亥年（1899）发现的敦煌千佛洞算书有《孙子算经序》及卷上的许多内容。敦煌算书是公元5～10世纪的抄件。

唐初李淳风等整理注释十部算经，《孙子算经》没有他们的注释，可能是内容浅显之

① 郭书春点校，孙子算经，见：郭书春、刘钝点校，《算经十书》，辽宁教育出版社，1998年。繁体字修订本，九章出版社，2001年。以下凡引《孙子算经》原文，如不说明，均依台湾九章版。

故。不过，李淳风等对某些内容作了修改。例如，传本《孙子算经》卷上关于度、量的单位，合于唐、宋制度，而与《隋书·律历志》所引《孙子算术》不同，所载“大数之法”的进位制与量的大数进位制亦不同，便是明证。

北宋元丰七年（1084），秘书省刊刻十部算经，其中包括《孙子算经》，今已佚。南宋嘉定六年（1213）鲍澣之翻刻了秘书省本《孙子算经》，见图 7-4-1。此本在明代几乎失传。清初太仓王杰家藏有一部南宋本，后来先后传入常熟毛扆、阳城张敦仁手中，今存上海图书馆。1980 年，文物出版社影印，收入《宋刻算经六种》。清康熙二十三年（1684）毛扆影抄了南宋本，世称汲古阁本，后传入清宫，藏天禄琳琅阁，今存台北故宫博物院。1932 年，北平故宫博物院影印汲古阁本，收入《天禄琳琅丛书》。

明永乐六年（1408），将与北宋本的底本不同的另一抄本分类抄入《永乐大典》“算”字条各卷。清乾隆三十九年（1774）戴震在《四库全书》馆从《永乐大典》辑录出《孙子算经》，略加校勘。其副本在乾隆四十一年活字排印，收入《武英殿聚珍版丛书》。其御览本在 1993 年影印收入《中国科学技术典籍通汇·数学卷》。乾隆四十三年，以戴震辑录校勘本的正本为底本，抄入《四库全书》，藏清宫文渊阁。后又抄成六部，分藏文津阁等全国六家皇家书阁。《四库全书》文渊阁本今藏台北故宫博物院。1983 年，台北商务印书馆将其影印。2005 年，北京商务印书馆影印了文津阁本。

乾隆四十一年，戴震以汲古阁本为底本，以戴震辑录校勘本参校，重加整理，并做了某些修辞加工，由孔继涵刻入微波榭本《算经十书》。微波榭本在清中叶之后多次翻刻，还被刻入鲍廷博的《知不足斋丛书》和刘铎的《古今算学丛书》等，流传广泛。

1963 年，钱宝琮以微波榭本为底本，重加校勘，写出校勘记 30 余条，纠正了戴震校本十几条错校，收入钱宝琮校点《算经十书》（北京中华书局）。

1998 年，郭书春以南宋本为底本，重加校勘，收入郭书春、刘钝点校《算经十书》（简体字。沈阳辽宁教育出版社）。2001 年，又加修订，收入台北九章出版社出版的《算经十书》。

1999 年，纪志刚以钱校本为底本校勘，收入“《孙子算经》《张邱建算经》《夏侯阳算经》导读”（湖北教育出版社）。


孫子筭經序
孫子曰夫筭者天地之經緯羣生之元首五常
之本末陰陽之父母星辰之建號三光之表裏
五行之準平四時之終始萬物之祖宗六藝之
綱紀稽羣倫之聚散考二氣之降升推寒暑之
迭運步遠近之殊同觀天道精微之兆基察地
理從橫之長短采神祇之所在極成敗之符驗
窮道德之理究性命之情立規矩準方圓謹法
度約尺丈立權衡平重輕剖毫釐析黍絫歷億

图 7-4-1　《孙子算经》书影（南宋本）


張丘建筭經序
夫學筭者不患乘除之為難而患通分之為難
是以序列諸分之本元宣明約通之要法上實
有餘為分子下法從而為分母可約者約以命
之不可約者因以名之凡約法高者下之耦者
半之奇者商之副置其子及其母以少減多求
等數而用之乃若其通分之法先以其母乘其
全然後內子母不同者母互乘子母亦相乘為
一母諸子共之約之通分而母入者出之則定

图 7-4-2　《张丘建算经》书影（南宋本）

三　《夏侯阳算经》

《夏侯阳算经》，《隋书 · 经籍志》云“二卷”，未提作者。《张丘建算经序》曰：“其《夏侯阳》之‘方仓’，《孙子》之‘荡杯’，此等之术皆未得其妙。”① 故《夏侯阳算经》应成书于《张丘建算经》之前。具体时间已不可考，大约在《孙子算经》前后。

（一）原本《夏侯阳算经》已失传

现传本《夏侯阳算经》三卷，早非原本。原本在宋以前已亡佚。北宋元丰七年（1084）秘书省刊刻汉唐算经时，因一部唐代算书开头有“夏侯阳曰”遂被误认为《夏侯阳算经》而刻入。戴震根据《夏侯阳算经自序》中有“《五曹》、《孙子》述作滋多，甄鸾、刘徽为之详释”以及“书内又称宋元嘉二年徐受重铸铜斛，至梁大同元年甄鸾校之”，认为夏侯阳“为隋人，盖无可疑”。② 此时戴震尚未看到《张丘建算经》。而在看到汲古阁本诸算经之后，戴震则认为夏侯阳“为晋人，在甄鸾前明矣”。他联系到《新唐书 · 艺文志》有韩延《夏侯阳算经》一卷，认为“韩延乃作注者姓名”，又认为辨度量衡、课租庸调、论步数不等等章的制度“皆据隋制言之。则是韩延传其学而以己说篡入之，序亦当为延所作”③。钱宝琮说：“凡书中所有含时代性之问题，亦无一可证明为隋人者。不知戴震何所据而云然也。”他认为书中所引律令皆合唐制，“可证伪本《夏侯阳算经》之编纂，当在建中元年（公元 780）两税法施行以后，而相距或不甚远。”④ 后来，钱宝琮又认为“本书为代宗（公元 762 ~ 779）时期的作品”。⑤ 近年李兆华根据新的证据，认为《夏侯阳算经》“成书年代当在唐德宗兴元元年（公元 784）左右，作者可能是一位长期从事会计的人”。⑥

（二）《夏侯阳算经》内容索隐

钱宝琮《夏侯阳算经考》认为：《夏侯阳算经》“其内容如何，无从详考。原文为韩延算书所引而保存者，仅‘明乘除法’章中四节，尚可稽考。首节论命分诸法。次节论筹制及乘除用筹法则。又次论分数名目。终论五除名色。”其中，论命分诸法中提出“五则倍而折之”，这是说分数约简时，若分子、分母的尾数都是 5，则将分子、分母都加倍，皆退一位，开筹算乘除捷算法之先河。而算筹记数法比《孙子算经》所记多“满六已上，五在上

---

① 北魏 · 张丘建，张丘建算经，郭书春点校，见：郭书春、刘钝校点，《算经十书》，辽宁教育出版社，1998 年。繁体字修订本，九章出版社，2001 年。本编凡引《张丘建算经》原文，均据九章版。

② 清 · 戴震，夏侯阳算经提要，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 379 页。

③ 清 · 戴震，夏侯阳算经跋，见：《戴震全书》，第六册，黄山书社，1995 年，第 337 页。

④ 钱宝琮，夏侯阳算经考，《科学》，1929，14（3）。见：李俨钱宝琮科学史全集，第九卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 102 页。

⑤ 钱宝琮，夏侯阳算经提要，见：钱宝琮校点，《算经十书》，下册，第 552 页。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第四卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 552 页。

⑥ 李兆华，传本《夏侯阳算经》成书年代辨，见：第廿二届国际科学史大会论文摘要集，2005-7 月-24 ~ 30。第 276 页。

方，六不积算，五不单张”十六字①，所记载的算筹记数制度更加完整、准确。

李迪认为：“其中能分清原著的内容至少有两部分。另一些是唐代的，还有些不好定年代。”所谓原著的两部分，第一部分就是钱宝琮所认定的“明乘除法”，第二部分根据《张丘建算经·序》中提到的“《夏侯阳》之方仓”，那么传本《夏侯阳算经》卷上6道“方仓”类题目都是原著的内容，并以都使用南北朝斛法1620 寸^{3}为旁证。② 这种看法是有道理的。实际上卷上“言斛法不同”中有3道题目与《五曹算经》相同，另有几道题目类似，当是《五曹算经》模袭原本《夏侯阳算经》者。

此外，传本《夏侯阳算经》卷下“说诸分”中“今有锦”、“今有黄金”二问与《孙子算经》卷下的两道题目相同，当是原本《夏侯阳算经》源于《孙子算经》者。

四　《张丘建算经》

《张丘建算经》三卷，北魏清河张丘建著。

（一）关于《张丘建算经》的成书年代

张丘建，生平不详。《宋史·礼志》“算学祀典”云晋“张丘建信成男”。阮元《畴人传》亦将张丘建列于晋代。③ 钱宝琮认为张丘建是北魏人。北魏的清河位于今山东临清东北。北宋“算学祀典”多依其里贯定其爵位。据此，张丘建应为信成人。信成在汉代是清河郡的属县，东汉废。地处今清河县（河北省）西北，当在今山东与河北的交界处。南北朝无信成县的建制。总之，可以确定张丘建为5世纪中叶今山东临清，河北清河一带人。

钱宝琮主编《中国数学史》认为《张丘建算经》卷中第13题“今有率户出绢三匹，依贫富欲以九等出之”“能够适合公元466年到484年间元魏户调法中‘九品混通’的要求。我们有理由断定《张邱建算经》的编写年代是在这十八年之内”。

冯立昇则将《张丘建算经》的年代提前了30余年。他说：“许多史料表明，‘九品混通’的户调制并非在公元466年在北魏开始实行，它是沿袭晋代‘九品相通’之制而来的，在北魏初期就已实行。据《魏书》卷四上《世祖纪上》太延元年（公元435）十二月诏：‘若有发调，县宰集乡邑三老计赀定课，裒多益寡，九品混通，不得纵富督贫，避强侵弱。’又延和三年（公元434）二月诏：‘其令州郡县隐括贫富，以为三级。其富者租赋如常，中者复二年，下穷者复三年。’这说明北魏初年不仅按赀发调之制延续了下来，而且在内地州郡所施行的税目也循晋制，”皇兴四年（公元470）前后，“北魏王朝已后将早年圈占的苑囿猎地驰禁。《张邱建算经》的内容涉及围猎封山之事较多，因而该书不会是写于公元470年之后”。冯立昇根据《魏书》卷四下《恭宗纪》记载，在恭宗拓跋晃（卒于公元451年）监国时，曾“禁饮酒杂戏，弃本沽贩者”。“高宗拓跋濬（公元452～465年在位）时也‘设酒禁’，且规定酿、沽、饮者皆斩。《张邱建算经》卷中18题：‘今有清酒一斗，值粟十斗，

---

① 郭书春校点，夏侯阳算经，见：郭书春、刘钝校点，《算经十书》，辽宁教育出版社，1998年。繁体字修订本，九章出版社，2001年。以下凡引《夏侯阳算经》原文，均据九章版。

② 李迪，中国数学通史·上古到五代卷，江苏教育出版社，1997年。本编凡引此书，均据此。

③ 清·阮元，畴人传卷六，商务印书馆，1955年，第77页。

酺酒一斗，值粟三斗。'《算经》的写作年代似应在设立酒禁之前。" 冯立昇又根据北魏在神䴥三年（公元430）十月攻占洛阳，而《张丘建算经》卷上第16问为邺与洛阳互发的问题，还有一道"有人持钱至洛"经商的问题，说明写此书时洛阳与邺之间可以直接交通，"因此可以断定《算经》的成书应在公元430年以后"。总之，冯立昇将《张丘建算经》的成书年定为公元431～450年。①

（二）《张丘建算经》的内容

《张丘建算经序》说："夫学算者不患乘除之为难，而患通分之为难。" 可见，它与《九章算术》相比，是比较初级的作品，不过问题大都比《孙子算经》复杂一些。传本卷上32问，卷中存22问，卷下存38页。卷中、卷下之间有残缺。《玉海》云："《张丘建算经》三卷，凡一百问。"② 可知卷中末、卷下首残缺约8问。

《张丘建算经》有的题目与《九章算术》相类似，但没有一个完全相同的题目；有的题目如"河上荡杯"题与《孙子算经》相同。与《九章算术》的主体部分比较起来，《张丘建算经》的术文抽象得不够，也是一部应用问题集。不过，其术文也不是《孙子算经》那样的计算细草，而是一种问题的比较抽象的运算程序。另一方面，与《孙子算经》的大量题目纯粹是趣味题相比，《张丘建算经》的实用性更为强烈。

《张丘建算经》的数学成就比《孙子算经》大一些，主要是：卷上营周问有最小公倍数的完整求法。卷上官赐金十等人、女子善织、女子不善织、与人钱问，卷中诸户出银、诸户出绢问，卷下五人分五鹿、城周安鹿角、举取他绢等9个关于等差数列的问题，包括了求等差数列的各元素的若干情形。直接解决《九章算术》用盈不足术解决的某些类型的算术难题。卷下最后一问是世界数学史上著名的百鸡问题。

南宋本《张丘建算经》卷上、中的首页都有"汉中郡守、前司隶、臣甄鸾注经 唐朝议大夫、行太史令、上轻车都尉、臣李淳风等奉敕注释 唐算学博士、臣刘孝孙撰细草"三行。戴震认为"其中称'术曰'者乃鸾所注，'草曰'者孝孙所增，其细字夹注称'臣淳风等谨按'者不过十数处，盖有疑则释，非节节为之注也"。③ 钱宝琮说，古代数学书于问题、答案之后都有解题的术，术文是经文的主要部分，决不能是后人所加。《四库全书提要》说："称'术曰'者乃鸾所注。"这种说法是立脚不住的。" 他根据《隋书 · 经籍志》记录《张丘建算经》未云甄鸾注，认为传本中无甄鸾的注。钱宝琮还认为，撰细草的决不是唐秦王府十八学士之一，曾任著作佐郎的荆州刘孝孙，而是南北朝和隋朝的天算学家刘孝孙。④ 刘孝孙（？～公元594），广平（今河北）人，算学博士。初仕北齐，后仕隋。他曾与刘焯一道批评张宾历法之失，在历法上是个先进学者。通过刘孝孙细草，可以了解南北朝时期通行的分数四则运算法、开平方法、开立方法，线性方程组解法等计算方法。其中，开方法采

---

① 冯立昇，《张邱建算经》的成书年代，见：李迪主编，数学史研究文集，第一辑，内蒙古大学出版社，九章出版社，1990年，第46～49页。

② 南宋 · 王应麟，玉海，商务印书馆，1983年。本编凡引《玉海》，均据此。

③ 清 · 戴震，张邱建算经提要，见：《四库全书 · 子部 · 天文算法类》，第797册，台湾商务印书馆，1986年，第251，252页。

④ 钱宝琮，张邱建算经提要，见：钱宝琮校点，《算经十书》，下册，第326页。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第四卷，辽宁教育出版社，1998年，第326页。

用了《孙子算经》的改进。

（三）《张丘建算经》的版本与校勘

北宋元丰七年（1084）秘书省刊刻的十部算经中的《张丘建算经》，今已佚。但后来的版本皆源于此。南宋嘉定六年（1213）鲍澣之翻刻了秘书省本《张丘建算经》。清初太仓王杰家藏有一部南宋本，后来先后传入常熟毛扆、阳城张敦仁手中。今存上海图书馆。1980年，文物出版社影印，收入《宋刻算经六种》。清康熙二十三年（1684）毛扆影抄了南宋本，世称汲古阁本，后传入清宫，藏天禄琳琅阁，今存台北故宫博物院。1932年，北平故宫博物院影印汲古阁本，收入《天禄琳琅丛书》。

明《永乐大典》似未抄录《张丘建算经》。清《四库全书》中的《张邱建算经》是戴震以汲古阁本为底本整理的，校勘了几个字，但避孔丘讳，将“丘”改做“邱”。此后孔刻微波榭《算经十书》本、钱宝琮校点《算经十书》本以及许多数学史著述皆因之。乾隆四十一年，戴震以汲古阁本为底本整理《张丘建算经》，做了某些修辞加工，由孔继涵刻入微波榭本《算经十书》。微波榭本在清中叶之后多次翻刻，还被刻入鲍廷博《知不足斋丛书》和刘铎的《古今算学丛书》等。

1963年，钱宝琮以微波榭本为底本，重加校勘，改正错字43个，删去衍文27个，补足脱文54字，收入钱宝琮校点《算经十书》（北京中华书局）。这是第一次对《张丘建算经》进行全面深入的校勘。1999年，纪志刚以钱校本为底本校勘，收入《〈孙子算经〉〈张邱建算经〉〈夏侯阳算经〉导读》（湖北教育出版社）。

1998年，郭书春以南宋本《张丘建算经》为底本，重加校勘，纠正了微波榭本和钱校本的某些错误，收入郭书春、刘钝点校《算经十书》（简体字。沈阳辽宁教育出版社）。2001年，又加修订，收入台北九章出版社出版的《算经十书》。

五　祖冲之、祖暅之与《缀术》

祖冲之是南朝宋、齐人，也是中国历史上最杰出的数学家、天文学家、机械制造家之一。其主要数学著作《缀术》是唐以前最艰深的数学经典，早已失传。我们无法知道它的确切的，甚至主要的内容，只能就残简断篇简略介绍一些情况。

（一）祖冲之和祖暅之

1. 祖冲之

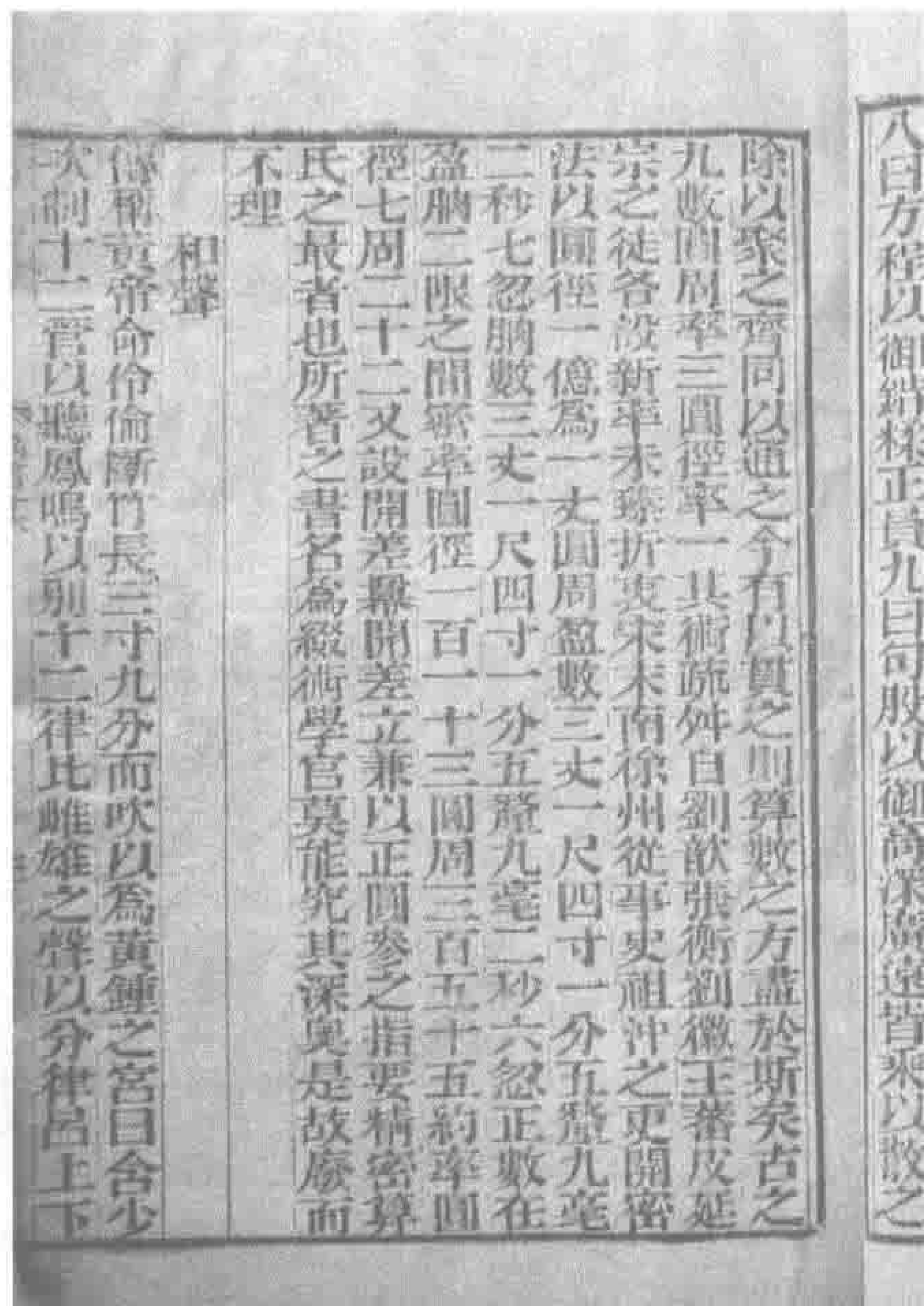
祖冲之（公元429～500），字文远，《南史·文学》云祖籍范阳郡遒县（今河北省涞水县）[①]，《南齐书·文学》说是蓟（今北京）人。曾祖父台之适晋乱，举家南迁，曾祖父、祖父、父亲都先后仕晋和刘宋。祖父祖昌官至主管土木工程的大匠卿。祖家家学深厚，长于历算，冲之幼年聪慧，有机思，受到良好的传统文化教育，尤其是历算方面的教育，青年时代就成为有影响的学者。宋孝武帝“使直华林学省”，协助主持科研机关。后来，他又任南徐州（今江苏镇江）迎从事，公府参军。公元462年，花多年努力，完成《大明历》。孝武

---

① 唐·李延寿，南史，中华书局，1975年。本编凡引《南史》文字，均据此。

帝令“善历者难之，不能屈”。恰遇孝武去世，未能颁行。冲之出为娄县（今江苏昆山）县令，后又为谒者仆射。祖冲之又是机械制造专家。宋武帝在关中得到姚兴的指南车，只有外壳，内部机械已损坏，每当行走时，需人在内转之。公元478年，祖冲之改造铜机，圆转不穷，指南的方向始终如一，时人誉为“马均以来未有也”。入齐，任长水校尉，作《安边论》，主张开荒屯田，以广农殖。祖冲之还造过千里船，日行百余里，造过水碓磨及木牛流马一类的运载工具。他解音律，善博戏，当世没有对手。他还著《易》、《老》、《庄》义，释《论语》、《孝经》，撰《述异记》。

祖冲之特善算，注《九章》，造《缀述》（一说为《缀术》）数十篇，已佚。目前，所知道祖冲之的数学成就，仅有将圆周率的计算精确到8位有效数字等几项。图7-4-3是《隋书·律历志》关于祖冲之数学成就的记载。梁永元二年（公元500），冲之卒，享年72岁。


八曰方程以御錯糅正負九曰句股以御高深廣遠皆乘以散之
除以聚之齊同以通之今有以貫之則算數之方盡於斯矣古之
九數圓周率三圓徑率一其術疏舛自劉歆張衡劉徽王蕃皮延
宗之徒各設新率未臻折衷宋末南徐州從事史祖沖之更開密
法以圓徑一億為一丈圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫
二秒七忽朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽正數在
盈朒二限之間密率圓徑一百一十三圓周三百五十五約率圓
徑七周二十二又設開差冪開差立兼以正圓參之指要精密算
氏之最者也所著之書名為綴術學官莫能究其深奧是故廢而
不理

和聲

傳稱黃帝命伶倫斷竹長三寸九分而吹之以為黃鍾之宮曰含少
次制十二管以聽鳳鳴以別十二律比雌雄之聲以分律呂上下

图7-4-3　《隋书 · 律历志》关于祖冲之的记载

2. 祖暅之

祖冲之之子祖暅之，一作祖暅，字景烁。少传家业，究极精微，善于思考。当其诣微之时，雷霆不能入。有一次，他走路思考问题，一头撞到仆射徐勉身上。徐勉唤他，才醒悟过来，传为佳话。梁天监初，修订乃父《大明历》，九年（公元510）正式颁行。一直到陈亡（公元589），南朝一直施行《大明历》。公元525年，暅之被北魏俘获，由于数学家信都芳的推荐，受到安丰王元延明的礼遇。三人经常在一起研讨数学问题。后祖暅之南返，“留法授芳”，信都芳之数学水平大为提高。撰《缀术》，其开立圆术提出祖暅之原理，彻底解决了球体积问题。

（二）《大明历》与《驳议》

1. 大明历

刘宋何承天制定的《元嘉历》“比古十一家为密”，是一部优秀的历法。祖冲之经过长期观测、研究与计算，以为尚疏。由是在《大明历》中提出许多革新，所谓“改易之意有二，设法之情有三”。改易之意，其一是改革闰周，改传统的19年7闰为391年144闰。直到唐初历法不再讨论闰周为止，这是最准确的数值。其二是首次将岁差引入历法。岁差是东晋虞喜发现的，何承天也推算了岁差值，但未用于历法。祖冲之在《大明历》中使用的岁差数值为45年11月退行1度。此外，《大明历》的回归年长度为365.24281481日，朔望月日数为29.5305915，后者的误差每月仅长了0.5秒。直到宋代的历法的精度才超过这两个数值。

《大明历》的三项新设法都与上元积年的计算有关。中国古代制定历法时，大都要先推算出若干年前的一个理想的历元，使各种天象周期都处于初始状态。这个理想的历元被称为“上元”。从上元到编定历法那年的年数被称为“上元积年”。祖冲之在《大明历》中提出：

“上元之岁，岁在甲子，天正甲子朔夜半冬至，日月五星聚于虚度之初，阴阳迟疾，并自此始。”① 这就要求“上元”之年必须是甲子年，该年十一月初一必须是甲子日，其夜半又恰好是合朔和冬至节气，并且此时日月五星恰好都聚集于虚宿初度。要推算出这个理想的上元，需要解一次同余方程组问题。《孙子算经》已有这种解法，可以认为，祖冲之在解一次同余方程组方面的造诣是相当高的，可惜我们无法深究其具体成就。祖冲之还创造了测算与计算冬至时刻的方法。他给出交点月为27.2122304日，这是中国历史上第一个交点月日数，与现代的理论数值仅多0.0000152日。此外，他给出的五星周期的数据也比较精确。②

2. 驳议

祖冲之将《大明历》呈上朝廷，世祖刘骏“下之有司，使内外博议”。朝廷官员中通历算者极少，“竟无异同之辩”。唯世祖宠臣戴法兴竭力反对，指责祖冲之“诬天背经”。祖冲之毫不畏惧，据理驳斥，写出著名的《驳议》即《大明历议》。他针对戴法兴所说天象“非凡夫所测”，指出：“迟疾之率，非出神怪，有形可检，有数可推。刘贾能述，则可累功以求密矣。”针对戴法兴说的“古人制章”，“万世不易”，指出：“曲辩碎说，类多浮诡，甘石之书，互为矛楯。今以一句之经，诬一字之谬，坚执偏论，以罔正理，此愚情之所未厌也”。又如“立圆旧误，张衡述而弗改；汉时斛铭，刘歆诡谬其数；此则算氏之剧疵也。”因此，不应“虚推古人”。前代的历法当时或许是准确的，但日久则疏。祖冲之以元嘉、大明四次月蚀为例说：“凡此四蚀，皆与臣法符同，纤豪不爽。而法兴所据，顿差十度，违冲移宿，显然易睹。故知天数渐差，则当式遵以为典，事验昭晰，岂得信古而疑今。”他坚定地表示：“愿闻显据，以核理实”，“浮辞虚贬，窃非所惧”。《驳议》是科学史上一篇重要文献，既反映了祖冲之实事求是的科学学风，又显示了他不畏权贵，敢于坚持真理，敢于斗争的大无畏精神。

《宋书·律历志》说，在祖冲之与戴法兴的辩论中，朝臣们畏惧戴法兴的权势，皆附和戴法兴。“唯中书舍人巢尚之是冲之之术，执据宜用。”大明八年（公元464）世祖决定采用冲之新历，明年改元。未及颁行，世祖去世，改历之事被搁置下来。直到公元510年经过祖暅之的努力，《大明历》才在梁颁行。

（三）《缀述》与《缀术》

关于《缀术》的书名、卷数、作者，史籍记载互异。《南齐书》、《南史》称祖冲之“造《缀述》数十篇”。《隋书·律历志》云祖冲之“所著之书名为《缀术》”，未云卷数。《隋书·经籍志》、《日本国见在书目》均作《缀术》六卷，而无著者姓名。《通志》作《缀术》六卷，祖冲之撰。唐李籍《周髀算经音义》、《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》称《缀术》五卷，祖冲之撰。唐王孝通《上缉古算经表》称祖暅之《缀术》，未云卷数。宋沈括《梦溪笔谈》卷一称“北齐祖亘有《缀术》二卷”。上面这些资料表明，南北朝时期只有祖冲之造《缀述》的记载，而无《缀术》及祖暅之作《缀术》的说法。到隋、唐时期，出现《缀术》之名，卷数为五卷或六卷，大多数仍说祖冲之著；同时，也有个别人说祖暅之作《缀术》。因此，我们认为，对祖冲之而言，《缀述》与《缀术》是一部著作。在流传过程中，著作改变题目的事是经常发生的。《缀术》中有祖暅之的增补，故后人又有祖暅之《缀术》之

---

① 严敦杰，祖冲之科学著作校释，辽宁教育出版社，2000年。本编凡引祖冲之父子语，如不说明，均据此。

② 杜石然，祖冲之，见：中国古代科学家传记，上册，科学出版社，1992年，第221～239页。

说。因此，钱宝琮说祖冲之、祖暅之都可以说是《缀术》的作者，是正确的。

《缀术》与祖冲之《九章注》的关系，也是人们争论不休的问题。《南齐书》、《南史》说祖冲之“注《九章》，造《缀术》数十篇”，令人理解上存在歧义。祖冲之注过《九章算术》是无疑的。《日本国见在书目》有《九章》九卷，祖中注，《九章术义》九卷，祖中注。又有《缀术》。但是，也可能其《缀术》就是《九章注》。钱宝琮主编的《中国数学史》持后一种看法。他说：祖冲之写成了数十篇专题论文，附缀于刘徽注的后面，叫它“缀述”，也就是他的《九章》注。目前，难以对这两种说法作出中肯的评判。

《缀术》的内容已不可详考。王孝通《上缉古算经表》指责“祖暅之《缀术》曾不觉方邑进行之术，全错不通；刍甍、方亭之问，于理未尽”①，可见方邑测望问题及体积问题是其中重要内容。《隋书 · 律历志》引祖冲之圆周率的成就，开差幂、开差立的内容，李淳风等《九章算术注释》引祖暅之开立圆术，都应该是《缀术》的内容。

《缀术》失传的时间已不可考。《宋史 · 楚衍》说楚衍通《缀术》。这常被人们作为《缀术》在宋初仍存世的证据。可是元丰七年（1084）刻十部算经时已没有《缀术》，博学多才的沈括将南齐误为北齐，祖暅误为祖亘，可见他亦未见到过此书。如果楚衍精通《缀术》，那么《缀术》是在楚衍之后不到半个世纪内亡佚的。一般说来，一部书亡佚，或者因为战乱，或者因为艰深而无人问津。但是，楚衍和他的学生贾宪、朱吉都是数学大家，数学已经复兴，而同时的北宋没有大的动乱，11 世纪上叶存在的重要著作，不会在下叶便无踪影。我们认为，《隋书 · 律历志》提供了《缀术》失传的原因，这就是“学官莫能究其深奥，是故废而不理”。唐初数学尽管有王孝通的三次方程解法，李淳风等整理十部算经，国子监设算学馆等创设，但数学水平已远不如魏晋南北朝。李淳风等《九章算术注释》，不但没有什么创造，反而几次指责刘徽，其数学水平之差跃然纸上，甚至连圆内接正六边形的周长与圆径之比为三比一都说“难晓”，需举实物为喻。《缀术》在算学馆需修四年，可见相当艰深。因此，“学官莫能究其深奥”是可信的。王孝通对《缀术》的指责为此提供了旁证。王孝通在历法上是守旧派。他著《缉古算经》，自诩千金不能易一字，缺乏一个科学工作者应有的谦虚和实事求是的作风。他对《缀术》的指责说明他与算学馆学官一样，不能理解《缀术》艰深的内容。这很像明朝数学大家顾应祥对李冶《测圆海镜》的指责。总之，《缀术》是唐朝学官看不懂被废而不理，完全毁坏大约在安史之乱之后。②

六　甄鸾及其数学著作

甄鸾是一位多产的数学家，现传自汉至唐的十部算经中有二部是他的著作，这就是《五曹算经》、《五经算术》。他是唐以前传世作品最多的数学家。

（一）甄鸾

甄鸾，字叔遵。北周中山无极（今河北）人。史书无传，生平不详。现传《夏侯阳算

---

① 唐 · 王孝通，缉古算经，郭书春点校，郭书春、刘钝点校，《算经十书》，辽宁教育出版社，1998 年。繁体字修订本，九章出版社，2001 年。以下凡引《缉古算经》原文，均据九章版。

② 郭书春，是《缀术》全错不通还是王孝通莫能究其深奥，数学史研究，（7）：20 ~ 25。内蒙古大学出版社、九章出版社，2001 年，本编凡引郭书春对王孝通的评价，均据此。

经》卷上“言斛法不同”节称：“至梁大同元年甄鸾校之，用二尺九寸二分。”《隋书·律历志上》引《甄鸾算术》云：“玉升一升，得官斗一升三合四勺。”玉升是北周保定五年（公元565）颁行的，可见甄鸾入仕于周，校斛法。《数术记遗》题“北周汉中郡守、前司隶、臣甄鸾注”，司隶是督察弘农等七郡的官员。可见，他为《数术记遗》作注时任汉中郡守，不作司隶了。《笑道论》题作“前司隶毋极县开国伯甄鸾撰”。甄鸾崇奉佛教，与周武帝崇道教相悖，天和四至五年（公元569~570）鸾撰《笑道论》。甄鸾还造《天和历》（公元566），虽未颁行，但当时颁行的历法参用推步。

（二）甄鸾撰注的数学书

甄鸾所撰注的数学书，史籍记载的极多。①：

关于《周髀算经》的有：《周髀》一卷，甄鸾重述（《隋书·经籍志》、《通志·艺文略》。《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》作甄鸾注）；《周髀算经》二卷，赵君卿注，甄鸾重述，李淳风等注释（《崇文总目》、《中兴馆目》、《玉海》、《文献通考》）。

关于《九章算术》的，除在第二节已经提到的外，还有：

《九章算经》九卷，甄鸾撰（《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》）。

关于《海岛算经》的有：甄鸾《海岛算经》一卷（《宋史·艺文卷》、《玉海》）。

关于《孙子算经》的有：《孙子算经》三卷，甄鸾撰，李淳风注（《新唐书·艺文志》、《通志·艺文略》、《旧唐书·经籍志》作甄鸾撰注）。

关于《五曹算经》的有：《五曹算经》五卷，甄鸾撰（《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》、《通志·艺文略》、《日本国见在书目》）；《五曹算经》三卷，甄鸾撰（《旧唐书·经籍志》）；甄鸾《五曹算术》二卷（《宋史·艺文志》）；李淳风注甄鸾《五曹算经》二卷（同上）；《五曹算经》一卷，甄鸾注（《崇文总目》）。

关于《张丘建算经》的有：《张丘建算经》一卷，甄鸾撰（《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》，后者作“注”）；《张丘建算经》三卷，甄鸾注（《直斋书录解题》）；《张丘建算经》三卷，甄鸾注，李淳风注释，刘孝孙细草（《文献通考》）。

关于《夏侯阳算经》的有：《夏侯阳算经》，三卷，甄鸾注（《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》）。

关于《五经算术》的有：甄鸾《五经算术》一卷（《通志·艺文略》）；《五经算术》二卷，甄鸾注，李淳风注释（《玉海》）。

关于《数术记遗》的有：《数术记遗》一卷（《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》）。

关于《大衍算法》的有：甄鸾注：徐岳《大衍算法》一卷（《宋史·艺文志》）。

关于《三等数》的有：《三等数》一卷，董泉撰，甄鸾注（《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》、《日本国见在书目》）。

关于《甄鸾算术》的有：《甄鸾算术》（《隋书·律历志》引）。

关于《七曜算术》的有：《七曜算术》，一卷，甄鸾撰（《隋书·经籍志》、《通志·艺

① 以下参考李俨，中国古代数学史料（修订本），见：李俨钱宝琮科学史全集，第二卷，辽宁教育出版社，1998年，第95~97页。

文略》)；等等。

史籍记载甄鸾撰注算书之多，可以说是少见的，可是大部分已失传，目前传世的只有《五经算术》、《五曹算经》、《数术记遗注》以及《周髀算经》的重述。

关于甄鸾对《周髀算经》的“重述”，钱宝琮《周髀算经提要》说：“《周髀》书中有很多数字计算，甄鸾均详细叙述演算程序和逐步所得的数字。没有数字计算的文句，他就不加解释。赵爽的勾股圆方图说是一篇简明的勾股算法纲要，甄鸾依据勾三、股四、弦五的特例来核对它的各个命题。因他对于有关勾股形的基本原理有了很多误解，连核算的工作都没有做好。”钱宝琮的评价是中肯的，下面我们不再对甄鸾的《周髀》“重述”作评述。

(三)《数术记遗注》

徐岳的《数术记遗》文字过于简括，如果没有甄鸾注，人们如读天书。如本文之“犹川人士迷其指归，乃恨司方之手爽”，甄鸾以《狐疑论》中的“容成知方之术”阐释，是用一标竿的影子出入一个圆来确定东西与南北的方向。在第 13 种算法“珠算”的注中，甄鸾具体描绘了早期的珠算。在第 14 种算法“计数”的注中，甄鸾提出“大水不知广狭”、“长竿量高”及“深坑尺数”3 个测量问题。前、后两个问题都是借助于构造全等关系将不可及之线段移至可及之处进行测量。这种方法在《周髀算经》、《九章算术》等传统数学著作中没有见过。应该说，《数术记遗注》在甄鸾现存著作中是水平最高的。

(四)《五曹算经》

《五曹算经》五卷，分别是田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹。曹是地方行政业务的分科。《晋书 · 职官志》有户曹、法曹、金曹、贼曹、兵曹、吏曹等名目。《魏书 · 官氏志》又有田曹、集曹等名目。因此，钱宝琮认为《五曹算经》的编写年代在元魏初年之后。史籍除甄鸾撰《五曹算经》的记载外，《新唐书 · 艺文志》还有韩延撰《五曹算经》五卷。南宋本《五曹算经》未云其作者。《四库全书》认为“甄、韩二家皆注是书者也，其作者则不知为谁。”[①] 钱宝琮认为这毫无根据，韩注本早已失传。传本《五曹算经》的“内容浅近易晓，无须注解，实际上也没有注解”，因此，甄鸾“搜集了当时与州县行政有关的算术问题，编成这五卷书是无可怀疑的”。[②]数学史界一直沿用钱宝琮的观点。

《五曹算经》共 67 问，解法浅近，都避免了分数。田曹中提出了一些《九章算术》所没有的腰鼓田、鼓田、蛇田、箫田、覆月田、牛角田、四不等田等复杂的平面形面积问题，可是，这些解法不是有相当大的误差的近似算法，就是犯有理论上的错误。后来，杨辉指出了其四不等田计算理论上的错误。[③] 但是，《五曹算经》的错误仍然影响到元、明的数学著

---

① 清 · 戴震，五曹算经提要，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 297 页。

② 钱宝琮，五曹算经提要，见：钱宝琮校点，《算经十书》下册，第 409 页。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第四卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 409 页。

③ 南宋 · 杨辉，田亩比类乘除捷法卷下，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 1048 页。

作，王文素著《算学宝鉴》（1524）才作了纠正。① 钱宝琮《中国数学史》说，兵曹第九题、金曹第十题的解法对于十进小数的概念有了新的发展，是中国数学史中一个应予重视的事件。

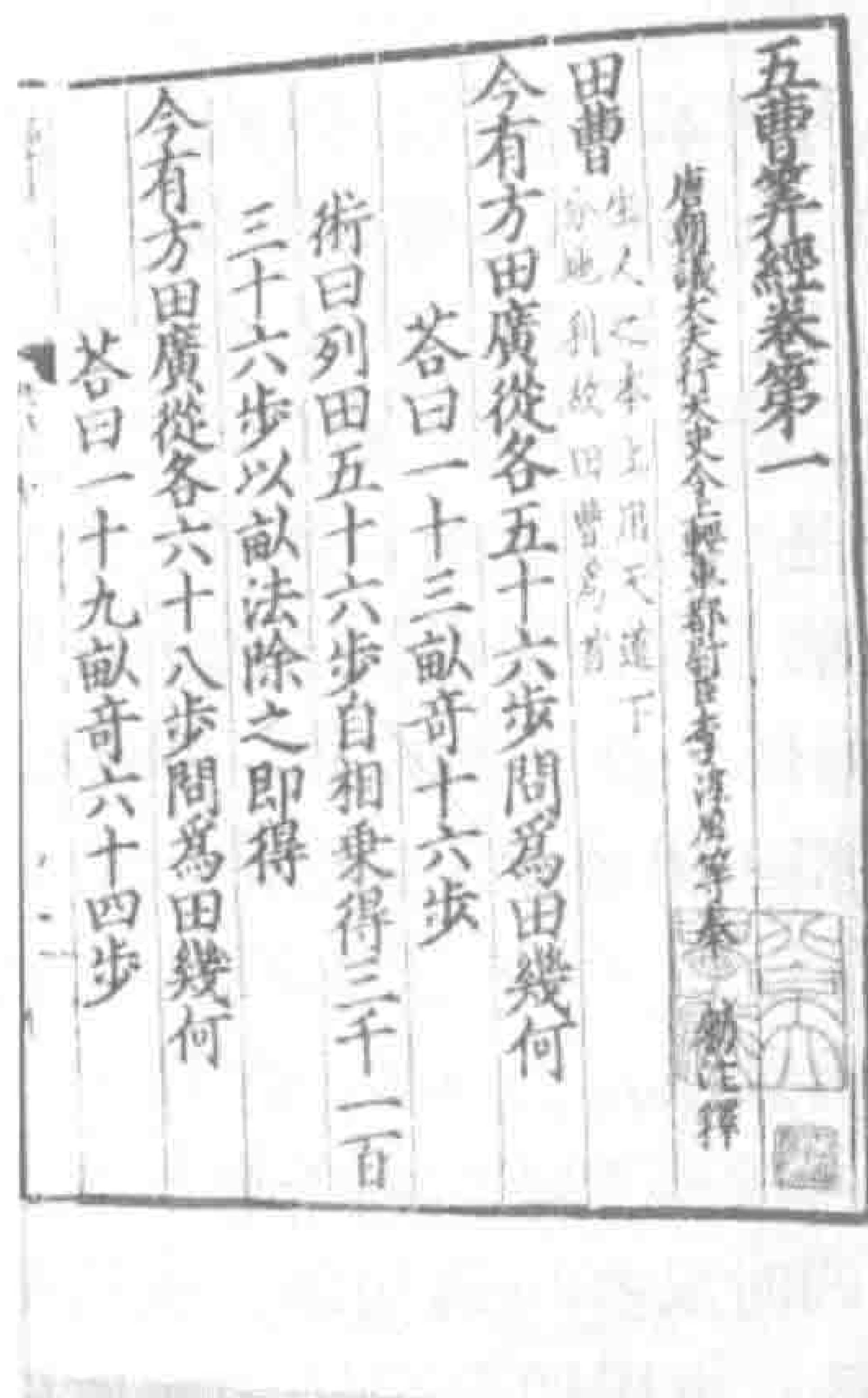

五曹算經卷第一
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋
田曹 生人之本上用天道下分地利故田曹爲首
今有方田廣從各五十六步問爲田幾何
荅曰一十三畝奇十六步
術曰列田五十六步自相乘得三千一百
三十六步以畝法除之即得
今有方田廣從各六十八步問爲田幾何
荅曰一十九畝奇六十四步

图 7-4-4　《五曹算经》书影（南宋本）

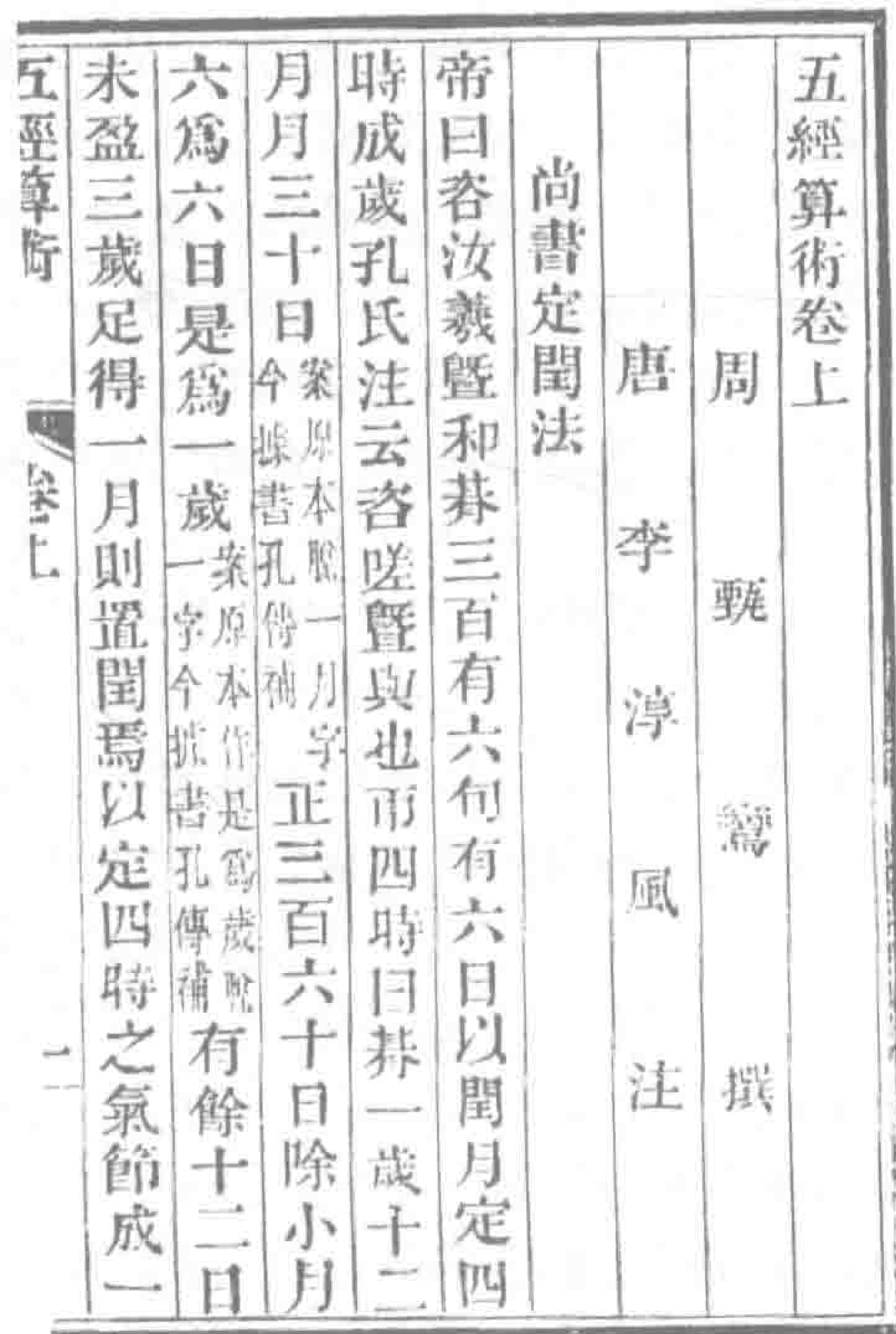

五經算術卷上
周　甄　鸞　撰
唐　李　淳　風　注
尚書定閏法
帝曰咨汝羲暨和朞三百有六旬有六日以閏月定四
時成歲孔氏注云咨嗟暨與也帀四時曰朞一歲十二
月月三十日 案原本脫一月字今據書孔傳補 正三百六十日除小月
六爲六日是爲一歲 案原本作是爲歲脫一字今據書孔傳補 有餘十二日
未盈三歲足得一月則置閏焉以定四時之氣節成一
五經算術　卷上　一

图 7-4-5　《五经算术》书影（武英殿聚珍版）

《五曹算经》有北宋秘书省刻本，已佚。南宋嘉定六年（1213）鲍澣之翻刻了秘书省本，到清初只有太仓王杰家藏一部，后转入常熟毛扆手中，今藏北京大学图书馆，见图 7-4-4。1980 年，文物出版社影印，收入《宋刻算经六种》。清康熙二十三年（1684）毛扆影抄了南宋本，世称汲古阁本，后传入清宫，藏天禄琳琅阁，今存台北故宫博物院。1932 年，北平故宫博物院影印汲古阁本，收入《天禄琳琅丛书》。

明永乐六年（1408），将与北宋本的底本不同的另一抄本分类抄入《永乐大典》"算"字条各卷。清乾隆三十九年（1774）戴震在《四库全书》馆从《永乐大典》辑录出《五曹算经》，略加校勘，先后收入《武英殿聚珍版丛书》和《四库全书》。

乾隆四十一年，戴震以汲古阁本为底本重加整理，由孔继涵刻入微波榭本《算经十书》。微波榭本在清中叶之后多次翻刻，还被刻入鲍廷博《知不足斋丛书》。

1963 年，钱宝琮以微波榭本为底本，重加校勘，收入钱宝琮校点《算经十书》（北京中华书局）。

1998 年，郭书春以南宋本为底本，重加校勘，收入郭书春、刘钝点校《算经十书》（简体字，辽宁教育出版社）。2001 年，又加修订，收入台北九章出版社出版的《算经十书》。

---

① 郭书春，《算学宝鉴》面积问题试析，珠算通讯，2000（1）：31～39。王文素与《算学宝鉴》研究。山西人民出版社，2002 年，第 53～64 页。

（五）《五经算术》

《五经算术》五卷，甄鸾撰。现传本是戴震从《永乐大典》中辑录出来的，原无“甄鸾撰”字样。戴震《五经算术提要》说：“《隋书 · 经籍志》有《五经算术》一卷，《五经算术录遗》一卷，皆不著撰人姓名。《唐（书）· 艺文志》则有李淳风注《五经算术》二卷，亦不言其书为谁撰。今考是书举《尚书》、《孝经》、《诗》、《易》、《论语》、三《礼》、《春秋》之待算乃明者列之而推算之术悉加‘甄鸾按’三字于上，则是书当即鸾所撰。”① 戴震的推断符合《通志》、《玉海》的记载。

关于《五经算术》的数学内容，钱宝琮评论说：“东汉时期为儒家经籍作注解的人，如马融、郑玄等，都兼通算术。在他们的注解中掺杂了为一般读经的人难以了解的数学知识。甄鸾的《五经算术》列举《易》、《诗》、《书》、《周礼》、《礼仪》、《礼记》以及《论语》、《左传》等儒家经籍的古注中有关数字计算的地方加以详尽解释，对于后世研究经学的人是有所帮助的。但有些解释不免穿凿附会，对于经义是否真有裨益是可以怀疑的。经书中出现了几个像万、亿、兆、秭等的大数名称，原来只是表示为数众多的意义，注经的人用十进位制或万进位制来解释已属多事，而甄鸾认为大数进法以‘万万为亿，万万亿为兆’最为适当，以前的经注都不合适，事实上和《尚书》、《诗经》的原意相去更远了。《论语 · 学而篇》‘道千乘之国’，东汉马融注：‘千乘之国其地千成，居地方三百一十六里有畸。’《周礼 · 考工记》‘轮人为盖’节郑玄注：‘二尺为勾，四尺为弦，求其股。……面三尺几半。’甄鸾俱用开平方法演算，得出更准确的结果。《仪礼》、《礼记》中的郑玄注，有关算术的部分，甄鸾亦详述它们的演算过程。《尚书 · 尧典》有‘以闰月定四时成岁’这句话，他用战国时期的四分历法来解释它。《左传》中有很多有关历日的记录，也用四分历法中的所谓‘周历’来推算。”② 钱宝琮的看法是正确的。

《五经算术》的宋刻本已亡佚。清开《四库全书》馆，1774 年戴震从《永乐大典》中辑录出《五经算术》，现今流传的各版均是戴震辑录本的各种校勘本。

七　其他数学家

南北朝还有一批其数学著述未能流传到后世的数学家。李俨在《中国数学史料》和《中国数学大纲》里提到了何承天、皮延宗、赵歐、高允、张纘、庾曼倩等，简要介绍如下。

（一）南朝数学家

南朝数学家见于记载的有以下几位。

1．何承天

何承天（公元 370 ~ 447），东海郯（今山东省郯城）人。《宋书 · 何承天》记载，他五岁

① 清 · 戴震，五经算术提要，见：《四库全书 · 子部 · 天文算法类》，第 797 册，台湾商务印书馆，1986 年，第 195 页。

② 钱宝琮，五经算术提要，钱宝琮校点：《算经十书》下册，中华书局，1963 年。第 437 ~ 438 页。李俨钱宝琮科学史全集，第四卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 331 页。

丧父，母亲徐氏聪明博学，承天自幼受到良好教育，“儒史百家，莫不该览”。承天在晋做过参军、司马等官。刘宋永初末年（公元422），补南台治书侍御史。元嘉十六年（公元439），除著作左郎，撰国史，寻转太子率更令，著作如故。公元442年，立国子学，以本官领国子博士，迁御史中丞。时魏军南伐，承天上《安边论》，凡陈四事。承天博今通古，一时所重。宋文帝每有疑义，必先访之，信命相望于道。他著述甚多，最著名的是制定《元嘉历》。

《宋书·律历志》记载，何承天于元嘉二十年（公元443）完成《元嘉历》。他在其舅父徐广所记《七曜历》得失的基础上，“比岁考校，至今又四十载，故其疏密差会，皆可知也”。《元嘉历》经过太史钱乐之、员外散骑郎皮延宗等的辩难，何承天又作了修正，宋太祖刘裕批准了有司“承天历法，合可施用”的奏折，并决定于元嘉二十二年（公元445）起颁行，在南朝一直施用到公元509年，次年才被祖冲之的《大明历》取代。何承天制定《元嘉历》时创造了调日法；根据《隋书·天文志》的记载，何承天实际上使用了圆周率$\frac{22}{7}$。

2. 皮延宗

皮延宗，生平不详，仕南朝刘宋为员外散骑郎。何承天上《元嘉历》（公元443），他曾建议“以故岁之晦，为新纪之首”。何承天接受了他的意见。又《隋书·律历志》记载，皮延宗亦曾提出新的圆周率，已佚。

3. 顾越

顾越（480～569），字允南，吴郡盐官（今浙江海宁）人。南朝文学家、经学家、数学家。梁陈间国子博士，《南史·顾越》云他“于《九章》、《七曜》、音律、图纬咸尽精微”。

4. 庾诜和庾曼倩

庾诜（455～532），字彦宝，新野（今河南省）人。《梁书·处士》说他“幼聪警笃学，经史百家无不该综。纬候书射，棊算机巧，并一时之绝”。终生不仕，著《帝历》二十卷，《易林》二十卷，其他著述八十余卷。[①]他精于数学，不知是否有数学著作。

庾曼倩，字世华。庾诜子。《梁书·处士》云，他“早有令誉，梁世祖在荆州，辟为主簿，迁中录事。”后转谘议参军。注《算经》及《七曜历术》。

（二）北朝数学家

北朝数学家见于记载的有以下几位。

1. 高允

高允（公元390～487），字伯恭，渤海（今河北景县）人。《魏书·高允》记载，他“性好文学，担笈负书，千里就业。博通经、史、天文、术数”。神䴥三年（公元430），拜中书博士。迁侍郎、从事中郎，领著作郎。司徒崔浩集诸术士，考校汉元以来，日月蚀及五星行度，编成《魏历》。高允指出：“天文历数不可空论。夫善言远者必先验于近。”认为：“汉元年冬十月，五星聚于东井，此乃历术之浅。”“是史官欲神其事，不复推之于理。”“今讥汉史，而不觉此谬，恐后讥今犹今之讥古。”崔浩与高允辩论，人多批评高允，唯游雅（？～461）说：“高君长于历数，也不虚也。”后来崔浩的研究证实高允是对的，对高允说：“及更考究，果如君语。”又对游雅说：“高允之术，阳元之射也。”至此“众乃叹服”。后

① 唐·姚思廉，梁书，北京：中华书局，1973年。本编凡引《梁书》文字，均据此。

来，高允为北魏重臣，与崔浩同修国史，参决大政，敢于直谏。史臣赞扬他“依仁游艺，执义守哲”，“蹈危祸之机，抗雷电之气，处死夷然，忘身济物”，“有魏以来，斯人而已”。高允“明算法，为《算术》三卷”。另有关于《左氏传》、《毛诗》的注述凡有百余篇。李迪、冯立昇推测此《算术》即传到新罗、日本的数学著作《六章》。①

2. 赵𢾊

赵𢾊，北凉河西人，生平不详，任北凉太史。善历算。据《隋书 · 经藉志》，他著有《河西甲寅元历》一卷，《甲寅元历序 》一卷，《七曜历数算经》一卷，《阴阳历术》一卷，《赵𢾊算经》一卷。《宋书 · 氐胡》云，宋元嘉十四年（公元 437），北凉主茂虔奉表献方物，并献若干书籍，其中有《周髀》一卷，《赵𢾊传》并《甲寅元历》一卷。《魏书 · 律历志》云，北魏灭北凉，“得赵𢾊《玄始历》，后谓为密，以代《景初》”，施行达 70 年（452 ~ 522）。《玄始历》即《甲寅元历》。赵𢾊第一次打破了 19 年 7 闰的闰周，创用 600 年 221 闰的新闰周。它定回归年为 365. 244306 日，朔望月为 29. 530600 日，都比较精确。②赵𢾊的数学著作已失传，其具体成就无法详考，但他是一位造诣颇深的数学家则是无疑的。

3. 张缵

张缵，《隋书 · 经籍志》云：“《算经异义》一卷，张缵撰。”《南史 · 张弘策传》云范阳方城（今河北省固安县）张弘策次子张缵。“张缵，字伯绪”，“尚（梁）武帝第四女富阳公主。”“缵好学，兄缅有书万余卷，昼夜披读，殆不辍手。”欲遍观阁内书籍。大通（公元 527 ~ 529）中“为吴兴太守，居郡省烦苛，务清静，人吏便之。大同二年（公元 536），征为吏部尚书。后门寒素一介者，皆见引拔，不为贵门屈意，人士翕然称之。”后为湘州刺史、雍州刺史。著《鸿宝》一百卷，文集二十卷。未知其中是否有算书。因此，李俨《中国古代数学史料》在记述了《南史》所载张缵传后说：“以上《隋书》、《南史》所记二张缵，未知是否一人。”

就现在传世的数学著作而言，北朝的比南朝的多，但就知名数学家而言，两者旗鼓相当。大约《张丘建算经》等书是普及读物，流传广，影响大，而祖冲之父子等的高深数学非一般士大夫学者所能知，而使颜之推得出“江南此学殊少”，“河北多晓此术”的结论。

第五节　隋至唐中叶的数学著作和数学家

一　刘　焯

刘焯（公元 544 ~ 610），字士元，信都昌亭（今河北冀县）人。《隋书 · 刘焯传》说他出生于小官吏家庭。他“犀额龟背”，却“聪敏沈深”，先后学《诗》、《左传》、《礼》，又与刘炫就读于刘智海家，“向经十载，虽衣食不继，晏如也”。约开皇三年（公元 583），刘焯为从事，不久举秀才，同修国史，兼参议律历，后任员外将军。刘焯生性秉直，恃才傲物，常与儒生“共论古今滞义，前贤所不通者”。

---

① 冯立昇、李迪，《六章》、《三开》新探，西北大学学报（自然科学版），2000，30（1）：89 ~ 92

② 编写组：中国天文学史，第 98 页。北京：科学出版社，1981 年。

刘焯和刘孝孙批评张宾《开皇历》的六条失误，却被诬陷为“非毁天历，率意迂怪”，“妄相扶正，惑乱时人”，遂“除名为民”。刘焯在家乡继续研究儒家经典，同时着力研习《九章算术》、《周髀算经》、《七曜历书》等历算名著。“推步日月之法，量度山海之术，莫不核其根本，穷其奥秘。”著有《稽极》10卷，《历书》10卷，声名远播。当他知道隋文帝起用张胄玄制定新历时，便“增损（刘）孝孙历法，更名《七曜新术》，以奏之”，却遭到了张胄玄的诋毁。刘焯只得再回老家。开皇十七年，张胄玄制成新历，得到隋文帝的支持。二十年，刘焯再次增修其书，驳正张胄玄的历法，名曰《皇极历》，得到杨广嘉许，迁为“太学博士”，但他的历法并没有被使用，不久就称病返乡。大业元年（公元605），杨广继位，召令刘焯与张胄玄参校历法。双方“互相驳难，是非不决”，刘焯愤而辞职，再归故里。

大业四年因张胄玄历日食预报不准，隋炀帝再诏刘焯，欲颁行其《皇极历》，受到袁充等人的阻挠而未果。刘焯悲愤成疾，于大业六年抱恨辞世。

《皇极历》在数学上最重要的贡献就是创造等间距二次内插法。

二　王孝通与《缉古算经》

《缉古算经》原称《缉古算术》，一卷，唐王孝通撰并注。

（一）王孝通

王孝通，生平、籍贯不详。他出身平民，少年时学习数学、天文学，终生研究，迄将皓首，未被重视。入唐，武德元年（公元618）为太史丞（《旧唐书·傅仁均传》），最迟在武德六年起用为历算博士（一说为算学博士）。撰注《缉古算术》，是王孝通的最大贡献，解决了比《九章算术》更加复杂的多面体体积问题和勾股问题，是现存最早的记载三次、四次方程的著作。《上缉古算术表》是在公元629年之后。武德二年施行的傅仁均所造《戊寅元历》所推算的日、月食屡次不验，六年祖孝孙受诏使王孝通执张宾所造《开皇历》驳之。九年，又诏崔善为与王孝通校正傅仁均历，提出30余条校正意见，付太史施行。

关于对王孝通的评价，学术界有不同看法。钱宝琮在《中国数学史》中认为，王孝通纠正傅仁均历中的某些错误，是有贡献的。但他根据落后于当时天文学发展水平的《开皇历》指责傅仁均用定朔及计算中使用岁差，并恢复上元积年，是错误的。总体说来，他在天文学上是守旧派。“王孝通在数学方面，的确是一个先进的作者。”有的学者认为“千金一字”反映了王孝通的治学严谨，是用他认为最佳的方法去解题，而且在文字上也细加推敲，字斟句酌，表明其功夫之深，用心之苦，信心之坚。郭书春的看法则相反：王孝通历数周公以后的数学名家，无一当意者，虽表彰刘徽为“一时独步”，却又说“未为司南”，而“自刘已下，更不足言”，“其祖暅之《缀术》，时人称之精妙。曾不觉方邑进行之术全错不通，刍甍方亭之问于理未尽”。这说明，王孝通像算学馆学官一样对《缀术》“莫能究其深奥”而妄加指责。对自己的《缉古算经》，王孝通自诩到无以复加的地步，唯恐自己“一旦瞑目，将来莫睹”，“后代无人知者”。他要唐皇“请访能算之人，考论得失，如有排其一字者，臣欲谢以千金”，自以为前无古人，后无来者，目空一切之态，跃然纸上。数学家不必做谦谦君子，但像王孝通这样狂妄自大，贬低前贤，蔑视同辈，轻视后学，是不足取的。

（二）《缉古算经》

隋统一中国后，进行了修运河、筑长城等大规模土木水利工程，提出了若干新的数学问题。王孝通的数学活动与这种社会需要密切相关。《上缉古算术表》认为“《九章》商功篇有平地役功受袤之术。至于上宽下狭，前高后卑，正经之内阙而不论”。他发现当时人们使用同样的方法处理欹邪与平正两种不同的情形，如同圆孔方枘，“遂于平地之余，续狭斜之法，凡二十术，名曰《缉古》”。“缉”，续也。因此，《缉古算术》可以看做《九章算术》的续篇。

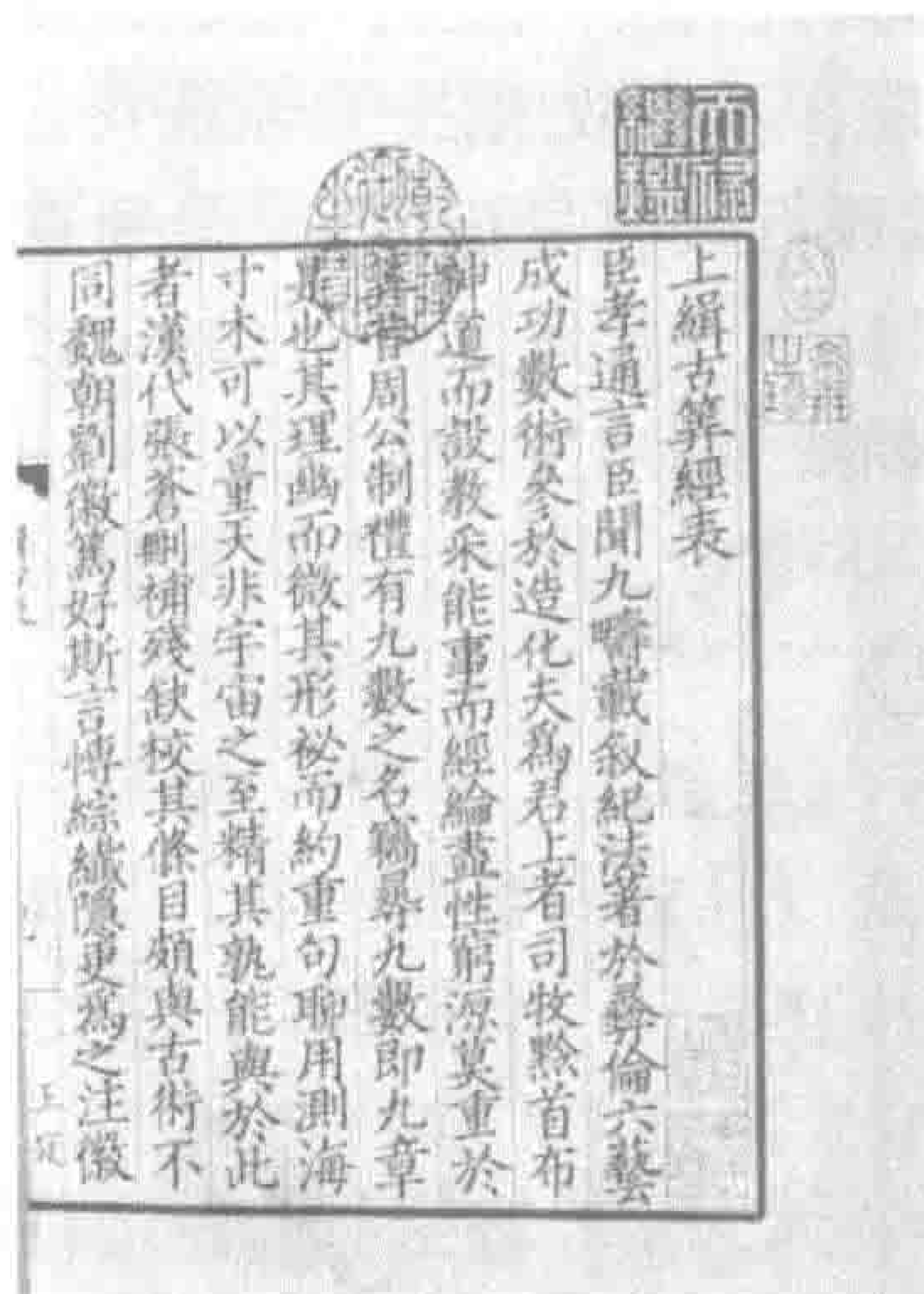

上緝古算經表
臣孝通言臣聞九疇載敘紀法著於彝倫六藝
成功數術參於造化夫爲君上者司牧黔首布
神道而設教采能事而經綸盡性窮源莫重於
算昔周公制禮有九數之名竊尋九數即九章
是也其理幽而微其形秘而約重句聊用測海
寸木可以量天非宇宙之至精其孰能與於此
者漢代張蒼刪補殘缺校其條目頗與古術不
同魏朝劉徽篤好斯言博綜纖隱更爲之注徽

图 7-5-1　《缉古算经》书影
（汲古阁本）

《缉古算经》的 20 个问题可以分成 4 类内容：

第一类就是第一问，是一个关于历法的问题，大约是针对《皇极历》提出的。《皇极历》在求定朔时刻术中月离加减数和日躔朓降率，单用月行速度作分母，忽略了日行速度。据王孝通自注，此问与《九章算术》均输章犬追兔术相似。然而，传本《九章算术》中没有此问。

第二类包括第二至第六问及第八问，共 6 个问题，都是工程中的土方体积问题。一方面要计算某些复杂的立体的体积及其长、阔、高，另一方面要从已知的某一部分工程的体积及一些参数，求这一部分的长、阔、高。其问题的复杂程度超过以往任何一部算经。第三问中的求堤都积术给出了求由一堑与一羡除拼合成的立体的体积公式，是现存算经中所未有的。

第三类包括第七问及第九至第十四问，共 7 个问题，都是关于仓房和地窖的问题。

第四类是第十五问至第二十问，共 6 个问题，都是已知勾股形的勾、股、弦三事中的二者的积或差，求勾、股、弦。这类解勾股形问题也是现存汉魏南北朝算书中所没有的。

第二、三、四类问题大都归结为开带从立方，即求正系数三次方程的正根。有的勾股问题归结为求解形如 $x^4 + bx^2 = c$ 的四次方程的正根。其中，b, c 均为正数，都通过两次开平方求解。这些问题在当时是比较艰深的。其自注说明了方程系数的来源，由此可以了解他列方程的程序。《缀术》失传后，《缉古算经》成为中国数学史上首次论述三次、四次方程的著作。

《缉古算术》原为四卷，宋之后合为一卷。其四卷也许就是上述四类。它的首次刊刻是北宋元丰七年（1084）的秘书省刻本，今不存。南宋嘉定六年（1213）的鲍澣之刻本至清初尚存一孤本，康熙甲子年（1684）毛扆据此影钞成汲古阁本，而南宋本后来不知流落何处。毛扆看到的南宋本的末后有 4 个勾股问题烂脱。现传各本均源于此。主要的版本有戴震校订的微波榭本《算经十书》、李潢的《缉古算经考注》、钱宝琮校点本《算经十书》、郭书春点校本《算经十书》。后世对《缉古算术》的研究贡献最大的是李潢、钱宝琮。李潢在《缉古算经考注》中以《九章算术》的方法阐释《缉古算经》，非常得体，并勘误补阙 700 余字。他之前的张敦仁撰《缉古算经细草》，以天元术解题，他之后的揭廷锵撰《缉古算经图草》、陈杰撰《缉古算经细草》及《图解》、《音义》，以西法阐释，显然不符合王孝通原意。钱宝琮 1963 年出版校点本，校改 20 余处。后来又发表文章，修正校点本的校勘。

三　李淳风等整理十部算经

李淳风等注释《周髀算经》、《九章算术》等十部算经，是唐初以前中国数学奠基时期著作的总结。

（一）李淳风

李淳风（602～670），岐州雍（今陕西省凤翔县）人，唐初天文学家、数学家，明天文、历算、阴阳之学。淳风自小受到良好的教育，博览群书，对天文、星占、历算尤感兴趣。贞观初（公元627）淳风上书唐太宗批评当时所行戊寅元历的失误，还建议重铸黄道浑仪，授将仕郎，直太史局。贞观三年撰《乙巳元历》。七年撰《法象志》7卷，系统论述了浑仪的发展，实际上是制造新的天文仪器的理论基础。浑天黄道仪于贞观七年制成。该浑仪为三重，除以往的六合仪和四游仪之外，在两者之间增加一个三辰仪，它有璇玑规、黄道规和月游规。三规都刻有宿度，且能沿极轴旋转，可以同时得到赤道、黄道、白道 三种坐标的读数。它使浑仪观测性能取得划时代的进步。十四年驳正傅仁均历。十五年任太常博士迁太史丞，撰《晋书》、《隋书》之《天文志》、《律历志》、《五行志》，这些是中国天文学史、数学史、度量衡史的重要文献。约十九年，撰成《乙巳占》，其中含有十分丰富的天象资料和气象史料。《旧唐书·李淳风传》云，贞观二十二年，“太史监侯王思辩表称《五曹》、《孙子》理多舛驳。淳风复与国子监算学博士梁述、太学助教王真儒等受诏注《五曹》、《孙子》十部算经”。高宗显庆元年（公元656）注释完成，“高宗令国学行用”。同年，以修国史功封昌乐县男。龙朔二年（公元662）改太史局为秘阁局，李淳风任秘阁郎中。麟德元年（公元664），李淳风吸取隋刘焯在《皇极历》中创造的定朔计算方法及用二次内插法计算太阳、月亮的不均匀视运动等方法，在《乙巳元历》基础上，制定《麟德历》，次年颁行。直到玄宗开元十六年（公元728）方为一行的《大衍历》所取代。《麟德历》设1340为总法，作为岁实、朔实、交周和五星周期的共同分母，使运算简捷，自称“绝妙之极”，后人亦多效法。《麟德历》另一个创造是破除自古以来的章蔀纪元方法，废闰周而直接以无中气之月为闰月。①

（二）十部算经的注释

李淳风等注释的十部算经经清戴震整理后称为《算经十书》。汉唐诸算经原先都称做“某某算术”，大约经李淳风等整理后改称“算经”。实际上，诸算经的传本中只有《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《张丘建算经》、《五经算术》等五部有李淳风等的注释，在各算经的注释中，以《周髀算经》的注释水平为最高。

李淳风等的《周髀算经注释》针对《周髀》中8尺之表南北千里日影相差1寸的说法指出：“以事验之，又未盈五百里而差一寸明矣。千里之言，故非实也。”认为这是脱离实际的，况且，测望的地面不可能是平面，“地既不平而用术，尤乖理验。”因此引入了四种斜面重差

---

① 刘金沂、赵澄秋、李淳风，见：金秋鹏主编，中国科学技术史·人物卷，科学出版社，1998年，第269～277页。陈久金，李淳风、杜石然主编，《中国古代科学家传记》，科学出版社，1992年，第348～352页。

术，是个创举。他们发现赵爽用等差级数插值法推算二十四节气所得的表影长短与何承天的《元嘉历》、祖冲之的《大明历》等实际测量所得的结果不同，指出“检勘术注，有所未通”，认为“每气差降有别，不可均为一概设其升降之理”。他们指出：“欲求至当，皆依天体高下远近修规以定差数。自霜降毕于立春，升降差多，南北差少。自雨水毕于寒露，南北差多，升降差少。依此推步，乃得其实。既事涉浑仪，与盖天相反。”① 这些意见都是正确的。

李淳风等的《九章算术注释》批评了均输章负笼术的失误，提出了正确的计算方法。在涉及圆的计算中，李淳风等以 $\pi=\frac{22}{7}$ 代替 $\pi=3$ 和徽率 $\pi=\frac{157}{50}$，从而更加精确。李淳风等《九章算术注释》最有意义的部分是引用了祖暅之的开立圆术，保存了祖暅之原理以及祖暅之借助此原理求出牟合方盖的体积，在刘徽的基础上彻底解决球体积的方法。《缀术》失传之后，祖冲之父子的这项成就赖此流传到今天，是十分宝贵的。

然而，李淳风等关于《九章算术》的其他注释则水平不高。他们或者大量重复刘徽注，或者在刘徽根据简约的原则认为不必加注的地方不厌其烦地注释。尤其是他们三次指责刘徽，说明李淳风等的数学理论水平和逻辑思想远在刘徽之下。

第一处指责在方田章方田术注释中，李淳风等认为刘徽关于“凡广从相乘谓之幂”的定义“全乖积步之本义”，一方面说“观斯注意，积幂义同”，一方面又由幂字的本义，说“循名责实，二者全殊”。实际上，《九章算术》没有幂的概念，其中的“积”既可以是面积，又可以是体积。刘徽在积中划出广从相乘这一种，称为幂，也就是现今之面积。显然，幂是积的一种。换言之，幂是积，而积不一定是幂。李淳风等既看不出积、幂的相同之处，又看不出它们的区别，指责正确的刘徽，恰恰暴露了自己的无知。

第二处是圆田术注释，李淳风等说，对周三径一，“刘徽将以为疏，遂乃改张其率。但周、径相乘，数难契合。徽虽出斯二法，终不能究其纤毫也。祖冲之以其不精，就中更推其数。今者修撰，捃摭诸家，考其是非，冲之为密。故显之于徽术之下，冀学者之所裁焉。”表彰祖冲之求圆周率的成绩是正确的，然而不应该贬斥刘徽。祖冲之与刘徽在圆周率问题上，没有是与非，只是精确度的高低。而且在中国数学史上，是刘徽首创了求圆周率的科学程序。科学的理论、正确的方法的建立，意义远比它们的应用重要。钱宝琮在《中国数学史》中指出：“李淳风缺少历史发展的认识，有意轻视刘徽割圆术的伟大意义，徒然暴露他们自己的无知。”这种看法非常中肯。

第三处在少广章开立圆术注释中，李淳风等在引用祖暅之开立圆术的前后说：“祖暅之谓刘徽、张衡二人皆以圆困为方率，丸为圆率。”“张衡放旧，贻哂于后。刘徽循故，未暇校新。夫其难哉，抑未之思也。”这里是不是准确反映了祖氏的意思，不得而知。刘徽批评《九章算术》开立圆术的错误，设计牟合方盖，指出了解决球体积的正确途径。刘徽多次阐发并应用了截面积原理，为祖暅之原理的最后完成做了充分准备。李淳风等贬斥刘徽，显然不理解刘徽推翻《九章算术》开立圆术，设计牟合方盖的重大理论意义和实践意义。

李淳风还注《九章算经经要略》一卷，已亡佚。

李淳风等《海岛算经注释》只是按照刘徽的术文给出了演算步骤，没有给出造术的理由。

---

① 唐 · 李淳风等，《周髀算经注释》，见：郭书春、刘钝点校，《算经十书》，辽宁教育出版社，1998 年。繁体字修订本，台湾九章出版社，2001 年。本编凡引李淳风等《周髀算经注释》，均据九章版。

李淳风等的《张丘建算经注释》依《九章算术》为《张丘建算经》有的题目补立了术文，对读者很有裨益。李淳风等还纠正了原书的粗疏，如卷上第19问用“方五斜七”由21寸计算圆内接正方形的边长，李淳风等则主张对21开平方求得边长的近似值为 $\sqrt{21}=14\frac{21}{25}$。卷上第20问原书径1寸的弹丸的体积是 $\frac{9}{16}$ 寸^3，显然是依照《九章算术》的开立圆术计算的。李淳风等则以祖暅之的公式，修正为 $\frac{11}{21}$ 寸^3。但是卷上第14问的错误，卷下第30，31问的球体积依 $\frac{9}{16}$ 的系数计算，有关圆面积依周三径一的计算，李淳风等未能纠正。

《九章算术》卷五、七、八和《孙子算经》、《五曹算经》、《缉古算经》等不见李淳风等的注释。

四　一行与《大衍历》

一行，俗名张遂（683～727），魏州昌乐（今河南省南乐县）人。一行自幼聪慧，博览群书。《高僧传》称一行“丱岁不群，聪黠明利，有老成之风，读书不再览，已暗诵矣”。青年时代即以学识渊博而闻名于长安。当时武三思当权，欲与一行结交。一行不屑与之为伍，只好隐于嵩山，削发为僧，取法名一行。此后，一行仍刻苦学习天文历算，为“寻访算术，不下数千里，知名者往询焉”。一次，“至天台国清寺，见一院古松数十步，门有流水。一行立于门屏间，闻院中僧于庭院布算，其声簌簌，既而问其徒曰：‘今日当有弟子求吾算法，已合到门，岂无人导达耶？’即除一算，又谓曰：‘门前水合西流，弟子当至。’一行承言而入，稽首请法，尽授其术焉。”①

开元五年（公元717），一行被朝廷安置在长安华严寺翻译佛经。唐玄宗常来请教“安国抚人之道”，一行“言皆切直，无有所隐”。开元九年，由于《麟德历》预报日食失误，唐玄宗诏一行改历。为此在一行的主持下，进行了三项具有重大价值的科学工作：

一是制造仪器和天文观测。一行与梁令瓒设计制造了黄道游仪和水运浑仪。其中，水运浑仪是一种借助水力驱动可以演示天象和报时的新仪器。

二是主持天文大地测量。一行根据刘焯晚年提出的设想，派出测量队到13个地点测量二至、二分正午时八尺表影之长和测量地点的“北极出地”高度，同时还测量了四个观测点实际距离。经过归算，得出“三百五十一里八十步极差一度”的结论。这实际上就是求出了地球子午线一度之长。② 一行的这一成就被李约瑟誉为是“科学史上划时代的创举”。③

三是制定《大衍历》。从开元十三年起，一行开始编制新的历法，历时两年草成，但一行在公元727年病逝。经历官陈玄景、善算赵昇等人的整理加工，公元729年正式颁布，这就是著名的《大衍历》。一行在《大衍历》中关于天文历法的计算有很多创新与改革，主要是不等间距二次内插算法和关于爻象历和阴阳历所用的插值法。后者发展了刘焯算法，采用

① 郑处诲，《明皇杂录》。

② 梁宗巨，僧一行发起的子午线实测，科学史集刊，第2集，科学出版社，1959年。

③ J. Needham, *Science and Civilization in China*, Vol. 3, Cambridge University Press, 1959, 292.

了两级等间距二次差内插方法。此外，在《大衍历》中，一行给出了太阳天顶为 0 至 81 度时，8 尺表影长的数值表格。它的数学意义是一份正切函数表，在中国数学史上是最早的。

五　边　冈

边冈，籍贯、生平不详，活动在唐末（9 世纪末 10 世纪初）。《新唐书 · 历志》云：

昭宗时，《宣明历》施行已久，数亦减差，诏太子少詹事边冈与司天监胡秀林、均州司马王墀改治新历，然而一出于冈。冈用算巧，能驰骋反复于乘除间。由是简捷、超径、等接之术兴，而经制、远大、衰序之法废矣。虽筹策便易，然皆冥于本原。其上元七曜，起赤道虚四度。景福元年，历成，赐名崇玄。

这是关于边冈活动的唯一记载。太子少詹事是负责东宫太子的饮食、礼仪、刻漏、车骑以及安全事务的"詹事府"的副职，官列正四品上。景福元年（公元 892）完成《崇玄历》，随即颁行全国，直至唐朝灭亡（公元 907）。《崇玄历》是一部有许多创新和影响深远的历法，不仅对若干天文数据和表格做了重要改进，而且对历法的一系列算法进行了成功的改革。[①] 他将相减相乘法推而广之，创造性地构造出三次、四次函数式以及分段叠加函数。这些算法共同构成了一种"高次函数"计算法的崭新的数学模式，取代了传统的数值表格加内插法，奠定了后世历法新算法的坚实基础，加速了中国古代历法的数学化进程，从而开启了中国古代历法计算公式化的一个新的时代，并极大地充实了中国古代数理天文学的算法内涵。

第六节　隋唐算学馆和明算科

隋唐在国子监设算学，唐更在科举中设明算科。这是中国数学史和教育史上的大事。

一　算　学　馆

隋朝在国子监中开始设"算学"。《隋书 · 百官志》云，国子寺祭酒（相当于今天国立大学校长）"统国子、太学、四门、书、算学，各置博士、助教、学生等员"。又说："算学博士二人，算助教二人，学生八十人，并隶于国子寺。"一说隋算学博士一人。国子监设算学改变了隋以前的官方数学教育仅限于"小学"，"魏晋以来，多在史官，不列于国学"的旧规。算学馆相当于现在最高学府中的数学系。算学博士的待遇很低，为从九品下。算学助教则在品级之外。

唐朝的数学教育更为规范。唐贞观二年（公元 628），"国学增筑学舍四百余间。国子、太学、四门、广文亦增置生员。其书、算各置博士、学生，以备众艺。"[②]《新唐书 · 百官志》云，显庆元年（公元 656）设算学馆，与国子、太学、四门、律、书同为国子监的六个学馆。与隋朝一样，算学馆置"算学博士二人，从九品下。助教一人"。

《唐六典》卷二十一记载，算学馆的"学生三十人"。算学博士为主要教师，"掌教文武

---

① 杜石然主编：中国古代科学家传记，科学出版社，1992 年，第 425 ~ 433 页。

② 唐 · 吴竞类辑，贞观政要卷第七"崇儒学"第二十七，《四部丛刊续编》本。本编凡引此书，均据此。

官八品以下及庶人子为生者”。学生的成分与律、书学相当，与国子、太学、四门馆相比，社会地位都是较低的。

算学馆的学习科目就是李淳风和算学博士梁述、助教王真儒等整理的《九章算术》等汉唐十部算经。《唐六典》云：“二分其经以为之业：习《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》十有五人。习《缀术》、《缉古》十有五人。其《记遗》、《三等数》亦兼习之。”学习年限是：“《孙子》、《五曹》共限一年业成。《九章》、《海岛》共三年。《张丘建》、《夏侯阳》各一年。《周髀》、《五经算》共一年。《缀术》四年。《缉古》一年。”《新唐书·选举志》说《缉古》习三年。李俨、钱宝琮等从“三年”之说。我们认为，《缉古》只有 20 个题目，学习一年足矣，用不到三年。持“三年”之说者大约认为“二分其经”是每一分的学制都是 7 年。实际上，这“二分”不是同一年级的甲、乙班，而是一个班的初级和高级两个阶段。就是说，在初级阶段学习《孙子》、《九章》等，学制是 7 年。在高级阶段学习《缀术》、《缉古》，学制是 4 年。另外，规定要学习《缀术》，但学官都看不懂，未必实施。而且，算学馆几经置废，以上的教学安排完全实行是不可能的。

据《唐会要》学校条记载，当时还规定了每年的考察标准：“其试者，通计一年所受之业，口问大义，得八以上为上，得六以上为中，得五以上为下。”①

算学馆的置废情况，各种典籍记载互有异同。《唐会要》云：“显庆三年九月四日诏以书、算学、明经，事唯小道，各擅专门，有乖故实，并令省废。至龙朔二年五月十七日，复置律学、书、算学官一员，三年二月十日书学隶兰台，算学隶秘书局，律学隶详刑寺。”《旧唐书·高宗纪》说显庆二年废算学。就是说，唐在显庆元年置算学馆后，不到二三年便被废。四年后又置算学。随着唐朝的衰落，国子监及算学馆的学生人数也有减少。元和二年（公元 807），“国子监奏两京诸馆学生总六百五十员。请每馆定额如后：……算馆十人。”

钱宝琮在《中国数学史》中说：“隋唐王朝于国子监中设立‘算学’是第五世纪以后数学获得高度发展的反映，但当时的算学博士、助教和学生等对于数学发展的推动作用是十分微弱的。”他又说：“国子博士的官阶是正五品上，算学博士的官阶是从九品下（官阶中最低的一级）。算学生学习的‘十部算经’年数过多，教学效率不会很高。由此可见，在专制政权之下，数学教学是不够重视的。”这些看法是实事求是的。中国古代有重文轻理的传统思想，这种思想在大一统的盛世往往更为严重。

二　明　算　科

隋朝开始实行科举制度，唐朝因之。这对于打破门阀世族对国家政权的垄断，为出身贫寒的读书人读经入仕，厕身于统治阶级的队伍，扩大国家政权的统治基础，是有重大意义的。《新唐书·选举志》说：“唐制取士之科多因隋旧。然其大要有三：由学馆者曰生徒，由州县者曰乡贡，皆升于有司而进退之。……其天子自诏者曰制举，所以待非常之才焉。”就是说，生徒和乡贡每年可以参加国家举行的考试，分明经、进士、明法、明书、明算等科，这就是科举。因算入仕，这在中国历史上是第一次。

明算科的考试内容，据《唐六典》云：“其明算，则《九章》三帖，《海岛》、《孙子》、

① 北宋·王溥，唐会要，商务印书馆，1983 年。本编凡引《唐会要》，均据此。

《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经》等七部各一帖。其《缀术》六帖，《缉古》四帖。”其注说明了考试标准及及第后的待遇：“录大义本条为问答者，明数造术，辨明术理，然后为通。《记遗》、《三等数》读令精熟。试十得九为第。其试《缀术》、《缉古》者，《缀术》七条，《缉古》三条。诸及第人并录奏，仍关各送吏部。书、算于从九品下叙排。”关于考试标准，《新唐书 · 选举志》的记载稍异：试《九章》与其他七部算经者，与试《缀术》、《缉古》者，分别“十通六；《记遗》、《三等数》帖读，十得九；为第。落经者虽通六不第”。两者结合起来，我们可以知道其标准之大概。

值得指出的是：首先，参加明算科的考试必须加试儒家经典，并且必须及格，否则算学考试及格了，也不能及第。而参加经、进士、法、书等科的科举，则没有加试算学的规定。其次，及第后的待遇很低，只是从九品下的官阶。可见，隋唐尽管设算学馆和明算科，终究改变不了数学是“六艺之末”的局面。因此，实际上参加明算科考试的不会很多。正如杜佑《通典》所说：“士族所趋，唯明经、进士二科而已。”①

第七节　大数进法和改进计算工具的尝试

一　大数进法

大数进法指万以上的进位制。《数术记遗》、《孙子算经》、《五经算术》都谈到大数进法。这一时期还有一部董泉的《三等数》，甄鸾曾为之作注，与《数术记遗》一起是唐朝国子监算学馆的兼习教材，应该是专门论述大数进法的，惜已失传。《数术记遗》说：

> 黄帝为法，数有十等。及其用也，乃有三焉。十等者，谓亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载。三等者，谓上、中、下也。其下数者，十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也。中数者，万万变之，若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也。上数者，数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。从亿至载，终于大衍。

这段文字对下、中、上三种大数进位制度作了很好的概括。下数是十进，1 亿 =10 万 = 10^5，1 兆 =10 亿 = 10^6，1 京 = 10 兆 = 10^7，……1 载 = 10 正 = 10^{14}；中数是万进，1 亿 =1 万万 = 10^8，1 兆 =1 万亿 = 10^{12}，1 京 =1 万兆 = 10^{16}，……1 载 =1 万正 = 10^{44}；上数是数穷则进，1 亿 =1 万万 = 10^8，1 兆 =1 亿亿 = $(10^8)^2 = 10^{16}$，1 京 =1 兆兆 = $(10^{16})^2 = 10^{32}$，……1 载 =1 正正 = 10^{86}。

汉人注经，则比较混乱。例如，《诗经》中“胡取禾三百亿兮”，毛注曰“万万曰亿”，用中数；郑注曰“十万曰亿”，用下数。甚至一部著作同一个人的注中既有下数，也有中数。《数术记遗》概述了大数的三种进法之后指出：

> 下数浅短，计事则不尽。上数宏廓，世不可用。故其传业，唯以中数耳。

可以说，《数术记遗》统一了大数进位制度。以后的数学著作除了三种进位制度都要讲的之外，基本上沿用中数进位法。

---

① 唐 · 杜佑，通典，中华书局，1984 年。本编凡引《通典》，均据此。

传本《孙子算经》的“大数之法”云：

凡大数之法，万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京，万万京曰陔，万万陔曰秭，万万秭曰壤，万万壤曰沟，万万勾曰涧，万万涧曰正，万万正曰载。

用万进，采用中数进法。然而在量的进位中却说：

十斗六千万粟为一斛。十斛六亿粟，百斛六兆粟，千斛六京粟，万斛六陔粟，十万斛六秭粟，百万斛六壤粟，千万斛六沟粟，万万斛为一亿斛六涧粟，十亿斛六正粟，百亿斛六载粟。

万万为亿，但亿以上，皆采十进。这种混乱可能是后人的篡改所致。

二　改进计算工具的尝试

《数术记遗》引用刘洪的话说：

隶首注术，乃有多种。及余遗忘，记忆数事而已：

其一积算，其一太一，其一两仪，其一三才，其一五行，其一八卦，其一九宫，其一运筹，其一了知，其一成数，其一把头，其一龟算，其一珠算，其一计数。

共14种算法。其中，“积算”，甄鸾注曰：“今之常算者也。以竹为之。”就是我们说的筹算。甄鸾说算等“长四寸，以放四时，方三分，以象三才”。长4寸约合今11.84厘米，3分约合今0.888厘米（按北周一尺合29.6厘米计）。实际上，东汉算筹为7.9～8.9厘米，方0.4厘米[①]。已比此所述更短，更细。甄鸾不顾算筹已经变得更短的事实，以算筹的长、方附会四时、三才，使算筹蒙上数字神秘主义的面纱。

对于第2～12种算法，徐岳的文字非常简括，若没有注释，则使人莫明其妙。通过甄鸾的注解，我们知道这些记数法或用少数着色的珠，由珠的位置表示数字，或用少数特制的筹，由筹的方向表示数字，实际应用起来非常困难，大约是方术家们所用的，也可以看做人们简化记数法方面的探索。有的起源可能相当早。

值得注意的是第13种“珠算”。《数术记遗》说：

珠算，控带四时，经纬三才。

亦非常简括。甄鸾注曰：

刻版为三分，其上下二分以停游珠，中间一分以定算位。位各五珠，上一珠与下四珠色别。其上别色之珠当五。其下四珠，珠各当一。至下四珠所领，故云控带四时。其珠游于三方之中，故云经纬三才也。

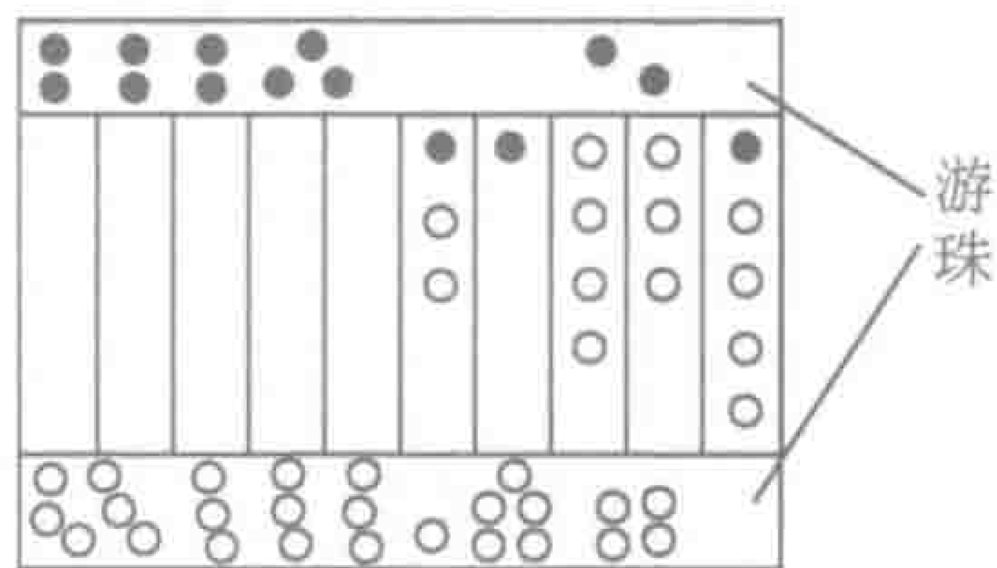


图7-7-1　《数术记遗》珠算复原图（许莼舫复原）

对这段文字的理解，学术界尚有不同意见。其争论的焦点在于是否有柱将算珠穿档。三上义夫、余介石、许莼舫、华印椿等认为无穿档的柱。[②] 他们复原的珠算盘如图7-7-1所示。我们认为这种看法是正确的。这种看法对上下二分中有无分隔，也有不同的看法。许莼舫先是认为没有分隔，后来认为有分隔。有的学者认为这种算盘有柱穿珠。无论如何，《数术记遗》中的“珠算”是元明“珠算盘”的滥觞是没有问题的。

---

① 李胜五、郭书春，石家庄东汉墓及其中出土的算筹，考古，1982，(5)。

② 华印椿，中国珠算史稿，中国财政经济出版社，1987年，第15页。

第八章　率与齐同原理

《数》、《算数书》、《周髀算经》、《九章算术》都使用了率，但总体说来比较零散。刘徽将率的应用推广到《九章算术》的九章，大部分术文以及200余个题目的解法，大大完善了率的理论，认为率借助于齐同原理，成为“算之纲纪”。

第一节　率的定义和性质

一　率的定义

率的本义是标准、法度、准则。相关的各种物品在同一数量标准下有不同的数量表现，就是各自的标准量。一般来说，相关的各种物品在同一数量标准下的相互数量关系是不变的，这就构成了率，通常用这些物品各自的标准量表示率。《九章算术》使用的率由于没有定义，其概念的内涵靠约定俗成，因此在有的地方偏离了率概念。刘徽给率作出了明确的定义：

凡数相与者谓之率。

“相与”就是现在的相关。“数”实际上是一组可变的量；一组变量，如果它们相关，就称为率。成比例的一组量无疑呈率关系，比例是率中最直观，应用最为广泛的一种算法，而且至今仍在使用。但是，刘徽的“率”的涵义比比例要深、广得多。他关于率的定义反映了相关的事物之间数量关系的本质属性，不仅与先秦以来关于率的约定俗成的含义一致，而且在其广泛应用中保持了概念的同一性。

二　率的求法和性质

（一）率的求法

怎样求出诸量之间的率关系呢？刘徽说：

少者多之始，一者数之母，故为率者必等之于一。

他把1作为公度，并以粟、粝之率为例，5单位粟可以化为1，而3单位粝可以化为1。因此，粟5、粝3便是粟、粝的相与之率。当然，实际计算中，通常不必经由“等之于一”这一步，直接考虑相关量的相对关系即可。

率，可由同类同级的单位得出，如刘徽所说的“可俱为铢，可俱为两、可俱为斤，无所归滞也”；也可由同类而不同级的单位得出，如刘徽所说的“斤两错互而亦同归”，可以“使干丝以两数为率，生丝以斤数为率”；还可以由不同类的物品得出，如刘徽所说“譬之异类，亦各有一定之势”，如单位与价钱、时间与行程等不同类物品之间的率关系便是如此。

（二）率的性质

由率的定义，刘徽得出如下性质：

凡所得率知，细则俱细，粗则俱粗，两数相抱而已。

“知”，训者。“抱”，引取也。就是说，凡是构成率关系的一组量，在投入运算时，其中一个扩大（或缩小）多少倍，其余的量也必须同时扩大（或缩小）同一倍数。刘徽提出了率的三种等量变换“乘”，“约”，“齐同”。这三种等量变换最初是从分数运算中抽象出来的。例如，分数 $\frac{b}{a}$，“乘以散之”，就是将分数的分子、分母乘同一常数：$\frac{b}{a}=\frac{mb}{ma}$。其中 m 为正整数。“约以聚之”就是以同一常数约简其分子、分母。若 a，b 都能被 m 整除，即 $c=\frac{a}{m}$，$d=\frac{b}{m}$，c，d 皆为正整数，则 $\frac{b}{a}=\frac{md}{mc}=\frac{d}{c}$。

分数的加法、减法与除法都要用到“齐同以通之”。这在下面再谈

（三）相与率

利用“乘以散之，约以聚之”，可以将呈率关系的两个分数或两个有公因子的数化成两个没有公因子的整数。例如，求圆周率时，刘徽将径 2 尺与周 6 尺 2 寸 8 分化成径率 50，周率 157；“青丝求络丝”问，刘徽将络丝 1 斤两数（16 两）与练丝 12 两化成络丝率 4，练丝率 3，将练丝 1 斤铢数（384 铢）与青丝 1 斤 12 铢（396 铢）化成练丝率 32，青丝率 33；等等，这都是相与之率。因此，刘徽提出了相与率的概念。他说：

率知，自相与通。有分则可散，分重叠则约之。等除法实，相与率也。

等即等数，就是现今之公因子，在两个数的情况下，就是最大公约数。中国古代没有素数与互素的概念，两个量的相与率，就是互素的两个数。在某种意义上，相与率起着互素的作用。相与率的提出，可以化简许多运算。事实上，在刘徽的运算中基本上都使用相与率。

第二节　今有术的推广与齐同原理

一　今有术的推广

刘徽非常重视《九章算术》提出的今有术，把它看成“都术”，即普遍方法，并且认为：

诚能分诡数之纷杂，通彼此之否塞，因物成率，审辨名分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也。

刘徽把《九章算术》中许多与今有术并列的术文及许多题目的解法归结到今有术，今有术的应用遍于九章，100 多个问题。经率术很容易归结为今有术。

刘徽将衰分术也归结为今有术，列衰，即诸 m_i，$i=1,2,\cdots,n$，就是相与率。如果它们有公倍数，则可以约简。他说：“列衰，相与率也。重叠，则可约。”刘徽接着指出衰分术中的各个术语——列衰、副并（即诸列衰之和：$m_1+m_2+\cdots+m_n$）、所分在今有术中的意义：“于今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，所分为所有数。”

像均输术这样复杂的比例分配问题，《九章算术》已经归结到衰分术，刘徽将衰分术归结到今有术，自然也将均输术归结为今有术。他说："于今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，以赋粟车数为所有数，而今有之，各得车数。"

刘徽还把许多其他算术问题归结到今有术。为此，需要首先根据问题的条件找出率关系，所谓"因物成率"。《九章算术》衰分章后半部的非衰分问题（宋以后称为异乘同除问题）是简单的今有术问题，是不言而喻的。其他如均输章的追及、还原、复比例等较复杂的算术问题只要"因物成率"，也归结到今有术。《九章算术》均输章"客去忘持衣"是一个追及问题：

> 今有客马日行三百里，客去忘持衣。日已三分之一，主人乃觉，持衣追及与之而还，至家视日四分之三。问：主人马不休，日行几何？
>
> 术曰：置四分日之三，除三分日之一，半其余，以为法。副置法，增三分日之一。以三百里乘之，为实。实如法，得主人马一日行一里。

《九章算术》的解法是：

$$\text{主人马日行}=300\text{ 里}\times\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right]\div\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

刘徽认为，$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$是"主人追客还用日率"。那么"去其还，存其往"，$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{24}$，是"主人与客均行用日之率"。$\frac{5}{24}$又是"主人往追用日之分"，$\frac{1}{3}$是"客去主人未觉之前独行用日之分"。两者相加，$\frac{5}{24}+\frac{1}{3}=\frac{13}{24}$为"主人追及前用日之分"，也就是"客人与主人均行用日率"。最后，刘徽说："然则主人用日率者，客马行率也；客用日率者，主人马行率也。母同则子齐，是为客马行率五，主人马行率十三。于今有术，三百里为所有数，十三为所求率，五为所有率，而今有之，即得也。"客马行率是5，作为所有率。主人马行率是13，作为所求率。300里为所有数。于是，

$$\text{主人马日行}=300\text{ 里}\times 13\div 5=780\text{ 里}$$

均输率"持米出三关"问是还原问题：

> 今有人持米出三关，外关三而取一，中关五而取一，内关七而取一，余米五斗。问：本持米几何？

《九章算术》的解法是：本持米＝（5斗×3×5×7）÷（2×4×6）。

刘徽注给出了三种方法。首先是重今有术。他说：

> 此亦重今有也。所税者，谓今所当税之。定三、五、七皆为所求率，二、四、六皆为所有率。

三次应用今有术，依次求出内、中、外关未税之本米。这种方法，刘徽称之为重今有术。

第二种方法是诸率悉通法，刘徽说："今从末求本，不问中关，故令中率转相乘而同之。亦如络丝术。"关于诸率悉通法，下面再讲。

刘徽给出的第三种方法是：

> 又一术：外关三而取一，则其余本米三分之二也。求外关所税之余，则当置一，二分乘之，三而一。欲知中关，以四乘之，五而一。欲知内关，以六乘之，七而一。凡余分者，乘其母、子：以三、五、七相乘，得一百五，为分母，二、四、

六相乘，得四十八，为分子。约而言之，则是余米于本所持三十五分之十六也。于今有术，余米五斗为所有数，分母三十五为所求率，分子十六为所有率也。

刘徽此注的前半段是对《九章算术》本法的解释。后半段将其归结为今有术。

刘徽还将复比例问题化为今有术解决。例如均输章取佣负盐问：

今有取佣，负盐二斛，行一百里，与钱四十。今负盐一斛七斗三升少半升，行八十里。问：与钱几何？

术曰：置盐二斛升数，以一百里乘之，为法。以四十钱乘今负盐升数，又以八十里乘之，为实。实如法得一钱。

《九章算术》的解法是：

$$与钱数=（40钱\times 173\frac{1}{3}升\times 80里）\div（200升\times 100里）=27\frac{11}{15}钱$$

刘徽认为，“以负盐二斛升数乘所行一百里，得二万里，是为负盐一升行二万里，得钱四十。于今有术，为所有率”。这就是100里×200=20000里，为所有率。而“以今负盐升数乘所行里，今负盐一升凡所行里也。于今有术，以所有数”。这是说，$173\frac{1}{3}$升×80里，为所有数。最后，“四十钱为所求率也”。

二　齐同原理

赵爽《周髀算经注》在分数的加、减、除法用到齐同原理。例如，求“小岁月不及故舍”的度数要用到：$4737\frac{6612}{17860}-12\times 365\frac{1}{4}=4737\frac{6612}{17860}-12\times 365\frac{4465}{17860}=354\frac{6612}{17860}$。其中，将$\frac{1}{4}$化成$\frac{4465}{17860}$，赵爽便说“当于齐同，故细言之”。赵爽关于“齐同”的应用没有超过分数的范围，刘徽则大大拓展了齐同原理的应用。

（一）刘徽使用的齐同原理

齐同原理源于分数的加、减和除法运算。刘徽说：

凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。同者，相与通同共一母也。齐者，子与母齐，势不可失本数也。

可见，刘徽实际上把分数的分子、分母看成相与的两个量，因而可以看成率关系。这与现代算术理论中关于分数的定义惊人的一致。现代数学关于分数的定义是：

第一量与第二量两量之比是一个分数，分子表示第一量含公度的倍数，分母表示第二量含公度的倍数。①

因为分数的分母、分子是率关系，所以关于分数的三种等量变换自然推广到率的运算中。实际上，这三种等量变换与率的性质是完全一致的。

对复杂的数学问题，往往不能直接归结为今有术，而要先“通彼此之否塞，因物成率”，然后再“审辨名分，平其偏颇，齐其参差”，就是应用齐同原理，并最终归结到今

① ［法］唐乃尔著，朱德祥译，理论和实用算术，上海科学技术出版社，1982年，第131页。

有术。

刘徽非常重视齐同术的作用：

齐同之术要矣。错综度数，动之斯谐，其犹佩觿解结，无往而不理焉。

这就是说，在刘徽看来，率借助于齐同术成为运算的纲纪。实际上，刘徽用率的思想和齐同原理阐释、论证了《九章算术》的大部分术文和问题的解法。

刘徽认为，率借助于齐同原理成为“算之纲纪”：

乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎。

（二）诸率悉通

第四章已引出《九章算术》均输章“青丝求络丝”问，刘徽注给出了三种方法，其第三种方法是对《九章算术》术文的注释，而第一种方法是：

按：练丝一斤为青丝一斤十二铢，此练率三百八十四，青率三百九十六也。又，络丝一斤为练丝十二两，此为络率十六，练率十二也。置今有青丝一斤，以练率三百八十四乘之，为实，实如青丝率三百九十六而一。所得，青丝一斤，练丝之数也。又以络率十六乘之，所得为实，以练率十二为法，所得，即练丝用络丝之数也。是谓重今有也。

这是根据问题的条件求出练丝、青丝、络丝两两的率：练率: 青率 = 384: 396，络率: 练率 = 16: 12。先应用今有术求出青丝 1 斤为练丝之数：练丝数 = 青丝 1 斤 × 384 ÷ 396。再应用今有术由练丝数求出络丝数：络丝数 = 练丝数 × 16 ÷ 12。这里应用了重今有术。

刘徽认为，也可以不用重今有术。这就是第二种方法，即诸率悉通法：

一曰：又置络丝一斤两数与练丝十二两，约之，络得四，练得三，此其相与之率。又置练丝一斤铢数与青丝一斤一十二铢，约之，练得三十二，青得三十三，亦其相与之率。齐其青丝、络丝，同其二练，络得一百二十八，青得九十九，练得九十六，即三率悉通矣。今有青丝一斤为所有数，络丝一百二十八为所求率，青丝九十九为所有率。为率之意犹此，但不先约诸率耳。

他先求出络丝与练丝的相与之率：络: 练 = 16: 12 = 4: 3。再求出练丝与青丝的相与之率：练: 青 = 384: 396 = 32: 33。然后，使两组率中的练丝率相同，同于 96；再使络丝、青丝的率与之相齐，分别化为 128 与 99，则：

络: 练: 青 = 128: 96: 99

“即三率悉通矣”。将青丝 1 斤作为所有率数，络率 128 作为所求率，青率 99 作为所有率，直接应用今有术求出络丝数。

刘徽认为，这种三率通过齐同达到悉通的方法，可以推广到任意多个连锁比例的问题：

凡率错互不通者，皆积齐同用之。放此，虽四五转不异也。

在同一章“持米出三关”、“持金出五关”问就分别是三转、五转达到诸率悉通的例题。

（三）齐同有二术

同一问题，同哪个量，齐哪个量，可以灵活运用。刘徽认为，《九章算术》均输章凫雁、长安至齐、成瓦、矫矢、假田、程耕、五渠共池等问，尽管对象不同，却都是同工共作

类问题。他在五渠共池问注中说："自凫雁至此，其为同齐有二术焉，可随率宜也。"以凫雁问为例：

今有凫起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海。今凫雁俱起，问：何日相逢？

术曰：并日数为法，日数相乘为实，实如法得一日。

《九章算术》的解法为：此即

$$日数 = 7 \times 9 \div (7 + 9)$$

刘徽注曰：

按：此术置凫七日一至，雁九日一至。齐其至，同其日，定六十三日凫九至，雁七至。今凫、雁俱起而问相逢者，是为共至。并齐以除同，即得相逢日。故并日数为法者，并齐之意；日数相乘为实者，犹以同为实也。一曰：凫飞日行七分至之一，雁飞日行九分至之一。齐而同之，凫飞定日行六十三分至之九，雁飞定日行六十三分至之七。是为南北海相去六十三分，凫日行九分，雁日行七分也。并凫、雁一日所行，以除南北相去，而得相逢日也。

刘徽注包含了两种齐同方式。

第一种是"齐其至，同其日"：使凫、雁飞的时间相同，都飞 63 日，那么凫 9 至，雁 7 至。凫雁同时起飞而问相逢的时间，是它们共同飞至。因此，将齐即 9 至和 7 至相加，以除同即 63 日，就得到相逢的时间。这是以齐同术对《九章算术》术文的直接论证。

第二种是同其距离之分，齐其日速：每一天凫飞全程的 $\frac{1}{7}$，雁飞全程的 $\frac{1}{9}$，"齐而同之"，每一天凫飞全程的 $\frac{9}{63}$，雁飞全程的 $\frac{7}{63}$。这就是，南北海的距离 63 分，凫每日飞 9 分，雁每日飞 7 分。因此，将凫、雁每日所飞之分相加，以除南北海的距离，就得到相逢的时间。这种齐同的过程是

$$日数 = 1 \div \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) = 1 \div \left(\frac{9}{63} + \frac{7}{63}\right) = 63 \div (9 + 7) = \frac{63}{16}日$$

这两种齐同方式殊途同归，都是正确的方法。这些问题中没有直接用到率的概念，但是，由同一章乘传委输问刘徽注，很容易用率概念理解这两种齐同方式。乘传委输问是：

今有乘传委输，空车日行七十里，重车日行五十里。今载太仓粟输上林，五日三返。问：太仓去上林几何？

术曰：并空、重里数，以三返乘之，为法。令空、重相乘，又以五日乘之，为实。实如法得一里。

《九章算术》的解法是：

$$里数 = (70里 \times 50里 \times 5返) \div [(70里 + 50里) \times 3返]$$

刘徽注曰：

率：一百七十五里之路，往返用六日也。于今有术，即五日为所有数，一百七十五里为所求率，六日为所有率。以此所得，则三返之路。今求一返，当以三约之，因令乘法而并除也。为术亦可各置空、重行一里用日之率，以为列衰，副并为法。以五日乘列衰为实。实如法，所得即各空重行日数也。各以一日所行以乘，为

凡日所行。三返约之，为上林去太仓之数。按：此术重往空还，一输再还道。置空行一里，七十分日之一，重行一里用五十分日之一。齐而同之，空、重行一里之路，往返用一百七十五分日之六。完言之者，一百七十五里之路，往返用六日。故并空、重者，并齐也；空、重相乘者，同其母也。于今有术，五日为所有数，一百七十五为所求率，六为所有率，以此所得，则三返之路。今求一返者，当以三约之。故令乘法而并除，亦当约之也。

刘徽此注包括三段。不考虑用衰分术求解的第二段，则有两条不同的思路。

第一条思路是：空车日行 70 里，重车日行 50 里，则行 70×50 里，空车用 50 日，重车用 70 日，因此 70×50 里一往返用（$50+70$）日，亦即 175 里，往返用 6 日。将 5 日为所有数，175 里为所求率，6 日为所有率，用今有术便求出 3 返的里数。除以 3 即一返里数。其中，行 70×50 里，空车用 50 日，重车用 70 日，是齐其日，同其里。显然，凫雁术刘徽注中的“齐其至，同其日”与此对应。

第二条思路是：由题设，空车行一里用 $\frac{1}{70}$ 日，重车行一里用 $\frac{1}{50}$ 日。“齐而同之”，空、重行一里之路，往返用 $\frac{6}{175}$ 日。显然，凫雁术刘徽注中的“同其距离之分，齐其日速”与此对应。用整数表示，175 里的路程，往返用 6 日，亦归结到今有术，求出 3 返的里数。后一条思路与今归一问题相同。

总之，此术刘徽注中的两条不同的思路代表了两种齐同方式，对应于刘徽处理凫雁类问题的两种齐同方式。戴震等人不明白刘徽注中有“采其所见”者，也不明白刘徽自己也常对同一问题给出不同的方法，发现刘徽注中有不同的思路，便将第二种方法改成李淳风等注释，① 当然是错误的。

由凫雁类问题与“乘传委输”问刘徽注中的两种齐同方式互相对应可以看出，凫雁类问题的刘徽注尽管没有使用率概念，却也是可以用率概念理解的。

（四）齐其假令，同其盈朒

对盈不足术中的“不足”，刘徽称为朒。此依大典本，杨辉本作“胐”。刘徽说：

盈朒维乘两设者，欲为同齐之意。

也就是“齐其假令，同其盈朒”。若假令为 Ab，则盈 ab，若假令 Ba，则不足亦为 ab。刘徽认为这相当于 $a+b$ 次假令，共出 $Ab+Ba$，则既不盈亦不朒。故每次假令 $\frac{Ab+Ba}{a+b}$，即为不盈不朒之正数。这就证明了《九章算术》方法的正确性。

总之，刘徽空前地拓展了率的应用，使之上升到理论的高度。

第三节　算术趣题和最小公倍数

《孙子算经》、《张丘建算经》在整数、分数四则运算及求最小公倍数，最大公约数等方

① 九章算术，戴震校，《武英殿聚珍版丛书》御览本，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 159，160 页。

面的内容相当多，并有许多在中国历史上流传不衰的趣题。

一　算术趣题

《孙子算经》和《张丘建算经》等著作有很多趣题。其中，最著名的是雉兔同笼问与河上荡杯问。《孙子算经》的雉兔同笼问（略去答案）是：

今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问：雉、兔各几何？

术曰：上置三十五头，下置九十四足。半其足，得四十七。以少减多，再命之。上三除下三，上五除下五。下有一除上一，下有二除上二，即得。

又术曰：上置头，下置足。半其足，以头除足，以足除头，即得。

这就是中国历史上在民间流传千余年的鸡兔同笼问题。《孙子算经》的算法是

$$\begin{matrix} 35 & & 35 & & 35 & & 23 \\ & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & \\ 94 & & 47 & & 12 & & 12 \end{matrix}$$

本术说，上是头数35，下是足数94。取其足数的$\frac{1}{2}$，变成47。上少下多，以上减下，下变成12，便是兔数；此时变成下少上多，再以下减上，上变成23，就是雉数。作者的思路大约是：每只雉是1头2足，每只兔是1头4足。若雉、兔的足数各减半，即每只雉是1头1足，每只兔是1头2足，那么雉、兔共35头，47足，足数比头数多的原因是每只兔的足数2比每只雉的足数1多1。因此，足比头多的数$47-35=12$便是兔数。这种思路与《九章算术》粟米章其率术“法贱实贵”及其刘徽注“实余三十，是为三十个复可增一钱。然则实余之数则是贵者之数，故曰‘实贵’也”是一致的。头数减兔数$35-12=23$便是雉数，其思路亦如其率术刘徽注。

《孙子算经》提出的“又术”实际上是本术的比较抽象的形式。它对任何雉兔同笼问题都是适应的。

《孙子算经》卷下与《张丘建算经》卷下都有“河上荡杯”问，数字相同而文字稍异。《张丘建算经》的文字（略去答案）是：

今有妇人于河上荡杯。津吏问曰：“杯何以多？”妇人答曰：“家中有客，不知其数。但二人共酱，三人共羹，四人共饭，凡用杯六十五。”问：人几何？

术曰：列置共杯人数于右方，又置共杯数于左方。以人数互乘杯数，并，以为法。令人数相乘，以乘杯数，为实。实如法得一。

其解法是

杯数	人数				
1	2		12	2	左行相加得26
1	3	人数互乘杯数→	8	3	右行相乘得24
1	4		6	4	

于是

$$65 \times 24 \div 26 = 60$$

这实际上是

$$65 \div (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = 65 \div (\frac{3 \times 4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{2 \times 4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{2 \times 3}{2 \times 3 \times 4}) = 65 \div \frac{26}{24} = 60$$

《孙子算经》的解法相对简便一些。它是：

术曰：置六十五杯，以一十二乘之，得七百八十，以十三除之，即得。

其中，12、13 即由 $\frac{26}{24}$ 约简成 $\frac{13}{12}$ 而得来的。

二　直接求解数学难题

《九章算术》用盈不足术解决了 11 个非盈不足类型的数学问题。在人们解题能力较弱时，这是一种十分有效的方法。随着解题能力的提高，人们试图不用盈不足方法而直接求解这些问题。刘徽就直接解决了《九章算术》盈不足章的“持钱之蜀贾”问。《张丘建算经》直接解决了更多的这类问题，如卷上“买紫草染绢”、“金银求重”、“满粟舂米”问，卷中“持钱之洛贾”、“二酒求价”问，卷下“雀燕”问等，并在“买紫草染绢”、“持钱之洛贾”、“二酒求价”问的术文后都写出“以盈不足术求之，亦得”等字样。例如，卷上“买紫草染绢”问（略去答案）是：

今有绢一匹买紫草三十斤，染绢二丈五尺。今有绢七匹，欲减买紫草 ，还自染余绢。问：减绢、买紫草各几何?

术曰：置今有绢匹数，以本绢一匹尺数乘之，为减绢实。以紫草三十斤乘之，为买紫草实。以本绢尺数并染尺为法。实如法得一。其一术：盈不足术为之，亦得。

这个题目与《九章算术》盈不足章“油自和漆”问相似。《张丘建算经》实际上是用衰分术求解的。其列衰本是本绢 1 匹，染绢 2 丈 5 尺。用衰分术可以求出减绢及染绢的数量。由于紫草 30 斤可染绢 2 丈 5 尺，由 30 斤代替 2 丈 5 尺，便可直接求出买紫草的数量。

《张丘建算经》的“二酒求价”问（略去答案）与《九章算术》的“二酒求价”问大同小异：

今有清酒一斗直粟十斗，醑酒一斗直粟三斗。今持粟三斛，得酒五斗，问：清、醑酒各几何?

术曰：置得酒斗数，以清酒直数乘之，减去持粟斗数，余为醑酒实。又置得酒斗数，以醑酒直数乘之，以减持粟斗数，余为清酒实。各以二直相减，余为法。实如法而一，即得。以盈不足为之，亦得。

其解法原理是：若持粟 3 斛，所得 5 斗全是醑酒，则 5 斗 ×3 斗与持粟 3 斛有一个差额，这个差额是清酒单价 10 斗，而醑酒单价为 3 斗造成的。故清酒 =（3 斛 −5 斗 ×3）÷（10 斗 −3 斗）=2 斗 1 $\frac{3}{7}$ 升，醑酒 =（5 斗 × 10 − 3 斛）÷（10 斗 −3 斗）=2 斗 8 $\frac{4}{7}$ 升。

三　最大公约数与最小公倍数的应用

《张丘建算经》卷上“封山周栈”问与“甲乙丙行营周”问分别应用了最大公约数与最小公倍数。“封山周栈”问（略去答案）是：

> 今有封山周栈三百二十五里。甲、乙、丙三人同绕周栈行，甲日行一百五十里，乙日行一百二十里，丙日行九十里。问：周行几何日会？
>
> 术曰：置甲、乙、丙行里数，求等数为法。以周栈里数为实。实如法而得一。

这里是先求出甲、乙、丙日行150，120，90这三数的最大公约数30，以30里除周栈325里，得$10\frac{5}{6}$日，就是三人相会前的日数。

“甲乙丙行营周”问（略去答案）是：

> 今有内营周七百二十步，中营周九百六十步，外营周一千二百步。甲、乙、丙三人直夜，甲行内营，乙行中营，丙行外营，俱发南门。甲行九，乙行七，丙行五。问：各行几何周俱到南门？
>
> 术曰：以内、中、外周步数互乘甲、乙、丙行率。求等数，约之，各得行周。
>
> 草曰：置内营七百二十步于左上，中营九百六十步于中，外营一千二百步于下。又各以二百四十约之，内营得三，中营得四，外营得五。别置甲行九于右上，乙行七于右中，丙行五于右下。以求整数，以右位再倍，上得三十六，中得二十八，下得二十。以左上三除右上三十六，得十二周。以左中四除右中二十八，得七周。以左下五除右下二十，得四周，是甲、乙、丙行周数。

《张丘建算经》的文字太简括。根据刘孝孙的细草，这是先将三营周720，960，1200用其最大公约数240约简，化为3，4，5。然后布算如下：

营周	各行						
3	9		3	36		3	12
4	7	将右行皆乘4→	4	28	左行对应除右行→	4	7
5	5		5	20		5	4

12，7，4分别是甲、乙、丙行周数。刘孝孙没有说明右行即各行率为什么要乘4（即再倍）。我们认为乘4的原因是，求$\frac{3}{9}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{5}{5}$的最小公倍数，旁置公分母$9\times7\times5$，变成求$3\times7\times5$，$4\times9\times5$，$5\times9\times7$的最小公倍数，这就是$9\times7\times5\times4$，它与公分母相比多一个因子4。详细的运算应为

$$9\times7\times5\times4\div3\times7\times5=9\times4\div3=12$$
$$9\times7\times5\times4\div4\times9\times5=7\times4\div4=7$$
$$9\times7\times5\times4\div5\times9\times7=5\times4\div5=4$$

虽未明确表述，但《张丘建算经》及刘孝孙通晓求最小公倍数的方法是无疑的。

第九章　勾股、测望和重差

赵爽、刘徽分别证明了《九章算术》的解勾股形诸公式，并补充了一些新的公式。他们主要使用出入相补原理。两者的内容基本一致，但术语稍有区别。例如，表示面积，赵爽仍用“实”，而刘徽则皆用“幂”。出入相补原理在刘徽《九章算术注》卷一、卷五中称做“以盈补虚”，在卷五中称做“损广补狭”，在卷九中称做“出入相补”。这三种名称或者是不同应用对象的固有区别，或是采其所见内容的不同时代的痕迹。刘徽在证明勾股容方、容圆公式和测望问题时还应用了率的理论，为此提出了勾股相与之势不失本率的原理。

第一节　解勾股形诸公式的证明

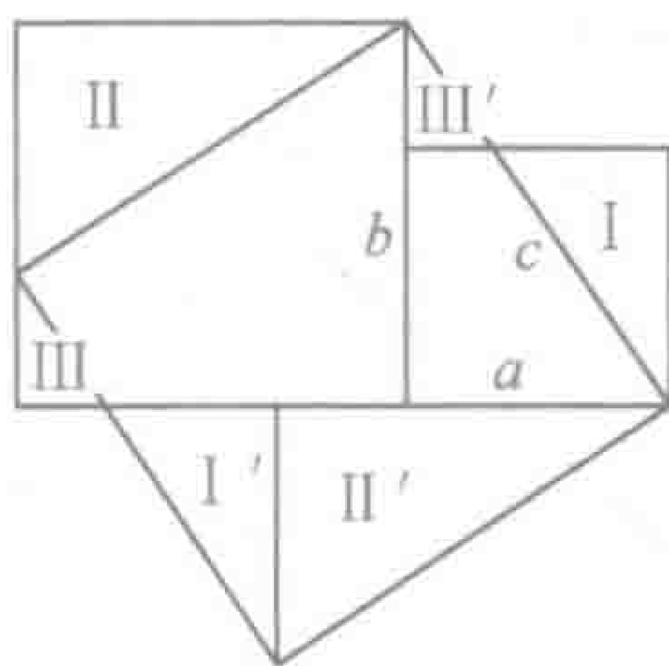
一　赵爽、刘徽对勾股定理的证明

对勾股定理，赵爽、刘徽提出了不同的证明方法。赵爽说：

弦图又可以勾、股相乘为朱实二，倍之为朱实四。以勾股之差自相乘为中黄实。加差实，亦成弦实。



(a) 赵爽的证明



(b) 刘徽的证明

图9-1-1　勾股术之出入相补

“弦图”是以弦为方边的正方形，“弦实”是弦平方的面积。根据钱宝琮在《中国数学史》中的解释，赵爽在“弦图”内作四个相等的勾股形，各以正方形的边为弦，如图9-1-1（a）所示。赵爽称这四个勾股形面积为“朱实”，称中间的小正方形面积为“黄实”。显然，一个朱实的面积是$\frac{1}{2}ab$，四个朱实是$2ab$，黄实是$(b-a)^2$，所以$c^2=2ab+(b-a)^2=a^2+b^2$。这就证明了公式（5-3-1）～（5-3-3）。

刘徽的方法是：

勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂。

这几句话太简括。到底如何出入相补，自清中叶以来，诸说不一。我们认为，李潢的图较有道理。如图9-1-1（b）所示，作出勾、股、弦为边长的正方形，将勾方中的Ⅰ、股方中的Ⅱ、Ⅲ分别移至弦方中的Ⅰ′，Ⅱ′，Ⅲ′。勾方、股方与弦重合的部分不动，恰恰填满弦方，

从而证明了勾股定理。①

二　赵爽、刘徽对解勾股形诸公式的证明

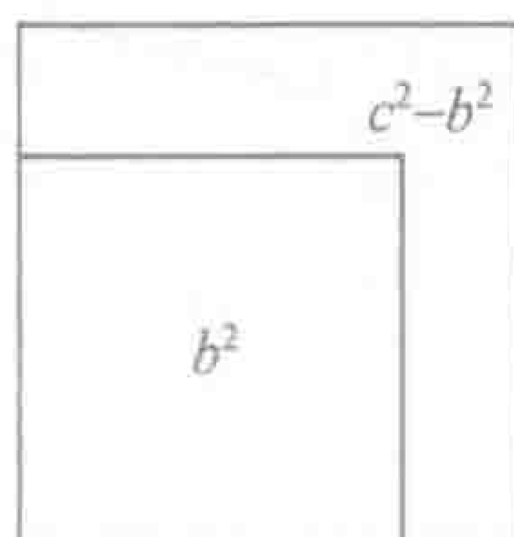
《九章算术》的解勾股形诸公式抽象程度不够。赵爽、刘徽分别以抽象的语言表达了公式（5-3-4）～（5-3-8），其证明方法大同小异。刘徽还证明了勾股数组公式（5-3-10）和公式（5-3-11）。《九章算术》和赵爽、刘徽都是讨论已知勾、股、弦三事中某二者的和、差求三事中某些元素的问题。

（一）勾、股幂与弦幂的关系

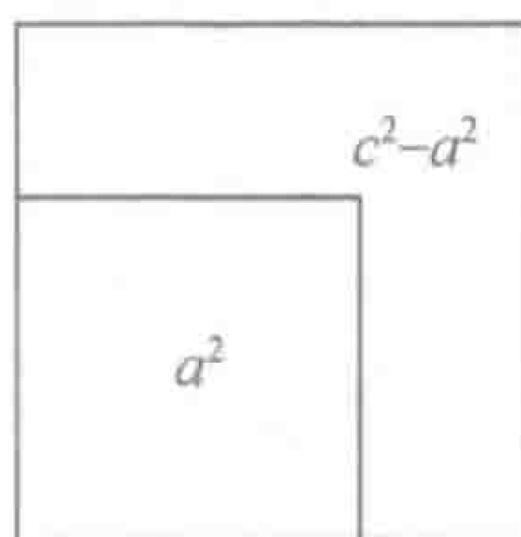
为了证明解勾股形诸公式，赵爽与刘徽都先讨论了勾幂、股幂与弦幂的关系。赵爽说：

> 凡并勾、股之实即成弦实。或方于内，或矩于外。形诡而量均，体殊而数齐。勾实之矩以股弦差为广，股弦并为袤，而股实方其里。……股实之矩以勾弦差为广，勾弦并为袤，而勾实方其里。

刘徽也有类似的论述。这实际上表示，勾幂与股幂构成弦幂时，有如图9-1-2（a），（b）所示的两种情形。在图9-1-2（a）中，若在弦方内裁去以股b为边的正方形，则剩余的部分就是勾幂之矩，常简称为勾矩，其面积为c^2-b^2。将勾矩的一支裁下来，补到另一支上，则变成一个长为$c+b$，宽为$c-b$的长方形，于是



(a) 勾矩



(b) 股矩

图9-1-2　勾矩与股矩

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b) \tag{9-1-1}$$

同样，在图9-1-2（b）中，若在弦方内裁去以勾a为边的正方形，则剩余的部分就是股幂之矩，常简称为股矩，其面积为c^2-a^2。将股矩的一支裁下来补到另一支上，则变成一个长为$c+a$，宽为$c-a$的长方形，于是

$$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a) \tag{9-1-2}$$

（二）由勾（股）及股（勾）弦差（和）求股、弦公式的证明

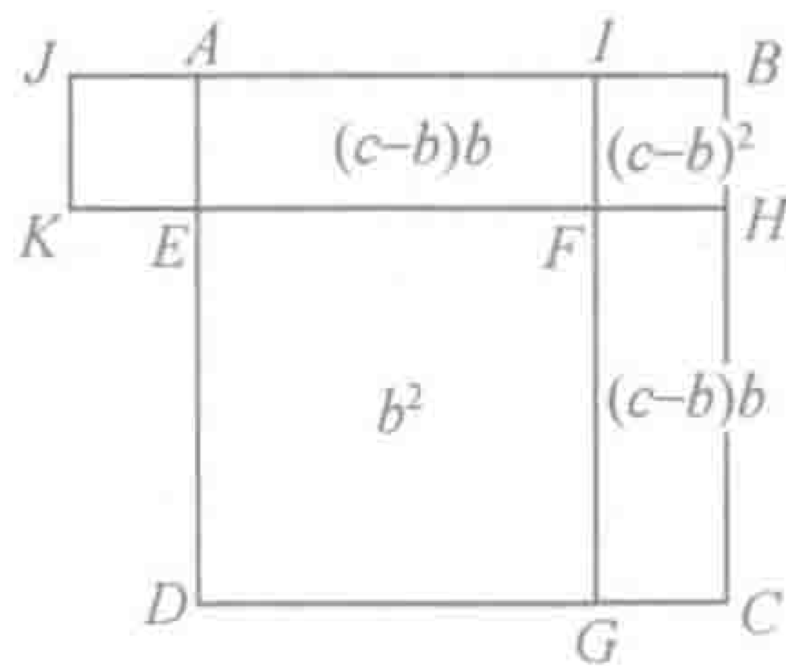


图9-1-3　勾与股弦差求股、弦

1. 勾及股弦差求股、弦

刘徽认为，《九章算术》勾股章“引葭赴岸”问是已知勾a与股弦差$c-b$，求股、弦的问题，应用公式（5-3-4）。在这里，半池方为勾a，水深为股b，葭长为弦c。刘徽接着注曰：

> 以勾、弦见股，故令勾自乘，先见矩幂也。
>
> 出水者，股弦差。减此差幂于矩幂则除之。
>
> 差为矩幂之广，水深是股。令此幂得出水一尺为长，故为矩而得葭长也。

① 清·李潢，九章算术细草图说，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第四册，河南教育出版社，1993年。本编凡引《九章算术细草图说》的文字，如不说明，均据此。

如图 9-1-3 所示，刘徽将勾方 a^2 变成勾矩 $ABCGFE$：$a^2 = c^2 - b^2$。在勾矩中除去以 $c-b$ 为边长的正方形 $BHFI$，则剩余 2 个以股 b 为长，以股弦差 $c-b$ 为宽的长方形，亦即

$$a^2-(c-b)^2=(c^2-b^2)-(c-b)^2=2b(c-b)$$

故

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b}-(c-b)\right]$$

这就是公式（5-3-4）的上式。

勾矩幂加上 $(c-b)^2$ 即面积 $AEKJ$，则成为由长方形 $BCGI$ 和 $IFKJ$ 合成的图形，其面积为 $2c(c-b)$。因而：

$$c=\frac{a^2+(c-b)^2}{2(c-b)}=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b}+(c-b)\right]$$

这与公式（5-3-4）的下式等价，赵爽“勾股圆方图”注中没有相应的内容。

2. 由勾（或股）及股（或勾）弦和求股、弦公式的证明

刘徽认为，《九章算术》勾股章的“竹高折地”问是已知勾及股弦和求股的问题，应用了公式（5-3-6）。不过，赵爽“勾股圆方图”注关于此项的内容要更丰富一些。赵爽说：

以差除勾实，得股弦并。以并除勾实，亦得股弦差。令并自乘，与勾实为实。倍并为法，所得亦弦。勾实减并自乘，如法为股。

这里含有几个公式：

$$c+b=\frac{a^2}{c-b} \tag{9-1-3}$$

$$c-b=\frac{a^2}{c+b} \tag{9-1-4}$$

$$c=\frac{(c+b)^2+a^2}{2(c+b)} \tag{9-1-5}$$

$$b=\frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)} \tag{9-1-6}$$

后者与公式（5-3-6）等价。如图 9-1-4 所示，正方形 $ABCD$ 是 $(c+b)^2$，$AIFE$ 的面积等于 bc，将其移到 $EDKJ$ 处，$IBHF$ 的面积等于 b^2，将其加上 a^2，移到 $JKML$ 处，由于 $a^2+b^2=c^2$，$JKML$ 的面积与 $FGDE$ 相等，为 c^2。于是 $HCML$ 的面积等于 $(c+b)^2+a^2$，而它的宽为 c，长为 $2(c+b)$，亦即 $2c(c+b)=(c+b)^2+a^2$，故得公式（9-1-5）。类似地可以证明公式（9-1-6）。

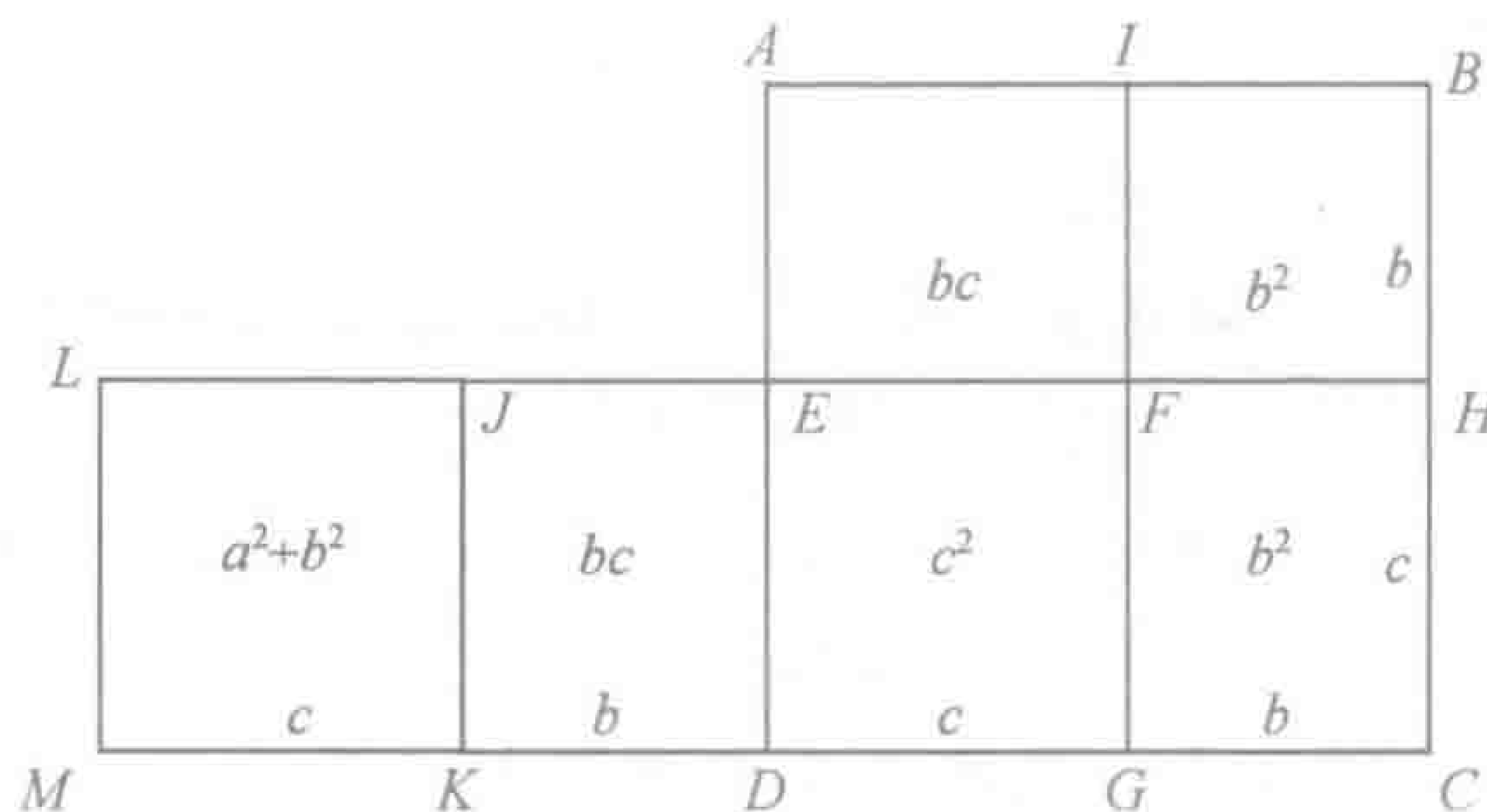


图 9-1-4　勾与股弦和求股、弦

赵爽还给出了由股与勾弦和求勾、弦的公式。它们与公式（9-1-5）、公式（9-1-6）是对称的。

3. 股（勾）弦差与勾、股的关系

赵爽给出了由勾方 a^2 与股 b 求股弦差的开方式：

倍股在两边，为从法，开矩勾之角，即股弦差。加股为弦。

赵爽的矩勾就是 $c^2-b^2=a^2$，与刘徽的矩勾表示 b^2-a^2 不同。赵爽的话就是关于 $c-b$ 的开方式：

$$(c-b)^2+2b(c-b)=c^2-b^2 \tag{9-1-7}$$

与此对称，赵爽又给出了关于 $c-a$ 的开方式：

$$(c-a)^2+2a(c-a)=c^2-a^2 \tag{9-1-8}$$

（三）对由弦与勾股差（并）求勾、股公式的证明

1. 弦与勾股差求勾、股

赵爽与刘徽都以抽象的形式表述了由弦 c 及勾股差 $b-a$ 求勾、股的等价的公式。刘徽在户高多于广术注中提出的方法是：

> 令户广为勾，高为股，两隅相去一丈为弦，高多于广六尺八寸为勾股差。按图为位，弦幂适满万寸。倍之，减勾股差幂，开方除之。其所得则高广并数。以差减并而半之，即户广；加相多之数，即户高也。

刘徽将一个弦幂 c^2 分解成4个勾股形及一个以勾股差 $b-a$ 为边长的小正方形。取两个弦幂，将其中一个除去 $(b-a)^2$，而将剩余的4个勾股形拼到另一个弦幂上，则得到一个以勾股并 $b+a$ 为边长的大正方形，如图9-1-5（a）所示，其面积为

$$(b+a)^2=2c^2-(b-a)^2$$

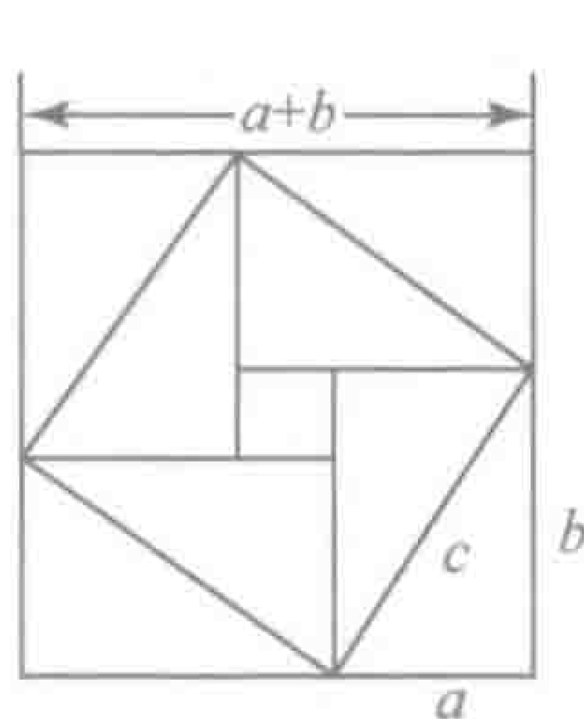
于是

$$b+a=\sqrt{2c^2-(b-a)^2}$$

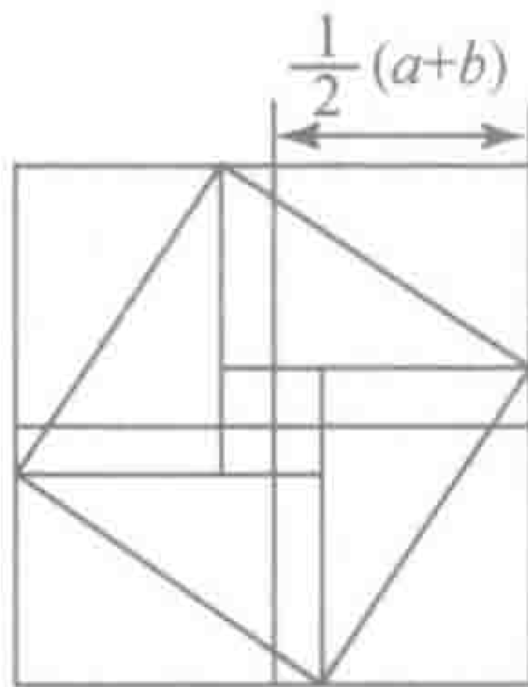
因此，

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{1}{2}[(b+a)-(b-a)]=\frac{1}{2}[\sqrt{2c^2-(b-a)^2}-(b-a)] \\ b&=\frac{1}{2}[(b+a)+(b-a)]=\frac{1}{2}[\sqrt{2c^2-(b-a)^2}+(b-a)] \end{aligned}\right\} \tag{9-1-9}$$

这组公式与《九章算术》的公式（5-3-7）是等价的，是赵爽、刘徽对后者的化简。



(a) 赵爽刘徽公式的证明



(b) 《九章算术》公式的证明

图9-1-5　弦与勾股差求勾、股

刘徽又记载了对《九章算术》原公式（5-3-7）的推导：

> 今此术先求其半。一丈自乘为朱幂四、黄幂一。半差自乘，又倍之，为黄幂四分之二。减实，半其余，有朱幂二、黄幂四分之一。其于大方者四分之一。故开方

除之，得高广并数半。减差半，得广；加，得户高。

如图 9-1-5（b）所示，弦方中的 4 个勾股形称为朱幂，$(b-a)^2$ 为黄方，则 $c^2-2[\frac{1}{2}(b-a)]^2$ 为 4 个朱幂与 $\frac{1}{2}$ 个黄幂。取其一半，则为 2 个朱幂与 $\frac{1}{4}$ 个黄幂，恰为以 $b+a$ 为边长的正方形的 $\frac{1}{4}$：　$\frac{1}{4}(b+a)^2=\frac{1}{2}\{c^2-2[\frac{1}{2}(b-a)]^2\}$。开方，得

$$\frac{1}{2}(b+a)=\sqrt{\frac{1}{2}\{c^2-2[\frac{1}{2}(b-a)]^2\}}$$

由

$$a=\frac{1}{2}[(b+a)-(b-a)]$$

$$b=\frac{1}{2}[(b+a)+(b-a)]$$

便证明了《九章算术》的公式（5-3-7）。后者应是刘徽前的方法，刘徽采入自己的注中的。

2. 弦与勾股差、并的关系

刘徽在户高多于广术注中进一步讨论了弦与勾股差、并的关系，他说：

又按：此图幂，勾股相并幂而加其差幂，亦减弦幂，为积。盖先见其弦，然后知其勾与股。今适等，自乘，亦各为方，合为弦幂。令半相多而自乘，倍之，又半并自乘，倍之，亦合为弦幂。而差数无者，此各自乘之，而与相乘数，各为门实。

刘徽在这里又提出两个勾股恒等式：$(b+a)^2+(b-a)^2-c^2=c^2$，$c^2=2[\frac{1}{2}(b+a)]^2+2[\frac{1}{2}(b-a)]^2$。而当 $b=a$ 时，$c^2=2a^2$，$a^2=b^2=ab$。

3. 由弦与勾股并求勾、股

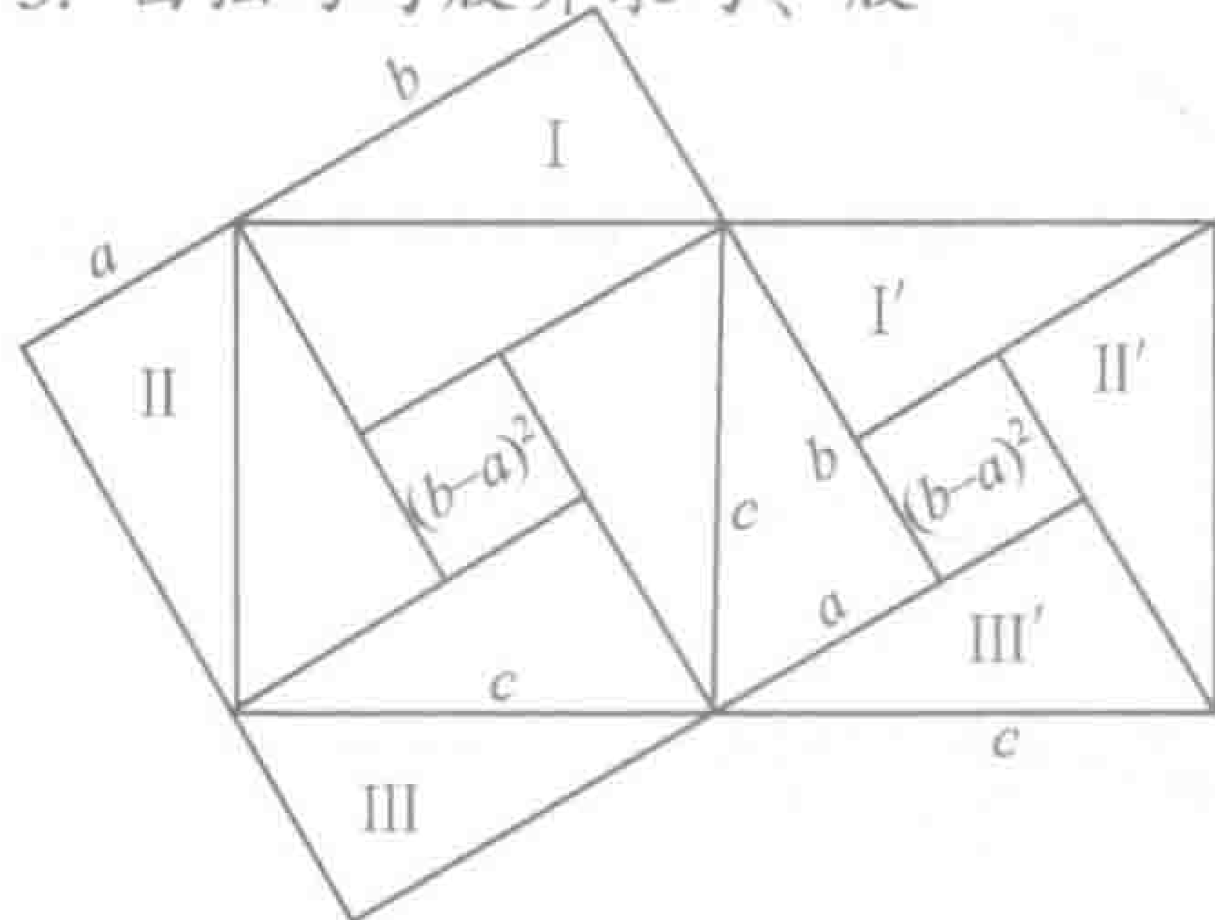


图 9-1-6　弦与勾股并求勾、股

赵爽、刘徽提出并证明了由弦 c 与勾股并 $a+b$，求 a，b 的公式。勾股并，刘徽又称为勾股合。他的方法是：

其勾股合而自相乘之幂者，令弦自乘，倍之，为两弦幂，以减之。其余，开方除之，为勾股差。加于合而半，为股；减差于合而半之，为勾。勾、股、弦即高、广、袤。其出此图也，其倍弦为袤。

如图 9-1-6 所示，将 $(a+b)^2$ 中的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ移 $2c^2$ 的Ⅰ′、Ⅱ′、Ⅲ′处，则 $(b+a)^2$ 与 $2c^2$ 相比，只有以 $b-a$ 为边长的黄方未被填满，于是 $(b-a)^2=2c^2-(b+a)^2$，进而 $b-a=\sqrt{2c^2-(b+a)^2}$。那么

$$a=\frac{1}{2}[(b+a)-(b-a)]=\frac{1}{2}[(a+b)-\sqrt{2c^2-(a+b)^2}$$
$$b=\frac{1}{2}[(b+a)+(b-a)]=\frac{1}{2}[(a+b)+\sqrt{2c^2-(a+b)^2}\qquad(9\text{-}1\text{-}10)$$

很容易看出它与刘徽简化的弦与勾股差公式（9-1-9）的对称性。

4. 关于勾股差问题的拓展

赵爽、刘徽还给出了求勾股差及用勾股差与弦求勾的新方法。刘徽说：

令矩勾即为幂，得广即勾股差。其矩勾之幂，倍勾为从法，开之亦勾股差。以勾股差幂减弦幂，半其余，差为从法，开方除之，即勾也。

刘徽的这段注文表示：

$$b-a=\frac{b^2-a^2}{b+a}\qquad(9\text{-}1\text{-}11)$$

$$(b-a)^2+2a(b-a)=b^2-a^2\qquad(9\text{-}1\text{-}12)$$

$$a^2+(b-a)a=\frac{c^2-(b-a)^2}{2}\qquad(9\text{-}1\text{-}13)$$

公式（9-1-12）、（9-1-13）分别是求 $b-a$ 与 a 的带从开平方式。赵爽也给出了开方式公式（9-1-13）。

（四）对由勾弦差、股弦差求勾、股、弦公式的证明

赵爽、刘徽都对公式（5-3-8）做出了证明。刘徽的方法是：

凡勾之在股，或矩于表，或方于里。连之者举表矩而端之。又从勾方里令为青矩之表，未满黄方。满此方则两端之邪重于隅中，各以股弦差为广，勾弦差为袤。故两端差相乘，又倍之，则成黄方之幂。开方除之，得黄方之面。其外之青知，亦以股弦差为广。故以股弦差加，则为勾也。

邪，音、义同余。《史记·历书》："先王之正时也，履端于始，举正于中，归邪于终。"① "归邪于终"，《左传》作"归余于终"。② "两端之邪"指青幂之矩位于两端多余的部分。戴震将"邪"读为"斜"，遂不可解，改为"廉"；钱校本以为戴校"非是"，改为"矩"；皆不妥。刘徽将图 9-1-2（b）旋转 180°，与图 9-1-2（a）叠合，则成为图 9-1-7。股幂之矩与由勾方变成的青幂之矩的面积之和应为 $a^2+b^2=c^2$，却未将黄方填满。而应该填满黄方的这部分，恰是青幂之矩位于两端的多余的部分，它们与股矩重合于弦方的两角，广是 $c-b$，长是 $c-a$，其面积之和是 $2(c-a)(c-b)$。黄方的面积应与此相等，即 $2(c-a)(c-b)$。那么，黄方的边长为 $\sqrt{2(c-a)(c-b)}$。另外，黄方的边长显然是 $a+b-c$，于是 $a+b-c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$。由

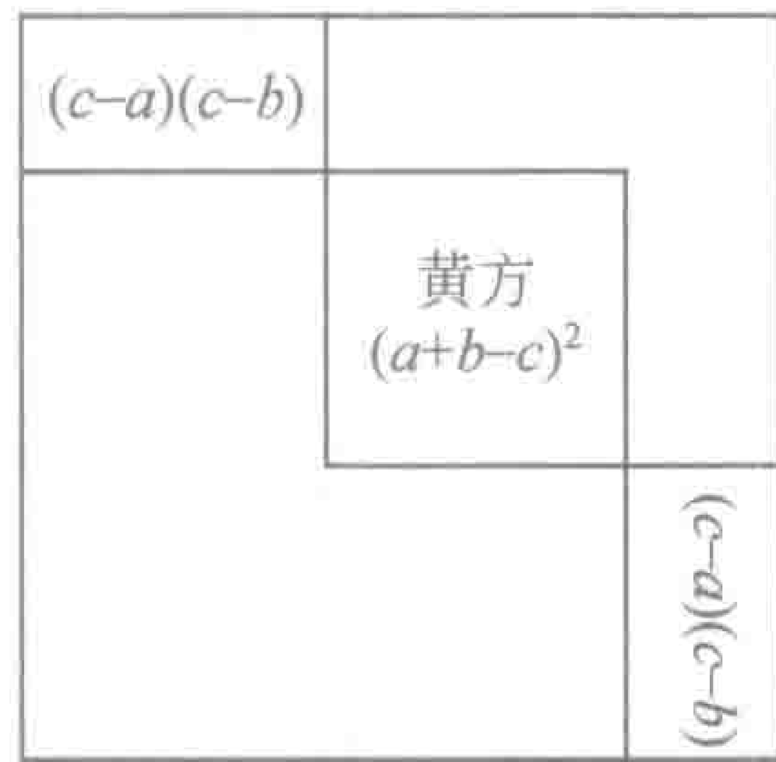


图 9-1-7　勾弦差股弦差求勾股弦

---

① 西汉·司马迁，史记，中华书局，1959 年。本编凡引《史记》文字，均据此。

② 周·左丘明，春秋左氏传·文公元年，见：《十三经注疏》，中华书局，1982 年，第 1836 页。

$$a = (a + b - c) + (c - b),$$
$$b = (a + b - c) + (c - a),$$
$$c = (a + b - c) + (c - b) + (c - a)$$

便证明了公式（5-3-8）。

三　刘徽对勾股数组公式的证明

刘徽首次用出入相补原理对《九章算术》公式（5-3-10）或公式（5-3-11）进行了证明[①]。刘徽说：

术以同使无分母，故令勾弦并自乘为朱、黄相连之方。股自乘为青幂之矩，以勾弦并为袤，差为广。今有相引之直，加损同上。其图大体，以两弦为袤，勾弦并为广。引横断其半为弦率。列用率七自乘者，勾弦之并率。故弦减之，余为勾率。同立处是中停也，皆勾弦并为率，故亦以股率同其袤也。

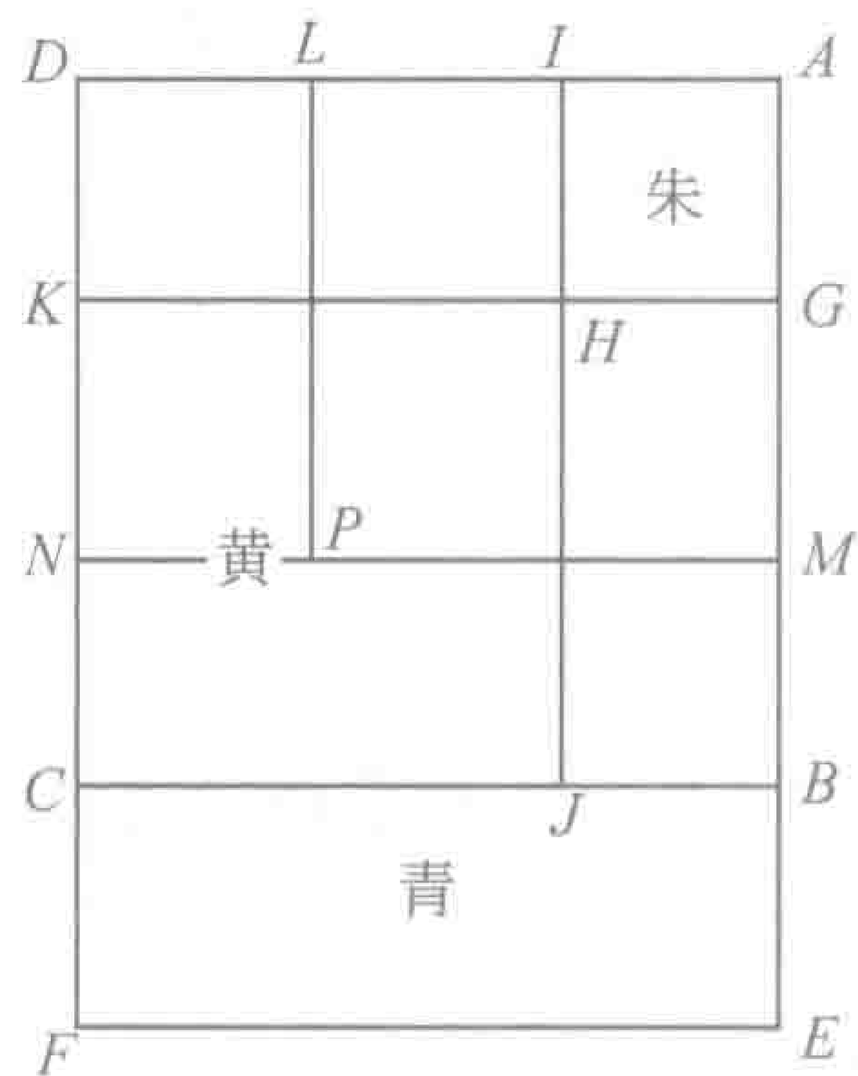


图 9-1-8　勾股数组之证明

这是说，以“同”，即勾弦并率 m 化去分母，使都变为整数。因此，其幂图以勾弦并 $c + a$ 作为广，如图 9-1-8 所示。AI 为勾 a，ID 为弦 c，使 $(c + a)^2$ 为朱、黄相连之方 $ABCD$，其中，$AGHI$ 是朱方，即 a^2；$HJCK$ 是黄方，即弦方 c^2；$AMPL$ 也是弦方 c^2；那么，$IHGMPL$ 是青幂之矩，即 $b^2 = c^2 - a^2$。将青幂之矩引直，变成 $BEFC$，以 $c - a$ 为广，$c + a$ 为袤。因此，整个图形 $AEFD$ 就以勾弦并 $c + a$ 为广，以两弦 $2c$ 为袤。勾率、股率、弦率分别是 $a(c + a)$，$b(c + a)$，$c(c + a)$。$c(c + a)$ 是整个图形的一半。这就是说，使股率也有同样的袤，而 $c(c + a) = \frac{1}{2}[(c + a)^2 + b^2]$，$a(c + a) = (c + a)^2 - c(c + a)$。由于 $(c + a) : b = m : n$，故

$$c(c + a) = \frac{1}{2}(m^2 + n^2),$$

$$a(c + a) = m^2 - \frac{1}{2}(m^2 + n^2) = \frac{1}{2}(m^2 - n^2),$$

$$b(c + a) = mn$$

容易得到公式（5-3-10）或公式（5-3-11）。[②]

四　王孝通对解勾股形问题的拓展

《缉古算经》最后六题是解勾股形问题，讨论了已知勾、股、弦二者积 ab，ac，bc 之一及

---

① 李继闵，刘徽对整勾股数的研究，科技史文集，第 8 辑（数学史专辑），上海科学技术出版社，1982 年，第 51～53 页。

② 郭书春，《九章算术》中的整数勾股形研究，科技史文集，第 8 辑（数学史专辑），上海科学技术出版社，1982 年，第 55～66 页。

勾 a 、股 b ，勾弦较 $c-a$ 或股弦较 $c-b$ 之一，求勾、股的三次或无奇次项的四次方程。根据现有资料，这是中国数学史第一次将勾、股、弦之积作为解勾股形的条件。例如，第15问是：

假令有勾股相乘幂七百六、五十分之一，弦多于勾三十六、十分之九。问：三事各多少？

术曰：幂自乘，倍多数而一，为实。半多数为廉法，从。开立方除之，即勾。以弦多数加之，即弦。以勾除幂，即股。

这是已知勾股积 ab 与勾弦差 $c-a$ ，求勾 a 的问题。由术文容易写出三次方程：

$$a^3+(\frac{c-a}{2})a^2=\frac{(ab)^2}{2(c-a)}$$

王孝通自注说明了其推导过程：

勾股相乘幂自乘，即勾幂乘股幂之积，故以倍勾弦差而一，得一勾与半差相连，乘勾幂为方。故半差为廉法，从。开立方除之。

这是说：$(ab)^2=a^2b^2$，由 $\frac{(ab)^2}{2(c-a)}=\frac{[(c-a)+2a](c-a)a^2}{2(c-a)}=(\frac{c-a}{2}+a)a^2$

便得到所求的方程。

第16问是已知勾股积 ab 与股弦差 $c-b$ ，求弦 c 的问题。术文是先求出股 b 。由勾股形中勾、股的对称性，自然是求解三次方程：

$$b^3+(\frac{c-b}{2})b^2=\frac{(ab)^2}{2(c-b)}$$

汲古阁本《缉古算经》第17问的王孝通自注有脱漏，但术文是完整的。此问是：

假令有勾弦相乘幂一千三百三十七、二十分之一，弦多于股一、十分之一。问：股多少？

术曰：幂自乘，倍多而一，为立幂。又多再自乘，半之，减立幂，余为实。又多数自乘，倍之，为方法。又置多数，五之，二而一，为廉法，从。开立方除之，即股。

这是已知勾弦积 ac 与股弦差 $c-b$ ，求股 b 的问题。术文给出三次方程：

$$b^3+\frac{5}{2}(c-b)b^2+2(c-b)^2b=\frac{(ac)^2}{2(c-b)}-\frac{(c-b)^3}{2}$$

第18问的题设、术文都有严重脱漏，从残存文字看是已知股弦积 bc 与勾弦差 $c-a$ ，求股 b 的问题。它应该是先求出勾 a ，由勾、股的对称性，将上式中互换 a,b ，便是求勾的方程，因此无自注。

第19，20问的题设、术文及第19问的自注也有严重脱漏。戴震在微波榭本中将第20问校补为：

假令有股十六、二分之一，勾股相乘幂一百六十四、二十五分之十四。问：勾多少？

术曰：幂自乘为实。股自乘为方法，从。开方除之，所得，又开方，即勾。

这是已知勾弦积 ac 与股 b ，求勾 a 的问题。其求解方程为

$$a^4+b^2a^2=(ac)^2$$

第19问应该与此对称。

这里有三个问题值得注意：

一是以前的数学著作中的解勾股形，只是已知勾、股、弦三事及其和差中的二者求三事的问题，《缉古算经》增添了已知勾、股、弦三事的积及其幂求三事的内容，是个创新。

二是以前的数学著作中的解勾股形问题，偶尔用到开平方，《缉古算经》大都用开带从立方求解，也用到四次方程，但其中没有奇次幂，因此可以通过两次开平方解决。

三是开方式的造术，是由常数项，通过变换，倒推出开方式的隅法、廉法和方法，这是一种很特殊的方式。可以说，只是通过勾股知识的恒等变形。如果已知方程，运用这种恒等变换说明方程的正确性并不难。但是，要用这种方法推导其方程，则需要特殊的技巧，没有给出从已知条件，导出开方式的途径。因此，王孝通的推导方法没有一般性。

第二节　勾股容方、容圆公式的证明

刘徽注采用出入相补原理和勾股相与之势不失本率的原理两种方式分别证明了《九章算术》的勾股容方公式（5-4-1）和勾股容圆公式（5-4-2）。

一　借助出入相补原理的证明

（一）勾股容方公式的证明

为了使用出入相补原理证明《九章算术》的勾股容方公式（5-4-1），刘徽曰：

> 勾、股相乘为朱、青、黄幂各二。令黄幂袤于隅中，朱、青各以其类，令从其两径，共成修之幂：中方黄为广，并勾、股为袤，故并勾、股为法。

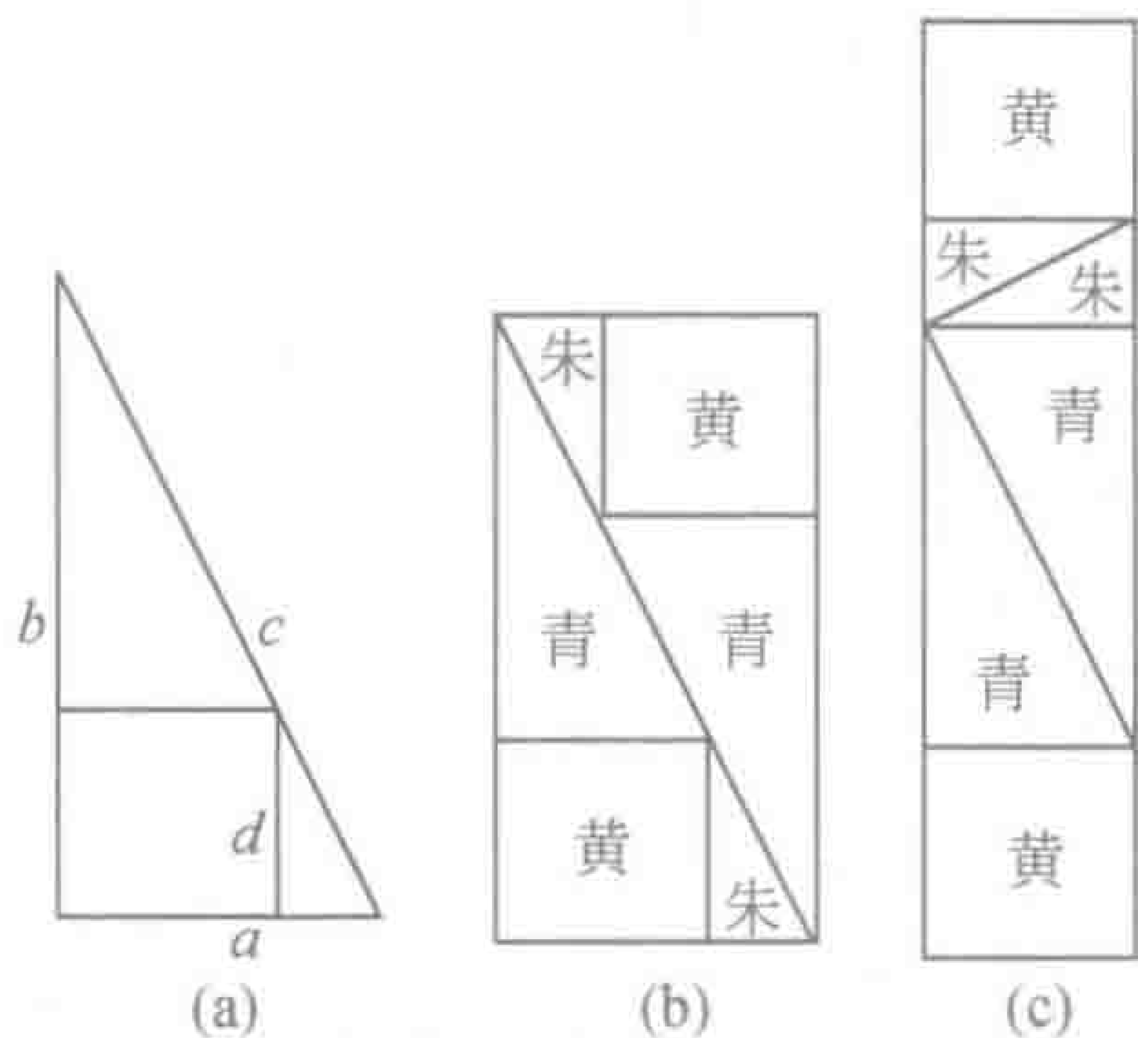


图 9-2-1　勾股容方

勾股容方如图 9-2-1（a）所示。将勾股形所容之正方形称为黄幂，分割出的勾上之小勾股形称为朱幂，股上之小勾股形称为青幂。取两个这样的勾股形，沿弦拼合成一个长方形，其面积为勾、股相乘，即 ab。那么它含有朱幂、青幂、黄幂各 2 个，如图 9-2-1（b）所示。将它们重新拼合成一个以黄幂的边长 d 为宽，以 $a+b$ 为长的长方形，如图 9-2-1（c）所示，当然，其面积仍为 ab。求 d，就是所容小正方形边长的公式（5-4-1）。

（二）勾股容圆公式的证明

刘徽勾股容圆注的第一段说：

> 勾、股相乘为图本体，朱、青、黄幂各二，倍之，则为各四。可用画于小纸，分裁邪正之会，令颠倒相补，各以类合，成修幂：圆径为广，并勾、股、弦为袤。故并勾、股、弦以为法。又以圆大体言之，股中青必令立规于横广，勾、股又邪三径均。而复连规，从横量度勾股，必合而成小方矣。

勾股容圆如图 9-2-2（a）所示。取一个容圆的勾股形，从圆心将其分割成 2 个朱幂、2 个青

幂、1个黄幂。其中，黄幂的边长是圆半径 r。两个这样的勾股形取成为一个以勾 a 为宽，以股 b 为长的长方形，如图9-2-2（b）所示。取2个这样的长方形，其面积为 $2ab$。各以其类重新拼合，成为一个以容圆直径 d 为广，以勾、股、弦之和 $a+b+c$ 为长的长方形，如图9-2-2（c）所示。其面积为 $(a+b+c)d$。显然，$2ab=(a+b+c)d$，便求出了容圆直径公式（5-4-2）。

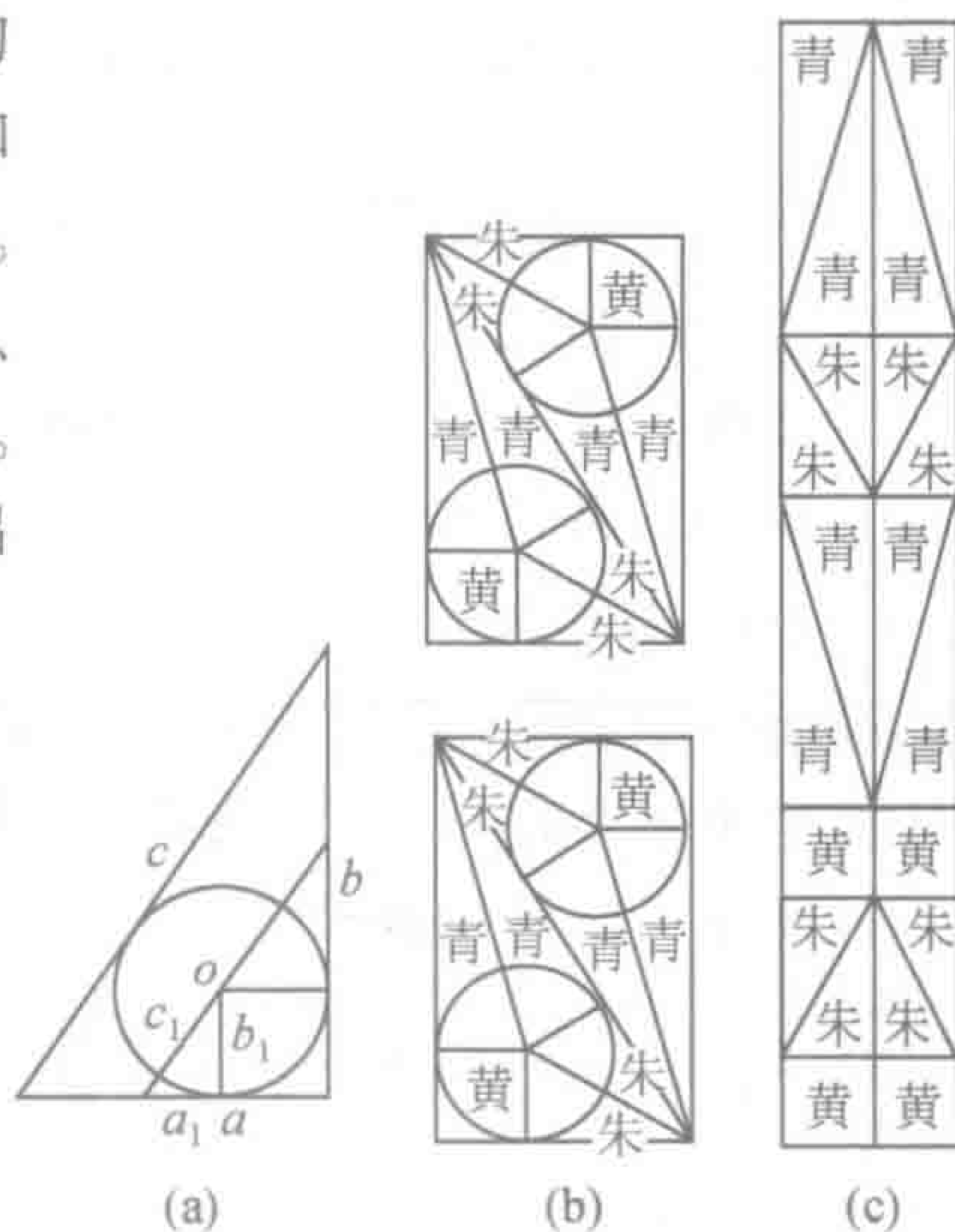


图9-2-2　勾股容圆

二　借助勾股相与之势不失本率原理的证明

（一）勾股相与之势不失本率原理

刘徽在勾股容方注第二段首先提出：

方在勾中，则方之两廉各自成小勾股，而其相与之势不失本率也。

这是相似勾股形的一个重要性质，用现今的术语，就是相似勾股形对应边成比例。设两个相似的勾股形的边长分别是 a,b,c 和 a_1,b_1,c_1，则

$$a:b:c=a_1:b_1:c_1 \tag{9-2-1}$$

刘徽利用这一原理证明了《九章算术》中关于勾股数组的应用以及勾股容方、容圆、测望问题的解法。

（二）勾股容方公式的证明

1. 勾股容方

刘徽勾股容方注提出勾股相与之势不失本率的原理之后，接着说：

勾面之小勾、股，股面之小勾、股，各并为中率。令股为中率，并勾、股为率。据见勾五步而今有之，得中方也。复令勾为中率，以并勾、股为率。据见股十二步而今有之，则中方又可知。

刘徽认为，勾上的小勾股形与股上的勾股形都与原勾股形相似。考虑勾上小勾股形，设其小勾为 a_1，小股就是 r，则 $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{d}$，并且 $a_1+r=a$。那么，由公式(9-2-1)，$\frac{a+b}{b}=\frac{a_1+r}{r}=\frac{a}{r}$。容易得到公式（5-4-1）。同样，考虑股上小勾股形，亦可得到（5-4-1）。

2. 合比定理

在证明勾股容方公式时，刘徽使用了合比定理，即若

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1},\quad \frac{b}{a}=\frac{b_2}{a_2},$$

则

$$\frac{a+b}{b}=\frac{a_1+b_1}{b_1},\quad \frac{b+a}{a}=\frac{b_2+a_2}{a_2}$$

（三）勾股容圆公式的证明

刘徽用勾股相与之势不失本率原理证明了公式（5-4-2）：

又画中弦以规除会，则勾、股之面中央小勾股弦：勾之小股，股之小勾皆小方之面，皆圆径之半。其数故可衰之。以勾、股、弦为列衰，副并为法。以勾乘未并者，各自为实。实如法而一，得勾面之小股，可知也。以股乘列衰为实，则得股面之小勾可知。

他过圆心作中弦，实际上是平行于弦的直线。中弦与勾、股上的一段及自圆心到勾、股的半径分别构成小勾股形。它们都与原勾股形相似，且其周长分别是原勾股形的勾与股。如图 9-2-2（a）所示。以勾上的小勾股形为例，设其三边为 a_1, b_1, c_1，显然 $a_1 + b_1 + c_1 = a$，由公式（9-2-1），$a_1 : b_1 : c_1 = a : b : c$，由衰分术，$b_1 = \frac{ab}{a+b+c}$。因此，容圆直径 $d = 2b_1 = \frac{2ab}{a+b+c}$。这正是《九章算术》提出的公式（5-4-2）。以股上的小勾股形亦可得到同样的结果。

（四）另外的勾股容圆公式

刘徽又给出了另外几个勾股容圆径的公式。他说：

圆径又可以表之差、并：勾弦差减股为圆径；又，弦减勾股并，余为圆径；以勾弦差乘股弦差而倍之，开方除之，亦为径也。

这就是

$$d = b - (c - a) = (a + b) - c \tag{9-2-2}$$

$$d = \sqrt{2(c-a)(c-b)} \tag{9-2-3}$$

这几个公式怎么得出的，刘徽没有记载。后来，贾宪将勾股容圆术称为“勾股求弦和较法”，因为显然：

$$(a + b) - c = \sqrt{2(c-a)(c-b)}$$

此式说明，勾股容圆径［公式（9-2-3）］就是公式（5-3-8）的首项。

第三节　重　差　术

一　重差诸术

人们很早就关心给人类带来温暖和光明的太阳的高远问题。郑玄注《周礼》云：南戴日下万五千里。刘徽说：“夫云尔者，以术推之。”这里的术就是重差术。按照郑众、郑玄的说法，重差术是汉代才发展起来的一个数学分支。刘安使用重差术测望过太阳。到赵爽、刘徽时代，重差术的重表、连索、累矩三种基本的测望技术已经完备。赵爽说：“定高远者立两表，望悬邈者施累矩。”立两表显然就是重差术的“重表”法。可见，赵爽是通晓重表、累矩等重差方法的。事实上，他用重表法注释了《周髀算经》的“日高图”。刘徽则更娴熟地使用了这三种方法。

《孙子算经》、《张丘建算经》中的测望问题，尤其是前者，大都比较简单。不过，《张丘建算经》中还有《海岛算经》中没有的题目类型。

（一）重表法

重表法在《海岛算经》中首见之于望海岛问：

> 今有望海岛，立两表，齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末参合。问：岛高及去表各几何？
>
> 术曰：以表高乘表间为实，相多为法，除之。所得加表高，即得岛高。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实，相多为法，除之，得岛去表数。[①]

如图 9-3-1 所示，设前表为 AB，表高为 h，却行至 E，BE 为 b_1。后表为 CD，却行至 F，DF 为 b_2。表间为 d。岛高 PQ 为 p，前表至岛 BQ 为 q。术文即

$$p = \frac{hd}{b_2 - b_1} + h \tag{9-3-1}$$

$$q = \frac{b_1 d}{b_2 - b_1} \tag{9-3-2}$$

其中的表间与两表却行相多都是两个量的差，所以叫重差。式（9-3-2）与《淮南子》的公式相同。实际上，刘徽在《九章算术注序》中就用重表法测望太阳高、远的重差公式。

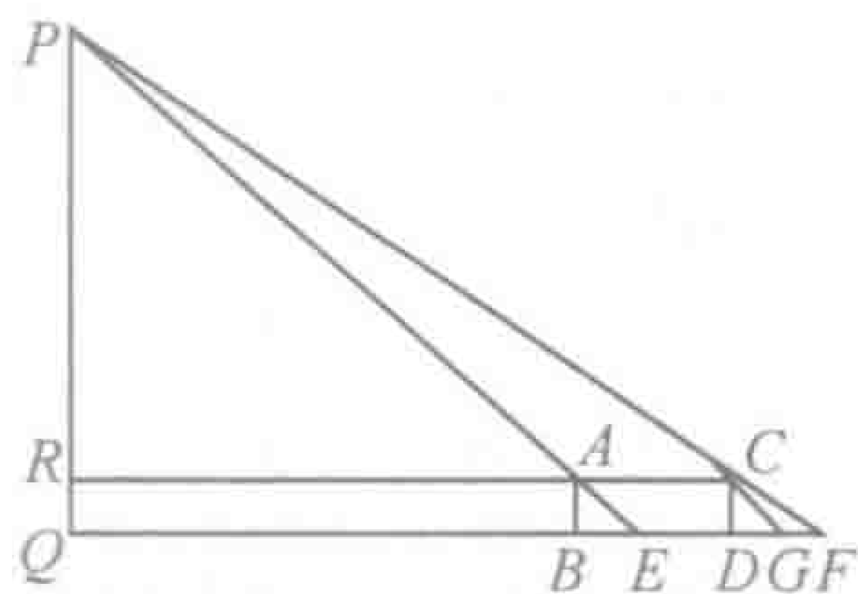


图 9-3-1　重表法

有人以为《海岛算经》海岛问的原型是山东沿海的一海岛。然而，据此问之答案，此海岛高 4 里 55 步，前表至海岛 102 里 150 步，以魏尺 1 尺合今 23.8 厘米计算，岛高为 1792.14 米，前表至海岛 43911 米，山东沿海乃至全中国沿海无高 1000 多米而又距大陆仅 40 多千米的海岛。联系到刘徽《九章算术注序》论述重差术时说“又况泰山之高与江海之广哉”，我们认为测望海岛问是以泰山为原型的。泰山极顶海拔高程为 1532.8 米，且泰山南偏西方向十分陡峭，7 千米外的泰安城海拔即下降到 130 米。自距泰山 40 多千米的今肥城市高淤、城宫一带测望泰山无任何障碍。刘徽测望的结果，尽管与泰山的实际高度误差较大，但比清阮元用重差术对泰山的测望结果还是精确得多（阮元测得的结果为 233 丈 5 寸 8 $\frac{2}{31}$ 分，约合海拔 970 米）。[②]

（二）连索法

连索法首见之于《海岛算经》第 3 问望方邑问：

> 今有南望方邑，不知大小。立两表，东西去六丈，齐人目，以索连之。令东表与邑东南隅及东北隅参相直。当东表之北却行五步，遥望邑西北隅，入索东端二丈二尺六寸半。又却北行去表一十三步二尺，遥望邑西北隅，适与西表相参合。问：

---

① 魏·刘徽，海岛算经，郭书春点校，郭书春、刘钝点校，《算经十书》，辽宁教育出版社，1998 年。繁体字修订本，九章出版社，2001 年。本编所引《海岛算经》，均据九章版。

② 郭书春，刘徽测望过泰山之高吗？泰山研究论丛（五），青岛海洋大学出版社，1992 年，第 265～277 页。

邑方及邑去表各几何?

术曰：以入索乘后去表，以两表相去除之。所得为景长。以前去表减之，不尽，以为法。置后去表，以前去表减之，余，以乘入索为实。实如法而一，得邑方。求去表远近者，置后去表，以景长减之，余，以乘前去表，为实。实如法而一，得邑去表。

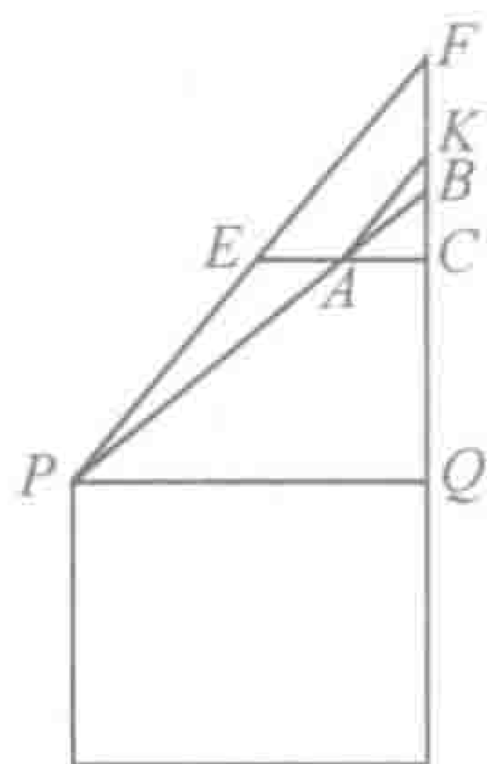


图 9-3-2　连索法

如图 9-3-2 所示，设邑方 PQ 为 a，东西两表为 C、E。邑去东表 CQ 为 l。两表相去为 d。东表前却行 BC 为 b_1，入索为 e，东表后却行 FC 为 b_2。刘徽先求出景长，设景长为 k，则 $k = \dfrac{eb_2}{d}$；那么，

$$a = \frac{e(b_2 - b_1)}{k - b_1} \tag{9-3-3}$$

$$l = \frac{b_1(b_2 - k)}{k - b_1} \tag{9-3-4}$$

(三) 累矩法

累矩法首见之于《海岛算经》第 4 问望深谷问：

今有望深谷，偃矩岸上，令勾高六尺。从勾端望谷底，入下股九尺一寸。又设重矩于上，其矩间相去三丈。更从勾端望谷底，入上股八尺五寸。问：谷深几何?

术曰：置矩间，以上股乘之，为实。上、下股相减，余为法。除之，所得以勾高减之，即得谷深。

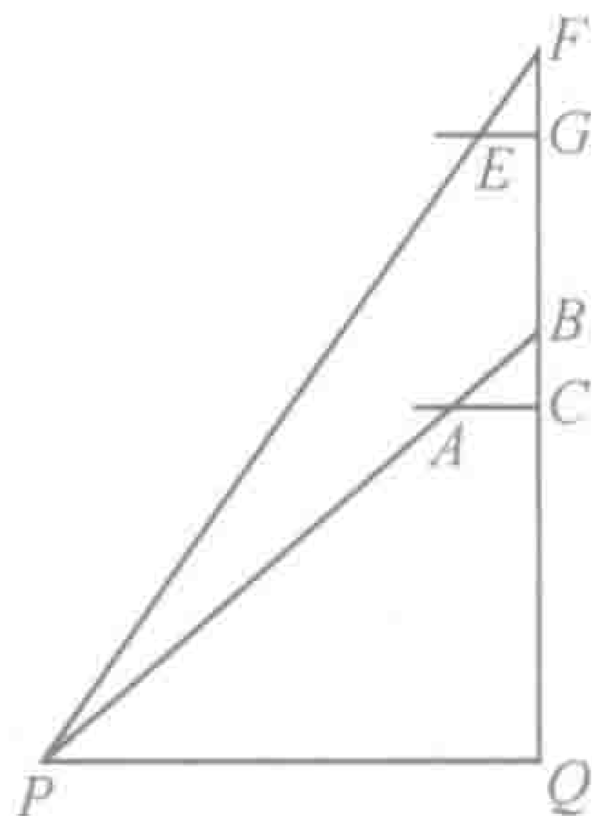


图 9-3-3　累矩法

如图 9-3-3 所示，设矩之勾高为 a，矩间为 d，下股为 b_1，上股为 b_2，日去地为 p，谷深为 h，此即望谷公式：

$$h = \frac{db_2}{b_1 - b_2} - a \tag{9-3-5}$$

(四) 刘徽造术之推测

1. 三种看法

由于刘徽对《重差》的自注及图已佚，清中叶以来，人们开始探讨刘徽的思路。李潢撰《海岛算经细草图说》，沈钦裴撰《重差图说》，都用相似形对应边成比例的原理说明造术的正确性。钱宝琮认为李潢、沈钦裴添线过多，不符合刘徽原意。目前，学术界基本上有三种意见。一是以钱宝琮为代表，认为是以相似勾股形对应边“相与之势不失本率”的原理证明的。二是以吴文俊为代表，认为是用出入相补原理证明的。三是郭书春的意见：鉴于刘徽对《九章算术》勾股章比较复杂的问题都是同时使用“相与之势不失本率”和出入相补这两种原理，刘徽对《海岛算经》这些比勾股章复杂得多的术文，当然更应该同时使用这两种方法，它们可以并行不悖。下面分别介绍。

2. 以率的理论证明重差术

刘徽说：凡望极高，测绝深而兼知其远者“必以重差为率”。可见，使用率的理论证明《重差》诸术是符合刘徽本意的。中国传统数学中使用平行线较少，但并不是没有，刘徽勾

股容圆术注中的中弦就是平行于弦的线。钱宝琮在《中国数学史》中证明望海岛术的方法如下：如图9-3-1所示，假设自D却行至G，使$DG = BE$，相当于过C作$CG \parallel AE$，则GF为两却行之相多。连CA，延长之，交PQ于R，则$RQ = AB$。显然，勾股形APR与GCD相似，因此$\frac{PR}{CD} = \frac{RA}{DG} = \frac{PA}{CG}$；而三角形$PAC$与$CGF$相似，于是$\frac{PA}{CG} = \frac{AC}{GF}$。因此$\frac{PR}{CD} = \frac{AC}{GF}$，$\frac{RA}{DG} = \frac{AC}{GF}$。那么，$PR = \frac{AC \times CD}{GF}$，而$RQ = CD$，于是$PQ = PR + RQ = \frac{AC \times CD}{GF} + CD$，$RA = \frac{AC \times DG}{GF}$。这正是测海岛或测日的重差公式（9-3-1）、（9-3-2）。

3. 以出入相补原理证明重差术

吴文俊使用出入相补方法，其基础是容横容直原理。贾宪在《黄帝九章算经细草》中提出的一条重要原理：

> 直田斜解勾股二段，其一容直，其一容方，二积相等。[①]

杨辉则进一步认为容直容横二积相等，如图9-3-4所示，一个长方形被其对角线分成两个勾股形，则它们所容的以对角线上任意一点为公共点的长方形，其面积相等。这个原理尽管在北宋贾宪、南宋杨辉才明确写出，但是刘徽时代甚至他以前的数学界已经通晓，是绝无问题的。

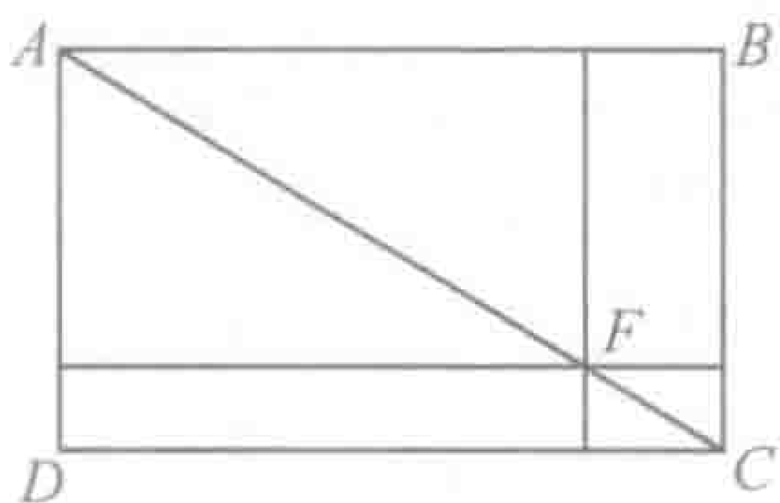


图9-3-4　容横容直原理

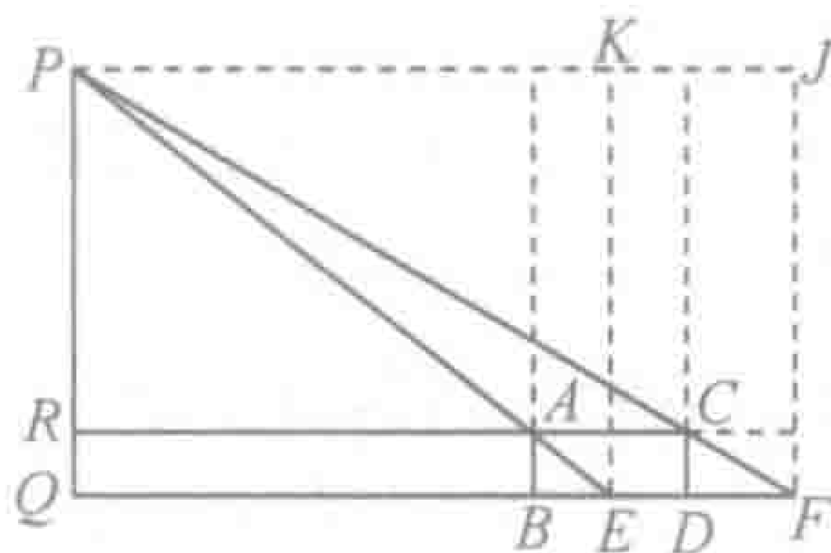


图9-3-5　吴文俊对重表法的证明

吴文俊的方法是：如图9-3-5所示，作长方形$PQEK$和$PQFJ$。由容横容直原理，在长方形$PQFJ$中，▭[②]CJ = ▭CQ，在长方形$PQEK$中，▭AQ = ▭AK，相减，得▭CJ − ▭AK = ▭BC，此即：后表却行×（岛高－表高）－前表却行×（岛高－表高）＝表间×表高，亦即（后表却行－前表却行）×（岛高－表高）＝表间×表高，由此得岛高公式（9-2-3）。又从▭AQ = ▭AK，得前表去岛×表高＝前表却行×（岛高－表高），代入岛高公式，便得到前表去岛公式（9-2-4）。

吴文俊认为："海岛第一题中的岛高公式，望松第二题的松高辅助公式以及望谷第四题的谷深公式，代表了古代用矩立表以望高、知远、测深的三个基本结果，其余诸题的公式皆可从这三个基本公式容易得出。"[③] 这里的松高辅助公式在原书中没有提及，是吴文俊推出的。

望松问是：

> 今有望松生山上，不知高下。立两表，齐高二丈，前后相去五十步，令后表与前表参相直。从前表却行七步四尺，薄地遥望松末，与表端参合。又望松本，入表

---

① 北宋·贾宪，黄帝九章算经细草，见：南宋·杨辉，《详解九章算法》，载：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册。河南教育出版社，1993年。凡本编引用贾宪与杨辉语，均据此。

② ▭即长方形，以其对角两点表示。

③ 吴文俊，《海岛算经》古证探源，见：《吴文俊论数学机械化》，山东教育出版社，1995年，第152页。

二尺八寸。复从后表却行八步五尺，薄地遥望松末，亦与表端参合。问：松高及山去表各几何？

设松高为 h，表间为 d，前表却行为 b_1，后表却行为 b_2，入表为 p，前表去山为 q，此即

$$h = \frac{dp}{b_2 - b_1} + p \tag{9-3-6}$$

$$q = \frac{b_1 d}{b_2 - b_1} \tag{9-3-7}$$

吴文俊推出的松高辅助公式是

$$h = \frac{pq}{b_2 - b_1} + p \tag{9-3-8}$$

将公式（9-3-7）代入公式（9-3-8），便得到公式（9-3-6）。

钱宝琮和吴文俊关于《海岛算经》其他问题的造术的推证，可分别参看钱宝琮主编的《中国数学史》和吴文俊的《〈海岛算经〉古证探源》，或郭书春的《古代世界数学泰斗刘徽》。

二　制图六体与数学

刘徽所发展完善的率理论和重差术，促进了中国地图学的发展。刘徽的同代人裴秀（224～271）著《禹贡地域图》十八篇。其序言指出，汉代的《舆地》及《括地》诸杂图“各不设分率，又不考正准望，亦不备载名山大川。虽有粗形，皆不精审，不可依据。或荒外迂诞之言，不合事实，于义无取”。他在绘制十八篇地图时，提出并应用了著名的“制图六体”：

> 今制地图之体有六。一曰分率，所以辨广轮之度也。二曰准望，所以正彼此之体也。三曰道里，所以定所由之数也。四曰高下，五曰方邪，六曰迂直，此六者各因地而制形，所以校夷险之故也。有图像而无分率，则无以审远近之差；有分率而无准望，虽得之于一隅，必失之于他方；虽有准望而无道里，则施于山海绝隔之地，不能以相通；有道里而无高下、方邪、迂直之校，则径路之数必与远近之实相违，失准望之正，故必此六者参而考之。然后远近之实定于分率，彼此之实定于准望，径道之实定于道里，度数之实定于高下、方邪、迂直之算。故虽有峻山钜海之隔，绝域殊方之迥，登降诡曲之因，皆可得举而定者。准望之法既正，则曲直远近无所隐其形矣。①

分率就是现今地图绘制中的缩尺，显然需要使用率；准望就是对地理方位的测望；道里就是距离远近，一是道路的远近，一是直线距离，后者靠重差术才能解决；以高取下，以方取邪，以迂取直，都是解决复杂的地形的地图绘制中的问题。“制图六体”在西方地图学明末清初传入中国之前一直被人们奉为圭臬。

不言而喻，裴秀“制图六体”中的每一项都离不开数学测望与运算，他赖以建立制图理论的数学知识有两个明显的特点：一是以率的理论为基础，分率、准望、道里都离不开率理论。二是以重差术的发展完善为基础，他要解决峻山巨海之隔，绝域殊方之迥的测绘，没

① 唐·欧阳询等辑，艺文类聚卷六，中华书局上海编辑所，1965 年，第 100，101 页。

有重差术是不可能的。因此，“制图六体”不仅是制图学知识积累发展的产物，而且是以包括《海岛算经》在内的以刘徽《九章算术注》为主体的数学知识的高度发展为基础的。同样，汉代地图不设分率，不考正准望，也正是与当时数学中关于率的理论与测望算法还处于初级阶段相适应的。

裴秀是魏晋重臣，刘徽是否直接参与裴秀“制图六体”的提出与《禹贡地域图》十八篇的测量绘制，我们没有可靠资料；但是，魏咸熙初（公元264）裴秀主持官制改革，因功被封为济川侯。济川侯国在当时高苑县济川墟（今山东省博兴县西南），与刘徽家乡邹平县相邻，裴秀与刘徽有交往，不是不可能的。

第四节　其他测望问题

《张丘建算经》中也有测望问题，而甄鸾的《数术记遗注》则在测望方面探讨了以前著作中未涉足的方面，是中国传统数学中全新的内容。

一　《张丘建算经》中的测望问题

《张丘建算经》卷上“引葭趋岸”问，卷下“倚木于垣”问，都是《九章算术》同类问题的改写，解法也类似。《张丘建算经》卷中有“筑城求广”、“筑墙求高”以及方锥、方亭互接求高等四个问题，都是求某横截面处的高、广问题，张丘建和刘孝孙都未给出造术原由。估计是由相似勾股形对应边成比例即刘徽说的“勾股相与之势不失本率”的原理，即公式（9-2-1）得出的。《张丘建算经》还提出了筑墙求高以及方锥斩末为方亭、方亭接筑为方锥，分别求斩高与接高的问题，虽是借立体问题设问，实际上是平面问题。

《张丘建算经》卷上的“城不知大小”问是《海岛算经》所没有的类型。该问如下：

> 今有城不知大小、去人远近。于城西北隅而立四表，相去各六丈，令左两表与城西北隅南北望参相直。从右后表望城西北隅，入右前表一尺二寸。又望西南隅，亦入右前表四寸。又望东北隅，亦入左后表二丈四尺。问：城去左后表及大小各几何？
>
> 术曰：置表相去自乘，以望城西北隅入数而一，得城去表。又以望城西南隅入数而一，所得减城去表，余为城之南北。以望城东北隅入左后表减城去表，余以乘表相去，又以入左后表数而一，即得城之东西。

如图9-4-1所示，A,B,C,D 依次是城的西北、西南、东南、东北隅①，E,F,G,H 分别是左后、左前、右前、右后表。从右后表 H 望城西北隅 A，入右前表处 M，望城东北隅 D，入左后表处 P。这是已知 EH，GM，GN，EP，求城去左后表 AE，城东西 AD，城南北 AB。由于勾股形 AEH 与 HGM 相似，那么 $\frac{AE}{EH}=\frac{HG}{GM}$，于是城（西北隅）去左后表 $AE=\frac{HG\times EH}{GM}=\frac{HG^2}{GM}$。同样，

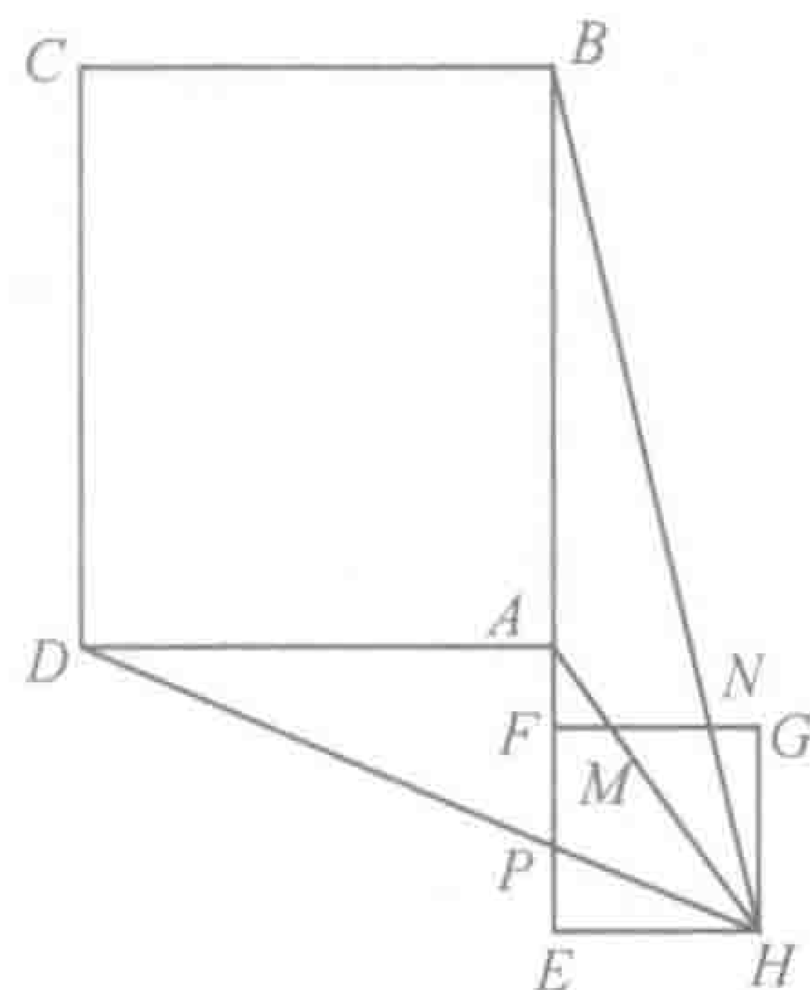


图9-4-1　测城

① 与今之地图上北下南、左西右东相反，中国古代是上南下北、左东右西。

勾股形 BEH 与 HGN 相似，那么城西南隅去左后表 $BE=\frac{HG^2}{GN}$，于是城南北 $AB=\frac{HG^2}{GN}-AE$。而勾股形 PAD 与 PEH 相似，那么 $\frac{HE}{EP}=\frac{AD}{AP}$，于是城东西 $AD=\frac{HE\times AP}{EP}=\frac{HE\times(AE-EP)}{EP}$。

二　《数术记遗注》中的测望问题

（一）知方之术

徐岳《数术记遗》说："犹川人士迷其指归，乃恨司方之手爽。"甄鸾注曰：

> 《狐疑论》称："黄帝将见大隗于具茨之山，至襄城之野，川谷之形率多斜曲。川人曰：'积习生常，乃固已之，非指南车而为爽。'乃指谓曰：'按司方所指者乃为我等之西也，然则指南岂其谬也？'乃行数里，川人又曰：'司方所指，我等之东也。'众共论之，为疑笑于时。容成子怪而问之，川人以其状白对。容成曰：'在此望之，具茨之山于汝住所复在何方？'川人曰：'在我之东。'容成曰：'汝向言在西，今更在东，何言不常也！此非山川之移。盖川曲之斜，人心之惑耳。'川人乃请于斜曲之中定东西南北之术。容成曰：'当竖一木为表，以索系之表，引索绕表画地为规。日初出影长，则出员规之外。向中渐短，则影入之。西北隅影初入之处则记之。乃过中，影渐长，出规之外。候东北隅初出规之处又记之。取二记之所，即正东西也。折半以指表，则正南北也。'川人志之，以为知方之术。"

司方就是指南车。具茨山在今河南禹县。这是说，山区道里斜曲，山区人常将方向搞错，容成遂向其教授于斜曲之中定东西南北之术，这是《考工记》以日影"正朝夕"的具体化。如第三章图 2-7 所示，O 为立表处，以 O 为圆心画圆。设上午表影入圆规处为 D，下午表影出圆规处为 C，则 CD 表示东西方向。取 CD 的中点，连圆心，就表示南北方向。显然，这是利用了等腰三角形底边的中点与顶点的连线必垂直于底边这一性质。

（二）"计数"中的测望

《数术记遗》第 14 种算法是："计数。既舍数术，宜从心计。"甄鸾注曰："言舍数术者，谓不用算筹，宜以意计之。"所谓不用算筹，以意计之的问题有三个方面，第二、三个方面分别是买羊问题与百鸡问题，其中只给出了一组解，比《张丘建算经》是个倒退。第一个方面的问题是关于测望的，含有三个问题。甄鸾提出的第一个问题是：

> 或问曰："今有大水不知广狭，欲不用算法，计而知之。""假令于水北度之者，在水北置三表，令南北相直，各相去一丈。人在中表之北，平直相望水北岸，令三相直，即记南表相望相直之处。其中表人目望处亦记之。又从中相望处直望水南岸，三相直，看南表相直之处亦记之。取南表二记之处高下，以等北表点记之。还从中表前望之所北望之，北表下记三相直之北，即河北岸也。又望上记三相直之处，即水南岸。中间则水广狭也。

如图 9-4-2 所示，设河的北岸 A，南岸 B，欲求 AB 的长度。在北岸北侧等距放置垂直于 AB

的三根表。从中表的 E 处望北岸 A 处，交南表于 M，望南岸 B 处，交南表于 N，在北表上取 P、Q 二点，使 $PQ = MN$，$PM//QN//AB$，从 E 望 P，交 BA 的延长线于 C，望 Q，交 BA 的延长线于 D，则 $CD = AB$，量出 CD 的长度，便可以知道 AB 的长度①。

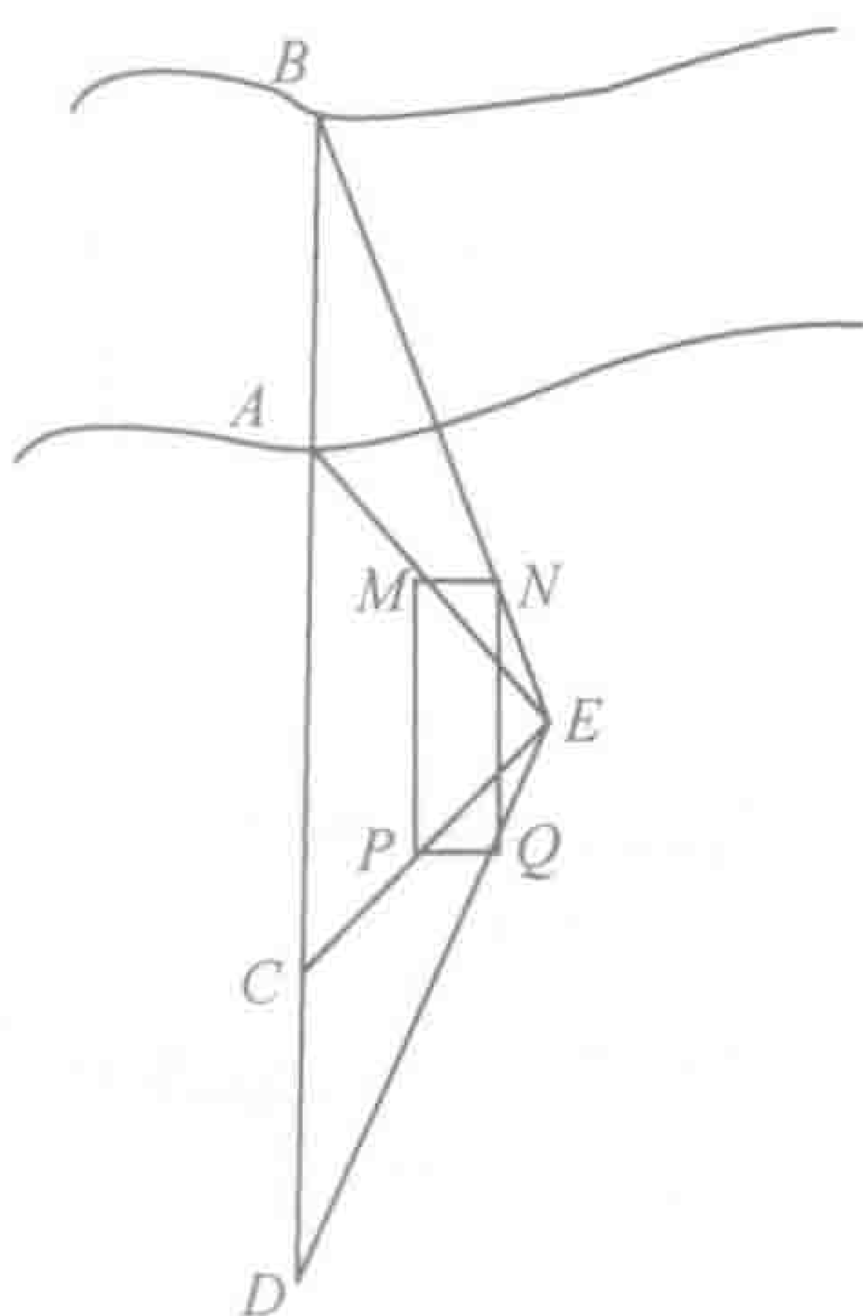


图 9-4-2　计知广狭

甄鸾提出的第二个问题比较简单。第三个问题是：

> 或问曰："今有深坑，在上看之，可知尺数已否？"
>
> 荅曰："以一杖任意长短，假令以一丈之杖掷著坑中，人在岸上手捉之一杖，舒手望坑中之杖，遥量知其寸数。即令一人于平地捉一丈之杖，渐令却行，以前者遥望坑中寸量之，与望坑中数等者，即得。"

如图 9-4-3 所示，设坑深 AB，BC 为坑中 1 丈之杖。用另一长杖著 C 处，在 A 处作记号。然后取一丈长的杖 DE，使之自 A 间后垂直地向后退，退到使 $AE = AC$ 为止，则 $AD = AB$，量出 AD 的长度，便知道坑深。

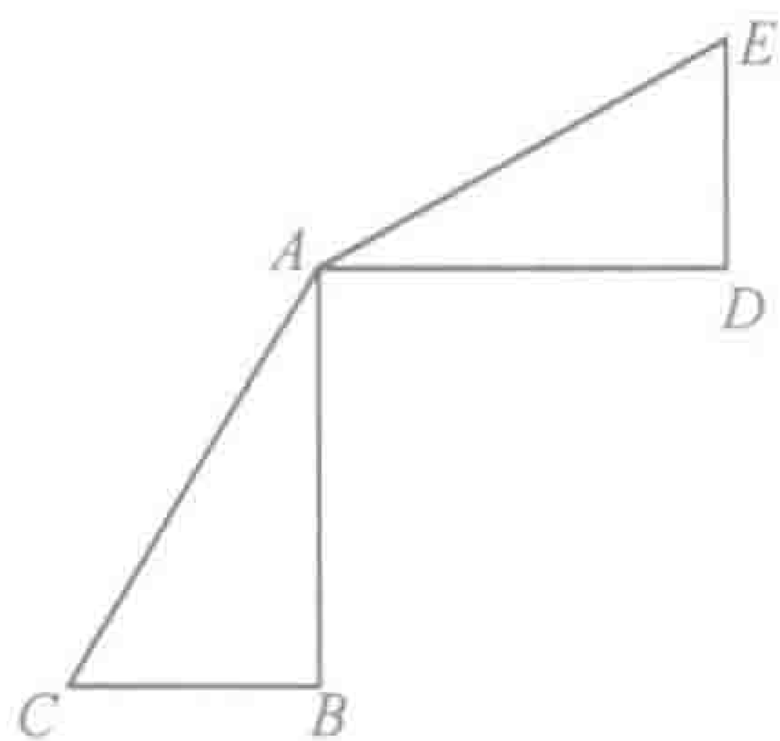


图 9-4-3　杖望坑深

这两个问题都是通过图形变换，将可望而不可及的图形化成可以量得的图形。实际上，前者是以中表为对称轴的对称变换，后者是勾股形 ADE 与 ABC 全等。这类题目都是现存传统数学著作中所未见到过的，可谓独树一帜。

① 刘钝，大哉言数，辽宁教育出版社，1993 年。

第十章　开方术、方程术的改进、不定问题和数列

刘徽《九章算术注》给开方术以几何解释，在“开方不尽”时创造了继续开方“求其微数”的重要方法，还创造了解方程的互乘相消法和方程新术。《孙子算经》和刘孝孙《张丘建算经细草》等对开方术和方程术也有不同程度的改进。《孙子算经》的“物不知数”问与《张丘建算经》的“百鸡问题”都是世界数学史上著名的不定问题。

第一节　开方术的几何解释和改进

一　刘徽关于开方术的几何解释

（一）开方术的几何解释

刘徽开方术注说（其中，楷体为《九章算术》本文，宋体为刘徽注）：

开方求方幂之一面也。术曰：置积为实。借一算，步之，超一等。言百之面十也，言万之面百也。议所得，以一乘所借一算为法，而以除。先得黄甲之面，上下相命，是自乘而除也。除已，倍法为定法。倍之者，豫张两面朱幂定袤，以待复除，故曰定法。其复除，折法而下。欲除朱幂者，本当副置所得成方，倍之为定法，以折、议、乘，而以除。如是当复步之而止，乃得相命。故使就上折下。复置借算，步之如初。以复议一乘之。欲除朱幂之角黄乙之幂，其意如初之所得也。所得，副以加定法，以除。以所得副从定法。再以黄乙之面加定法者，是则张两青幂之袤。复除，折下如前。

图 10-1-1　开方术的几何解释

《九章算术》的开（平）方术是面积问题的逆运算，刘徽因此提出开平方是“求方幂之一面”，即求面积为已知的正方形的边长，如图 10-1-1 所示。那么，若面积是百位数，边长就是十位数；若面积是万位数，边长就是百位数。议所得即根的第一位得数就是正方形黄甲的边长；《九章算术》得出法之后，以法除实，刘徽则将边长自乘，以减实，就是从原正方形中除去黄甲的面积。《九章算术》将法加倍，作为定法，刘徽认为是预先张开两块朱幂已经确定的长，以准备求第二位得数，即朱幂的宽，所以称为定法。朱幂位于黄甲的相邻的两侧。折法就是通过将定法退位使其缩小。确定第二位得数，就是朱幂的宽，也是小正方形黄乙的边长。从原正方形中再除去两朱幂和黄乙的面积。如此继续下去。

（二）开立方术的几何解释

类似刘徽对开平方术的解释，刘徽认为开立方就是“立方适等，求其一面也”，即求体积为被开方数的正方体的边长。因此，“言千之面十，言百万之面百”，就是说，被开方数是千位数，边长就是十位数；被开方数是百万位数，边长就是百位数。“议所得，以再乘所借一算为法，而除之”的意义是：“再乘者，亦求为方幂。以上议命而除之，则立方等也。”如图 10-1-2 所示，设被开方数为 A ，“议所得”即根的第一位得数是 a_1 ，在这里，刘徽将《九章算术》的以法 a_1^2除实 A 而得 a_1 ，改进为以 a_1^3减 A ，即 $A - a_1^3 = A_1$。a_1^3 就是图 10-1-2（a），（b）所示的以 a_1 为边长的正方体的体积。术文“除已，三之为定法”的意义是：“为当复除，故豫张三面，以定方幂为定法也。”即已经确定了三方，作为定法，也就是三个扁平的长方体的面 a_1^2；这三个扁平长方体实际上位于以第一位得数 a_1 为边长的正方体的旁边，如图 10-1-2（c）所示。术文“复除，折而下”的意义是：“复除者，三面方幂以皆自乘之数，须得折、议定其厚薄尔，”也就是将 a_1^2退位，以议定三个扁平长方体的厚薄 a_2 ；复除时为什么要“折而下”也就是“退位”呢？刘徽说：“开平幂者，方百之面十；开立幂者，方千之面十。据定法已有成方之幂，故复除当以千为百，折下一等也。”术文“以三乘所得数，置中行”的意义是“设三廉之定长”，即已经确定了三廉，也就是三个长条的长方体的长 a_1 ，这三个长条长方体的一端都与以第二位得数 a_2 为 边长的小正方体连接，如图 10-1-2（a），（d）所示。术文“复借一算，置下行”是：“欲以为隅方，立方等未有定数，且置一算定其位。”如图 10-1-2（a），（e）所示，也就是欲求位于隅角上的小正方体的边长，亦即第二位得数 a_2 ，因为还不知道它的数值是多少，故先借一算以确定它的位置。在求出第一位得数后，刘徽实际上改变了《九章算术》还上“借算”，在求第二位得数时“复借一算”的做法，而采取“方法”退一位，“廉法”退二位，“隅法”退三位的做法。因此，对术文“步之，中超一、下超二等”，刘徽说：“上方法，长自乘而一折；中廉法，但有长，故降一等；下隅法，无面长，故又降一等也。”对术文“复置议，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定除”，刘徽认为“以一乘中”是“为三廉备幂也”，即以第二位得数 a_2 乘 a_1 ，是为三个廉法准备的幂 a_1a_2 ；“再乘下”是“令隅自乘，为方幂也”，即以第二位得数的二次方 a_2^2 乘 1，作为方幂；那么，“三面、三廉、一隅皆已有幂，以上议命之而除去三幂之厚也”，也就是从剩余的实 A_1 中除去 $3a_1^2a_2, 3a_1a_2^2, a_2^3$ 。总之，得出根的第一位得数 a_1 ，第二位得数 a_2 ，余实变成 $A - a_1^3 - (3a_1^2a_2 + 3a_1a_2^2 + a_2^3) = A - (a_1 + a_2)^3 = A_2$ 。若 $A_2 \neq 0$ ，需要继续开方。

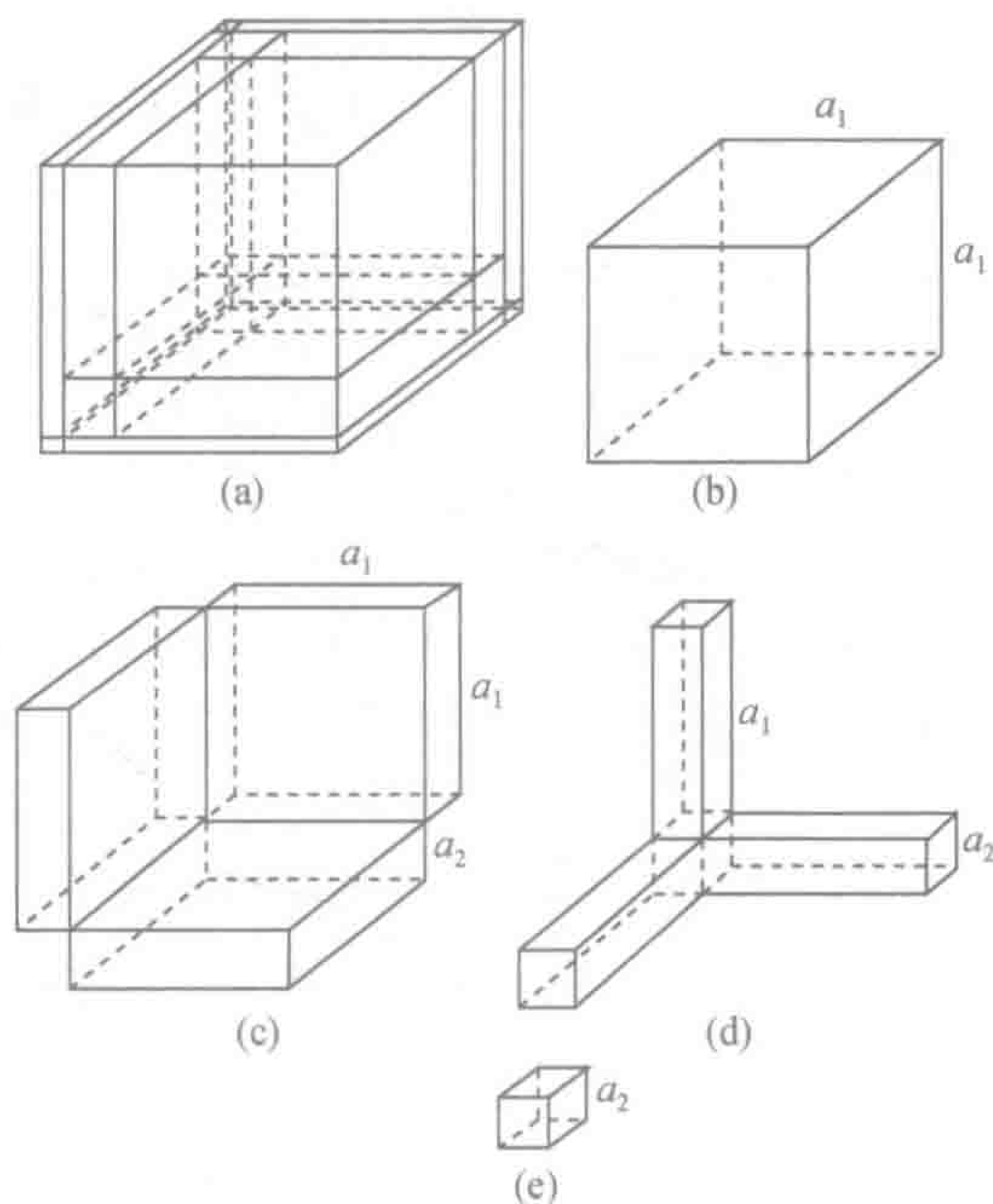


图 10-1-2　开立方的几何解释

刘徽说：

言不尽意，解此要当以棋，乃得明耳。

以棋解释开立方术，即图 10-1-2 所示。

二　刘徽和王孝通关于开方式的造术

（一）刘徽关于二次开方式的造术

《九章算术》勾股章“邑方出南北们”问给出二次方程公式（6-1-1）。刘徽注用两种方法推导之。其第一种方法是：

此以折而西行为股，自木至邑南一十四步为勾，以出北门二十步为勾率，北门至西隅为股率，半广数。故以出北门乘折西行股，以股率乘勾之幂。然此幂居半，以西行，故又倍之，合东，尽之也。

基于率的理论。如图 6-1-1 所示，勾股形 $ABC \backsim$ 勾股形 FBD，因此 $BD : FD = BC : AC$，而 $FD = \frac{1}{2}x$，$BC = k + x + l$，故 $k : \frac{1}{2}x = (k + x + l) : m$，于是得到了公式（6-1-1）。

第二种方法是：

此术之幂，东西如邑方，南北自木尽邑南十四步。之幂各南、北步为广，邑方为袤，故连两广为从法，并以为隅外之幂也。

图 10-1-3　邑方出南北门术

使用出入相补原理进行证明：

如图 10-1-3 所示，刘徽考虑自木 B 至邑南 C 为长，邑方 FG 为宽的长方形 $KMLH$，其面积为 $x^2 + (k + l)x$。它是长方形 $BCLH$ 的面积的 2 倍。由于勾股形 ABC 与 ABI 相等，AFL 与 AFJ 相等，FBH 与 FBD 相等，因此长方形 $BCLH$ 与 $DJIB$ 面积相等，长方形 $DCLF$ 与 $FJIH$ 面积相等。后者的面积为 km，从而得出了上述二次方程。

这个出入相补过程的后半部分，刘徽未明确表述，是我们补充的。不过，它符合中国传统数学的思路，也符合刘徽的思想。其中的关键是由容横容直原理得出的长方形 $DCLF$ 与 $FJIH$ 面积相等这个结论。

同时，我们看到，在建立开带从平方式的过程中，实际上用到了如积相消，此即后来宋元时期如积相消，进而成为天元术思想的先河。

（二）王孝通关于开方式的推导

王孝通关于三次、四次方程的推导在他的自注中。仅以第三问筑堤为例：

假令筑堤，西头上、下广差六丈八尺二寸，东头上、下广差六尺二寸，东头高少于西头高三丈一尺，上广多东头高四尺九寸，正袤多于东头高四百七十六尺九寸。甲县六千七百二十四人，乙县一万六千六百七十七人，丙县一万九千四百四十八人，丁县一万二千七百八十一人。四县每人一日穿土九石九斗二升。每人一日筑

常积一十一尺四寸十三分寸之六。穿方一尺得土八斗。古人负土二斗四升八合，平道行一百九十二步，一日六十二到。今隔山渡水取土，其平道只有一十一步，山斜高三十步，水宽一十二步。上山三当四，下山六当五，水行一当二。平道踟蹰十加一，载输一十四步。减计一人作功为均积，四县共造，一日役毕。今从东头与甲，其次与乙、丙、丁。问给斜、正袤与高，及下广，并每人一日自穿、运、筑程功，及堤上、下高、广各几何?

……

求堤上、下广及高、袤术曰：一人一日程功乘总人为堤积。以高差乘下广差，六而一，为鳖幂。又以高差乘小头广差，二而一，为大卧堑头幂。又半高差乘上广多东头高之数，为小卧堑头幂。并三幂，为大、小堑鳖率。乘正袤多小高之数，以减堤积，余为实。又置半高差，及半小头广差与上广多小头高之数，并三差，以乘正袤多小头高之数。以加率为方法。又并正袤多小高、并上广多小高及半高差，兼半小头广差加之为廉法，从。开立方除之，即小高。加差即各得广、袤、高。又正袤自乘，高差自乘，并，而开方除之，即斜袤。

求甲县高、广、正、斜袤术曰：以程功乘甲县人，以六因取积。又乘袤幂，以下广差乘高差，以法，除之，为实。又并小头上、下广，以乘小高，三因之，为垣头幂。又乘袤幂，如法而一，为垣方。又三因小头下广，以乘正袤，以广差除之，为都廉，从。开立方除之，得小头即甲袤。又以下广差乘之，所得，以正袤除之。所得，加东头下广，即甲广。又以两头高差乘甲袤，以正袤除之，以加东头高，即甲高。又以甲袤自乘，以堤东头高减甲高，余自乘，并二位，以开方除之，即得斜袤。若求乙、丙、丁，各以本县人功积尺，每以前大高、广为后小高、广。凡廉母自乘为方母，廉母乘方母为实母。

此堤的形状如图 10-1-4 所示。以 a_1，b_1，h_1 分别表示西头上、下广、高；以 a_2，b_2，h_2 分别表示东头上、下广、高；以 V,l,L 分别表示堤积、正、斜袤；以 a'、b'、h'、l'、L'、V' 分别表示甲县所堤段上、下广、高、正、斜袤和体积。此题已知 $b_1-a_1, b_2-a_2, h_1-h_2, a_1=a_2=a'=a, a-h_2, l-h_2$；其 V，V'亦可由已知条件算出，要求 a_1，b_1，b_2，h_1，h_2，l,L，b'、h'、l'、L'。求堤高的术文给出了关于 h_2 的三次方程：

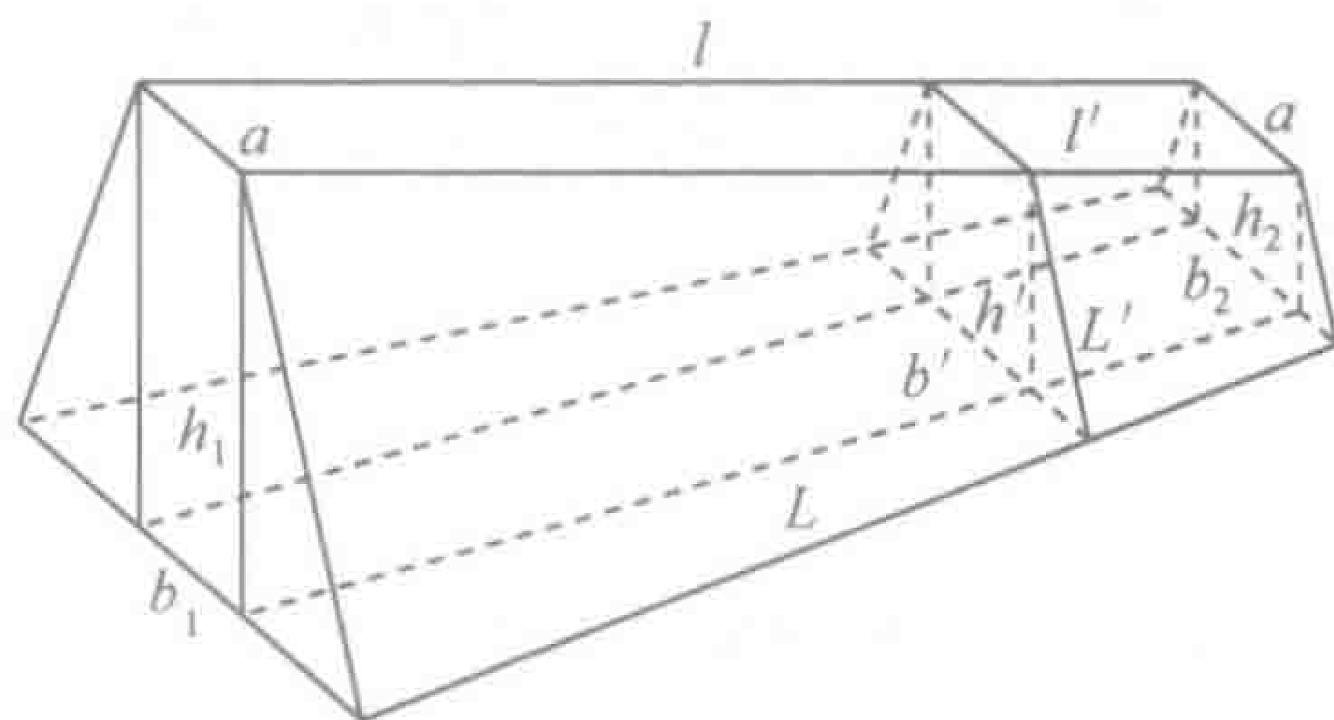


图 10-1-4　堤

$$h_2^3+\left[(l-h_2)+(a-h_2)+\frac{1}{2}(h_1-h_2)+\frac{1}{2}(b_2-a)\right]h_2^2$$

$$+\left\{\frac{1}{6}(b_1-b_2)(h_1-h_2)+\frac{1}{2}(b_2-a)(h_1-h_2)+\frac{1}{2}(a-h_2)(h_1-h_2)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2}(h_1-h_2)+\frac{1}{2}(b_2-a)+(a-h_2)\right](l-h_2)\right\}h_2$$

$$=V-\left[\frac{1}{6}(b_1-b_2)(h_1-h_2)+\frac{1}{2}(b_2-a)(h_1-h_2)+\frac{1}{2}(a-h_2)(h_1-h_2)\right](l-h_2) \qquad (10\text{-}1\text{-}1)$$

求甲县正袤的术文给出关于 l' 的三次方程为

$$l'^3 + \frac{3b_2 l}{b_1 - b_2}l'^2 + \frac{3(a + b_2)h_2 l^2}{(b_1 - b_2)(h_1 - h_2)}l' = 6V' \cdot \frac{l^2}{(b_1 - b_2)(h_1 - h_2)} \qquad (10\text{-}1\text{-}2)$$

王孝通的自注揭示了他获得上述方程的方法：

此平堤在上，羡除在下。两高之差即除高。其除两边各一鳖腝，中一堑堵。今以袤再乘积，广差乘高差而一，得截鳖腝袤再乘为立方一。又堑堵袤自乘为幂一。又三因小头下广，大袤乘之，广差而一，与幂为高，故为廉法。又并小头上、下广，又三之，以乘小头高，为头幂，意同六除。然此头幂本乘截袤。又袤再乘之，差相乘而一。今还依数乘除头幂，为从。开立方除之，得截袤为广。

将甲县所造堤段分割成一平堤（V_1）和一羡除，将羡除分为一堑堵（V_2）、二鳖臑（V_3），其体积分别为

$$V_1 = \frac{1}{2}(a + b_2)h_2 l'$$

$$V_2 = \frac{1}{2}(h' - h_2)b_2 l'$$

$$V_3 = \frac{1}{6}(h' - h_2)(b' - b_2)l'$$

于是

$$V' = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{2}(a + b_2)h_2 l' + \frac{1}{2}(h' - h_2)b_2 l' + \frac{1}{6}(h' - h_2)(b' - b_2)l'$$

$$6V' = 3(a + b_2)h_2 l' + 3(h' - h_2)b_2 l' + (h' - h_2)(b' - b_2)l'$$

在此式两边同乘以 $\frac{l^2}{(h_1 - h_2)(b_1 - b_2)}$，即得方程公式（10-1-2）。

《缉古算经》第15～20题是解勾股形问题，用三次或无奇次项的四次方程求解，这在第九章已经讲过，此不赘述。

三　开方术的改进

（一）刘徽对开方术的改进

由刘徽对开方术和开立方术的几何解释可以看出，他对《九章算术》的开方法做了许多改进。首先，刘徽将《九章算术》的以法（或定法）除实，在开平方时改进为以开方得数的平方 a_1^2 或 $2a_1a_2 + a_2^2$ 减实，在开立方时改进为以开方得数的立方 a_1^3 或 $3a_1^2a_2 + 3a_1a_2^2 + a_2^3$ 减实。

其次，在求第二位及其以下各位得数时，刘徽改变了《九章算术》求出第一位得数后撤去借算而在继续开方时复置借算，并在开立方时将中行置于个位复"步之"以求减根方程的做法，而是先保留由借算变成的法及中行、下行的位置，对之做相应的运算后使之一退、二退、三退以求减根方程。这样，使整个开方程序连贯下来，而不中断，因而程序性更为强烈，后来的开方法均遵从这种方式。有的学者认为《九章算术》的"中超一、下超二等"就是刘徽的退位，是将计算方向搞反了，或者是先验地假定刘徽的方法与《九章算术》

相同而不得已做的曲解。

最后，刘徽根据法（或定法）、中行、下行在几何解释中的形状和位置，将其分别称之为方法、廉法、隅法。求第二位得数时的定法是位于以第一位得数为边长的正方体的扁平长方体的方幂，故称为方或方法。廉，侧棱也。中行所表示的是位于以第一位得数为边长的正方体和三方的侧边三个条形长方体的长，故称为廉或廉法。隅，角也。下行所表示的是位于一角的小正方体的方幂，故称为隅或隅法。

刘徽对《九章算术》开方法的改进影响极大。以上三项都被后来的开方法继承了下来。

（二）《孙子算经》和刘孝孙对开方术的改进

《孙子算经》与《张丘建算经》的刘孝孙细草亦对《九章算术》的开方术有所改进。

1. 开平方术

《孙子算经》卷中“开积为方”问是：

> 今有积二十三万四千五百六十七步，问：为方几何？
>
> 术曰：置积二十三万四千五百六十七步为实。次借一算，为下法。步之，超一位，至百而止。商置四百于实之上。副置四万于实之下，下法之上，名为方法。命上商四百，除实。除讫，倍方法，一退，下法再退。复置上商八十，以次前商。副置八百于方法之下，下法之上，名为廉法。方、廉各命上商八十，以除。讫，倍廉法，上从方法。方法一退，下法再退。复置上商四，以次前。副置四于方法之下，下法之上，名曰隅法。方、廉、隅各命上商四，以除实。除讫，倍隅法，从方法。上商得四百八十四，下法得九百六十八，不尽三百一十一。是为方四百八十四步、九百六十八分步之三百一十一。

这是求 $x^2=234567$ 的正根。用阿拉伯数字将其开方程序写出就是

商						
实	2	3	4	5	6	7
方法						
下法						1

①

商						
实	2	3	4	5	6	7
方法						
下法		1				

②

商				4		
实	2	3	4	5	6	7
方法		4				
下法		1				

③

商				4		
实		7	4	5	6	7
方法		4				
下法		1				

④

商				4		
实		7	4	5	6	7
方法			8			
下法				1		

⑤

商				4	8	
实		7	4	5	6	7
方法			8			
廉法				8		
下法				1		

⑥

商		4	8	
实	4	1	6	7
方法	8			
廉法		8		
下法		1		

⑦

商		4	8	
实	4	1	6	7
方法		9	6	
下法				1

⑧

商		4	8	4
实	4	1	6	7
方法		9	6	
廉法				4
下法				1

⑨

商	4	8	4
实	3	1	1
方法	9	6	8
下法			1

⑩

因此：$x = 484\dfrac{311}{968}$。

这个程序与《九章算术》比较有以下的不同。第一，《九章算术》的开方术是非常抽象的运算程序，《孙子算经》则是具体的运算，抽象不够。第二，《孙子算经》继承了刘徽求出某位得数之后，不再撤去借算的改进，将其作为“下法”，在求第二、三位得数时，“下法再退”，求其减根方程。第三，《孙子算经》继承刘徽以议得命法减实的改进，以方法命上商除实，或以方、廉（隅）各命上商减实。第四，《九章算术》与《孙子算经》在求得减根方程并给出新一位得数后，《九章算术》是“副从定法”，是在旁边计算；《孙子算经》则是“副置”于“方法之下，下法之上”，作为“廉法”。第五，《九章算术》没有廉、隅等概念，刘徽在开方术中也没有使用廉、隅，而是在开立方术注中创造了廉、隅等概念。《孙子算经》使用了廉、隅的概念，但与刘徽注不同。其中，廉是指开平方中的第二位得数乘下法，而隅是第三位得数乘下法。

《张丘建算经》涉及开平方的问题有卷中的开积为方、田方为圆、圆周为方问以及卷下的倚材于垣、圆圌求下周问。其中，圆圌求下周问是开带从平方问题。《张丘建算经》的术文只是说“开方除之”，而未有开方程序。刘孝孙细草则给出了开平方程序。其中，将“借一算”作为“下法”，退位求减根方程，以商乘“方法”、“隅”，减实，等等，都与《孙子算经》相同。刘孝孙细草没有使用“廉”的概念。

此外，《张丘建算经》还就弧田问题提出了一个开带从方即今之二次方程问题。

2. 开立方术

《张丘建算经》卷下有立方求立圆径、立圆为立方、求方枕之方等三个开立方的题目，但都没有给出开立方程序。刘孝孙则给出了立方求立圆径的程序，此题及细草是：

> 今有立方九十六尺，欲为立圆，问：径几何？
>
> 术曰：立方再自乘，又以十六乘之，九而一。所得，开立方除之，径得丸径。
>
> 草曰：……得一百五十七万二千八百六十四。以开立方法除。借一算子于下，常超二位，步至百而止。上商置一百。置一百万于下法之上，名曰方法。以方法命上商一百，除实一百万。方法三因之，得三百万。又置一百万于方法之下，名曰廉

法。三因之。方法一退，廉法再退，下法三退。又置一十于上商一百之下。又置一千于下法之上，名曰隅法。以方、廉、隅三法皆命上商一十，除实毕。又倍廉法，三因之隅法，皆从方法。又置一百一十于方法之下，三因之，名曰廉法。方法一退，廉法再退，隅法三退。又置六于上商之下。又置六于下法之上，名曰隅法。乃自乘得三十六。又以六乘廉法，得一千九百八十。以方、廉、隅三法皆命上商六，除之。除实毕，倍廉法，三因隅法，皆从方法。得一百一十六尺四万三百六十九分尺之一万一千九百六十八。合前问。

这是求

$$x^3 = 1572864$$

的正根。首先，刘孝孙细草继承刘徽不撤借算的改进，将“借一算”作为下法，三退，以求减根方程。其次，刘孝孙细草中“廉法”、“隅法”的用法，与刘徽的用法一致。再次，刘孝孙细草也将隅法另列一行。最后，继承了刘徽以商的某位得数乘方法减实的改进。

四　刘徽“求微数”与根的近似值

（一）刘徽对此前的根的近似值的评论

《九章算术》开方术在开方不尽时，提出“以面命之”。这对任何计算必须算出具体数值的人们来说，实际上并没有解决问题。《九章算术》之后，许多学者设法表示无理根的近似值。对开平方，刘徽概括说：

术或有以借算加定法而命分者，虽粗相近，不可用也。凡开积为方，方之自乘当还复其积分。令不加借算而命分，则常微少；其加借算而命分，则又微多。其数不可得而定。

可见，在“不可开”的情况下，有人以 $a + \dfrac{A - a^2}{2a + 1}$ 为平方根的近似值，它比根的真值“微多”。但是，若定法不加借算而命分，则又比根的真值“微少”。也就是

$$a + \frac{A - a^2}{2a + 1} < \sqrt{A} < a + \frac{A - a^2}{2a} \qquad (10\text{-}1\text{-}3)$$

其中，A，a 分别是被开方数和根的整数部分，1 是借算。

刘徽在开立方术注中也说“术亦有以定法命分者”。可见，在刘徽之前，亦有以 $a + \dfrac{A - a^3}{3a^2 + 1}$ 或 $a + \dfrac{A - a^3}{3a^2}$ 表示开立方的无理根的近似值的。刘徽认为它们都是“不可用”的，从而创造了继续开方，“求其微数”的方法。

（二）刘徽的开方不尽求微数

对其开方不尽的情形，刘徽提出求微数的方法：

不以面命之，加定法如前，求其微数。微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所弃之数，不足言之也。

所谓求微数，就是以十进分数逼近无理根，与我们今天计算无理根的十进分数近似值的方法完全一致。求微数的思想无疑是刘徽的无穷小分割和极限思想的反映，并且，从理论上说，

这个近似值要多么精确就多么精确。但是，刘徽明确地说："虽有所弃之数，不足言之也。"可见，它是近似计算，而不是一个极限过程。

在开方术注中，刘徽没有给出求微数的例子，但在割圆术求圆周率 $\pi = \frac{157}{50}$ 的程序中，要 8 次用到求微数。譬如，其"割六觚以为十二觚术"需要计算 $\sqrt{75\text{ 寸}^2}$，便

> 下至秒、忽。又一退法，求其微数。微数无名知以为分子，以十为分母，约作五分忽之二。故得股八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二。

这就是 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{75\text{ 寸}^2} = 8$ 寸 6 分 6 厘 2 秒 $5\frac{2}{5}$ 忽。在求圆周率时，刘徽都需要精确到"寸"之下五六位有效数字。可见，倘无求微数的方法，刘徽不可能求得超过阿基米德的圆周率近似值，祖冲之更不可能取得 8 位有效数字的旷世成就。可以毫不夸大地说，刘徽的割圆术奠定了中国的圆周率计算在世界上领先千余年的理论基础；而刘徽的求微数，则奠定了其计算方法的基础。

（三）《孙子算经》对根的近似值的表示

前面谈到的《孙子算经》开积为方问给出 $\sqrt{234567} = 484\frac{311}{968}$ 的近似值。其中，311 是余实，968 是方法，也就是《九章算术》的定法。在开积为圆问在求出整数部分六百四十八步之后云"下法得一千二百九十六，不尽九十六。是为方六百四十八步一千二百九十六分步之九十六"。求得 $\sqrt{35000\text{ 步}^2} = 648\frac{96}{1296}$ 步。都是以 $a + \frac{A - a^2}{2a}$ 作为其根的近似值，与刘徽时代及以前的许多数学家通常的做法不同，采用刘徽不等式公式（10-1-3）的上限。

（四）《张丘建算经》对根的近似值的表示

《张丘建算经》卷中田方为圆问的答案是 $\sqrt{175692\text{ 步}^2} = 419\frac{131}{839}$ 步。根据刘孝孙的细草，求出其整数部分 419 之后，余实为 131，$2 \times 419 + 1 = 839$，显然是使用 $a + \frac{A - a^2}{2a + 1}$。

卷下立方求立圆径问的答案是 $\sqrt[3]{1572864\text{ 尺}^3} = 116\frac{11968}{40369}$ 尺。根据刘孝孙细草，11968 是余实，而 $40369 = 3 \times 116^2 + 1$。就是说，分数部分的分母是 $3a^2 + 1$。可见，刘徽之前表示"开方不尽"时根的近似值的方法一直延续下来。

五　祖冲之的开差幂和开差立

《隋书 · 律历志》说：祖冲之"又设开差幂、开差立，兼以正圆参之"。文字简括，后人的理解不尽一致。钱宝琮在《中国数学史》中认为，"开差幂"是已知长方形面积 A 及长阔差 k，求阔或长。若设阔为 x，则 $x(x + k) = A$，即

$$x^2 + kx = A$$

这就是《九章算术》已解决过的开带从平方问题。

设长为 x，长阔差为 k，则阔为 $x-k$，那么 $x(x-k)=A$，即

$$x^2-kx=A$$

这是带负方的开平方问题。因此，钱宝琮同时认为，《隋书·律历志》中的“正圆”系“正负”之误。

“开差立”是已知长方体体积为 A，长阔差为 k，高阔差为 l，求长或阔。若设阔为 x，则 $x(x+k)(x+l)=A$，即

$$x^3+(k+l)x^2+klx=A$$

设长为 x，长阔差为 k，高阔差为 l，则阔为 $x-k$，高为 $x-k+l$，那么 $(x-k)x(x-k+l)=A$，即

$$x^3-(2k-l)x^2+k(k-l)x=A$$

这分别是开带从立方和带负系数的开带从立方问题，都是《九章算术》所没有讨论过的。

如果这种推测符合原意，那么祖冲之已经能解负系数二次、三次方程。或许，引入负系数二、三次方程，是王孝通指责《缀术》“全错不通”的原因之一。

六　一行的求根公式

在《大衍历》中，一行既给出了求某日五星行度的计算法，又给出了已知五星行度反求其相当于何日的计算法。设五星为均变速运动，第一日行度数 a，每日行度公差 d，日数 x，一行用等差级数求五星行度 y：$y=[a+\frac{(x-1)d}{2}]\times x$。若已知五星行度 y，一行用

$$x=\frac{1}{2}[\sqrt{(\frac{2a-d}{d})^2+\frac{8y}{d}}-\frac{2a-d}{d}]$$

求日数 x。此式正是方程 $x^2+\frac{2a-d}{d}x=\frac{2y}{d}$ 的正根。

钱宝琮在《中国数学史》中认为，这种不是使用传统的开带从平方法，而是根据变量的数学关系，反求其根的运算，在中国数学史上有着特殊的意义。显然，它符合一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的求正根的公式 $x=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{p^2-4q})$。它的来源尚不清楚。值得注意的是①，在北宋姚舜辅《纪元历》（公元1106）中明确地界定了值域与定义域，并且利用求根公式构造了反函数的实例，由此看出《大衍历》的影响。

第二节　方程术的进展

一　刘徽的方程术理论

（一）对《九章算术》方程术的改进

刘徽在“方程”的定义中“令每行为率”，就是将每行看成一个整体，每行中的诸未知

① 曲安京，中国历法与数学，科学出版社，2005年，第299～302页。

数的系数与常数项都有确定的顺序，就是说具有方向性。因而“令每行为率”与现今线性方程组理论中的行向量概念有某种类似之处。在方程的运算中，都是将一行看成一个整体加减。

为了说明两行相减不影响方程的解，刘徽提出了一条重要的原理：

举率以相减，不害余数之课也。

就是说，对方程进行整行之间的加减变换，不改变方程的解。这是直除法的理论基础，刘徽把它当做无需证明的真理使用。

我们在第六章已经指出，《九章算术》的直除法只是在第一次将某行消减成一个未知数和实的关系时使用，然后用类似于今之代入法的方法，将其他行化成一个未知数和实的关系。就是说，《九章算术》没有将直除法贯彻到底。刘徽则认为可以继续使用直除法，他说：“列此，以下禾之秉数乘两行，以直除，则下禾之位皆决矣。各以其余一位之秉除其下实。”就是说，在将某行消减成某禾数和实的关系之后，刘徽提出了用此行的下禾系数乘另外各行，再用直除法消去某禾的系数，将直除法进行到底。

刘徽将完全使用直除法与《九章算术》的方法做了比较，接着说：

则计数矣，用算繁而不省。所以别为法，约也。然犹不如自用其旧，广异法也。

完全使用直除法比《九章算术》的方法具有更强的程序化。然而，它不如《九章算术》的方法俭省。刘徽之所以提出新方法，是为了“广异法”，教导读者从不同的角度考虑问题。

（二）同行首，齐诸下

刘徽用齐同原理证明了方程术的正确性。刘徽既然将率概念拓展到方程中，把每行看成率，就可以对整行施行“乘以散之，约以聚之”，进而在诸行之间施行“齐同以通之”，从而说明了常数（包括负数）与整行的乘除运算以及两行之间加减运算的根据。他说：

先令右行上禾乘中行，为齐同之意。为齐同者，谓中行直减右行也。从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣。

这里的“齐”是使一行中其他各未知数系数及常数项与该行欲消去的未知数的系数相齐，而“同”是通过反复直减的运算使该行欲消去的未知数的系数与减去的那行相应未知数的系数的总和相同。后来，李淳风等在《张丘建算经注释》中用“同齐者，同行首，齐诸下”概括之。

二　互乘相消法

刘徽在《九章算术》牛羊直金问注中创造了互乘相消解方程的方法，与现今方法一致。其齐同之义比直除法也更加显然。此问是：

今有牛五、羊二，直金十两；牛二、羊五，直金八两。问：牛、羊各直金几何？

设牛数为 x，羊数为 y，根据题意所列出的方程是

$$5x + 2y = 10$$

$$2x + 5y = 8$$

《九章算术》用方程术求解。刘徽则说：

> 假令为同齐，头位为牛，当相乘。右行定：更置牛十，羊四，直金二十两；左行牛十，羊二十五，直金四十两。牛数等同，金多二十两者，羊差二十一使之然也。以少行减多行，则牛数尽，惟羊与直金之数见，可得而知也。

这是用右行牛的系数5乘左行，又用左行牛的系数2乘右行，得

$$10x + 4y = 20$$

$$10x + 25y = 40$$

以少行减多行，得 $21y = 20$ ，于是 $y = \frac{20}{21}$。这就是互乘相消法。刘徽接着说："以小推大，虽四、五行不异也。"就是说，这是一种普遍方法。可是，刘徽的先进方法长期得不到人们的重视。直到近800年后北宋的贾宪才重新使用互乘相消法，与直除法并用。

三　方程新术

刘徽在方程章麻麦问注中还利用率的理论与齐同原理创造了方程新术：

> 方程新术曰：以正负术入之。令左、右相减，先去下实，又转去物位，则其求一行二物正、负相借者，是其相当之率。又令二物与他行互相去取，转其二物相借之数，即皆相当之率也。各据二物相当之率，对易其数，即各当之率也。更置成行及其下实，各以其物本率今有之，求其所同，并，以为法。其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余以为法。以下置为实。实如法，即合所问也。一物各以本率今有之，即皆合所问也。率不通者，齐之。其一术曰：置群物通率为列衰。更置成行群物之数，各以其率乘之，并，以为法。其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余为法。以成行下实乘列衰，各自为实。实如法而一，即得。

方程新术的基本点是：通过方程的左右行相减，先消去诸行的实即常数项，再消元，求出诸未知数的两两相当之率。对易其数，就得出诸未知数的两两相与之率，通过齐同，得出诸未知数的相与之率。然后，用今有术或衰分术求解。

实际上，在方程章"五雀六燕"问注中刘徽就使用了方程新术。这个问题是：

> 今有五雀六燕，集称之衡，雀俱重，燕俱轻。一雀一燕交而处，衡适平。并雀、燕重一斤。问：雀、燕一枚各重几何？

设雀重为 x ，燕重为 y ，根据题意所列出的方程是

$$4x + y = 8$$

$$x + 5y = 8$$

此问的刘徽注的第一段是注解方程术。其第二段提出的"异术"就是方程新术。他说：

> 按：此四雀一燕与一雀五燕其重等，是三雀四燕重相当。雀率重四，燕重率三也。诸再程之率皆可异术求也，即其数也。

就是说，在方程中以左行减右行，得：$4x - 3y = 0$ 。于是

$$x : y = 4 : 3 \qquad \text{或}\ y = \frac{3}{4}x$$

代入方程中的左行得 $x + 5 \times \frac{3}{4}x = 8$ 。于是 $x = 1\frac{13}{19}$，$y = 1\frac{5}{19}$，得出问题的答案。

麻麦问是：

今有麻九斗、麦七斗、菽三斗、荅二斗、黍五斗，直钱一百四十；麻七斗、麦六斗、菽四斗、荅五斗、黍三斗，直钱一百二十八；麻三斗、麦五斗、菽七斗、荅六斗、黍四斗，直钱一百一十六；麻二斗、麦五斗、菽三斗、荅九斗、黍四斗，直钱一百一十二；麻一斗、麦三斗、菽二斗、荅八斗、黍五斗，直钱九十五。问：一斗直几何？

以方程新术解此题的方法是，列出方程

1	2	3	7	9		1	2	1	7	9
3	5	5	6	7		3	5	0	6	7
2	3	7	4	3	先以第四行减第三行	2	3	4	4	3
8	9	6	5	2	⟶	8	9	−3	5	2
5	4	4	3	5		5	4	0	3	5
95	112	116	128	140		95	112	4	128	140

第三行称为成行。各行互相消减，先消去除成行外其他行的实，再消去物位，使一行仅剩二物。求出菽五当荅三，荅六当黍五，麦三当菽四，麻四当麦七。这是诸物的相当之率。对易其数，得出：

$$麻:麦=7:4,\quad 麦:菽=4:3,\quad 菽:荅=3:5,\quad 荅:黍=5:6$$

则“率通矣”。若以 x,y,z,u,v 分别表示麻、麦、菽、荅、黍之价，则得出麻麦诸物通率：

$$x:y:z:u:v = 7:4:3:5:6$$

然后，刘徽使用三种方法求诸物之价，前两种直接用今有术，第三种用衰分术。

（1）以方程新术本术求解。刘徽使用成行，它相当于

$$x + 4z - 3u = 4$$

“求其同为麻之数”，则 $x+4\times\frac{3}{7}x-3\times\frac{5}{7}x=4$，那么，$x=7$，即麻价一斗 7 钱。然后，刘徽说：“置麦率四、菽率三、荅率五、黍率六，皆以麻乘之，各自为实。以麻率七为法，所得即各为价。”利用诸物通率，由今有术求出麦、菽、荅、黍的一斗之价 $y=4, z=3, u=5, v=6$。这里需要使用正负数的四则运算。

（2）亦以方程新术本术求解。刘徽不使用成行，而使用方程中的任意一行。刘徽说：

亦可使置本行实与物同通之，各以本率今有之，求其本率所得。并，以为法。如此，即无正负之异矣，择异同而已。

由诸物通率，化成同一物的率。例如，使用原方程的左行，它相当于

$$x + 3y + 2z + 8u + 5v = 95$$

根据诸物通率，将它化成麻率：$x+3\times\frac{4}{7}x+2\times\frac{3}{7}x+8\times\frac{5}{7}x+5\times\frac{6}{7}x=95$。求出 $x=7$，再利用今有术求出 y,z,u,v。其中未用到正负数的运算。

（3）以衰分术求解。刘徽说：

又可以一术为之：置五行通率，为麻七、麦四、菽三、荅五、黍六，以为列衰。成行麻一斗、菽四斗正，荅三斗负，各以其率乘之。讫，令同名相从，异名相消，余为法。又置下实乘列衰，所得各为实。此可以置约法，即不复乘列衰，各以

列衰为价。

此借助于方程的成行，以诸物通率为列衰，利用衰分术求解。设下实为 M，列衰为 a_i，诸未知数的系数为 A_i，$i=1,2,3,\cdots,n$。在一般情况下，是以下实乘某物之衰各自为实，成行中的系数乘列衰，相加减作为法，即由 $\frac{Ma_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j a_j}$ 得出诸物物价。然而，此问由成行计算的法 $\sum_{j=1}^{n} A_j a_j = 1\times 7 + 4\times 3 - 3\times 5 = 4$，恰巧与下实 4 相等，即可以实约法。因此，不必以下实乘列衰，直接以列衰作为物价即可。

在实际问题中，由于求诸未知数的相与之率较复杂，方程新术并不见得比直除法简便。刘徽比较了麻麦问的两种方法，用旧术运算需 77 步，用新术需 124 步。由此可见，他探讨新术的目的在于要告诉人们这样一个道理：使用数学方法解决数学问题，应像庖丁解牛那样，“游刃理间，故历久其刃如新。夫数，犹刃也。易简用之则动中庖丁之理”。因此，他反对“胶柱调瑟”，“徒按本术”，主张“设动无方”，“和神爱刃”，灵活运用数学方法。

四　《孙子算经》和《张丘建算经》中的方程术

（一）《孙子算经》中的方程术

《孙子算经》卷中三人持钱问，卷下兽禽首足问、二人持钱问，《张丘建算经》卷下三锦求直问、兄弟持绢问、三人持钱问都应用了方程术。《孙子算经》给出的术实际上是细草，《张丘建算经》只说“如方程”，刘孝孙给出了细草。这些方程的解法中都用不到负数。《孙子算经》的解法很独特，“三人持钱”问是：

今有甲、乙、丙三人持钱。甲语乙、丙：“各将公等所持钱半以益我钱，成九十。”乙复语甲、丙：“各将公等所持钱半以益我钱，成七十。”丙复语甲、乙：“各将公等所持钱半以益我钱，成五十六。”问：三人元持钱各几何？

术曰：先置三人所语为位，以三乘之，各为积：甲得二百七十，乙得二百一十，丙得一百六十八。各半之，甲得一百三十五，乙得一百五，丙得八十四。又置甲九十，乙七十，丙五十六，各半之。以甲、乙减丙，以甲、丙减乙，以乙、丙减甲，即各得元数。

这里未说“如方程”，与传统的方程术的直除消元法也不同。先置方程：

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	各行乘 3 除 2	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	⟶	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
56	70	90		84	105	135
	①				②	

又置方程：

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	各行除 2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
56	70	90		28	35	45
	①				③	

从②式中的左行减去③式的中行、右行，得丙持 4 钱；从②式中的中行减去③式的左行、右行，得乙持 32 钱；从②式中的右行减去③式的左行、中行，得甲持 72 钱。从而得到答案。这种方法要比直除法简便，但是一种特殊的技巧，似没有普遍性。

《孙子算经》卷下兽禽首足问亦未说“如方程”，但其术文可以看做方程的消元的描述。二人持钱问则明确说“如方程求之”，但解法繁琐。

（二）刘孝孙《张丘建算经细草》中的方程术

刘孝孙关于《张丘建算经》方程术的细草与《九算算术》方程术的直除法也不完全相同。《张丘建算经》“三人持钱”问是：

> 今有甲、乙、丙三人持钱不知多少。甲言：“我得乙太半，得丙少半，可满一百。”乙言：“我得甲太半，得丙半，可满一百。”丙言：“我得甲、乙各太半，可满一百。”问：甲、乙、丙持钱各几何？
>
> 术曰：三甲、二乙、一丙，钱三百。四甲、六乙、三丙，钱六百。二甲、二乙、三丙，钱三百。如方程，即得。

刘孝孙细草在列出方程后说：

> 以右行上三遍因左行，甲得六，乙得六，丙得九，钱得九百。以右行再减之，余乙二，丙七，钱三百。又以右行上三遍因中行，得甲一十二，乙一十八，丙九，钱一贯八百。以右行四遍减之，余乙一十，丙五，钱六百。左行进一位，得乙二十，丙七十，钱三贯。以中行再减之，余得丙六十，钱一贯八百。以六十除之，得丙三十。又中行钱六百减一百五十，余四百五十，以乙一十除之，得乙四十五。又去右行钱减一百二十，余一百八十。以甲三除之，得甲六十。合前问。

其消元过程为

2	4	3		6	12	3		0	0	3	
2	6	2	→	6	18	2	→	2	10	2	→
3	3	1		9	9	1		7	5	1	

300	600	300		900	1800	300		300	600	300	
0	0	3		0	0	3		0	0	3	
20	10	2	→	0	10	2	→	0	10	2	→
70	5	1		60	5	1		1	5	1	
3000	600	300		1800	600	300		30	600	300	

0	0	3		0	0	3		0	0	3
0	10	2	→	0	1	2	→	0	1	0
1	0	1		1	0	1		1	0	0
30	450	300		30	45	300		30	45	180

显然，他像刘徽那样，完全使用直除法求其他未知数。

第三节　不定问题

勾股定理

$$x^2 + y^2 = z^2$$

实际上是一个不定问题，《九章算术》提出的公式（5-3-10）或（5-3-11）就是它的通解公式。不过，明确提出不定问题的是刘徽的五家共井术注。《孙子算经》的物不知数问题，《张丘建算经》的百鸡问题更是世界上著名的不定方程。

一　五家共井

《九章算术》方程章五家共井问是：

> 今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，以丙一绠；丙四绠不足，以丁一绠；丁五绠不足，以戊一绠；戊六绠不足，以甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮。问：井深、绠长各几何？

这里有六个未知数，却只有五个方程。列出方程为

1	0	0	0	2		0	0	0	0	721
0	0	0	3	1		0	0	0	721	0
0	0	4	1	0	消元得	0	0	721	0	0
0	5	1	0	0		0	721	0	0	0
6	1	0	0	0		721	0	0	0	0
1	1	1	1	1		76	129	148	191	265

《九章算术》遂以721，265，191，148，129，76作为解。刘徽认为这是不妥当的。他说：

> 此率初如方程为之，名各一逮井。其后，法得七百二十一，实七十六，是为七百二十一绠而七十六逮井，并用逮之数以法除实者，而戊一绠逮井之数定，逮七百二十一分之七十六。是故七百二十一为井深，七十六为戊绠之长，举率以言之。

刘徽认为，《九章算术》实际上只是给出了各家绠长及井深的率关系：

$$甲:乙:丙:丁:戊:井深 = 265:191:148:129:76:721$$

只要井深等于 $721n$，令 $n = 1,2,3,\cdots$，都会得出各家符合问题的正整数解，《九章算术》以其最小的一组正整数解作为定解。因此，实际上刘徽已经认识到五家共井问是不定方程组。这是中国数学史上首次明确指出不定问题。

二　物不知数问题

《孙子算经》卷下“物不知数”问（略去答案）是：

> 今有物不知其数。三、三数之，剩二；五、五数之，剩三；七、七数之，剩二。问：物几何？
>
> 术曰：“三、三数之，剩二”，置一百四十；“五、五数之，剩三”，置六十三；“七七数之，剩二”，置三十。并之，得二百三十三。以二百一十减之，即得。凡三、三数之剩一，则置七十；五、五数之剩一，则置二十一；七、七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。

这实际上是现代数论中的一次同余方程组问题，就是求满足一次同余方程组

$$N \equiv 2(\bmod 3) \equiv 3(\bmod 5) \equiv 2(\bmod 7)$$

的最小正整数 N。术文给出：

$$N = 140 + 63 + 30 - 210 = 23$$

其中，$140 = 70 \times 2$，$63 = 21 \times 3$，$30 = 15 \times 2$。这里，2，3，2，依次是三、三数之，五、五数之，七、七数之的余数，而

$$70 = 2 \times 5 \times 7 = 1 \ (\bmod 3),$$
$$21 = 1 \times 3 \times 7 = 1 \ (\bmod 5),$$
$$15 = 1 \times 3 \times 5 = 1 \ (\bmod 7)$$

这正是术文后半段所表示的内容。可见，《孙子算经》的作者已经掌握了高斯定理。其中乘以 5×7 的 2，乘以 3×7 的 1，乘以 3×5 的 1 后来被秦九韶称为乘率，它们是怎么得出来的，《孙子算经》没有交代。秦九韶《数书九章》大衍总数术中的大衍求一术给出了求乘率的程序。

“物不知数”问是世界上数学著作中第一个同余方程组问题，却不是最早的同余方程组问题。同余方程组解法在民间有“秦王暗点兵”、“韩信点兵”、“鬼谷算”等称呼，秦王、韩信、鬼谷子等都是战国秦汉人物，此时是否有同余方程组解法，不得而知。但是，汉朝《三统历》计算上元积年要用到同余方程组解法①，却是学术界公认的事实。当然，历法家应用同余方程组解法时可能不知所云，或者误以为是方程术，秦九韶以“历家虽用，用而不知”来描绘这种情形。

---

① 李文林、袁向东，论汉历上元积年的计算，科技史文集，第三辑，上海科学出版社，1980 年，第 70 ~ 76 页。

《孙子算经》的“物不知数”问题常称为孙子问题，西方更称为“中国剩余定理”。这个名字看起来是对中国古代数学的推崇，其实质是贬低。[①] 这一名称盖源于西方学术界在20世纪初期之前对中国传统数学的了解十分零散而薄弱，他们以当时中国的落后，推想中国古代数学无足道者。因此，当他们知道中国古代有某项可以称道的成就时，便冠以“中国”的名称。

三　百　鸡　术

《张丘建算经》卷下最后一问提出百鸡问是：

今有鸡翁一直钱五，鸡母一直钱三，鸡雏三直钱一。凡百钱买鸡百只。问：鸡翁、母、雏各几何？

术曰：鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得。

《张丘建算经》给出了（4，18，78），（8，11，81），（12，4，84）三组解作为鸡翁、母、雏数，是其全部正整数解。如何得出这三组解，由于术文太简括，历来看法不一。钱宝琮在《中国数学史》中的理解是：依题意列出方程

$$x + y + z = 100$$

$$5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100$$

以3乘第2行，减第一行，约简，变成 $7x + 4y = 100$ 。其中，$4y$ 与100都是4的倍数，因此 x 必然是4的倍数，$x = 4t$ ，那么

$$y = 25 - 7t$$

$$z = 75 + 3t$$

令 $t = 1,2,3$ ，便得到上述三组解。因为必须求正整数，x 不能为0或负数，也不能大于12，故只有以上三组解。

刘钝的理解是：上述两方程消去 x ，可得 $3y + 7z = 600$，或 $3(y - 7) + 7(z + 3) = 600$。这说明对前一个方程来说，以 $y - 7$ ，$z + 3$ 同时代替 y ，z ，其结果不变。这就是“鸡母每减七，鸡雏每盖三”的根据。同样，消去 y ，可得 $-3x + 4y = 300$，或 $-3(x + 4) + 4(z + 3) = 300$。这就是“鸡翁每增四”，“鸡雏每益三”的根据。[②]

百鸡术在中国历史上影响深远。北周甄鸾《数术记遗注》、北宋谢察徽、南宋杨辉《续古摘奇算法》引《辩古根源》及另一已佚算书及明代的许多著作，都讨论过这个问题，但不得要领，未找到一般解法。直到19世纪中叶，骆腾凤、丁取忠和时曰醇才用大衍求一术成功地解决了这个问题。

百鸡术对国外影响较大。印度的摩诃毗罗（约公元850）、婆什迦罗第二（1114～1185?），意大利的斐波那契（1170?～1250），中亚的阿尔·卡西（?～1429）的著作都有百鸡问题。

① 这是关肇直生前审查《中国大百科全书·数学卷》第一版条目时的意见，我们认为很有道理。

② 刘钝，提出百鸡问题的张丘建，见：许义夫、张殿民、郭书春主编，山东古代科学家，山东教育出版社，1991，第205～206页。

第四节　等差数列和等比数列

刘徽的《九章算术注》与《孙子算经》、《张丘建算经》的许多内容涉及等差数列与等比数列，尤其是《张丘建算经》对等差数列的研究比《九章算术》进了一大步。

一　等差数列

（一）刘徽关于等差数列的研究

刘徽证明了《九章算术》解决数列问题方法的正确性，并有所发展。《九章算术》的金箠问是由数列的首项、末项和项数，求出列衰，用衰分术解决。刘徽则先求出公差，他说：

按：此术五尺有四间者，有四差也。今本末相减，余即四差之凡数也。以四约之，即得每尺之差。以差数减本重，余即次尺之重也。为术所置，如是而已。

设首项 a_1，末项 a_n，刘徽求出公差 $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$。

《九章算术》的五人分五钱问用衰分术求解。刘徽在将其归结为今有术以证明其解法的正确性之后又说：

假令七人分七钱，欲令上二人与下五人等，则上、下部差三人。并上部为十三，下部为十五。下多上少，下不足减上，当以上、下部列差而后均减，乃合所问耳。此可放下术：令上二人分二钱半，令下三人分二钱半为下率。上、下二率以少减多，余为实。置二人、三人，各半之，减五人，余为法。实如法得一钱，即衰相去也。下衰率六分之五者，丁所得钱数也。

刘徽在这里给出了两种方法。首先，他举了一个与《九章算术》的题目相反的例子：按锥行衰，下部之和多于上部之和。刘徽提出以列差均减锥行衰以求其解的方法。列差是上、下部之和的差除以上、下部项数之差。设上部之和为 S_1，下部之和为 S_2，上部的项数为 m，下部项数为 n，则列差为 $\frac{S_1 - S_2}{m - n}$。以列差 $\frac{S_1 - S_2}{m - n}$ 均减锥行衰，以求其解，便可使上、下部相等。实际上，这是一种普遍方法，对任何锥行衰的情况都是适应的。

接着，刘徽认为，可以仿照九节竹问的方法解决此问。这就是求出各人的钱数之差，也就是等差数列的公差 d。设总钱数为 S，上部 m 人，下部 n 人，则

$$d = \left|\frac{S}{2} \div m - \frac{S}{2} \div n\right| \div \frac{m + n}{2} = \frac{S|m - n|}{mn|m + n|}$$

在此问中，$d = \frac{1}{6}$。而丁在下 3 人中居中，所分应是下 3 人的平均值，应是 $2\frac{1}{2} \div 3 = \frac{5}{6}$。于是可以得出各人应分的钱数。

（二）《张丘建算经》中的等差数列

《孙子算经》的等差数列比较简单。《张丘建算经》关于等差数列的内容要比《九章算术》、《孙子算经》广泛深刻得多，包括了求等差数列的各元素的若干情形。以下分别叙述。

1. 求公差

《张丘建算经》卷上“十人分金”问、卷中“诸户出绢”、卷下“五人分五鹿”等问都是求等差数列的各项。其中，五人分五鹿问居现存卷下之首，已阙设问。诸户出绢问的解法是《孙子算经 》五诸侯分橘问解法的推广。卷上十人分金问比较复杂，其解法与《九章算术》九节竹问基本上一致。

《张丘建算经》卷上女子善织问只求公差，此问是：

今有女善织，日益功疾。初日织五尺。今一月日织九匹三丈，问：日益几何？

术曰：置今织尺数，以一月 日而一。所得，倍之。又倍初日尺数，减之，余为实。以一月日数，初一日减之，余为法。实如法得一。

设初日织即首项为 a_1，一月日数即项数为 n，一月所织即 n 项之和为 S，则 $\frac{2S}{n}-2a_1$ 为实，$n-1$ 为法。那么日益即公差 d 为

$$d=\frac{\frac{2S}{n}-2a_1}{n-1}$$

将各项数值代入，得 $d=5\frac{15}{29}$ 寸。

2. 求各项和

卷上女子不善织、卷下城周安鹿角、举取他绢等问都是求等差数列各项之和。女子不善织问是：

今有女子不善 ，日减功迟。初日织五尺，末日织一尺。今三十日织讫，问：织几何？

术曰：并初、末日织尺数，并之，余，以乘织讫日数，即得。

设初末日织数即首项、末项分别为 a_1，a_n，织讫日数即项数为 n，则所织总数即 S_n 为

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2} \qquad (10\text{-}4\text{-}1)$$

“举取他绢”是求自然数列前100项之和。显然应用了公式（10-4-1）。

3. 求项数

《张丘建算经》卷上与人钱问、卷中诸户出银问都是求等差数列的项数的问题。诸户出银问是：

今有户出银一斤八两一十二铢。今以家有贫富不等，令户别作差品，通融出之：最下户出银八两，以次户差各多三两。问：户几何？

术曰：置一户出银斤两铢数，以最下户出银两铢数减之。余，倍之。以差多两铢数加之，为实。以差两铢数为法。实如法而一。

此问中“一户出银斤两铢数”为诸项平均值 m，“最下户出银两铢数”即首项 a_1，“差多两铢数”为公差 d，这就是公式：

$$n=\frac{2(m-a_1)+d}{d} \qquad (10\text{-}4\text{-}2)$$

由公式（10-4-1），这个公式的正确性是显然的。

与人钱问是公式（10-4-2）中公差 $d=1$ 的情形。

二　等比数列

《孙子算经》与《张丘建算经》关于等比数列的涉猎也很少。《孙子算经》卷中女子善织问与《九章算术》完全相同。卷下三鸡啄粟问与《九章算术》衰分章的牛马羊食人苗问相似。卷下出门望九堤问也是一个等比数列问题：

今有出门望见九堤，堤有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雏，雏有九毛，毛有九色。问：各几何？

术曰：置九堤，以九乘之，得木之数。又以九乘之，得枝之数。又以九乘之，得巢之数。又以九乘之，得禽之数。又以九乘之，得雏之数。又以九乘之，得毛之数。又以九乘之，得色之数。

堤、木、枝、巢、禽、雏、毛、色之数依次是

$$9,\ 9^2,\ 9^3,\ 9^4,\ 9^5,\ 9^6,\ 9^7,\ 9^8$$

这是一个以 9 为首项，以 9 为公比的等比数列。

《张丘建算经》卷中马行转迟问也是一个等比数列问题（略去答案）：

今有马行转迟，次日减半疾，七日行七百里。问：日行几何？

术曰：置六十四、三十二、一十六、八、四、二、一为差，副并为法。以行里数乘未并者，各自为实。实如法而一。

同《九章算术》衰分章的等比数列一样，《张丘建算经》也用衰分术求解。此术以等比数列 64，32，16，8，4，2，1 为列衰，计算出以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列：初日 $352\frac{96}{127}$ 里，次日 $176\frac{48}{127}$ 里，第三日 $88\frac{24}{127}$ 里，第四日 $44\frac{12}{127}$ 里，第五日 $22\frac{6}{127}$ 里，第六日 $11\frac{3}{127}$ 里，第七日 $5\frac{65}{127}$ 里。

第十一章　无穷小分割和极限思想

刘徽在数学上最伟大的贡献，是在世界数学史上首次将无穷小分割和极限思想引入数学证明。我们的看法竟然与刘徽本人有所不同。刘徽大约最看重《重差》，他的《九章算术注序》用一半多的篇幅论述《重差》，而对无穷小分割和极限思想却只字未提。大约在刘徽看来，圆面积公式、阳马和鳖臑体积公式的证明，只是说明《九章算术》已有结论的正确性，而重差术则是《九章算术》所未有的，所谓“（张）苍等为术犹未足以博尽群数也”。相反，在我们看来，重差术固然为《九章算术》增添了新的内容，然而它完全属于初等数学的范畴；而刘徽的无穷小分割和极限思想却架起了通向微积分学的桥梁，至今仍光彩熠熠。

我们从割圆术、刘徽原理与多面体体积理论、截面积原理、极限思想在近似计算中的应用以及与古希腊同类思想的比较等几个方面来阐述刘徽这方面的贡献。

第一节　割　圆　术

《九章算术》提出的圆面积公式（5-1-5）是正确的。然而，刘徽之前人们以圆内接正六边形的周长作为圆周长，以圆内接正十二边形的面积作为圆面积，利用出入相补原理，将圆内接正十二边形拼补成一个以正六边形周长的一半作为长，以圆半径作为宽的长方形，来推证上述公式的。刘徽说此“合径率一而外周率三也”，当然极不严格。

为了真正证明圆面积公式（5-1-5），他创造了著名的割圆术。刘徽说：

> 为图。以六觚之一面乘一弧半径，三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘一弧之半径，六之，则得二十四觚之幂。割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。觚面之外，犹有余径。以面乘余径，则幂出弧表。若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径。表无余径，则幂不外出矣。以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂。此以周、径，谓至然之数，非周三径一之率也。

这段文字包括三个互相衔接步骤：

首先，刘徽从圆内接正六边形开始割圆，依次得到圆内接正6×2，6×2^2，……，6×2^n边形。设圆内接正6×2^n边形的面积为S_n，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$S_n<S \tag{11-1-1}$$

而随着分割次数越来越多，$S-S_n$越来越小，到不可再割时，S_n与S重合，亦即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

其次，圆内接正6×2^n边形的每边和圆周之间有一段距离r_n，称为余径。将6×2^n边形的每边a_n乘余径r_n，其总和是$2(S_{n+1}-S_n)$。将它加到S_n上，则有

$$S<S_n+2(S_{n+1}-S_n) \tag{11-1-2}$$

如图11-1-1（a）所示。然而当n无限大，6×2^n边形与圆周合体时，则

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}[S_n + 2(S_{n+1} - S_n)] = S$$

这就证明了圆的上界序列与下界序列的极限都是圆面积。

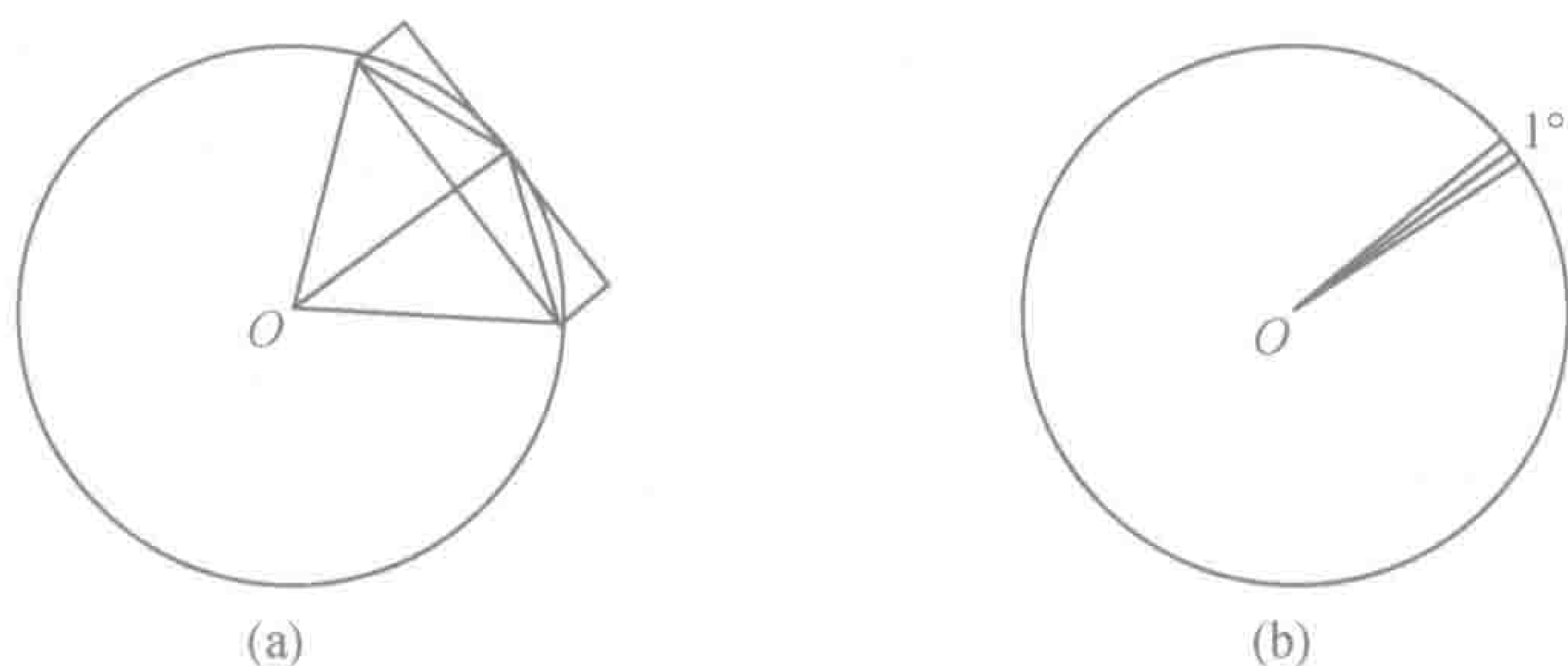


图 11-1-1　刘徽对圆面积公式的证明

最后，刘徽把与圆周合体的正多边形分割成无穷多个以圆心为顶点，以每边长为底的小等腰三角形，如图 11-1-1（b）。以圆半径乘这个多边形的边长是每个小等腰三角形面积的 2 倍，所谓"觚而裁之，每辄自倍"。显然，所有这些小等腰三角形的底边之和就是圆周长，所有这些小等腰三角形面积的总和就是圆的面积。那么，圆半径乘圆周长，就是圆面积的 2 倍：

$$lr = 2S$$

反求出就完成了公式（5-1-5）的证明。①

显然，这个证明含有明显的极限过程和无穷小分割思想，并且求无穷小分割所得的元素的总和的思想，与欧洲前微积分时期的面积元素法十分接近。

这段刘徽注是非常清晰、明确的，它是割圆术的核心。可是，从 20 世纪 10 年代到 70 年代末长达 60 多年间，尽管讨论刘徽割圆术的文章、著述是中国数学史研究中最多的，这些文章著述却都在谈圆周率时讲极限过程，而且都未涉及圆面积公式的证明。由于没有认识到刘徽的目的在于证明圆面积公式，将刘徽求圆周率的程序也搞错了。甚至一篇逐字逐句翻译这段刘徽注的文章，对其中画龙点睛的几句话"以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂"竟然略而不译。② 实际上，刘徽的极限思想是为进行无穷小分割并最后证明圆面积公式做准备的，求圆周率是用不到极限过程的，它只是极限思想在近似计算中的应用。

第二节　刘 徽 原 理

刘徽在用棋验法对长、宽、高相等的阳马、鳖臑的体积公式进行推导之后指出：

其棋或脩短，或广狭，立方不等者，亦割分以为六鳖臑，其形不悉相似。然见

---

① 郭书春，刘徽的极限理论，第一届全国科学史大会论文（1980 年）。见：科学史集刊，第 11 集，地质出版社，1984 年，第 38，39 页。

② 励乃骥，《九章算经》圆田题和刘徽注的今释，数学教学，1957，(6)：1 ~ 11。

数同，积实均也。鳖臑殊形，阳马异体。然阳马异体，则不可纯合，不纯合，则难为之矣。何则？按：邪解方棋以为堑堵者，必当以半为分，邪解堑堵以为阳马者，亦必当以半为分，一从一横耳。

就是说，在 $a \neq b \neq h$ 的情况下，一个长方体分割出的3个阳马不全等，所分割出的6个鳖臑的形状也不同，因此用棋验法是难以证明公式（5-2-6）、（5-2-7）的。同样，用棋验法没有证明，实际上也难以证明一般情形的方亭、方锥、刍童、刍甍、羡除等多面体的体积公式。这说明，刘徽对棋验法的局限性是有充分认识的。因此，为了证明阳马、鳖臑的体积公式（5-2-6）、（5-2-7），必须另辟蹊径。

刘徽为了解决一般情形的多面体体积问题，首先提出了一个重要原理：

邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。

记阳马体积为 $V_{阳马}$，鳖臑体积为 $V_{鳖臑}$，刘徽认为，在一个堑堵中，恒有

$$V_{阳马}:V_{鳖臑}=2:1 \tag{11-2-1}$$

吴文俊把它称为刘徽原理。显然，只要证明了刘徽原理，由于堑堵的体积公式（5-2-5），则公式（5-2-6）、公式（5-2-7）是不言而喻的。

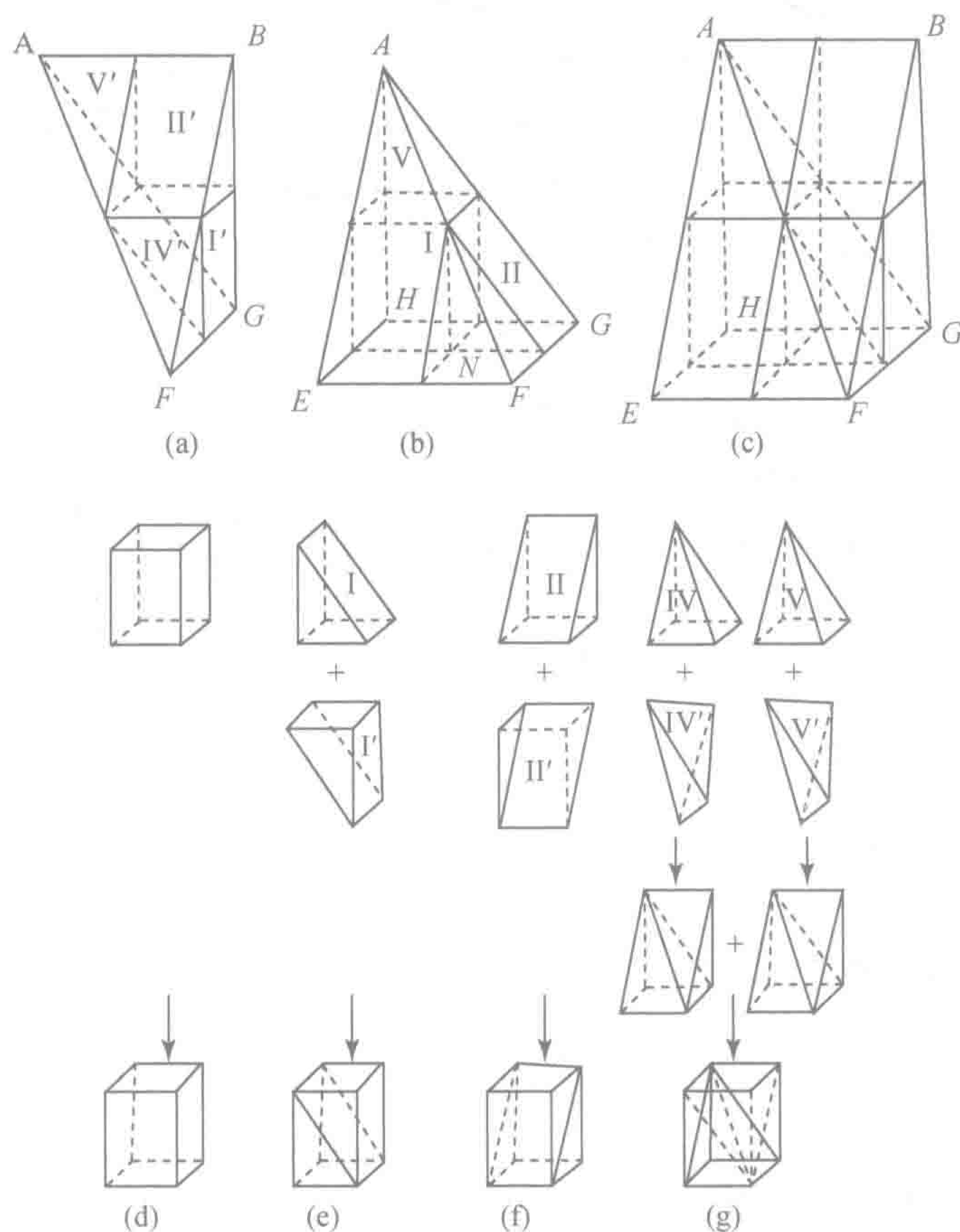


图11-2-1　刘徽原理之证明

刘徽认为，当 $a=b=h$ 时，用棋验法可以证明公式（11-2-1）。而当 $a\neq b\neq h$ 时，棋验法无能为力，刘徽用无穷小分割方法和极限思想证明了它。他说：

设为阳马为分内，鳖臑为分外。棋虽或随脩短广狭，犹有此分常率知，殊形异体，亦同也者，以此而已。其使鳖臑广、袤、高各二尺，用堑堵、鳖臑之棋各二，皆用赤棋。又使阳马之广、袤、高各二尺，用立方之棋一，堑堵、阳马之棋各二，皆用黑棋。棋之赤、黑接为堑堵，广、袤、高各二尺。于是中效其广、袤，又中分其高。令赤、黑堑堵各自适当一方，高一尺，方一尺，每二分鳖臑，则一阳马也。其余两端各积本体，合成一方焉。是为别种而方者率居三，通其体而方者率居一。虽方随棋改，而固有常然之势也。按：余数具而可知者有一、二分之别，即一、二之为率定矣。其于理也岂虚矣？若为数而穷之，置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也。半之称少，其余弥细，至细曰微，微则无形，由是言之，安取余哉？

可能受手头棋的限制，刘徽在这里仍然使用了 $a=b=h=1$ 尺的棋。可是，他说“虽方随棋改，而固有常然之势”，可见这些论述完全适用于 $a\neq b\neq h$ 的一般情形。因此，我们按一般情形阐述。刘徽将由两个小堑堵 II′、III′，两个小鳖臑 IV′、V′合成的鳖臑［图 11-2-1（a）］与由一个小长方体 I，两个小堑堵 II、III，两个小阳马 IV、V 合成的阳马［图 11-2-1（b）］拼合成一个堑堵，如图 11-2-1（c）所示，则相当于堑堵被三个互相垂直的平面平分。显然，小堑堵 II 与 II′、III 与 III′可以分别拼合成与 I 全等的小长方体，如图［11-2-1（e），（f）］所示。小阳马 IV 与小鳖臑 IV′，小阳马 V 与小鳖臑 V′可以分别拼合成两个与小堑堵 II、III、II′、III′全等的小堑堵[①]，它们又可以拼合成与 I 全等的第 4 个小长方体，如图 11-2-1（g）所示。显然，在前三个小长方体 I、II-II′、III-III′中，属于阳马的和属于鳖臑的体积的比是 2:1，即在原堑堵的 $\frac{3}{4}$ 中公式（11-2-1）成立，所谓“别种而方者率居三”。刘徽认为，如果能证明公式（11-2-1）在第 4 个小长方体中成立，则公式（11-2-1）便在整个堑堵中成立。而第 4 个小长方体中的两个小堑堵与原堑堵完全相似，所谓“通其体而方者率居一”。因此，上述分割过程完全可以继续在剩余的两个小堑堵中施行，那么又可以证明在其中的 $\frac{3}{4}$ 中公式（11-2-1）成立，在其中的 $\frac{1}{4}$ 中尚未知。换言之，已经证明了原堑堵中的 $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$ 中公式（11-2-1）成立，而在 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$ 中尚未知。这个过程可以无限继续下去，第 n 次分割后只剩原堑堵的 $\frac{1}{4^n}$ 中公式（11-2-1）是否成立尚未知。显然，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=0$$

这就在整个堑堵中证明了（11-2-1）式，即刘徽原理成立。[②]

① ［丹麦］华道安（Wagner）认为是将 II 与 III，II′与 III′，IV 与 IV′，V 与 V′拼合在一起。见：D. B. Wagner，An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid：Liu Hai，Third Century A. D. *Historia Mathematica*，1979，No6。但是显然，在 $a\neq b\neq h$ 的情况下，II 与 III，II′与 III′无法拼成长方体，IV 与 IV′，V 与 V′也无法拼合成堑堵。早在 20 世纪 30 年代，日本三上义夫便探讨了这个问题．他提出了两种可能性，一如本文所述，一如 Wagner 的拼法，而倾向于后者。见：三上义夫，关孝和の业绩と京坂の算家并に支那の算法との关系び比较，东洋学报，第二〇、二一、二二卷（1932～1935）。

② 郭书春，刘徽的体积理论，第一届全国科学史大会论文（1980 年），见：《科学史集刊》第 11 集，地质出版社，1984 年，第 51～53 页。

刘徽原理是刘徽多面体体积理论的基础。在完成刘徽原理的证明之后，刘徽说：

不有鳖腝，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也。

刘徽认为，鳖腝是刘徽解决多面体体积问题的关键。事实上，刘徽为求方锥、方亭、刍甍、刍童、羡除等多面体的体积，都要通过有限次分割，将其分割成长方体、堑堵、阳马、鳖腝等多面体，然后求其体积之和解决之。关于这一点，我们将在本章第五节详细说明。

刘徽将多面体体积问题的解决最后归结为鳖腝即四面体体积，而鳖腝体积的解决必须借助于无穷小分割，就是说，刘徽把多面体体积理论建立在无穷小分割基础之上。这种思想符合现代的体积理论。高斯（Gauss，1777～1855）提出了多面体体积的解决不借助于无穷小分割是不可能的猜想。希尔伯特（Hilbert，1862～1943）以这个猜想为基础在1900年提出了《数学问题》[①] 的第三问题。不久，他的学生德恩（Dehn，1878～1952）给了肯定的答复。[②]

第三节　祖暅之原理与圆体体积

中国古代处理圆柱、圆锥、圆亭以及球等圆体体积，主要借助于截面积原理，亦即祖暅之原理。截面积原理在《数》、《算数书》、《九章算术》时代就有其雏形，刘徽实际上已认识到其实质，祖暅之以简洁的语言概括了这一原理。

一　祖暅之原理

截面积原理是另一种形式的无穷小分割，它的完备形式通常称为祖暅之（一作祖暅）原理，西方称做卡瓦列利（Cavalieri，1598～1647）原理。

（一）《九章算术》的底面积原理

《数》、《算数书》和《九章算术》给出了若干圆体的体积公式，除了使用周三径一外，都是正确的。实际上这些圆体体积公式是通过比较圆体与相应的方体的底面积得到的。其根据如次：

首先，在《九章算术》中，方堢壔与圆堢壔，方锥与圆锥，方亭与圆亭都是成对的出现，而且在术文的形式上，后者都是前者加一个系数，也就是以后者的底面周长构造前者形状的一个方体，比较其底面积，由前者推导后者。

其次，刘徽在批评《九章算术》开立圆术使用的球体积公式（5-2-17）的错误时说："为术者盖依周三径一之率。令圆幂居方幂四分之三，圆囷居立方亦四分之三。更令圆囷为方率十二，为丸率九，丸居圆囷又四分之三也。置四分自乘得十六，三分自乘得九，故丸居

---

① ［德］David Hilbert（希尔波特），*Mathematical Problems: Lecture Delivered Before the International Congress of Mathematicians at Paris in* 1990，*Bulletin of American Mathematical Society*，8.437～479，Mary F. Winson 译自 *GöttingerNachrichten*（1900），253～297. 李文林、袁向东将其译为中文：数学问题——在1900年巴黎国际数学家大会上的讲演，见：《数学史译文集》，上海科学技术出版社，1981年，第60～84页。

② 参见吴文俊，出入相补原理。中国科学院自然科学史研究所主编，《中国古代科技成就》，中国青年出版社，1978年，第80～100页。修订版，1995年，第79～97页。

立方十六分之九也。故以十六乘积，九而一，得立方之积。丸径与立方等，故开立方而除，得径也。"圆囷就是圆堢壔，即今之圆柱。设圆与其外切正方形的面积分别为 $S_{圆}$，$S_{方}$，圆柱与其外切正方体的体积分别为 $V_{圆柱}$ 和 $V_{正方体}$。刘徽认为，《九章算术》的推导过程是：因为 $S_{圆}$∶$S_{方}$ =3∶4，故 $V_{圆柱}$∶$V_{正方体}$ =3∶4，而

$$V_{球}:V_{圆柱}=3:4 \tag{11-3-1}$$

由于以 d 为边长的正方体体积是 $V_{正方体}=d^3$，故有公式（5-2-17）。

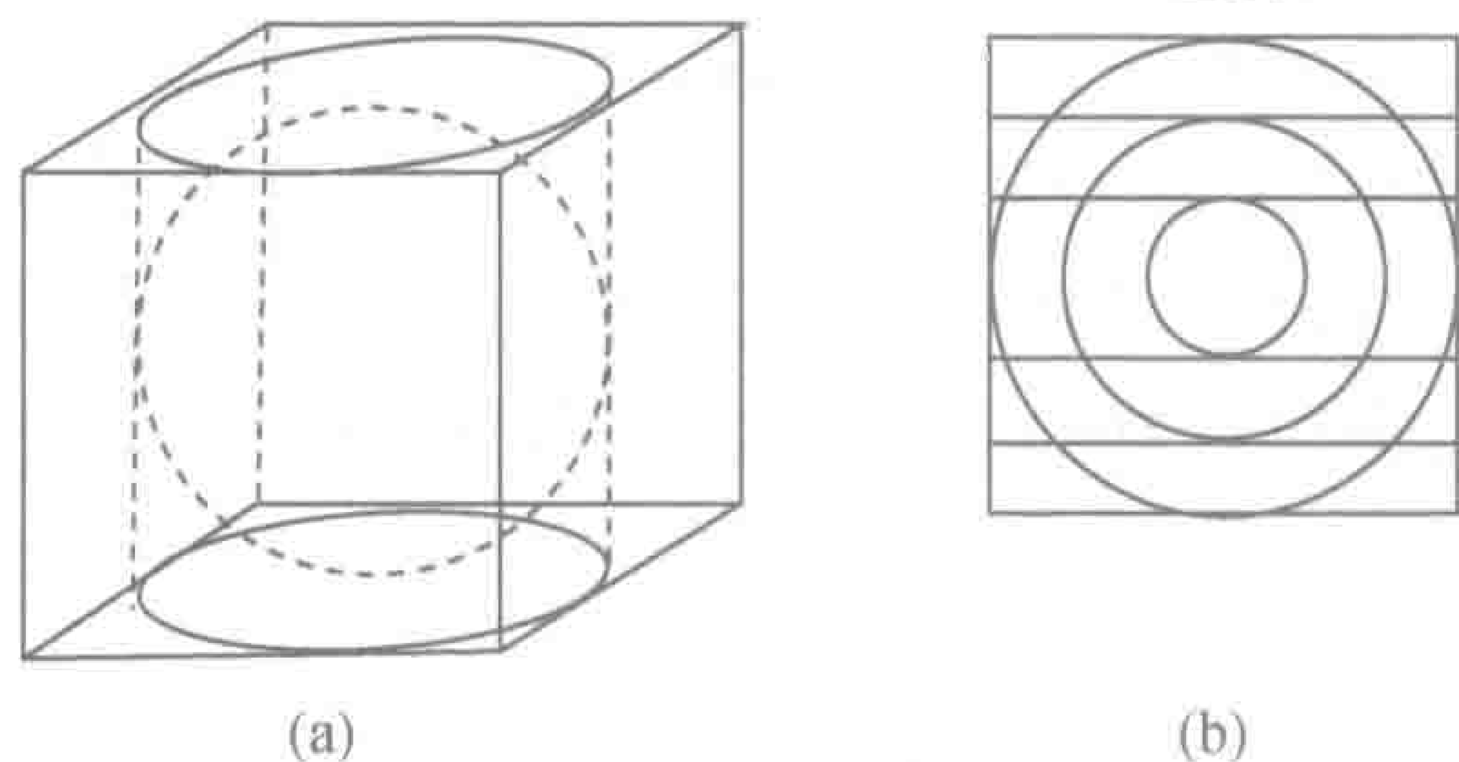


图 11-3-1　球与外切圆柱

刘徽指出："然此意非也"。造成错误的关键在于推导中使用了错误的公式（11-3-1）。公式（11-3-1）错误的原因是只考虑了球与圆柱的一个截面，即大圆和大方的面积之比，如图 11-3-1（a）所示，而没有考虑两者任意截面的面积之比。实际上，只要不是球与圆柱的大圆和大方，其他任意截面上，公式（11-3-1）都不成立，如图 11-3-1（b）所示。

我们认为，上述这个推导过程不是刘徽的杜撰，而是《九章算术》编纂时使用的方法。

还有，刘徽注记述的从方锥、方亭分别推导圆锥、圆亭的方法中以"周三径一之义"的部分，当是《九章算术》时代的。对《九章算术》的圆锥体积公式（5-2-15），刘徽注曰：

> 此术圆锥下周以为方锥下周。方锥下方令自乘，以高乘之，令三而一，得大方锥之积。大锥方之积合十二圆矣。今求一圆，复合十二除之，故令三乘十二得三十六而连除。

这是以圆锥的底周长 l 为底边长，构造一个同高的方锥，如图 11-3-2（a）所示，其体积为 $V_{dfzh}=\frac{1}{3}l^2h$。由于方锥之底面积是圆锥底面积的 12 倍，故圆锥体积是此方锥体积的$\frac{1}{12}$，于是得到公式（5-2-15）。

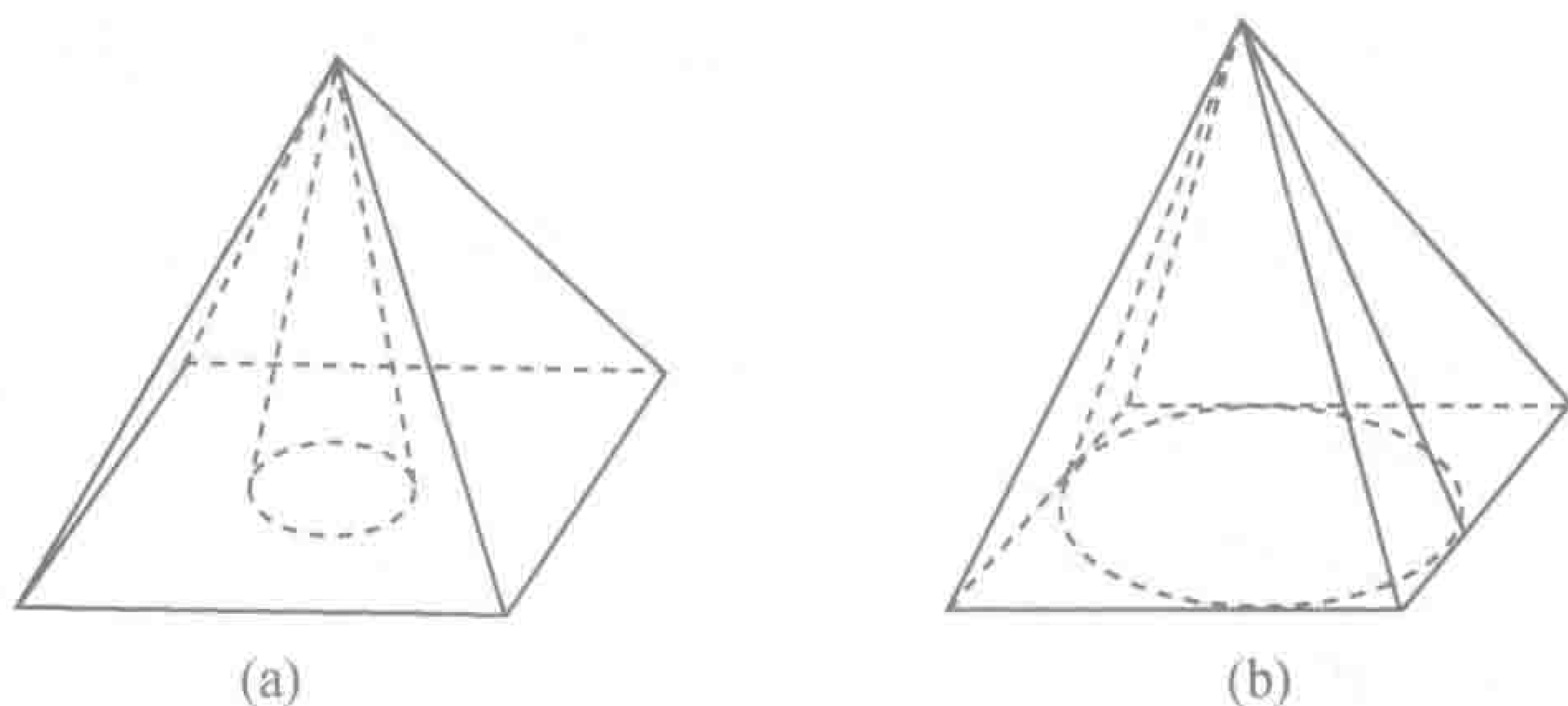


图 11-3-2　圆锥与方锥

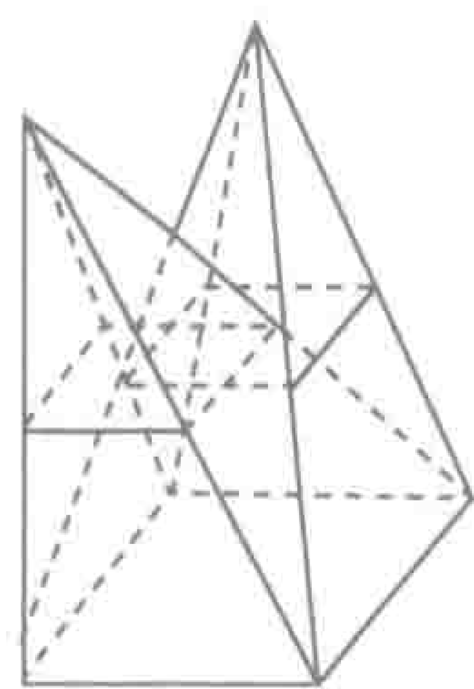


图 11-3-3　方锥与阳马同实

刘徽委粟术注和圆亭术注的第一段也都是通过比较圆锥与方锥，圆亭与方亭的底面积推导圆锥、圆亭的体积公式的。

（二）刘徽的截面积原理

刘徽在求由羡除分割出来的大鳖臑体积时提出：

推此上连无成不方，故方锥与阳马同实。

“成”，训重，层。《周礼·秋官司寇》：“将合诸侯，则令为坛三成。”郑玄注曰：“三成，三重也。”刘徽在这里使用了一个重要原理：同底等高的方锥与阳马没有一层不是相等的方形，所以它们的体积才相等，如图 11-3-3 所示。这是十分明确的截面积原理，并且把立体看成无数层平面一层层叠积而成的，类似于卡瓦列利的不可分量。

因此，刘徽常把立体体积称作积分，如圆亭术注说“三方亭之积分”，委粟术注说“三方锥之积分”。这里的积分当然不能等同于积分学中的积分，但其本质是一致的。实际上，点与线，线与面，都有类似于平面与立体的关系。刘徽认为，从正六边形开始割圆，终究会达到“不可割”的地步，实际上与圆周合体的正多边形的每边长已退化成点。也就是说，圆周的这条线是由无数个点积累而成的。所以，刘徽也称线为“积分”，如委粟注中说“径之积分”。

正因为有这种认识，刘徽才能指出《九章算术》使用的球体积公式是错误的，才能设计出牟合方盖，指出最终解决球体积问题的正确途径。

总之，刘徽的大量论述表明，他已经完全把握了截面积原理的本质，并且，刘徽不仅讨论两者相等的情形，而且也讨论了两者呈率关系的情形。只是刘徽的这些论述分散在不同术文的注中，没有以简洁的语言将其概括出来。

（三）祖暅之原理

祖暅之继承了刘徽关于截面积原理的深刻认识，以相当简洁的文字概括了这一原理。《九章算术》开立圆术李淳风等注释所引祖暅之的开立圆术中说：

夫叠棋成立积，缘幂势既同，则积不容异。

就是说，两立体，若它们任意等高处的截面积相等，则它们的体积不能不相等。这就是祖暅之原理，它与卡瓦列利原理是等价的。

祖暅之在解决刘徽设计的牟合方盖的体积时，不仅考虑两个立体，而且考虑两组立体。就是说，两组立体，若它们分别在任意等高处的截面积之和相等，则它们的体积相等。

二　牟合方盖与球体积

（一）刘徽设计的牟合方盖

前已指出，刘徽为解决球体积，设计了牟合方盖。他说：

取立方棋八枚，皆令立方一寸，积之为立方二寸。规之为圆囷，径二寸，高二寸。又复横因之，则其形有似牟合方盖矣。八棋皆似阳马，圆然也。按：合盖者，方率也，丸居其中，即圆率也。推此言之，谓夫圆囷为方率，岂不阙哉？

刘徽取两个相等的圆柱体使之正交，其公共部分称作牟合方盖，如图 11-3-4 所示。设牟合方盖的体积为 $V_{方盖}$，刘徽指出：

$$V_{球}:V_{方盖}=\pi:4。\qquad(11\text{-}3\text{-}2)$$

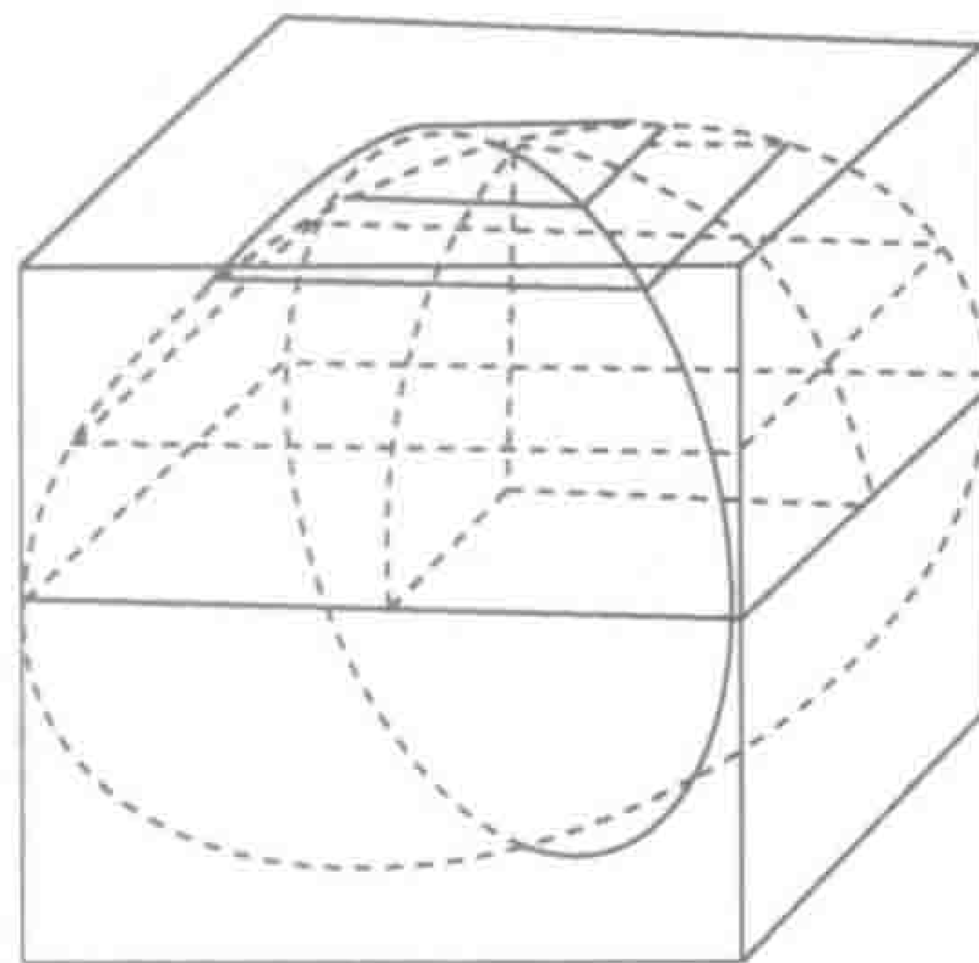


图 11-3-4　牟合方盖

由于 $V_{方盖} < V_{圆柱}$ 是不言而喻的，因而证明 $V_{球}:V_{圆柱} = \pi:4$ 是错误的。刘徽认为，只要求出牟合方盖的体积，便可求出球的体积公式，从而指出了解决球体积的正确途径。

刘徽经过努力未能求出牟合方盖的体积，不强为之说，坦诚地记下了自己的困惑：

> 观立方之内，合盖之外，虽衰杀有渐，而多少不掩。判合总结，方圆相缠，浓纤诡互，不可等正。欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者。

显示了一位真正科学家实事求是的高风亮节。二百年后，祖冲之父子彻底解决了这个问题。

（二）祖暅之关于牟合方盖的求积方法

祖暅之利用祖暅之原理求出了牟合方盖的体积，解决了球体积问题，完成了刘徽的遗志。钱宝琮根据祖冲之《驳议》说“立圆旧误，张衡述而弗改”，在《中国数学史》中说“《缀述》中很可能有一篇讨论牟合方盖和立圆体积的计算方法”，换言之，球体积的解决是祖冲之、祖暅之父子的共同贡献。李淳风等注释引祖暅之开立圆术说：

> 祖暅之开立圆术曰：“以二乘积，开立方除之，即立圆径。其意何也？取立方棋一枚，令立枢于左后之下隅，从规去其右上之廉；又合而横规之，去其前上之廉。于是立方之棋分而为四：规内棋一，谓之内棋；规外棋三，谓之外棋。规更合四棋，复横断之。以勾股言之，令余高为勾，内棋断上方为股，本方之数，其弦也。勾股之法：以勾幂减弦幂，则余为股幂。若令余高自乘，减本方之幂，余即内棋断上方之幂也。本方之幂即此四棋之断上幂。然则余高自乘，即外三棋之断上幂矣。不问高卑，势皆然也。然固有所归同而涂殊者尔。而乃控远以演类，借况以析微。按：阳马方高数参等者，倒而立之，横截去上，则高自乘与断上幂数亦等焉。夫叠棋成立积，缘幂势既同，则积不容异。由此观之，规之外三棋旁蹙为一，即一阳马也。三分立方，则阳马居一，内棋居二可知矣。合八小方成一大方，合八内棋成一合盖。内棋居小方三分之二，则合盖居立方亦三分之二，较然验矣。置三分之二，以圆幂率三乘之，如方幂率四而一，约而定之，以为丸率。故曰丸居立方二分之一也。”

祖暅之考虑立方的八分之一。他着言于正方体中在切割出牟合方盖后剩余的部分。正方体的 $\frac{1}{8}$ 为 $ABCDEFGO$，如图 11-3-5（a）所示。其内切牟合方盖的 $\frac{1}{8}$ 为 $AEFGO$，称为内棋，如图 11-3-5（b）所示。正方体与牟合方盖之间的部分在切割出牟合方盖时被切割成三部分：$ABGF$、$ADEF$、$ABCDF$，称为外三棋，如图 11-3-5（c）～（e）所示。用一平面在高 OA 上任一点 N 处横截 $ABCDEFGO$，得截面 $IJKN$。设 $ON = a$，称为余高，则其截面 $IJKN$ 的面积为球半径之平方 r^2。内棋的截面为正方形 $NMHL$，设其面积为 b^2，那么，显然，外三棋的截面，即长方形 $MIPH$，$LHQK$ 和正方形 $HPJQ$ 的面积之和应为 $r^2 - b^2$。而由勾股形 ONM，$r^2 - b^2 = a^2$，即余高自乘。而 a^2 恰恰等于一个长、宽、高相等的阳马距顶点为 a 处的横截面积，如图 11-3-5（f）所示。由祖暅之原理，外三棋的体积之和与其长、宽、高为球半径 r 的阳马的体积相等，即等于小立方的 $\frac{1}{3}$。因此，内棋的体积是小立方的 $\frac{2}{3}$。这就证明了牟合方盖的体积是其外切正方体体积的 $\frac{2}{3}$。若取 $\pi = 3$，则球体积为

$$V_{球} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}D^3 = \frac{1}{2}D^3 \qquad (11\text{-}3\text{-}3)$$

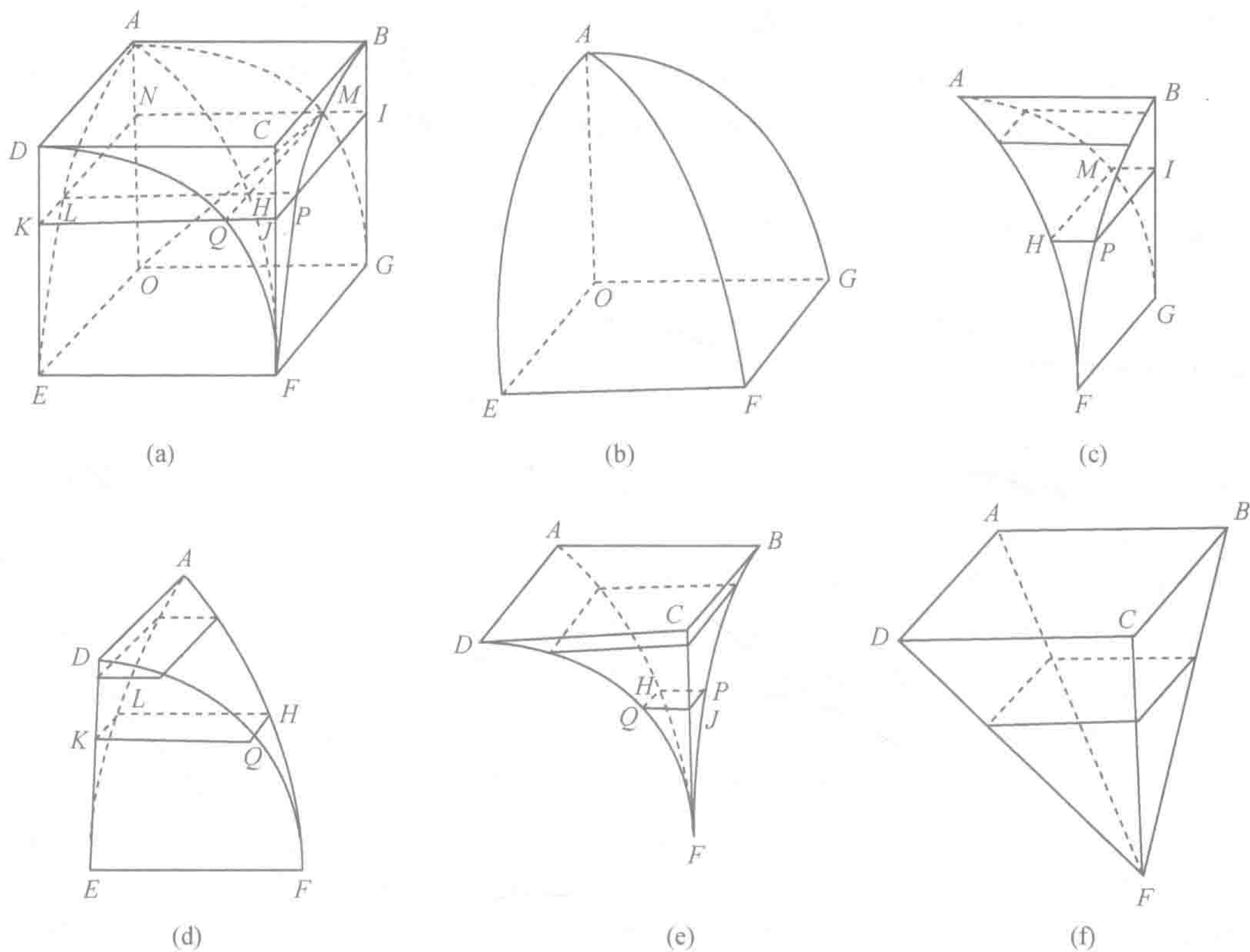


图 11-3-5　立圆求积

从而最终解决了球体积问题。

祖暅之的高明之处在于，他将祖暅之原理应用于几块立体的截面积之和与另一立体的截面积的比较上；而且，这几块立体的截面积也没有保持同一形状，而是逐渐变化的；更重要的，各截面积的变化率也不是如《九章算术》和刘徽所论者都是线性，而是非线性的。这种应用的拓展表明祖暅之对此原理的认识比刘徽进了一大步。

第四节　极限思想在近似计算中的应用

许多著述把求圆周率的程序、弧田面积密率的计算，以及开方不尽求微数都说成是极限过程，这是似是而非的看法。实际上，这里都没有极限过程，而是极限思想在近似计算中的应用。关于"求微数"，在第十章已经讲过，不赘。这里只讲圆周率和弧田密率。

一　圆　周　率

（一）刘徽的求圆周率程序

《算数书》、《周髀算经》和《九章算术》中与圆有关的面积、体积公式及其所属的例题中的周、径之比都是3∶1，并且沿袭很久。求出精确的圆周率是许多学者世代奋斗的目

标。刘歆（？ ~公元 23）为王莽制造铜斛时，实际上使用的圆周率相当于 3. 1547[①]，根据刘徽开立圆术注，东汉张衡（公元 78 ~ 139）求出径率 1 而周率 $\sqrt{10}$。据《晋书 · 王蕃》，大约与刘徽同时的吴国天文学家王蕃使用周率 142 而径率 45。可见他们都没有找到求圆周率的正确方法。

刘徽在用无穷小分割和极限思想证明了《九章算术》的圆田术公式（5-1-5）之后指出：

> 此以周径，谓至然之数，非周三径一之率也。周三者，从其六觚之环耳。以推圆规多少之觉，乃弓之与弦也。然世传此法，莫肯精核；学者踵古，习其谬失。不有明据，辩之斯难。凡物类形象，不圆则方。方圆之率诚著于近，则虽远可知也。由此言之，其用博矣。谨按图验，更造密率。恐空设法，数昧而难譬，故置诸检括，谨详其记注焉。

刘徽在中国数学史上，第一次给出了求圆周率的科学方法。其法是：

取直径为 2 尺的圆，其内接正六边形的边长为 1 尺。从正 6 边形开始不断地割圆。割圆内接正 6 边形为正 12 边形的方法是：

> 割六觚以为十二觚术曰：置圆径二尺，半之为一尺，即圆里觚之面也。令半径一尺为弦，半面五寸为勾，为之求股。以勾幂二十五减弦幂，余七十五寸，开方除之，下至秒、忽。又一退法，求其微数。位数无名知以为分子，以十为分母，约作五分之二。故得股八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二。以减半径，余一寸三分三厘九毫七秒四忽五分忽之三，谓之小勾。觚之半面而又谓之小股，为之求弦。其幂二千六百七十九亿四千九百一十九万三千四百四十五忽，余分弃之。开方除之，即十二觚之一面也。

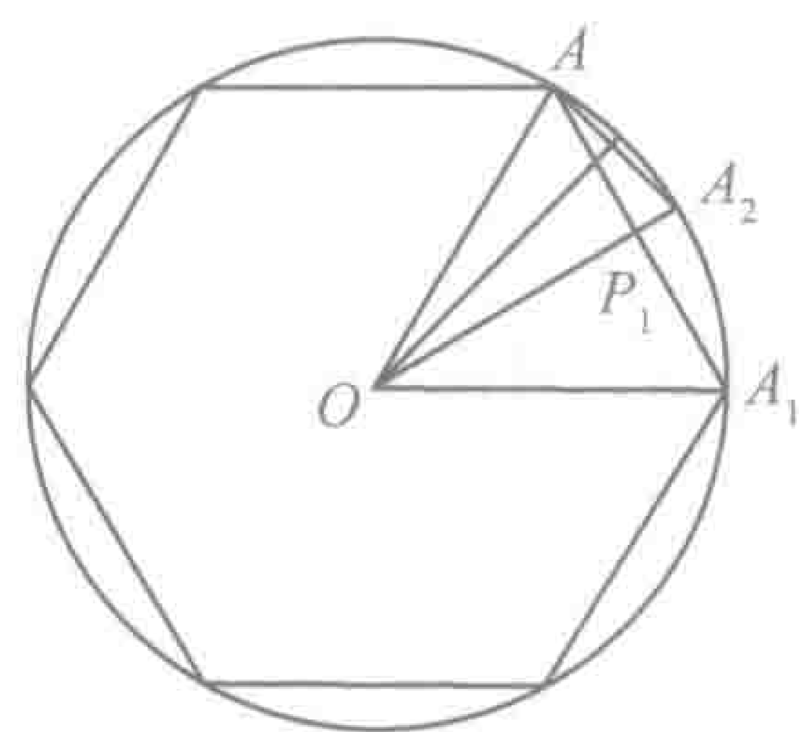


图 11-4-1　割 6 觚为 12 觚

设圆内接正 6 边形的一边为 AA_1，取弧 AA_1 的中点 A_2，则 AA_2 就是圆内接正 12 边形的一边，OA_2 与 AA_1 交于 P_1，如图 11-4-1 所示。考虑勾股形 AOP_1，由勾股定理、开方术和开方不尽求微数的方法，股 $OP_1 = \sqrt{OA^2 - AP_1^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 866025\frac{2}{5}$ 忽，为边心距。余径 $P_1A_2 = OA_2 - OP_1 = 133974\frac{3}{5}$ 忽。再考虑勾股形 AP_1A_2，弦

$$AA_2 = \sqrt{P_1A_2^2 + AP_1^2} = \sqrt{267949193445}\text{ 忽}$$

为圆内接正 12 边形之一边长。

依照同样的程序，刘徽算出正 12 边形的边心距、余径，正 48 边形的一边长、边心距、余径，正 96 边形的面积、一边长，正 192 边形的面积，如表 11-4-1 所示。

表 11-4-1　圆内接正多边形各元素计算

割次	正多边形	边长/忽	边心距/忽	余径/忽	面积/寸^2
0	6	1000000	$866025\frac{2}{5}$	$133974\frac{3}{5}$	
1	12	$\sqrt{267949193445}$	$965925\frac{4}{5}$	$34074\frac{1}{5}$	

① 刘复，新嘉量之校算与推算，见：北平辅仁大学，《辅仁学志》，1928 年。

续表

割次	正多边形	边长/忽	边心距/忽	余径/忽	面积/寸^2
2	24	$\sqrt{68148349466}$	$991444\frac{4}{5}$	$8555\frac{1}{5}$	
3	48	130806	$997858\frac{9}{10}$	$2141\frac{1}{10}$	
4	96	65438			$S_4=313\frac{584}{625}$
5	192				$S_5=314\frac{64}{625}$

接着刘徽算出差幂 $S_5-S_4=314\frac{64}{625}$寸$^2-313\frac{584}{625}$寸$^2=\frac{105}{625}$寸^2。那么$2(S_5-S_4)=\frac{210}{625}$寸^{2}为96边形各边长乘余径的总面积，于是 $S_4+2(S_5-S_4)=313\frac{584}{625}$寸$^2+\frac{210}{625}$寸$^2=314\frac{169}{625}$寸$^2>S$。于是

$$314\frac{64}{625}\text{寸}^2<S<314\frac{169}{625}\text{寸}^2$$

由于 S_5 和 $S_4+2(S_5-S_4)$ 的整数部分都是314寸^2，刘徽便取314寸^{2}作为圆面积的近似值。将圆面积的这个近似值代入《九章算术》的圆面积公式（5-1-5），那么圆周长 $l\approx\frac{2S}{r}=\frac{2\times314\text{寸}^2}{10\text{寸}}=6$尺2寸8分。刘徽将直径 $d=2$ 尺与周长 $l\approx6$ 尺2寸8分相约，周长得157，直径得50，这就是圆周长和直径的相与之率。用现今的符号，就是 $\pi=\frac{157}{50}$。

刘徽自己将它称为徽术，后来也被称为徽率。刘徽用这个值修正了《九章算术》中公式（5-1-5）所属的关于圆面积的两个例题，又将圆面积公式（5-1-7）修正为 $S=\frac{157}{200}d^2$；将圆面积公式（5-1-8）修正为 $S=\frac{25}{314}L^2$；还修正了与圆有关的其他图形的面积、体积公式、开圆术及其例题。

刘徽指出，上述周径相与率中，“周率犹为微少也”。因此，他又求出正1536边形的一边长，算出正3072边形的面积，裁去微分，求出圆周长近似值6尺2寸$8\frac{8}{25}$分，与直径2尺相约，周得3927，径得1250，为周径的相与之率，此即 $\pi=\frac{l}{d}=\frac{3927}{1250}$。①

刘徽关于圆周率的计算赶上并超过了古希腊的阿基米德，奠定了此后中国在圆周率计算方面领先于世界数坛千余年的理论和数学方法的基础。数典不能忘祖，我们称颂祖冲之将圆周率精确到八位有效数字的杰出贡献，但不能忘记在中国首创正确的圆周率求法的刘徽。

由于没有认识到刘徽割圆术的主旨在于证明《九章算术》的圆面积公式（5-1-5），人们对刘徽求圆周率的程序也统统搞错了。人们用 $314\frac{64}{625}<100\pi<314\frac{169}{625}$ 取代不等式 $314\frac{64}{625}$

---

① 郭书春，刘徽的面积理论，辽宁师院学报，1983，(1)，85~96。

寸^2 $< S < 314\frac{169}{625}$寸^2，并且说刘徽舍弃不等式两端的分数部分，即取 $100\pi = 314$，或 $\pi = \frac{157}{50}$。这里不是使用圆面积公式（5-1-5），而使用了 $S = \pi r^2$，其中 $r = 10$ 寸。不言而喻，这种解释不符合刘徽的程序，而且还会把刘徽置于犯循环推理错误的境地。而实际上，刘徽从未犯循环推理的错误。① 对刘徽割圆术的误解延续时间之长，涉及范围之广，是罕见的，直到上世纪 70 年代末才被纠正。

（二）祖率

《隋书 · 律历志》在回顾了人们求圆周率值的过程之后，谈到了祖冲之的贡献：

> 宋末，南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈、朒二限之间。密率：圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率：圆径七，周二十二。

此相当于

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

$$约率：\pi = \frac{22}{7}$$

$$密率：\pi = \frac{355}{113}$$

祖冲之将圆周率精确到 8 位有效数字，这种精确度直到 1247 年才被中亚数学家阿尔 · 卡西所超过。而密率$\frac{355}{113}$则是分母小于 16604 的接近 π 的真值的最佳分数，它于 1573 年才被德国数学家奥托重新发现。后来，荷兰工程师安托尼兹也得到同样的结果。后者是用阿基米德的方法求出$\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}$，然后取二者分子、分母的平均值得出的。② 西方将$\frac{355}{113}$称为安托尼兹率。日本学者三上义夫建议将$\frac{355}{113}$称为祖率，是十分应该的。

祖冲之是怎样求出上述值的，史书没有记载。一般认为，他是利用刘徽的计算圆周率的程序求得 π 的 8 位有效数字的。我们根据钱宝琮《中国数学史》的推测，将其概述如下：直径为 1 丈的圆的内接正 6×2^{10} 边形的面积 $S_{10} = 3.14159251$ 丈^2，正 6×2^{11} 边形的面积 $S_{11} = 3.14159261$ 丈^2，于是 $S_{11} - S_{10} = 3.14159261$ 丈^2 $- 3.14159251$ 丈^2 $= 0.00000010$ 丈^2。由于 $S_{11} < S < S_{10} + 2(S_{11} - S_{10})$，那么得到圆面积的盈、朒二限：3.14159261 丈^2 $< S <$ 3.14159271 丈^2。利用《九章算术》的圆面积公式（5-1-5），便可求出圆周长的盈朒二限：

$$3.14159261 丈 < l < 3.14159271 丈$$

这正是祖冲之的结果。

约率实际上是何承天求出的。据《隋书 · 天文志上》，何承天说，周天 $365\frac{75}{304}$度，南

---

① 郭书春，刘徽《九章算术注》中的定义及演绎逻辑试析，自然科学史研究，1983，2（3）。

② 梁宗巨，数学历史典故，辽宁教育出版社，1992 年，第 241 页。

北二极相去116 $\frac{65}{304}$度强，即天径。天径与天周之比与$\frac{22}{7}$非常接近。

至于密率是怎么求得的，数学史界有各种猜测。有的学者认为是通过繁分数或渐近分数求得的。但是，它不符合中国古代的数学传统。我们知道，《九章算术》与刘徽时代很不愿使用繁分数（即重有分），这种传统到祖冲之时代看不出有改变的迹象。钱宝琮《中国数学史》认为祖冲之是用何承天的调日法求得密率的。已知 $\frac{157}{50}<\pi<\frac{22}{7}$，以$\frac{22}{7}$作为圆周的强率，$\frac{157}{22}$作为弱率。将强、弱二率的分子、分母分别相加，得到$\frac{157+22}{50+7}=\frac{179}{57}<\pi$，将它与$\pi=\frac{22}{7}$的分子、分母再相加，得到$\frac{179+22}{57+7}=\frac{201}{64}<\pi$。由此类推，便得到

$$\frac{157+22\times9}{50+7\times9}=\frac{355}{113}$$

祖冲之以为圆周密率。

祖冲之与何承天都是南朝历算大家，祖冲之继承何承天的方法颇多。我们认为，钱宝琮的推测是可信的。

二　圆率和方率

刘徽在求圆周率的同时，还考虑了方中容圆、圆中容方的问题。在求出圆面积 $S\approx314$ 寸^2 之后，刘徽说：

> 令径自乘为方幂四百寸，与圆幂相折，圆幂得一百五十七为率，方幂得二百为率。方幂二百，其中容圆幂一百五十七也。圆率犹为微少。按：弧田图令方中容圆，圆中容方，内方合外方之半。然则圆幂一百五十七，其中容方幂一百也。

刘徽将圆的外切正方形称为外方，设其面积为 $S_{外方}$；刘徽将圆的内接正方形称为内方，设其面积为 $S_{内方}$，刘徽说：

$$S_{外方}:S:S_{内方}=200:157:100$$

这个比例式在弧田术及修正与圆有关的面积、体积公式时特别有用。

同样，刘徽在求出圆面积 $S\approx314\frac{4}{25}$寸^2 之后说：

> 置径自乘之方幂四百寸，令与圆幂通相约，圆幂三千九百二十七，方幂得五千，是为率。方幂五千中容圆幂三千九百二十七；圆幂三千九百二十七，中容方幂二千五百也。

此即

$$S_{外方}:S:S_{内方}=5000:3927:2500$$

三　弧田密率

（一）《九章算术》弧田术之误

刘徽认为，《九章算术》给出的求弧田面积的公式（5-1-9）不准确。他说：

方中之圆，圆里十二觚之幂，合外方之幂四分之三也。中方合外方之半，则朱青合外方四分之一也。弧田，半圆之幂也。故依半圆之体而为之术。以弦乘矢而半之则为黄幂，矢自乘而半之为二青幂。青、黄相连为弧体。弧体法当应规。今觚面不至外畔，失之于少矣。圆田旧术以周三径一为率，俱得十二觚之幂，亦失之于少也。与此相似，指验半圆之弧耳。若不满半圆者，益复疏阔。

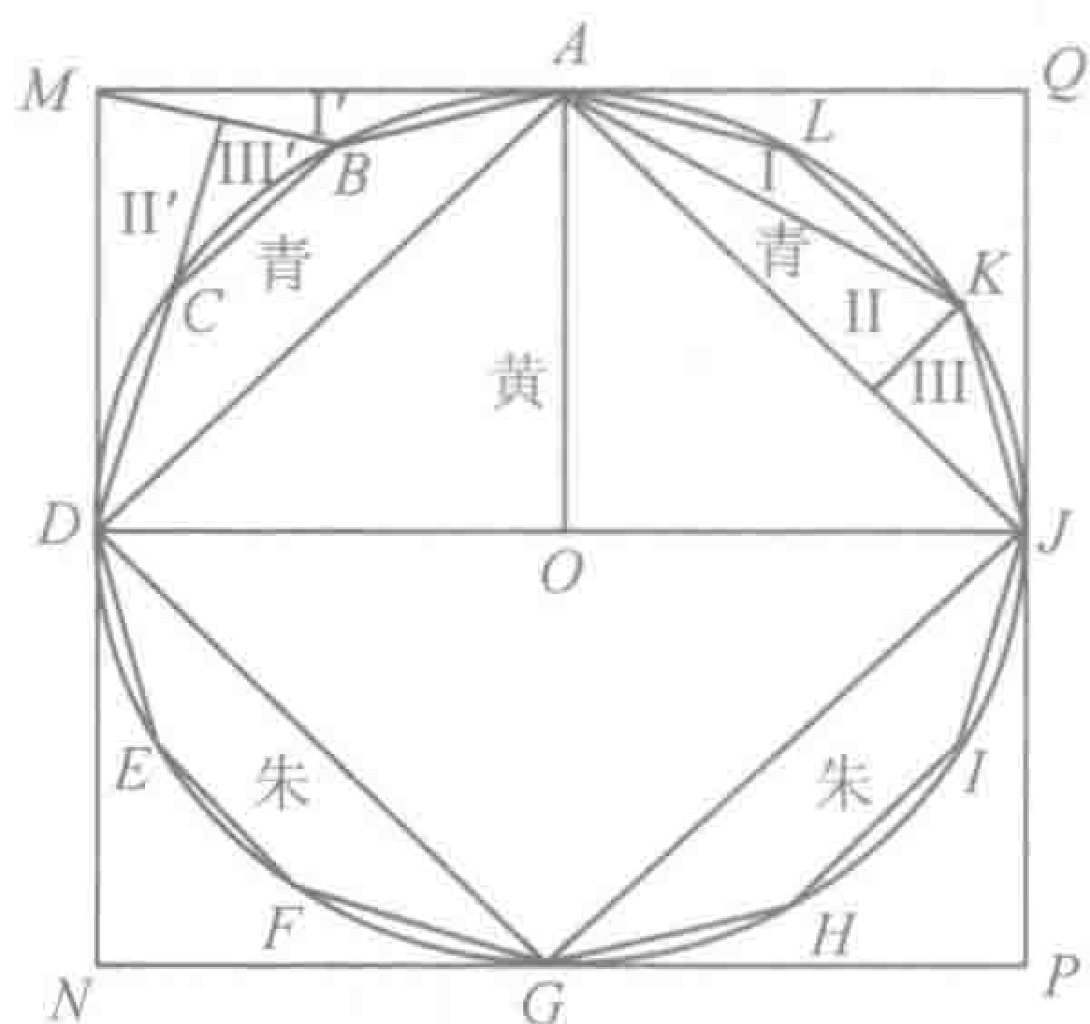


图 11-4-2 《九章算术》弧田术之不验

如图 11-4-2 所示，刘徽考虑圆 O 的半圆。作圆 O 的外切正方形 $MNPQ$，内接正方形 $ADGJ$，及圆内接正 12 边形 $ABCDEFGHIJKL$。将半圆作为弧田，其矢是半径 r，弦是直径 d。按照公式（5-1-9）计算其面积，得半圆的面积 $S_{by}=\frac{1}{2}(dr+r^2)$。其中$\frac{1}{2}dr$ 是$\triangle ADJ$ 的面积，$\triangle ADJ$ 称为黄幂。而$\frac{1}{2}r^2$ 是勾股形 ADM 的面积。正 12 边形 $ABCDEFGHIJKL$ 与内方 $ADGJ$ 之间的部分 $ABCD$、$JKLA$ 为两青幂，$DEFG$、$GHIJ$ 为两朱幂。将勾股形 ADM 中青幂之外的部分分割为 I′、II′、III′，移到勾股形 AJQ 中的青幂上的 I、II、III 处，则勾股形 ADM 的面积等于两青幂的面积之和，也就是正 12 边形 $ABCDEFGHIJKL$ 之半$ABCDOJKL$与$\triangle ADJ$ 之差。因此，$\frac{1}{2}$（$dr+r^2$）是 12 边形之半 $ABCDOJKL$ 的面积。它当然小于半圆的面积。可见，公式（5-1-9）是不准确的。刘徽认为，对半圆尚且如此，而对不是半圆的弧田，公式（5-1-9）更不准确。

（二）刘徽的弧田密率

怎样才能求出弧田的精确面积呢？刘徽说：

宜依勾股锯圆材之术，以弧弦为锯道长，以矢为勾深，而求其径。既知圆径，则弧可割分也。割之者，半弧田之弦以为股，其矢为勾，为之求弦，即小弧之弦也。以半小弧之弦为勾，半圆径为弦，为之求股，以减半径，其余即小弦之矢也。割之又割，使至极细。但举弦、矢相乘之数，则必近密率矣。

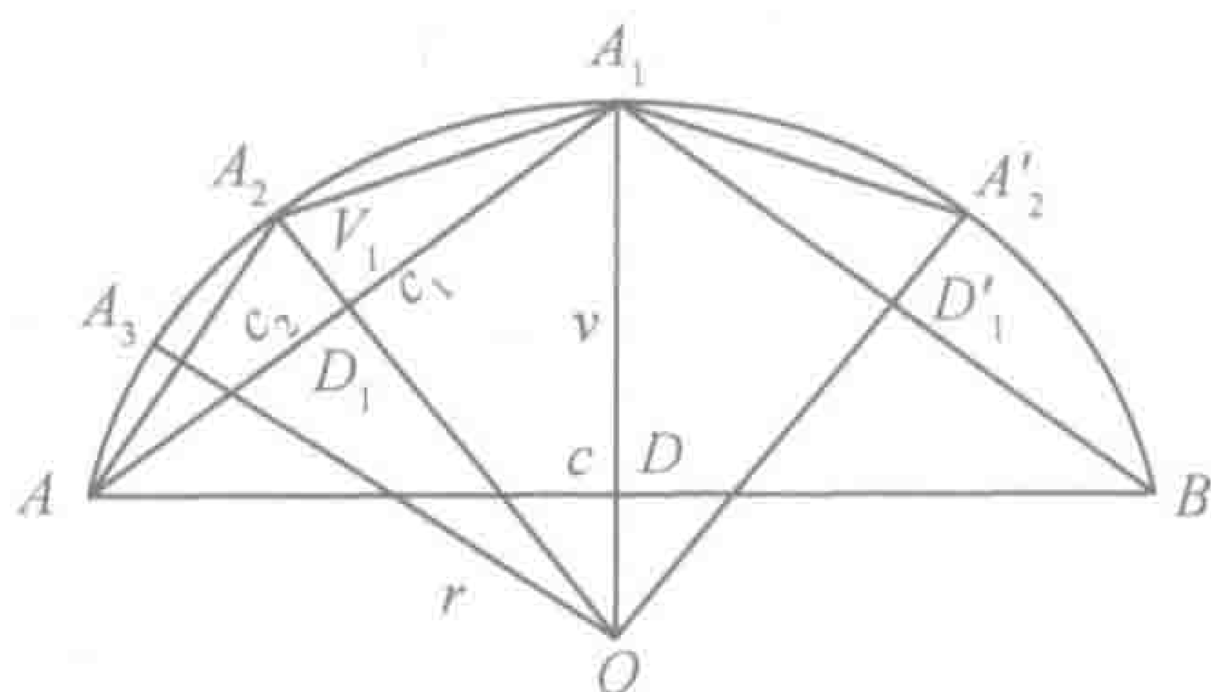


图 11-4-3　弧田密率

如图 11-4-3 所示，考虑弧田 AA_1B，其弦为 c，其矢为 v。则$\triangle AA_1B$ 的面积为 $S_0=\frac{1}{2}cv$。然后，刘徽采取不断地将弧平分，得到若干小弧田，依次求出它们的弦和矢。为此，刘徽首先运用勾股章勾股锯圆材之术求出弧田所在圆的直径 $d=\left(\frac{c^2}{2}+v^2\right)\div v$。将弧 AB 平分，得弧 AA_1，A_1B，分别对应小弧田 AA_2A_1、$A_1A'_2B$，求它们的小弦 $AA_1=A_1B=c_1$，及小矢 $A_2D_1=A'_2D'_1=v_1$。由勾股形 AA_1D，得小弦 $c_1=\sqrt{(\frac{c}{2})^2+v^2}$。又由勾股形 AOD_1，得 $OD_1=\sqrt{r^2-(\frac{c_1}{2})^2}$，于是小矢

$$v_1 = OA_2 - OD_1 = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{c_1}{2}\right)^2}$$

再将弧 AA_1，A_1B 平分，得到4个更小的小弧田，可以重复上述计算程序，求出它们的弦 c_2，矢 v_2。如此继续下去，依次将弧分割为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{2^3}$，…成为一串小弧田。反复运用勾股定理，可以逐次求出这串弧田的弦、矢：c_1、v_1，c_2、v_2，c_3、v_3，…可以依次求出小弧田所容的三角形的面积：$\frac{1}{2}c_1v_1$，$\frac{1}{2}c_2v_2$，$\frac{1}{2}c_3v_3$，…则 n 次分割所得所有小弧田所容的三角形的面积之和为

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i \times \frac{1}{2}c_iv_i$$

其中，c_0，v_0 是原弧田的弦和矢。显然，分割的次数越多，S_n 就越接近弧田面积。这就是刘徽所说的“但举弦、矢相乘之数，则必近密率矣”。从理论上说，可以无限地分割下去，使 S_n 无限逼近弧田面积。但是，在实际计算中，不可能完成这个极限过程，只能进行到有限步，所以也是极限思想在近似计算中的应用。

第五节　刘徽的面积、体积的推导系统

刘徽是给《九章算术》作注，没有改变其术文和题目的顺序。有的著述因此将刘徽与《九章算术》的系统混为一谈。但是，认真分析一下刘徽注，就会发现两者是不同的，尤以面积和体积的推导系统的区别最为典型。《九章算术》的面积问题的解决主要借助于“以盈补虚”，其体积问题的解决主要借助于“损广补狭”和棋验法，它们都是出入相补原理的应用，从逻辑方法上说以归纳逻辑为主。刘徽的面积、体积问题虽仍使用出入相补原理，却以极限思想和无穷小分割方法为核心，并且，主要逻辑方法是演绎逻辑。逻辑方法的改变必然导致逻辑系统的改变。因此，刘徽的面积、体积的推导系统与《九章算术》有根本的区别。

一　刘徽的面积推导系统

（一）《九章算术》时代的面积推导系统

根据刘徽《九章算术注》的提示，《九章算术》时代，人们对要求积的圭田（三角形）、邪田和箕田（梯形）等直线形和圆田、弧田、环田等曲线形进行分割，使用以盈补虚的方法，拼合成一个长方形，推求其面积公式。其中对曲线形是先以一个近似的多边形取代之再进行分割，也就是说，用以盈补虚实际上是证明了相应的多边形的面积，并没有证明曲边形的面积公式，由这个多边形的面积公式正确得出要求积的曲边形面积公式正确，是一个归纳过程，而不是演绎过程。分割中会出现三角形，主要是勾股形，但是，它们只是原图形的分割和拼合新的长方形的元件，并不需要先证明三角形的面积公式。《九章算术》时代面积的推导系统大体如图 11-5-1 所示。

（二）刘徽的面积推导系统

刘徽的面积推导系统与《九章算术》时代有着根本的不同。它有几个明显的特点：

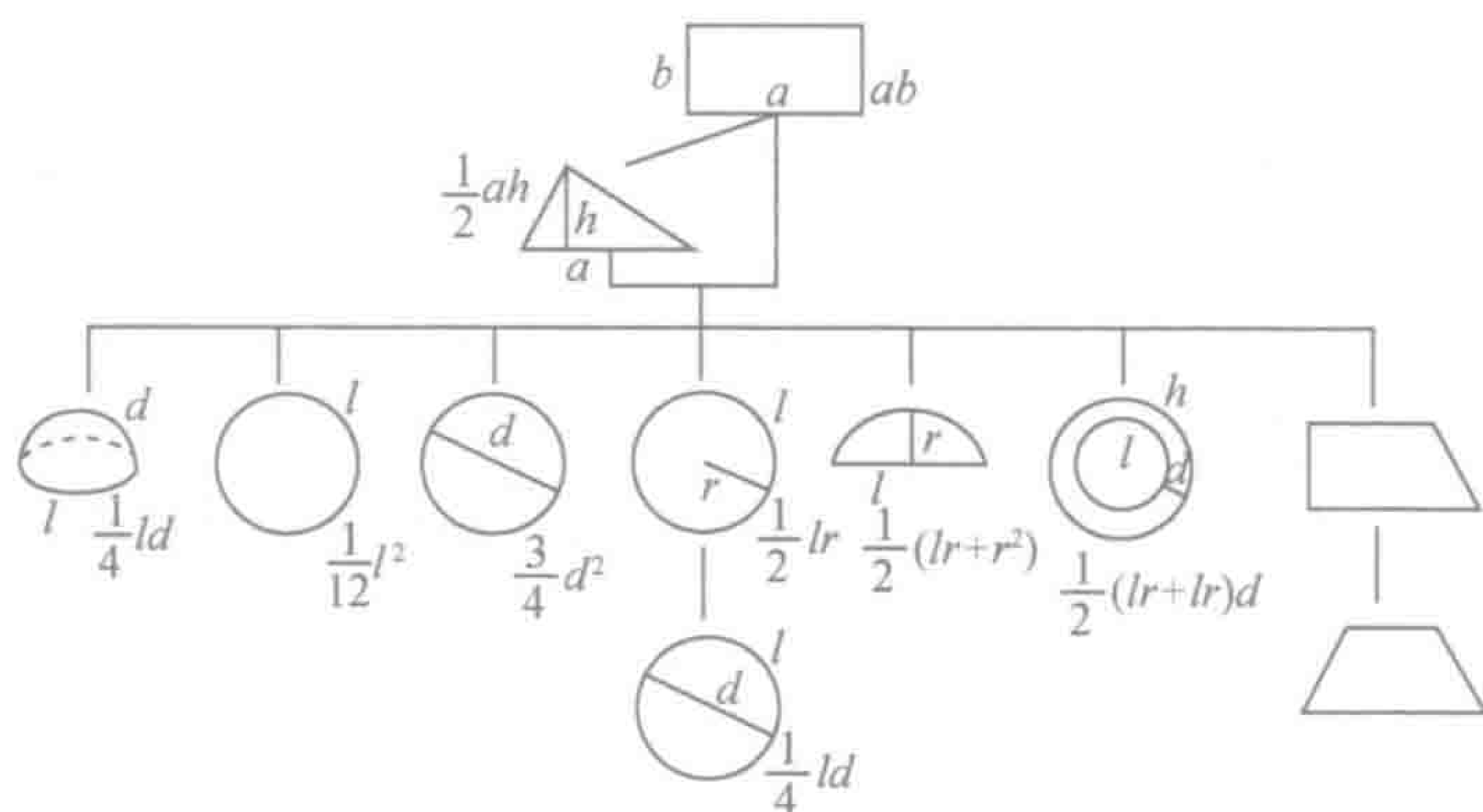


图 11-5-1　《九章算术》的面积推导系统

首先，对方田术即长方形的面积公式，刘徽未试图证明，而是给出了幂即面积的定义：

凡广从相乘谓之幂。

察整个《九章算术注》中，刘徽没有证明的术文凡 62 条，除了粟米章今有术所属的 31 问，衰分章衰分术、返衰术所属的 4 问，少广章少广术所属的 11 问凡 46 问的术文，因注解了总术而不再注分术以及粟米章 2 条经率术，衰分章的非衰分问题中的 8 问的术文，方程章三马上阪、诸色禾实、令吏食鸡、羊犬鸡兔价等 4 问的术文凡 14 条术文，因注解了同类的术文而不再注之外，那么，刘徽没有证明的只有方田术、方堢壔术 2 条术文。这显然不是刘徽的疏漏，而是将长方形、长方体的体积公式看成定义，是不必证明的。

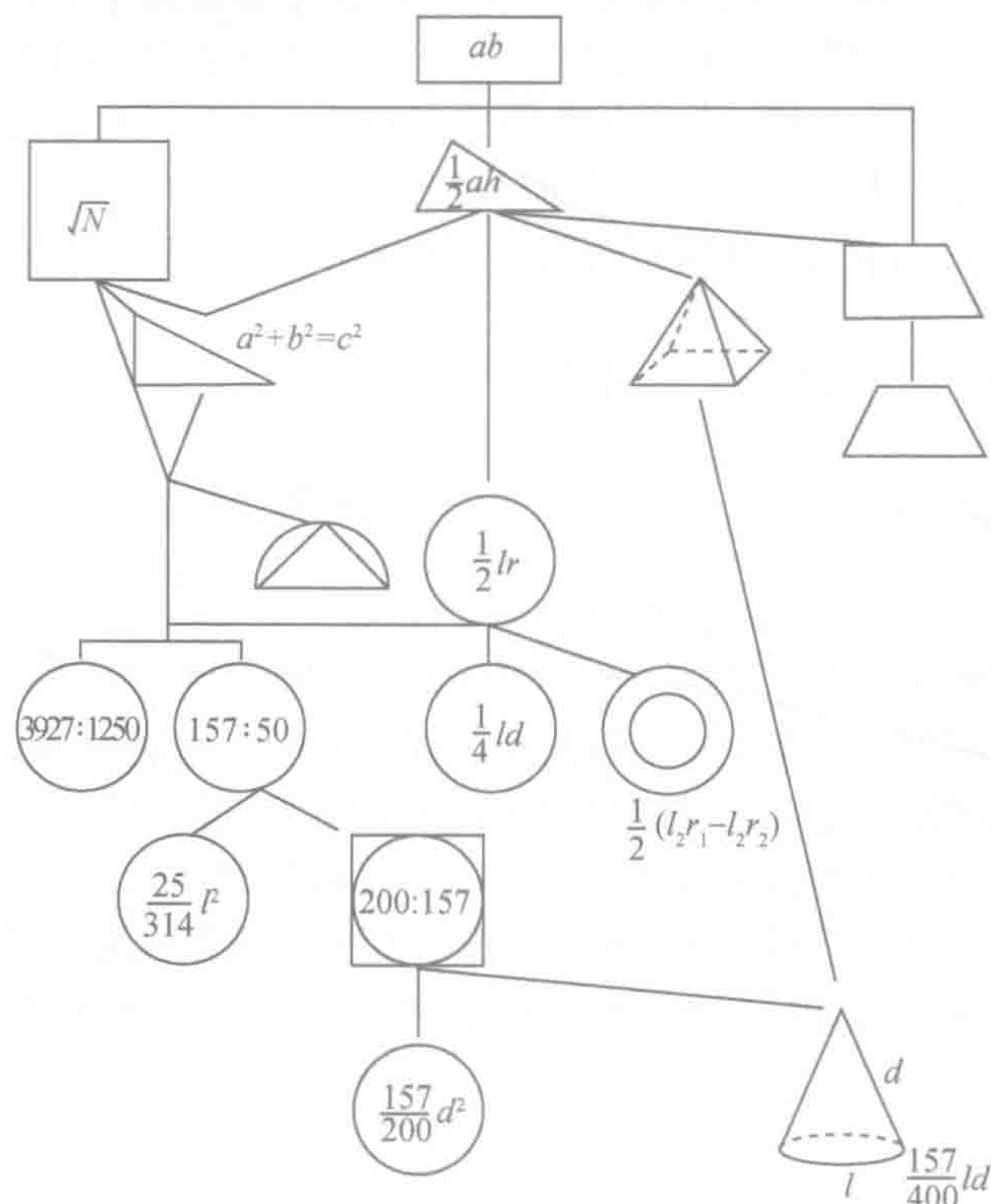


图 11-5-2　刘徽的面积理论体系

其次，在刘徽的面积理论系统中，不仅直线形，而且曲线形中除了宛田外所有的面积公式都是被严格证明的，所使用的主要是演绎逻辑。

最后，三角形的面积公式是刘徽的面积理论系统的核心，而无穷小分割方法则在其中起着关键的作用。在《九章算术注》中尽管没有使用三角形面积公式证明邪田和箕田的面积公式的文字，但实际上是不难做到的。刘徽对圆田、弧田，进而还有环田等曲线形面积公式的证明或解决，也都必须使用三角形的面积公式，并且不借助于极限思想和无穷小分割方法是不可能的。

总之，刘徽的面积问题的推导形成了一个完整的理论体系，大体如图 11-5-2 所示。将其与图 11-5-1 比较，即可见两者的区别。

二　对多面体体积公式的证明

（一）有限分割求和法——锥亭之类体积公式的证明

在证明了刘徽原理之后，就是说，刘徽在解决了阳马、鳖臑的体积问题之后，他对方锥、方亭、刍甍、刍童、羡除等多面体，都是将其分割为有限个长方体、堑堵、阳马、鳖臑，求其体积之和，以证明其体积公式，我们称之为有限分割求和法。

1. 方锥、方亭、刍甍、刍童

对方亭、刍甍、刍童等，刘徽借助于有限分割求和法提出了与《九章算术》等价的新的体积公式。以刍童为例，刘徽说：

> 为术又可令上下广袤差相乘，以高乘之，三而一，亦四阳马；上下广袤互相乘，并而半之，以高乘之，即四面六堑堵与二立方；并之，为刍童积。

这是刘徽提出的与《九章算术》的公式等价的公式：

$$V = \frac{1}{3}(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)h + \frac{1}{2}(a_2b_1 + a_1b_2)h \tag{11-5-1}$$

公式的阐述过程，就是其证明过程：刘徽将刍童分解成四角4个阳马、四面6个堑堵和中央的2个立方，如图11-5-3所示。四角上1个阳马的体积是$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(a_2-a_1)\times\frac{1}{2}(b_2-b_1)h=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}(a_2-a_1)(b_2-b_1)h$。因此，四角上4个阳马的体积就是$\frac{1}{3}(a_2-a_1)(b_2-b_1)h$。这是公式（11-5-1）的第1项。

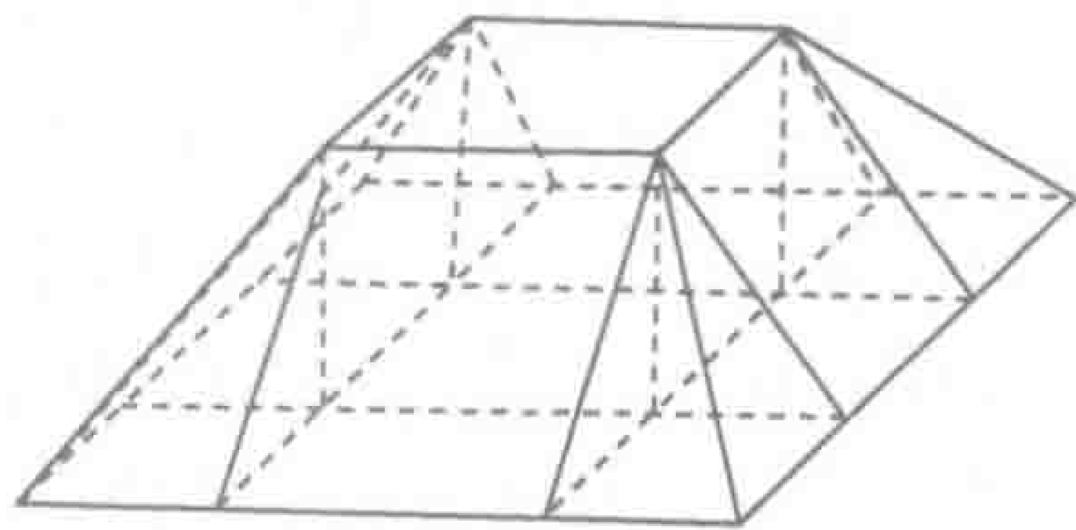


图11-5-3　刍童的分割

两端2个堑堵的体积是$2\times\frac{1}{2}a_1\times\frac{1}{2}(b_2-b_1)h=\frac{1}{2}a_1(b_2-b_1)h$，两旁4个堑堵的体积是$2\times\frac{1}{2}b_1\times\frac{1}{2}(a_2-a_1)h=\frac{1}{2}b_1(a_2-a_1)h$，中央2个立方的体积是$a_1b_1h$。于是中央2个立方与四面6个堑堵的体积之和为

$$\frac{1}{2}a_1(b_2-b_1)h+\frac{1}{2}b_1(a_2-a_1)h+a_1b_1h=\frac{1}{2}(a_2b_1+a_1b_2)h$$

这就是公式（11-5-1）的第2项。①

这种证明方式对任何刍童都是适应的，是一种真正的数学证明。不难看出，刍童的分解还有棋验法的痕迹，如分解成中央2立方、两边4堑堵是没有必要的，只要分解成中央1立方、两边2堑堵就够了。

刘徽又给出了刍童体积的另一种公式：

> 又可令上、下广、袤互相乘而半之，上下广袤又各自乘，并，以高乘之，三而一，即得也。

此即

① 杜石然，我国古代的体积计算，数学通报，1959，（5）

$$V = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(a_2b_1 + a_1b_2) + (a_2b_2 + a_1b_1)\right]h$$

2. 羡除的体积

在证明《九章算术》给出的羡除体积公式（5-2-13）时，刘徽根据不同情况，分割出堑堵、阳马和各种形状的鳖腝。有的鳖腝与《九章算术》给出的形状相同，但是也有几种是与《九章算术》给出的形状不同的四面体，刘徽也将它们叫做鳖腝。刘徽认识到，这类不同于《九章算术》的鳖腝是不是能用《九章算术》的公式（5-2-7）求其体积，需要重新证明，而不可以直接引用。显然，要证明羡除的体积公式，必须先解决这些鳖腝的体积。

（1）两广相等的羡除

刘徽讨论了几种两广相等的羡除，他说：

凡堑堵上袤短者，连阳马也。下袤短者，与鳖腝连也。上、下两袤相等知，亦与鳖腝连也。并三广，以高、袤乘，六而一，皆其积也。今此羡除之广，即堑堵之袤也。

刘徽在这里给出了三种两广相等的羡除：一是分割出的堑堵的上袤短于羡除上广，这又有羡除的下广<上广=末广与末广<上广=下广两种情形，实际上将一个转置90°，两者完全一致，都由一堑堵与夹堑堵的两阳马构成，如图11-5-4（a），（b）所示。一是分割出的堑堵的下袤短于羡除下广，即下广>上广=末广的羡除，由一堑堵与夹堑堵的两鳖腝构成，如图11-5-4（c）。一是分割出的堑堵的上下两袤与羡除的上下两广相等，即下广=上广<末广的羡除，由一堑堵与夹此堑堵的两鳖腝构成，如图11-5-4（d）所示。这里的堑堵、阳马和鳖腝都是《九章算术》所给的形状，利用公式（5-2-4）、（5-2-6）、（5-2-7），求其各部分积之和，容易求出它们的体积，实际上都是公式（5-2-13）的特殊情形。

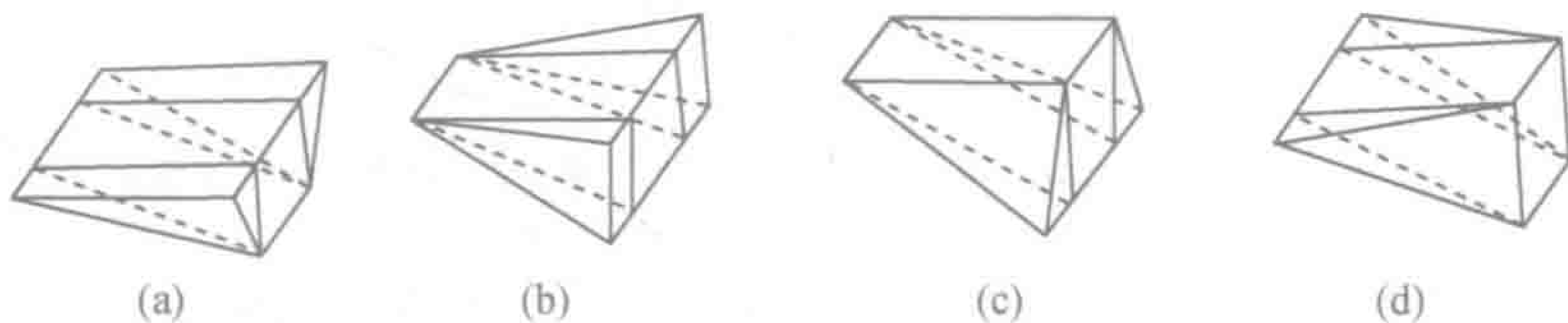


图11-5-4　两广相等的羡除

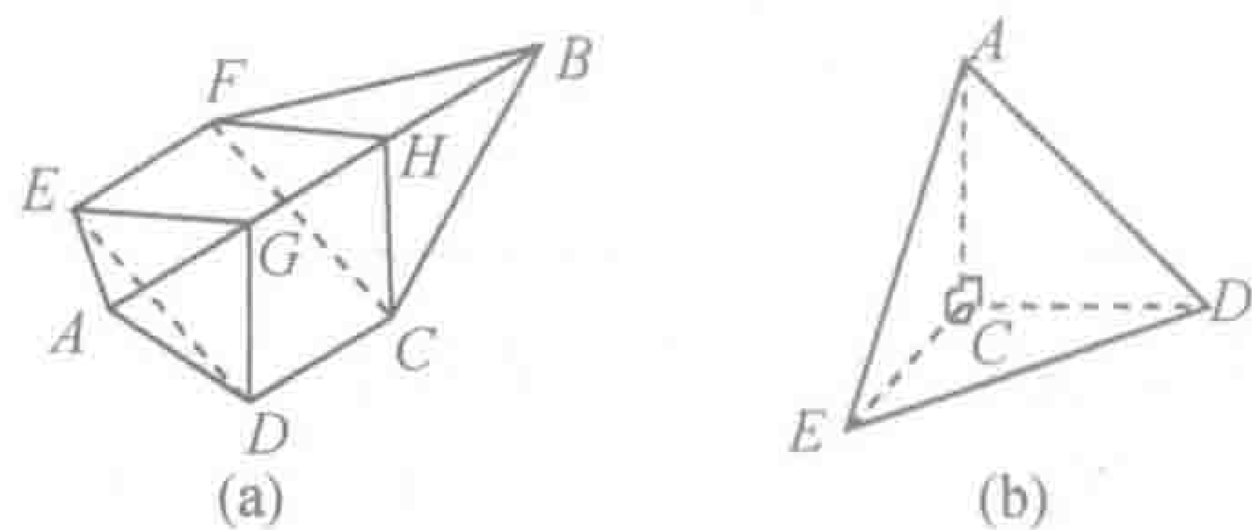


图11-5-5　下、末广相等之羡除的分割

对下广、末广相等的羡除，可以分解出一个堑堵及夹堑堵的两个鳖腝，如图11-5-5（a）。然而这里的鳖腝不同于《九章算术》的形状，而是三棱互相垂直于一点的四面体，如图11-5-5（b）所示。刘徽采用将其从方锥中分离出来，证明其体积公式仍是公式（5-2-7），这在下面再谈。因此这种羡除的体积公式是$V=\frac{1}{6}(a+2b)hl$，这是公式(5-2-13) $b=c$的情形。

（2）三广不等的羡除

对《九章算术》给出的三广不等的羡除，刘徽说：

此本是三广不等，即与鳖腝连者。别而言之：中央堑堵广六尺，高三尺，袤七尺。末广之两旁，各一小鳖腝，皆与堑堵等。令小鳖腝居里，大鳖腝居表，则大鳖

> 腝皆出随方锥，下广二尺，袤六尺，高七尺。分取其半，则为袤三尺。以高、广乘之，三而一，即半锥之积也。邪解半锥得此两大鳖腝。求其积，亦当六而一，合于常率矣。

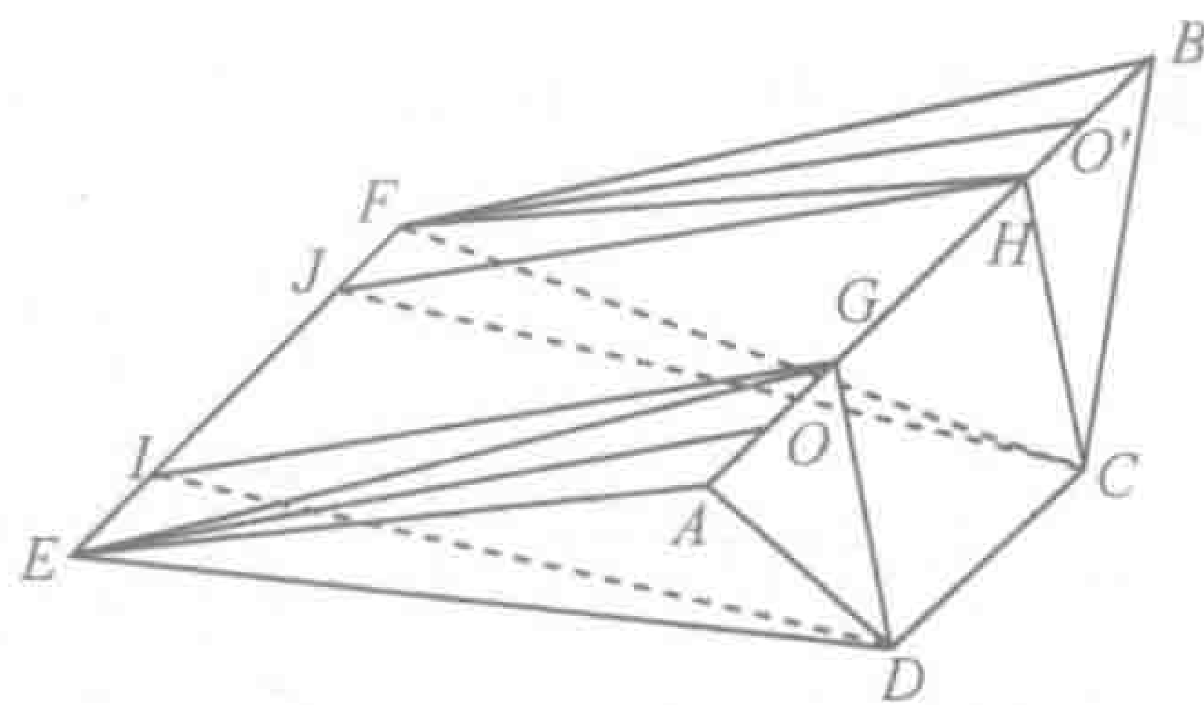


图 11-5-6　三广不等羡除之分割

如图 11-5-6 所示，记三广不等的羡除为 $ABCDEF$，它被分解成中间堑堵 $GHCDIJ$，两边各一小鳖腝 $GDEI$、$HCFJ$，再向外两边各有一大鳖腝 $AGDE$，$BHCF$。这两大鳖腝的形状又不同于已经证明过体积公式的那几种鳖腝：其底 AGD、BHC 是勾股形（由题设 $AG = BH = 2$ 尺，$DG = CH = 3$ 尺），高 EO、FO' 为7尺，其垂足 O、O' 不在底面的顶点上，而分别在直角边 AG、BH 上。对这种大鳖腝，刘徽采用从一个椭方锥中将其分离出来的方法，并借助于截面积原理，证明"求其积，亦当六而一，合于常率矣"，换言之，它的体积公式也是公式（5-2-7）。即 $V_{db} = \frac{1}{6}AG \times DG \times IG$。那么，两大鳖腝 $AGDE$，$BHCF$ 的体积是 $V_{2db} = \frac{1}{6}(AG + HB) \times DG \times IG$。根据公式（5-2-4），中间堑堵 $GHCDIJ$ 的体积是 $V_q = \frac{1}{2}GH \times DG \times IG$。根据式（5-2-7），两边两小鳖腝 $GDEI$、$HCFJ$ 的体积是 $V_{2xb} = \frac{1}{6}(EI + JF) \times DG \times IG$。求以上三者之和便证明了公式（5-2-13）：

$$V_y = V_q + V_{2xb} + V_{2db} = \frac{1}{2}GH \times DG \times IG + \frac{1}{6}(EI + JF) \times DG \times IG$$
$$+ \frac{1}{6}(AG + HB) \times DG \times IG = \frac{1}{6}(GH + IJ + CD) \times DG \times IG$$
$$+ \frac{1}{6}(EI + JF) \times DG \times IG + \frac{1}{6}(AG + HB) \times DG \times IG$$
$$= \frac{1}{6}(AB + CD + EF) \times DG \times IG$$

（二）分离方锥求鳖腝

1. 分离方锥求鳖腝法

刘徽将形如图 11-5-5（b）的鳖腝从方锥中分离出来的方法是：

> 合四阳马以为方锥。邪画方锥之底，亦令为中方。就中方削而上合，全为中方锥之半。于是阳马之棋悉中解矣。中锥离而为四鳖腝焉。故外锥之半亦为四鳖腝。虽背正异形，与常所谓鳖腝参不相似，实则同也。所云夹堑堵者，中锥之鳖腝也。

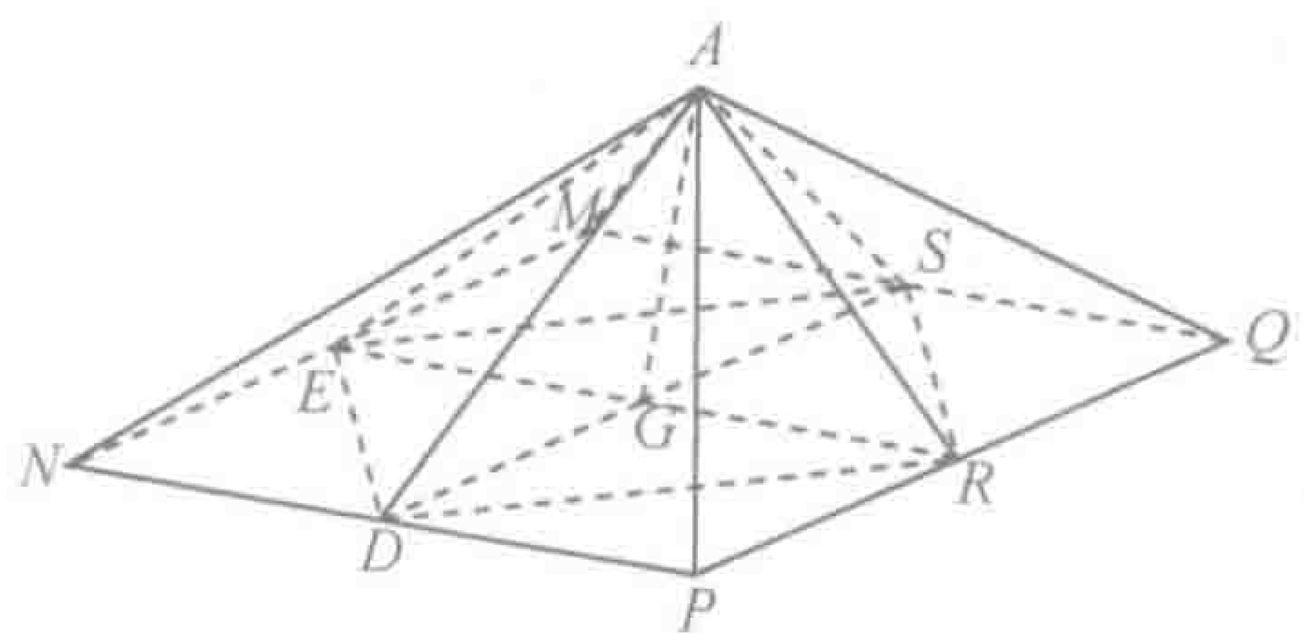


图 11-5-7　分离方锥求鳖腝

其中"半"，训片。刘徽取四个阳马 $AGEND$，$AGDPR$，$AGRQS$，$AGSME$，合成方锥 $AMNPQ$，如图 11-5-7 所示。由方锥体积公式（5-2-5），该方锥体积为 $V_{fz} = \frac{4}{3} \times DG \times EG \times AG$。连 $EDRS$，是一个中方。由中方削至顶点 A，把方锥 $AMNPQ$ 分成两部分，一部分是中锥

$AEDRS$，其体积为 $V_{zfz}=\frac{2}{3}\times DG\times EG\times AG$。一部分是外面剩余的部分。这种分割方式，使中方锥成为四片。四个阳马也被中解。中锥分成的四片，恰就是我们所要求积的夹堑堵的鳖臑：$AGDE$，$AGRD$，$AGSR$，$AGES$，它们都全等，因此，每个的体积是中锥的$\frac{1}{4}$，即

$$V_b=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times DG\times EG\times AG=\frac{1}{6}\times DG\times EG\times AG$$

AG 是鳖臑的高，DG，EG 分别是广、袤，与公式（5-2-7）取同样的形式。

刘徽还由这种分离方锥求鳖臑法得到一个推论：由于方锥 $AMNPQ$ 割出中锥 $AEDRS$ 之后剩余的部分又是四个全等的四面体：$ANDE$、$APRD$、$AQSR$、$AMES$，它们的高的垂足不在底面之内，而在底面之外直角顶以斜边为轴的对称点上，刘徽也称它们为鳖臑，并且其体积公式显然也与公式（5-2-7）一致。所以刘徽得出这两种鳖臑“虽背正异形，与常所谓鳖臑参不相似，实则同也”，即都由公式（5-2-7）求积的结论。

2. 分离椭方锥求大鳖臑

刘徽将大鳖臑从一个椭方锥中分解出来的方法是：

> 则大鳖臑皆出随方锥：下广二尺，袤六尺，高七尺。分取其半，则为袤三尺。以高、广乘之，三而一，即半锥之积也。邪解半锥得此两大鳖臑。求其积，亦当六而一，合于常率矣。按：阳马之棋两邪，棋底方。当其方也，不问旁、角而割之，相半可知也。推此上连无成不方，故方锥与阳马同实。角而割之者，相半之势。此大小鳖臑可知更相表里，但体有背正也。

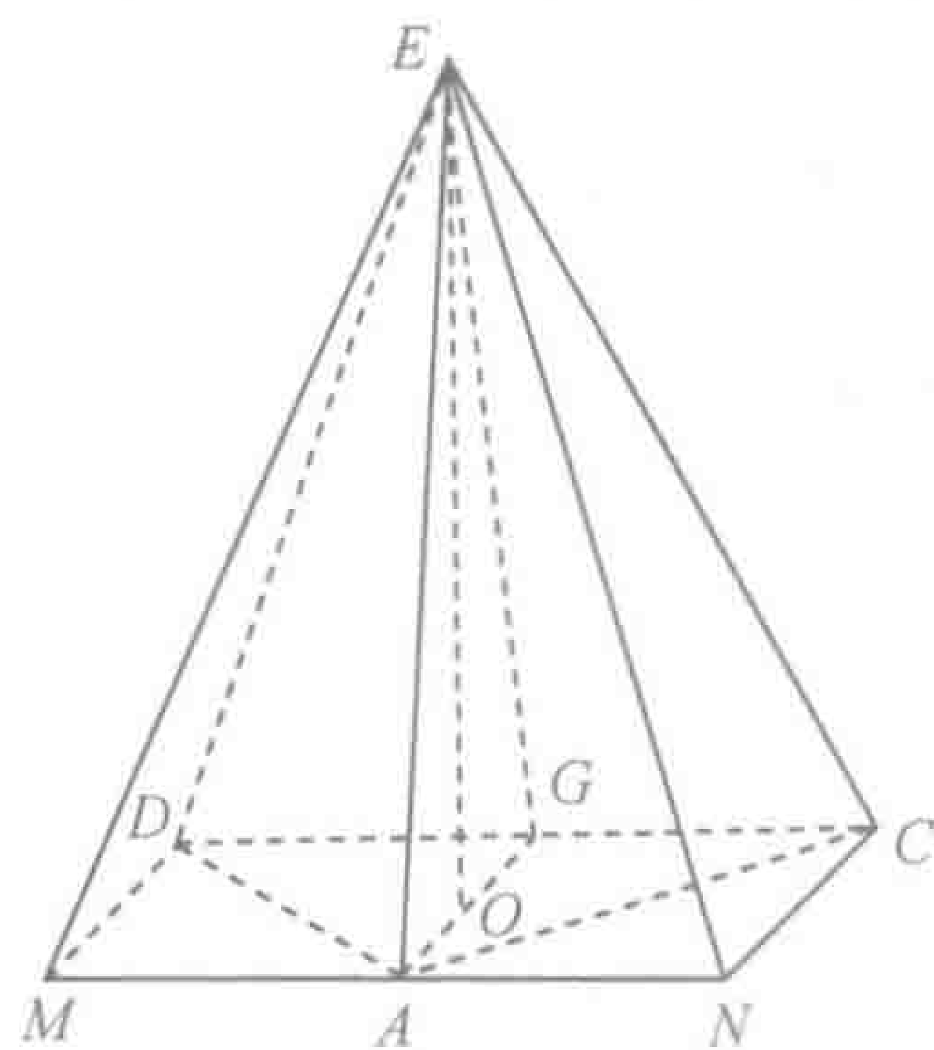


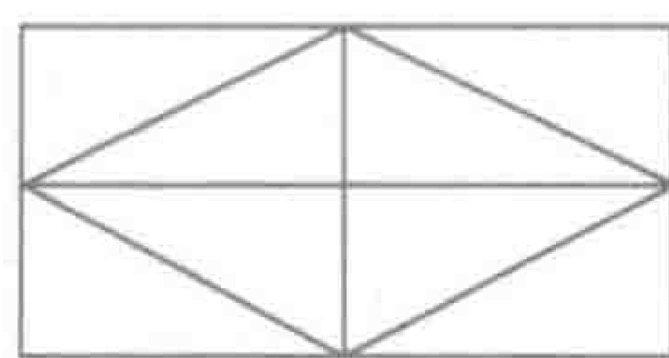
图 11-5-8 椭方锥分离大鳖臑

注文中的“随”，音义均通“椭”，此字戴震辑录大典本皆作“椭”。所谓椭方锥就是底面为长方形的方锥。根据《九章算术》的题目的具体情形，刘徽设计了一个底是广 2 尺、袤 6 尺、高 7 尺的椭方锥 $ECDMN$，如图 11-5-8 所示。以高 EO 所在的过 MN、CD 的中点 A、G 的平面 EAG 平分该椭方锥，成为两个半锥 $ECGAN$ 和 $EGDMA$，它们实际上是阳马，其体积都是椭方锥的一半，即 $V_{btz}=\frac{1}{3}AG\times DG\times EO$。再由两半锥的底面的对角线 AC、AD 与顶点 E 构成的平面 EAC、EAD 分解这两个半锥，得到四面体 $AGCE$、$AGDE$，它们就是所要求积的两大鳖臑。刘徽认为，它们的体积各是半锥即阳马的一半，即

$$V_{db}=\frac{1}{6}AG\times DG\times EO$$

仍取公式（5-2-7）的形式。

为什么呢？刘徽借助于截面积原理回答了这个问题。刘徽在“上连无成不方”之后还提出一个命题：一个长方形，不管是用对角线分割，还是用对边中点的连线分割，其面积都被平分，如图 11-5-9 所示。这显然是正确的，可视为一个定理。刘徽进而提出一个推论：若一个立体，每一层都被一平面所平分，则整个立体被该平面所平分。


图 11-5-9 旁角而割之

有了这些准备，再回头看大鳖臑，它们是由半锥 $ECGAN$ 和 $EGDMA$ 分别被平面 EAC、

EAD“角而割之”得到的。换言之，半锥 *ECGAN* 和 *EGDMA* 的体积分别被平面 *EAC*、*EAD* 所平分。因此，大鳖臑 *AGCE*、*AGDE* 的体积都是半锥 *ECGAN* 的一半，大鳖臑 *AGCE* 就是 *BHCF*，即可归结到公式（5-2-7）。

同时，自然又可推出，半锥分割出大鳖臑之后剩余的部分 *AMDE* 和 *ANCE* 仍是鳖臑，其体积公式仍为公式（5-2-7）。

刘徽证明羡除体积公式的意义远远超出了羡除本身。刘徽把鳖臑看成解决多面体体积的关键。刘徽在这里提出几种鳖臑的体积公式都归结到公式（5-2-7），接近于提出公式（5-2-7）是任一鳖臑的体积公式。同时，刘徽还创造了把鳖臑从体积为已知的方锥里分离出来的方法，为他的体积理论，增添了新的武器。羡除体积的解决，说明刘徽有能力解决任何多面体体积问题。

（三）王孝通对体积问题的贡献

《缉古算经》的第 2～14 题共 13 个题目，都是关于仓窖或观象台、堤坝等建筑工程，因此都是多面体或圆体的体积问题。大部分题目所求积的以及求积中要用到的多面体和圆体都是《九章算术》商功章已经讨论过的类型，唯有第 3 题中的堤（图 10-1-4）是《九章算术》所未讨论过的。其形状是：上底是长方形，平行于地面，下底是斜面，两头垂直于上底，且下底和两头都是等腰梯形，而两侧面是相等的直角梯形（即《九章算术》的邪田）。第 5 题的“河”与堤同形，只是上下宽狭与堤相反，两侧面为曲面。这种“堤”可以分解成一个平堤与一个羡除。

《缉古算经》提出了堤的体积公式：

> 求堤都积术曰：置西头高，倍之，加东头高，又并西头上、下广，半而乘之。又置东头高，倍之，加西头高，又并东头上、下广，半而乘之。并二位积，以正袤乘之，六而一，得堤积也。

这就是

$$V = \frac{1}{6}\left[(2h_1 + h_2)\frac{a + b_1}{2} + (2h_2 + h_1)\frac{a + b_2}{2}\right]l \qquad (11\text{-}5\text{-}2)$$

这是中国数学史上第一次提出这种“堤”的体积公式，并且是正确的，但它是如何得出的，却不得而知。大约是：将此堤转置 90°，立起来，将袤 l 作为高，将 $\frac{a+b_1}{2}$、$\frac{a+b_2}{2}$ 分别作为下、上底的广，h_1、h_2 分别作为下、上底的袤，则就成为刍童，利用刍童体积公式便得到上式。后来，元朝沙克什的《河防通议》使用了这一公式。①

三　刘徽的体积推导系统

（一）《九章算术》时代的体积推导系统

根据刘徽《九章算术注》的提示，在《数》、《算数书》、《九章算术》时代，人们主要

① 郭书春，河防通议·算法门．初探，自然科学史研究，1997，16（3）：223～232。

使用出入相补原理推导多面体的体积公式，主要有两种形式，一是以盈补虚，见于城、垣、堤、沟、堑、渠的体积公式的证明；二是棋验法，它只能用来推导可以分割或拼合成三品棋的方锥、方亭、阳马、鳖臑、羡除、刍童、刍甍等标准型多面体的体积公式，并不能证明一般的多面体的体积公式，从前者到后者，是一个归纳的过程，因而是不严格的。而且，在棋验法中，只使用长方体的体积公式，并不使用堑堵、阳马的体积公式，堑堵、阳马只是合并、分割的元件。对圆柱、圆锥、圆亭、球等圆体体积的解决，则主要使用比较它们与相应的多面体的底面积，由后者推导前者。显然，在《九章算术》的体积推导系统中，三品棋起着核心作用，所谓"说算者乃立棋三品，以效高深之积"。而方锥、方亭、鳖臑、刍童、刍甍等在其中处于同等的地位。《九章算术》时代的体积推导系统大体如图 11-5-10 所示。

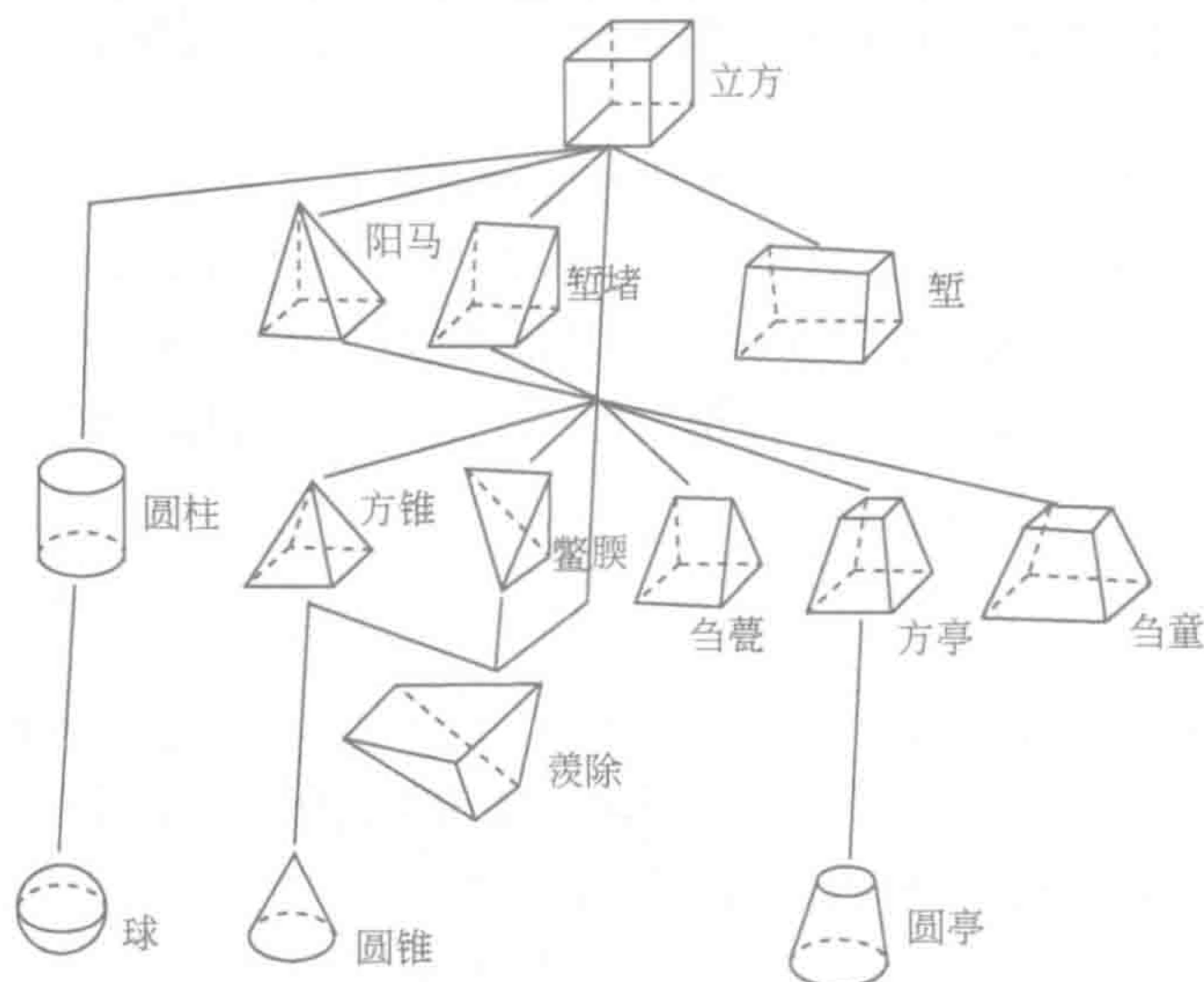


图 11-5-10　《九章算术》的体积推导系统

（二）刘徽的体积推导系统

在刘徽的体积理论中，首先值得注意的是，正如前面已经指出的，对长方体的体积公式没有证明，是当作定义使用的。

更重要的，极限思想和无穷小分割方法在刘徽的体积理论中起着关键的作用。这里主要有两个方面。一是刘徽原理的证明。刘徽在用极限思想和无穷小分割方法完成刘徽原理的证明之后明确指出，鳖臑在刘徽的多面体体积理论中起着核心作用，其他多面体都可以通过分割成有限个长方体、堑堵、阳马、鳖臑，求其体积之和求积。这与现代数学的多面体体积理论完全一致。刘徽解决了各种形状的鳖臑，接近于提出任何形状的四面体都可以用《九章算术》的鳖臑体积公式（5-2-7）求积。

二是截面积原理及其应用。刘徽已经完全掌握了截面积原理，不仅借此求出了特殊形状的鳖臑的体积，而且成为他由方柱体、方锥、方亭证明圆柱体、圆锥、圆亭的体积公式，并指出由牟合方盖推导球体积的正确途径的依据。

就是说，刘徽将其体积理论建立在极限思想和无穷小分割方法之上，与 19 世纪末 20 世纪初高斯、希尔伯特等现代数学大师的思想不谋而合。

第三，刘徽对所有立体体积公式的推导，都是使用演绎推理，因而是真正的数学证明。

总之，刘徽的体积理论从长方体的体积公式出发，利用极限思想和无穷小分割方法，以鳖臑和阳马的体积公式为核心，以演绎逻辑为主要方法，形成了一个完整的理论体系，如图 11-5-11 所示。使用极限思想和无穷小分割方法的刘徽原理和截面积原理是这个体系的关键。

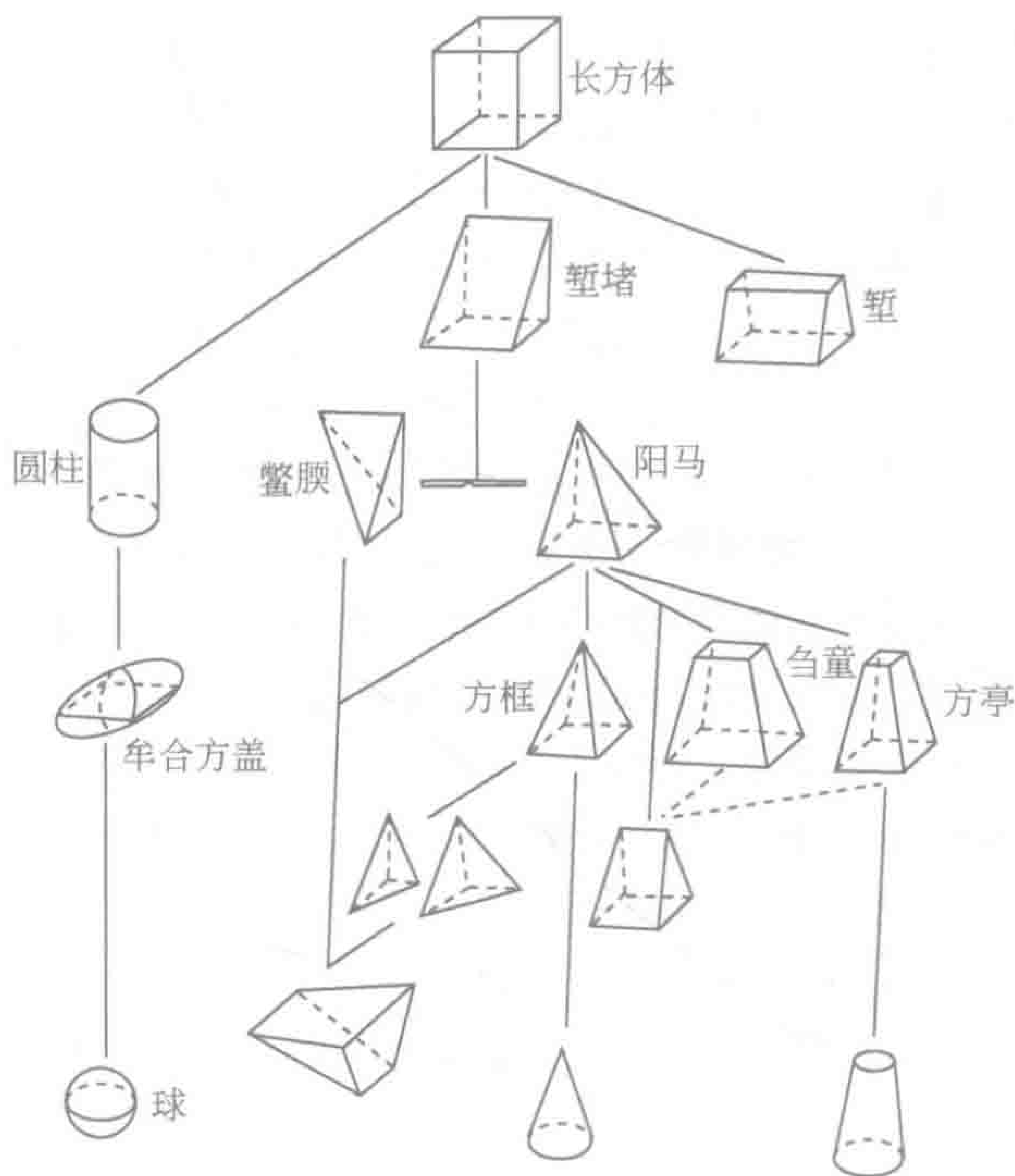


图 11-5-11　刘徽的体积推导系统

第六节　刘徽的极限思想在数学史上的地位

刘徽的无穷小分割和极限思想在中国和世界数学史上占有重要地位。

一　刘徽的无穷小分割思想与先秦墨家、名家、道家

刘徽的无穷小分割和极限思想不是无源之水，先秦墨家、名家、道家等诸子的著作中都或多或少地具有无穷小分割和极限思想。

古希腊学者亚里士多德（Aristotle，公元前384～322）第一次提出了“实无限”与“潜无限”的区别。他认为“潜无限”是指“分割的过程永远不会告终”，并且认为“只有潜能上的无限”，“不会有现实的无限”。中国古代没有“实无限”与“潜无限”这类名称，却在实际上存在着这种分野。名家认为对捶的分割“万世不竭”，实际上是一个潜无限小的命题，而墨家认为无限分割的最终会得到“不可靳”的“端”，道家认为会得到“不能分”的“无形”，实际上都是实无限小的命题。不过，不管是墨家、道家，还是名家，它们的命题都不是专门的数学命题，而是哲学命题，是为了说明它们的宇宙观和方法论。后来的贤哲都可以从这些光辉命题中得到启发，在不同的领域中做出贡献。即使在今天，数学家、物理学家、化学家等对这些命题，尤其是对墨、名两家的命题都有不同的理解。

刘徽在割圆术中说“割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”，其“不可割”与墨家的“不可靳”只有因时代迁延而造成的用语的差别，其含义则是完全相同的，而与名家明显不同。刘徽割圆术中的“不可割”的思想与墨家的“不可靳”是一脉相承的。

在刘徽原理的证明的最后，刘徽指出："至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉?"这种论述显然源于道家"至精无形"，"无形者，数之所不能分"的思想。

刘徽在割圆术中和刘徽原理证明中的无穷小分割的用语稍有不同，但是实际上两者是一致的。通过无限分割，前者是达到"以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣"的境地，后者是达到"微则无形。由是言之，安取余哉"的目的。道家认为无形不能分，"不能分"实际上就是"不可靳"，"不可割"也就是"无形"。前者要做到"不可割"，得到与圆周重合的圆内接无穷多边形，以便对其进行无穷小分割，完成圆面积公式的证明；后者要做到"微则无形"，不能再分，因此通过这个无限过程，阳马与鳖臑拼合成的堑堵没有剩余了，完成刘徽原理的证明。不同的用语是极限过程和无穷小分割方法应用的对象不同所造成的。总之，刘徽的无穷小分割思想受墨家与道家的影响较大，而与名家的观念不同。

从直观和实际操作而言，墨家、道家和刘徽的"不可靳"、"不能分"、"不可割"更容易为人们所接受。先秦和秦汉手工业者常常要将方形的物料加工成圆形器物，《庄子·天道》云"是以行年七十而老斲轮"，司马迁《史记·酷吏列传》将其概括为"破觚为圜"，他说：

> 汉兴，破觚而为圜，斲雕而为朴，网漏于吞舟之鱼，而吏治烝烝，不至于奸，黎民艾安。

用以比喻汉朝废止秦朝的严刑苛法。刘徽受手工业工人破觚为圜的启示，以正多边形逼近圆并认为能达到与圆合体的地步，是在情理之中的事。若按照名家"万世不竭"的观点，手工业工人永远做不出圆，刘徽不管怎么分割，如果永远可割、可分，则圆内接无穷多边形永远不能与圆重合，就谈不到对与圆合体的正无穷多边形进行无穷小分割；同样，对阳马与鳖臑拼合成的堑堵无穷分割如果永远都是有形的，永远有剩余，就无法证明刘徽原理。

二 刘徽的极限和无穷小分割思想与古希腊的比较

一些科普作品常把古希腊的穷竭法看成借助于无穷小分割和极限思想证明数学命题的首次尝试。这是一个误解。诚然，古希腊数学大师阿基米德（Archimedes，公元前 287 ~ 前 212）用穷竭法结合力学原理解决了许多后来人们用积分学才能解决的复杂的面积和体积的求积问题，是世界数学史上光辉的一页；而且欧洲文艺复兴之后，关于穷竭法思想的发掘、争论、改进和发展，促进了微积分学方法的诞生和极限思想的发展。然而，包括阿基米德在内的所有古希腊数学家在数学证明中都没有使用无穷小分割和极限思想。毕达哥拉斯（Pythagoras）学派（公元前 6 世纪），原子论者德谟克利特（约公元前 460 ~ 前 357）都有无穷小思想。公元前 5 世纪安提丰（Antiphon）在解决化圆为方的问题时，最先提出用边数不断加多的圆内接正多边形逼近圆面积，但是，他并没有把圆看成一个圆内接正多边形的序列的极限。后来，由于希腊数学家无法解释芝诺（Zeno，约公元前 496 ~ 前 430）悖论，便不得不把无穷排斥在推理之外。比如，圆内接正多边形可以逼近圆，从理论上说，要多么逼近就多么逼近，可是永远不能成为圆，总还有一个剩余的量。正如微积分学史家波耶（Boyer）所指出的："希腊数学家从未像我们取极限那样把上面讲过的步骤进行到无穷。"[①]

---

① ［美］卡尔·B. 波耶，微积分概念史，上海人民出版社，1977 年。本编凡引波耶的论述，均据此。

他们根据阿基米德预备定理——阿基米德把它归功于欧多克斯（Eudxus，约公元前408～前355）——已知两个不为0的量，从较大的量减去大于其一半的量，再从余下的量中减去大于其一半的量，一直继续下去，总可以使余下的量小于已知的较小的量——在进行若干次分割之后，不是用极限思想，而是用双重归谬法，证明某一要求积的面积（或体积）既不能大于也不能小于某一数值，以解决求积问题。因此，不管是欧多克斯，还是阿基米德，都在极限思想的大门前裹足不前。可以说，17世纪给阿基米德的方法以“穷竭法”的名称，是名不符实的。可见，就无穷小分割和极限思想之清晰、明确及将其用于数学证明而言，刘徽虽是后来者，却远居于古希腊的数学之上，比古希腊数学家更接近微积分思想。

在欧洲，最先采用与刘徽类似的方法证明圆面积公式的是尼古拉斯（Nicholas of Cusa，1401～1464）。据波耶说，尼古拉斯把圆定义为边数无限而边心距等于圆半径的正多边形，然后，将圆分割成无限多个小三角形，计算出边心距与周长的乘积，则其积之一半，就是圆面积。其分割、求和方式与刘徽相近，然而用定义回避了刘徽的极限过程。这个方法后来被斯蒂费尔（Stifel，1487～1567）、斯台汶（Stevin，1548？～1620?）、开普勒（Kepler，1571～1630）等所接受，从而代替了古希腊的穷竭法，朝极限概念的形成迈进了一步。

第十二章　刘徽的逻辑思想和数学理论体系

关于中国传统数学的逻辑问题，学术界争论较大。国内外许多学者，包括对中国古代数学成就十分推崇的三上义夫、尤什凯维奇、李约瑟等在内都认为中国古代的数学成就只是经验的总结，没有推理，尤其是没有演绎推理，当然更没有证明。20 世纪 60 年代初，钱宝琮、杜石然发表了《试论中国古代数学中的逻辑思想》[①]，指出："不论从概念、定义直到推理、证明等各方面，中国古代数学是有着自己完整的逻辑系统的。"然而没有具体分析其中的定义、推理和证明。80 年代初，郭书春、巫寿康[②]分别研究了刘徽《九章算术注》中的逻辑问题，得出刘徽《九章算术注》主要使用了演绎逻辑的结论。后来，许多学者在不同程度上接受了这个观点。法国马若安（Martzloff）指出："刘徽和其他数学文献包含着非欧几里得式的，然而同样被构造出来，并且是非常精确的推理。"[③]

第一节　刘徽的辞与理、类、故

刘徽注《九章算术》的宗旨是"析理以辞，解体用图"。其图已佚。"辞"是言辞、文字，"理"是古代哲学术语，狭义地说，指事物的规律、准则和条理。广义地说，还应包括这些规律、法则的逻辑依据，即"故"，以及由"故"而来的推演过程，乃至规律、法则所得以施行的依据，即"类"。刘徽所析之理指后者，实际上包括"理"、"类"、"故"三者。

先秦墨家对辞与理、类、故的关系做了精辟论述："夫辞，以故生，以理长，以类行者也。三物必具，然后足以生。"从而在中国首次建立了思维逻辑的体系。荀派儒学继承发展了墨家的理、类、故的逻辑思想，把有故、成理、推类看成正确立辞和辩论的基础。刘徽继承发展了先秦的逻辑成果，在《九章算术注》中大量使用了理、类、故。

一　理

理是成故的实质。除了"析理以辞"中的"理"之外，刘徽其他地方所使用的"理"也主要是指法则、规律，有的指数学的法则、公式。比如刘徽在方程章正负术注谈到方程消元时说"或令相减，或令相并，理无同异而一也"，在麻麦问注为方程新术写的前言中批评某些人"拙于精理，徒按本术者"，指出灵活运用数学方法，"夫数，犹刃也，易简用之，则动中庖丁之理"，在勾股章注说：圆三径一，方五斜七，"不正得尽理"。

刘徽有的"理"字指正确的推论法则和思维规律，如在少广章开立圆术注谈到自己无

---

① 钱宝琮，杜石然，试论中国古代数学中的逻辑思想，光明日报，1961 年 5 月 29 日，第 2 版。收入杜石然，数学·历史·社会，辽宁教育出版社，2003 年，第 354～360 页。

② 巫寿康，刘徽《九章算术注》逻辑初探，自然科学史研究，1987，6（1）：20～27。

③ J. -C. Martzloff（马若安），*Histoire des mathématiques chinoise*（中算史导论），Masson，Paris，Milan，Barcelone，Mexico，1988.

法求出牟合方盖的体积而寄希望于后学时说“欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者”，在关于刘徽原理的证明中说：“按：余数具而可知者有一、二分之别，即一、二之为率定矣。其于理也岂虚矣。”

二　类

刘徽使用的“类”比“理”多，成为他推理和判断的依据。他引用先哲的名言“方以类聚，物以群分”，对数学概念和数学方法进行分类。

刘徽对许多数学概念进行分类，比如对数，他提出“数同类者无远，数异类者无近”的思想。刘徽将数分成整数和分数。“分言之”，就是按照分数运算；“完言之”，就是按照整数运算。分数又可按照不同的分数单位分类。《九章算术》引入负数，数有不同的符号，刘徽称为异名。正数和负数就是不同类的数，所谓“其异名者，非其类也”。不同形状的图形，也可以看成不同的类，全等的图形是同类，不全等的图形就是异类，所以刘徽在应用出入相补原理时说“令出入相补，各从其类”，“朱青各以其类”，“令颠倒相补，各以类合”。刘徽将立体图形分成圆体和多面体，将后者称为“锥亭之类”。

刘徽更多地是对数学方法，特别是对《九章算术》方法的重新分类。例如，今有术、经率术、衰分术、返衰术、均输术等方法在《九章算术》是并列的，刘徽认为返衰术和均输术从属于衰分术，经率术和衰分术及许多别的方法从属于今有术，因此，今有术是“都术”。

对《九章算术》抽象程度不高的卷三后半卷、卷六后半卷、卷九的解勾股形的问题，刘徽都着力找出某些问题之间的共同性和互相联系。例如，均输章第20~26问分别是凫雁、长安至齐、成瓦、矫矢、假田、程耕、五渠共池等不同对象的问题，刘徽指出它们的术文的共同性：成瓦之意“亦与凫雁同术”，矫矢问“同工共作，犹凫雁共至之类”，假田问“亦如凫雁术也”、程耕问“犹凫雁术也”，五渠共池“犹矫矢之术也”，最后刘徽总结道：“自凫雁至此，其为同齐有二术焉，可随率宜也。”勾股章引葭赴岸、系索、倚木于垣、勾股锯圆材求、开门去阃等问题都有不同的应用对象，其术文也都是计算细草，刘徽将它们都归结到已知勾与股弦差求股、弦的问题。刘徽说：“引而索尽、开门去阃者，勾及股弦差同一术”，倚木于垣问“为术之意与系索问同也”。刘徽认为竹高折地问是已知勾与股弦并求股、弦的问题，因此，“此术与系索之类更相反覆也”，指出了两者的对称性。等等。

刘徽通过寻求各种数学概念、数学方法之间的内在联系，发现数学知识就像一株枝叶繁茂的大树。他说：

> 事类相推，各有攸归。故枝条虽分而同本干知，发其一端而已。

事实上，数学在刘徽的头脑中形成了各个分支互相联系发其一端而又“约而能周，通而不黩”的完整体系。这在下面还要讲。

三　故

“故”是形成一类事物的根据，是立论的根据和理由。墨家和荀派儒学在逻辑论证中都重视“明故”。刘徽《九章算术注》中大量使用“故”字，据初步统计，达219个。其中绝

大多数是训“是以”、“理由”、“原因”等带有逻辑意义的，达208个，占96.35%；其中直接用于数学定义、推理的有192个，达87.67%。此外有训“旧”的3个，其他意义的8个。① 带有逻辑意义的“故”字比重之大，足可与《墨子》媲美，而远远超过其他典籍。②

刘徽使用的“故”字，有一部分用于数学概念的定义，即在对某概念给出定义后说“故曰某某”，如“故曰重差”，“故曰定法”，“故以名（鳖臑）云”，“故曰方程”，等等。

刘徽最大量的“故”字用于推理，这就是刘徽说的“析理以辞”，即用“辞”将类、故、理连接起来，这就是“推”。刘徽多次用到“推”，如“事类相推”，“以术推之”，“以小推大”，“法实相推”，“法实数相推求之术”，等等。这里有几种逻辑过程：一是类比，如举一反三。一是以类求故，由故成理，即通常所说的归纳，这是从个别推一般。一是明故以求理，由理知类，即通常说的演绎。后两种是相反的逻辑过程。

第二节　定　　义

刘徽继承了墨家给数学概念做出定义的思想，改变了《九章算术》对概念约定俗成的做法，给许多数学概念以明确的定义。这在中国数学史上也是一个创举。

刘徽的数学定义多数是发生性定义，即定义本身说明了所定义的对象发生的由来。比如：“凡数相与者谓之率”，“等除法实，相与率也”，“今两算得失相反，要令正负以名之”。刘徽关于面积、体积的发生性定义特别多。如“凡广从相乘谓之幂”，“邪解立方得两堑堵”，“正斩方亭两边，合之即刍甍之形也”，“阳马之形，方锥一隅也”，等等。刘徽的发生性定义最妙的是关于“方程”的定义，它描述了建立方程的方法，同时也就掌握了方程的定义。刘徽正是因为有明确的方程定义，才发现“五家共井”问是一个不定方程问题。

刘徽的定义有几个共同的特点。首先，被定义的概念与定义的概念的外延相同。如正负数与“两算得失相反”，幂与“广从相乘”，率与“数之相与”，方程与“各列有数，总言其实”、“每行为率”、“皆如物数程之”、“并列为行”，等等，其外延都相同，既没有犯外延过大的错误，也没有犯外延过小的错误。换言之，这些定义都是相称的。

其次，刘徽的定义中，定义项中没有包含被定义项，定义项中的概念都是已知的，没有犯循环定义的错误。这对于一部不是按照自己的体系，而是给已有的著作作注的著作来说，在循环定义泛滥的古代，尤为难能可贵。

再次，刘徽的定义都没有使用否定的表述，没有使用比喻或者含混不清的概念，并且简明清晰。

还有，刘徽的定义基本上符合现代数学和逻辑学关于定义的要求。

还应指出，刘徽的定义一经做出，则一般说来，便在定义的意义上使用这个概念，进行推理、证明。也就是说，他在“析理”中，基本上遵循着同一律的要求。

应当指出，刘徽《九章算术注》在“立幂”概念的使用上有混乱之处。“立幂”在《九章算术注》中凡四见：少广章开立圆术注云“开平幂者，方百之面十；开立幂者，方千

① 以上的统计是在郭书春《古代世界数学泰斗刘徽》基础上的修正。

② 据侯外庐统计，“故”字在《论语》中出现12次，训“旧”者5个，接近42%。《墨子》前期著作29篇，有“故”字340个，训“是以”、“原因”者达335个，占98.53%。

之面十"，立幂与平幂对应，指立体体积。商功章城、垣、堤、沟、堑、渠术注云，中平之广，"以高若深乘之，得一头之立幂"；穿地求广术注云"深袤相乘者，为深袤立幂。以深袤立幂除积，即坑广"立幂都指直立的面积。这大约是"采其所见"，加工不够所致。

第三节　类比和归纳

一　类　比

举一反三，触类而长，是中国传统的类比方法。刘徽《九章算术注》大量使用这些类比方法。他通过对《九章算术》术文和题目的深入研究，发现大部分方法和题目，尽管有不同的应用对象，但是，它们的数量关系中都具有反映其本质属性的率关系，便提出：

凡九数以为篇名，可以广施诸率，所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。

就是说，通过举一反三的方法，可以将率的应用拓展到《九章算术》的九章，大部分术文和题目的解法。特别地，《九章算术》的许多术文和题目的解法，如果能找出其中各种数量关系的率关系，施以齐同原理，都可以归结为今有术：

诚能分诡数之纷杂，通彼此之否塞，因物成率，审辩名分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也。

刘徽通过举一反三、触类而长等类比方法，将今有术上升为统领其他术文的"都术"，并大大扩充了率的应用范围，使其借助于齐同原理，成为数学运算的纲纪。

刘徽在为方程新术写的前言中说：

其拙于精理徒按本术者，或用算而布毡，方好烦而喜误，曾不知其非，反欲以多为贵。故其算也，莫不暗于设通而专于一端。至于此类，苟务其成，然或失之，不可谓要约。更有异术者，庖丁解牛，游刃理间，故能历久其刃如新。夫数，犹刃也，易简用之则动中庖丁之理。故能和神爱刃，速而寡尤。凡九章为大事，按法皆不尽一百算也。虽布算不多，然足以算多。世人多以方程为难，或尽布算之象在缀正负而已，未暇以论其设动无方。斯胶柱调瑟之类。聊复恢演，为作新术，著之于此，将亦启导疑意。网罗道精，岂传之空言？记其施用之例，著策之数，每举一隅焉。

刘徽以庖丁解牛类比数学家解决数学问题，以庖丁解牛的刀刃类比数学方法，认为深刻地理解数学方法的原理，犹如庖丁了解牛的腠理，灵活运用数学方法犹如庖丁的刀刃在牛的腠理间剔割。因此，对数学方法易简用之，就会像庖丁解牛那样，既迅速又不出错误。接着，刘徽又以鼓瑟者将弦柱胶住，无法调节音律之高低类比数学中不懂数理，不知变通，生搬硬套原来方法的做法。最后，刘徽指出，他创造方程新术，只是说明这些道理的一个例子。他认为，著书立说，讨论数学方法及其应用，只需"举其一隅"，不必面面俱到。

二　归纳推理

前已讲过，《九章算术》实际上以归纳论证为主。刘徽《九章算术注》继承了这一传

统，大量使用归纳推理以拓展数学知识。均输章络丝术注在论述了通过齐同原理，齐其青丝、络丝之率，同其练率，使“三率悉通”，然后说：

凡率错互不通者，皆积齐同用之。放此，虽四五行不异也。

就是说，三率悉通的方法，可以推广到任意多组率关系的情形。

在方程章牛羊直金问术注中，刘徽创造了互乘相消法。此问是一个二行方程，刘徽认为，互乘相消法可以推广到任意多行的方程：

以小推大，虽四五行不异也。

刘徽常常从个别的例子，抓住其本质，推出一般性原理和普遍方法。

约以聚之，乘以散之，齐同以通之这三种等量变换本来是在分数理论中提出来的，刘徽将其拓展到率的理论中，成为率的三种等量变换，实际上也应用了归纳推理。前已讲过，刘徽将分数的分子和分母看成一组率关系。既然分数有这三种等量变换，那么率也具有这三种等量变换，完全符合归纳论证的公式：

论题　(*S* 率) 具有(*P* 三种等量变换)，
论据　(*A* 分子和分母) 具有(*P* 三种等量变换)，
　　　而(*A* 分子和分母) 是(*S* 率)。
故　　(*S* 率) 具有(*P* 三种等量变换)。

率具有了这三种等量变换，如虎添翼，在数学运算中发挥了关键作用，成为运算的纲纪。

当然，类比和归纳，由于其结论超出了前提的范围，因此其结论是或然性的，不具备必然性。就是说，用类比和归纳得出的结论，可能正确，也可能不正确。刘徽所使用的类比和归纳，由于其论据与论题有着必然的联系，因而结论都是真实的。

刘徽对归纳推理不能得出必然性的结论有清醒的认识。《算数书》和《九章算术》所使用的棋验法是由一种非常特殊的多面体推出一般多面体的体积公式，是归纳论证。刘徽认识到，这种论证方式不具备必然性。《九章算术》是用三个阳马棋或六个鳖腝棋合成一个正方棋，来推证阳马和鳖腝的体积公式的。而对其长、宽、高不等的情形，刘徽指出：

鳖腝殊形，阳马异体。然阳马异体，则不可纯合。不纯合，则难为之矣。

换言之，刘徽明确认识到，用棋验法是无法真正证明阳马和鳖腝的体积公式的。

第四节　刘徽的演绎推理

说中国传统数学没有理论，主要是说没有演绎推理。因为，类比和归纳固然在数学知识的创造、发现中占有重要地位，但是，众所周知，要证明数学命题为真，必须靠演绎推理。说中国传统数学没有演绎推理的学者，或者是没有读刘徽的《九章算术注》，或者是没有读懂。因为只要读懂了刘徽注，就会发现刘徽在数学命题的证明中主要使用了演绎推理。有人认为中国传统数学的特点是直观、非逻辑性。这是对《九章算术》的高深数学知识及刘徽的演绎逻辑视而不见，以管窥豹，以一些简单的靠直观可以得到的那些数学知识代替整个中国古代数学。事实上，认真考察刘徽注就会发现，其中有三段论、关系推理、假言推理、选言推理、联言推理、二难推理等演绎逻辑的最重要的推理形式，还有数学归纳法的雏形。

一　三段论和关系推理

（一）三段论

三段论是演绎推理的性质判断推理中极其重要的一种，它由三个性质判断组成，其中两个是前提，第三个是结论。许多学者认为中国古代数学根本没有三段论。实际上，三段论不是某些民族或学派的专利，刘徽注的许多推理是典型的三段论。试举几例：

例 12-4-1　盈不足术刘徽注云：

注云若两设有分者，齐其子，同其母。此问两设俱见零分，故齐其子，同其母。

其推理形式是：若两设有分者（M），须齐其子，同其母（P）。此问（S）两设俱有分（M），故此问（S）须齐其子，同其母（P）。其中含有三个概念：两设俱有分（中项 M），齐其子，同其母（大项 P），此问（小项 S）。就是说：

大前提	$M \longrightarrow P$	（A）
小前提	$S \longrightarrow M$	（A）
结　论	$S \longrightarrow P$	（A）

中项在大前提中周延，结论中的概念的外延与它们在前提中的外延相同。还有，大前提是全称肯定判断，小前提是单称肯定判断，结论是单称肯定判断。可见，这个推理完全符合三段论的规则，是其第一格的 AAA 式。

例 12-4-2　刘徽在证明方程术的直除法即一行与另一行对减不改变方程的解时云：

举率以相减，不害余数之课也。

其推理形式可以归结为：

大前提	举率以相减（M），不害余数之课（P），
小前提	直除法（S）是举率以相减（M），
结　论	直除法（S）不害余数之课（P）。

大前提是全称否定判断（E），小前提是单称肯定判断（A），而结论是单称否定判断（E）。这是三段论第一格的 EAE 式。

（二）关系推理

关系推理实际上是三段论的一种。数学是关于客观世界的空间形式和数量关系的科学，关系推理在刘徽的推理中所占的比重自然特别大。而在关系推理所使用的关系判断中，又以等量关系为最多。试举几例。

例 12-4-3　方田章圆田术刘徽注对圆田又术"周、径相乘，四而一"的证明是：

周、径相乘各当以半，而今周、径两全，故两母相乘为四，以报除之。

其推理形式就是

已知：　$S = \frac{1}{2}Lr$　（等量关系判断）

及　$r = \frac{1}{2}d$　（等量关系判断）

故　$$S = \frac{1}{2}Lr = \frac{1}{2}L \times \frac{1}{2}d = \frac{1}{4}Ld$$　（等量关系判断）

例 12-4-4　刘徽在证明圆田又术“径自相乘，三之，四而一”不准确时说：

若令六觚之一面乘半径，其幂即外方四分之一也。因而三之，即亦居外方四分之三也，是为圆里十二觚之幂耳。取以为圆，失之于微少。

设十二觚即圆内接正 12 边形的面积为 S_1，其推理形式是：

已知：　$$\frac{3}{4}d^2 = S_1$$　（等量关系判断）

及　$$S_1 < S$$　（不等量关系判断）

故　$$\frac{3}{4}d^2 < S$$　（不等量关系判断）

例 12-4-5　刘徽在推断圆囷（圆柱体）与所容之丸（内切球）的体积之比不是 4∶π 时说：

按：合盖者，方率也，丸居其中，即圆率也。推此言之，谓夫圆囷为方率，岂不阙哉？

其推理形式是：

已知：　$$V_{hg} : V_w = 4 : \pi$$　（等量关系判断）

及　$$V_{yq} : V_w \neq V_{hg} : V_w$$　（不等量关系判断）

故　$$V_{yq} : V_w \neq 4 : \pi$$　（不等量关系判断）

不言而喻，这些推理中所使用的 $<$ 或 $>$ 等关系只有传递性，没有对称性；而 $=$，$\neq$ 则既有传递性，又有对称性。

以上的例子都是纯粹关系推理。刘徽有的推理可以归结为混合关系推理。这种推理的前提中不仅有关系判断，而且有性质判断。

例 12-4-6　商功章圆囷求周术刘徽注云：

置此积，以十二乘之，令高而一，即复本周自乘之数。凡物自乘，开方除之，复其本数。故开方除之，即得也。

其推理形式是：

已知：　开方除自乘之数，复其本数　（性质判断）

及　$$\sqrt{\frac{12V}{h}} = \sqrt{L^2}$$　（等量关系判断）

故　$$\sqrt{\frac{12V}{h}} = L$$　（等量关系判断）

其形式很像三段论，故又称为混合关系三段论。

二　假言推理、选言推理、联言推理和二难推理

（一）假言推理

假言推理是数学推理中常用的一种形式，包括充分条件假言推理和必要条件假言推理。充分条件假言推理的推理形式是：

若 p，则 q。

今 p，

故 q。

例 12-4-7 商功章羡除术刘徽注说：

上连无成不方，故方锥与阳马同实。

这个推理的文字很简括，其完备形式是：

若两立体每一层都是相等的方形（p），则其体积相等(q)。

今方锥与阳马每一层都是相等的方形(p)，

故方锥与阳马体积相等(q)。

充分条件假言推理中，若 p，则 q。若非 p，则 q 真假不定。刘徽对此有深刻的认识。例如：

例 12-4-8 刘徽在记述用棋验法推证阳马、鳖腝体积公式时指出，将一立方棋分割为三个阳马，或六个鳖腝。“观其割分，则体势互通，盖易了也”。然而在长、宽、高不等的情况下，“鳖腝殊形，阳马异体。然阳马异体，则不可纯合，不纯合，则难为之矣”。其推理形式是：

若诸立体体势互通（p），则其体积相等（q）。

今诸立体体势不互通（非 p），

故难为之矣（q 真假不定）。

这是刘徽认识到棋验法不是真正的数学证明的逻辑基础。

刘徽在有的地方还使用了假言联锁推理。例如：

例 12-4-9 刘徽在完成了阳马和鳖腝的体积公式的证明之后说：

不有鳖腝（p），无以审阳马之数（q）。不有阳马（q），无以知锥亭之类（r）。功实之主也（s）。

其结论是：

鳖腝（p），功实之主也（s）。

（二）选言推理

选言推理有两个前提。第一个前提是含有两个选言支的选言判断，第二个前提是某一选言支的否定，那么其结论是另一选言支的肯定。其推理形式是：

或 p，或 q。

今非 q，

故 p。

刘徽在许多地方使用了选言推理。例如：

例 12-4-10 在四则运算中，根据需要，可以先乘后除，也可以先除后乘。刘徽在商功章负土术注中指出：“乘除之或先后，意各有所在而同归耳。”在卷二今有术注中，刘徽主张先乘后除，因为“先除后乘，或有余分，故术反之”。这是一个选言推理，其形式为：

或先乘后除（p），或先除后乘(q)。

今非先除后乘(q)，

故先乘后除(p)。

（三）联言推理

联言推理的前提是一个联言判断，其结论是一个联言支。刘徽在羡除术注中用截面积原理推导椭方锥的体积时说："阳马之棋两邪，棋底方。当其方也，不问旁角而割之，相半可知也。……角而割之者相半之势。"这是一个分解式联言推理，其推理形式是：

前提：对方锥平行于底的截面，用一平面切割其对边的中点，则将其体积平分（p），用一平面切割其对角，也将其体积平分（q）。

结论：用一平面切割其对角，将其体积平分（q）。

由此证明了将半个椭方锥角而割之得到的大鳖臑，其体积是椭方锥的一半，亦即与《九章算术》的鳖臑体积公式取同样的形式。

（四）二难推理

二难推理是将假言推理与选言推理结合起来的一种推理，又称为假言选言推理。其大前提是两个假言判断，小前提是选言判断。刘徽证明圆田又术（5-1-8）不准确时说：

六觚之周，其于圆径，三与一也。故六觚之周自相乘为幂，若圆径自乘者九方，九方凡为十二觚者十有二，故曰十二而一，即十二觚之幂也。今此令周自乘，非但若为圆径自乘者九方而已。然则十二而一，所得又非十二觚之类也。若欲以为圆幂，失之于多矣。

它有两个假言前提，一个是：若以圆内接正六边形的周长作为圆周长自乘，其十二分之一，是圆内接正十二边形的面积（p），小于圆面积（r）；另一个是：若令圆周自乘，其十二分之一（q），则大于圆面积（s）。还有一个选言前提：或者以正六边形周长自乘，十二而一，或者以圆周长自乘，十二而一（或 p 或 q）。结论是：或失之于少，或失之于多（或 r 或 s），都证明了《九章算术》的公式（5-1-8）不准确。

三　数学归纳法的雏形

数学归纳法是演绎推理的一种。刘徽继承的《九章算术》的开方术，他创造的割圆术和用无穷小分割方法证明刘徽原理的方法等，都是递推方法。在后二者中更是无限递推。无限递推是数学归纳法的核心。仅以刘徽原理的证明中的递推方法说明数学归纳法的雏形。

刘徽首先通过第一次分割证明了在整个堑堵的$\frac{3}{4}$中阳马与鳖臑的体积之比为 2∶1，而在其$\frac{1}{4}$中尚未知，这相当于在 $n=1$ 时候，刘徽原理在堑堵的$\frac{3}{4}$中成立。刘徽认为第一次分割可以无限递推，"置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也"。然后，刘徽说：

按余数具而可知者有一、二分之别，即一、二之为率定矣。其于理也岂虚矣。若为数而穷之，置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也。半之弥少，其余弥细。至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉？数而求穷之者，谓以情推，不用筹算。

这相当于设 $n=k$ 时，刘徽原理在堑堵的$\frac{1}{4^{k-1}}\times\frac{3}{4}$中成立，则刘徽原理在堑堵的$\frac{1}{4^{k}}\times\frac{3}{4}$中成

立。刘徽当然无法严格地表达出数学归纳法，但是他明确表示了无限递推的思想，他的“情推”具备了数学归纳法的基本要素。

总之，刘徽在论证《九章算术》和他自己提出的公式、解法、原理时，主要使用了演绎推理，并且，现代逻辑学教科书中的演绎推理的几种最主要的形式，刘徽都使用了。这不仅在数学著作中是空前的，与同代或其前的思想家的著作比较起来，也毫不逊色，而在严谨和抽象程度上，却远居于这些著作之上。

第五节　数学证明

一般说来，推理形式的正确只能保证其前提和结论之间的或然的或者必然的联系，因此，推理形式的正确不能保证其前提正确，也就不能保证其结论是正确的。只有当前提是正确的时候，运用正确的推理形式，才能获得正确的结论，这就是论证。论证是由推理组成的，推理是为论证服务的。像推理一样，只有演绎论证才能得到必然性的正确结论。由于数学具有严谨、精确、抽象的特点，因此论证数学公式、定理、解法的正确性时，只能采用演绎推理，并且前提应该是正确的，这种过程通常称为数学证明。前面所举的例子，由于其前提都是正确的，并且都是演绎推理，因而都是数学证明。特别应该指出，刘徽数学证明的依据都是已知其正确性的公理或已经证明过的命题。

数学证明根据其思路的方向的不同，或者从予到求，或者从求到予，通常分为分析法和综合法两种。刘徽的数学证明以综合法居多，而对难度较大的命题，则往往采取综合法和分析法相结合的方法。

一　综　合　法

综合法采取从予到求，即根据已知条件，援引公理及已经证明过的公式、解法，通过一系列推理，最终引导到论题。在对《九章算术》圆面积公式（5-1-5）的证明中，他首先证明了 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，其次证明了 $\lim_{n\to\infty}[S_n + 2(S_{n+1} - S_n)] = S$，最后，将与圆周合体的正无穷多边形进行无穷小分割求其和，从而完成了证明。这是典型的综合法证明。

我们再以刘徽对已知勾股差与弦求勾、股的公式（9-1-9）的证明为例。刘徽说：

> 按图为位，弦幂适满万寸。倍之，减勾股差幂，开方除之。其所得即高广并数。以差减并而半之，即户广；加相多之数，即户高也。

其中，有的推理，刘徽行文时省去了，将其补足便是

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$2c^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$2c^2 - (b-a)^2 = 2a^2 + 2b^2 - (b-a)^2 = (a+b)^2$$

故

$$\sqrt{2c^2 - (b-a)^2} = a + b$$

而

$$a = \frac{1}{2}[(a+b) - (b-a)], b = \frac{1}{2}[(a+b) + (b-a)]$$

故

$$a = \frac{1}{2}[\sqrt{2c^2 - (b-a)^2} - (b-a)]$$

$$b=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2c^2-(b-a)^2}+(b-a)\right]$$

显然，这是一个由已知的勾股定理及题设，逐步运用关系推理，以证明公式（9-1-9）的综合法。其中的“弦幂适满万寸”是不必要的，还保留了归纳推理的某些痕迹。

二　分析法与综合法相结合

分析法是一个从求到予，从论题回溯论据的过程，即分析为了得到所需的结论，必须先证明什么，这样一步一步地引导到已知的条件或已经证明过的命题。

对非常复杂的证明，刘徽往往采取综合法和分析法相结合的方式。例如，关于《九章算术》的鳖臑与阳马体积公式（5-2-6），（5-2-7）的证明，刘徽提出了刘徽原理。他认为，为了证明这两个公式，只要证明刘徽原理（11-2-1）就够了。这是从论题回溯论据的分析法。为了证明刘徽原理，刘徽首先对由阳马和鳖臑合成的堑堵进行分割，证明在堑堵的$\frac{3}{4}$中，刘徽原理所指出的阳马与鳖臑的体积之比为2∶1成立。这是综合法。接着，刘徽认为，如果能证明在堑堵剩余的$\frac{1}{4}$中可以知道其体积的部分中阳马与鳖臑的体积之比仍为2∶1，则就在整个堑堵中证明了刘徽原理。这又是分析法。随后，刘徽用无穷小分割方法和极限思想证明了这一点。这又是综合法。总之，整个证明过程可以表示为：

$$\text{阳马与鳖臑体积公式}\xleftarrow{\text{分析法}}\text{刘徽原理}\begin{cases}\xrightarrow{\text{综合法}}\dfrac{3}{4}\text{中成立}\\[2ex]\xrightarrow{\text{分析法}}\dfrac{1}{4}\text{中成立}\xrightarrow{\text{综合法}}\wedge\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4^n}=0\end{cases}$$

可见这个证明是以从求到予的分析法为主，穿插以从予到求的综合法。这种分析法与综合法相结合的证明方式对难度较大的复杂证明，常常可以起到画龙点睛的作用，使整个证明思路清晰，文字不冗长，不枯燥，又使读者容易抓住证明过程的关键所在。

三　反驳及刘徽的失误

（一）刘徽的反驳

刘徽证明《九章算术》的某些公式为非的方法是反驳。刘徽的许多反驳在上面实际上已经讲过了。反驳是证明的一种。反驳主要运用矛盾律。刘徽的绝大多数反驳是成功的，是符合逻辑规律的。例如，对《九章算术》弧田术的反驳，弧田术是一个全称判断。刘徽举出半圆这种弧田，证明由弧田术算出的半圆面积小于半圆。这是上述判断的一个矛盾判断，由后者为真，证明了前者为假，符合矛盾律。

刘徽对《九章算术》开立圆术的反驳也应用了矛盾律。刘徽设计了牟合方盖，指出球与外切牟合方盖的体积之比为$\pi:4$，这是一个真命题，因而与之矛盾的命题“球与圆柱的体积之比为$\pi:4$”不可能为真，必为假。于是开立圆术为假。

（二）刘徽反驳中的失误

刘徽指出《九章算术》的宛田术“不验”，是完全正确的，但是，他的反驳并不成功。我们来分析这个问题。刘徽说：

> 此术不验。故推方锥以见其形。假令方锥下方六尺，高四尺。四尺为股，下方之半三尺为勾，正面邪为弦，弦五尺也。令勾、弦相乘，四因之，得六十尺，即方锥四面见者之幂。若令其中容圆锥，圆锥见幂与方锥见幂，其率犹方幂之与圆幂也。按：方锥下六尺，则方周二十四尺。以五尺乘而半之，则亦方锥之见幂。故求圆锥之数，折径以乘下周之半，即圆锥之幂也。今宛田上径圆穹，而与圆锥同术，则幂失之于少矣。

刘徽由圆锥的侧面积与宛田的表面积取同一形式，而宛田上径大于圆锥的两母线之和，得出宛田“幂失之于少”的结论，理由是不充分的。设圆锥与宛田的下周均长为 l，宛田径为 d，圆锥两母线之和为 D。对任何同周等高的宛田和圆锥而言，宛田上径都大于圆锥两母线之和，宛田的表面积大于圆锥的侧面积，是显然的。但 $\frac{1}{4}lD$ 和 $\frac{1}{4}ld$ 只是形式上相同。实际上，方锥的侧面积也可以采取这种形式，l 为下周长，D 为两斜高之和。由于 $d>D$，当然有 $\frac{1}{4}ld>\frac{1}{4}lD$，无法由此证明 $\frac{1}{4}ld$ 比真值小。显然，刘徽在这里混淆了 D 和 d，犯了反驳中混淆概念的错误。这种错误在刘徽注中非常罕见，也正因为罕见，才应当指出来。

第六节　刘徽的数学理论体系

中国数学史界有一个耳熟能详的提法，说《九章算术》建立了中国古代的数学体系。这种提法似是而非。说“数学体系”，应该指数学理论体系。而一个理论体系，应该包含概念，由这些概念联结起来的命题，以及使用逻辑方法对这些命题的论证。对数学而言，这种论证，必须主要使用演绎逻辑。《九章算术》只有概念和命题，没有留下逻辑论证。前已指出，从刘徽注可以探知，《数》、《算数书》和《九章算术》实际上是存在着某些推导和论证的，但是，这些推导和论证是以归纳逻辑为主的。而且，《九章算术》的分类标准不统一，有的按方法，有的按应用，不能自洽。因此，我们认为，《九章算术》没有建立中国古代数学的理论体系，只是构筑了中国传统数学的基本框架。在这个框架中，各章的方法之间，甚至同一章不同方法之间，除了均输术是衰分术的子术之外，几乎看不出它们的逻辑关系。

刘徽以演绎逻辑为主要方法全面证明了《九章算术》的公式、解法，因此，到刘徽完成《九章算术注》，中国传统数学才形成了数学理论体系。逻辑方法的改变，必然导致一个学科内部结构的相应改变。事实上，刘徽的数学理论体系不是《九章算术》数学框架的简单继承和补充，也不仅是为这个框架注入了血肉和灵魂，还包括了对这个框架的根本改造。

近代人们常把数学形象地画作一株大树，通常是一株大栎树。树根上标着代数、平面几何、三角、解析几何和无理数。在这些根上长出强大的树干，即微积分。树干的顶端发出许多大的枝条，并再分成较小的枝条，即复变函数、实变函数、变分法、概率论等等高等数学

的各个分支。[1] 实际上，早在1700多年前，刘徽通过深入研究《九章算术》，“观阴阳之割裂，总算术之根源”，提出了数学之树的思想：

事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干知，发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。

刘徽的数学之树“发其一端”，“端”实际上就是数学之树的根。这个“端”是什么呢？刘徽说：

虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于以法相传，亦犹规矩度量可得而共，非特难为也。

规矩在这里指几何图形，即我们通常所说的客观世界的空间形式；度量是度量衡，在这里指客观世界的数量关系。因此，规矩、度量可以看成刘徽数学之树的根，数学方法由之产生出来。恩格斯在总结19世纪之前的数学时说：

纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。[2]

刘徽对数学的认识与恩格斯惊人的一致。显然，在刘徽看来，“规矩、度量可得而共”便是数学之树的“端”。世代相传的数学方法应当是客观世界的空间形式和数量关系的统一。刘徽的话很形象地概括了中国传统数学中数与形相结合，几何问题与算术、代数问题相统一这个重要特点。根据刘徽的《九章算术注序》及其为九章写的注中形诸文字者，我们大体可以将刘徽的数学之树的面貌勾勒于下：

数学之树从规矩、度量这两条根生长出来，统一于数，形成以率为纲纪的数学运算这一本干。刘徽以《九章算术》的长方形面积公式、长方体体积公式（可视为定义）及他自己提出的率和正负数的定义为前提，以今有术为都术，以衰分问题、均输问题、盈不足问题、开方问题、方程问题、面积问题、体积问题、勾股测望问题等作为主要枝条。又分出经率术，其率术和返其率术，衰分术和返衰术，重今有术，均输术，盈不足术和两盈两不足术、盈适足不足适足术，多边形面积，圆田术、圆周率和曲边形面积，刘徽原理和多面体体积公式，截面积原理和圆体体积公式，勾股术和解勾股形诸术，勾股容方和勾股容圆术，一次测望问题和重差问题，开方术和开立方术，正负术，方程术和损益术、方程新术，不定方程等等方法作为更细的枝条，形成了一株枝叶繁茂、硕果累累的大树，形成了一个完整的数学体系。如图12-6-1所示。

在这个体系中，刘徽尽管也使用类比和归纳逻辑，但主要是使用演绎逻辑，从而将数学知识建立在必然性的基础之上。

在这个体系中，齐同原理、出入相补原理、极限思想和无穷小分割方法及截面积原理是刘徽所使用的主要原理。齐同原理用于计算问题，出入相补原理用于解决多边形和多面体体积，极限思想、无穷小分割方法和截面积原理用于解决曲边形面积、多面体体积和圆体体积。

这个体系“约而能周，通而不黩”，全面反映了当时中国人所掌握的数学知识，略知《九章算术》的人即可看出九章的分布。在这里，数学概念和各个公式、解法不再是简单的堆砌，而是以演绎推理和数学证明为纽带，按照数学内部的实际联系和转化关系，形成了有

---

① 伊夫斯，数学史概论，欧阳降译，山西人民出版社，1993年。
② 恩格斯，反杜林论，吴黎平译．人民出版社，1965年。

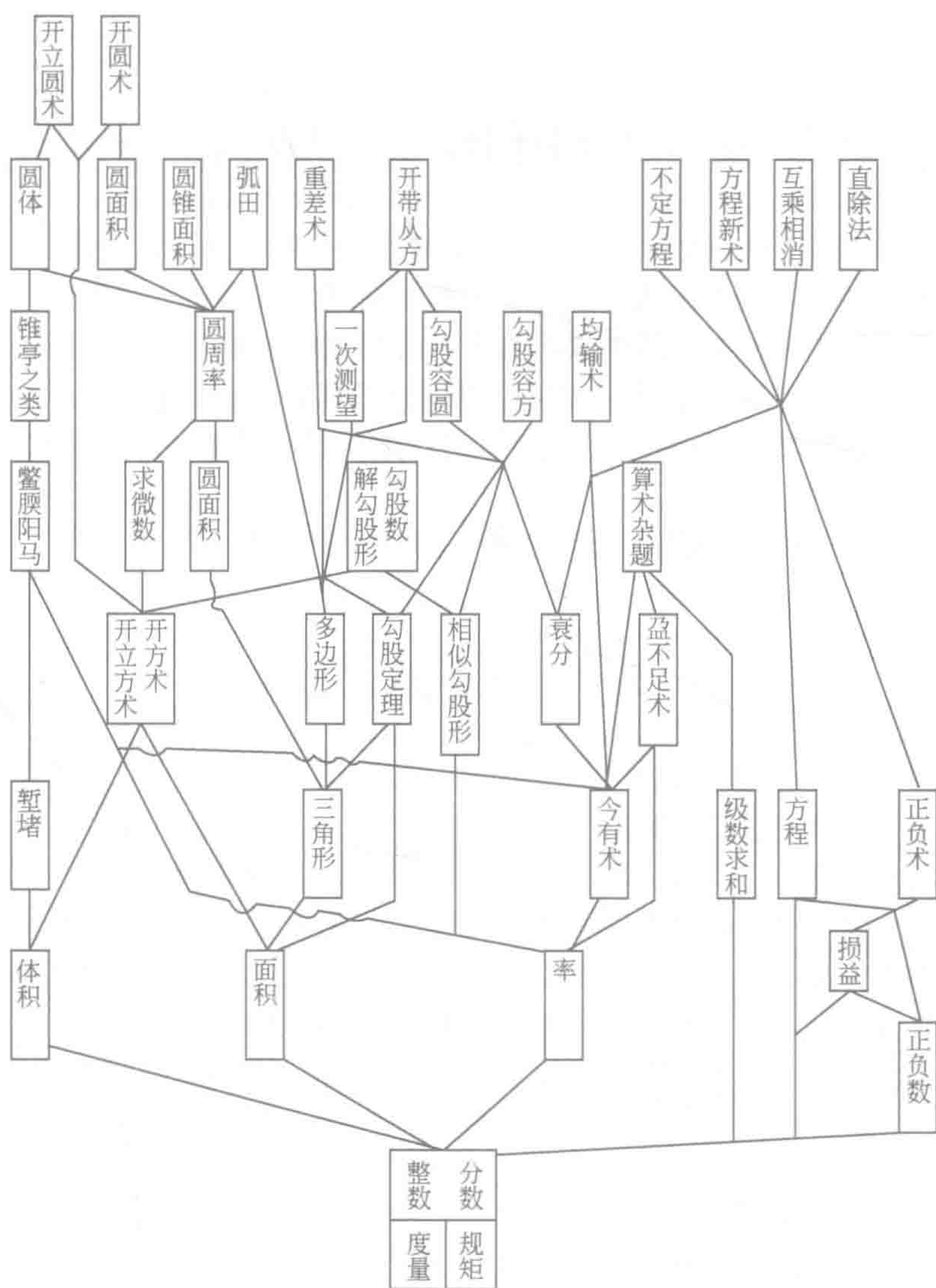


图 12-6-1　刘徽的数学之树

机的知识体系。而刘徽数学理论体系与《九章算术》框架的结构有着根本的不同，因此，它不是《九章算术》框架的添补，而是对《九章算术》的改造。

需要指出的是，说刘徽对《九章算术》框架的改造，不是说在形式上，而是在实际上，在刘徽的头脑中。在形式上，刘徽没有改变《九章算术》的术文和题目的顺序。在这种情况下，刘徽《九章算术注》中没有任何循环推理，说明刘徽逻辑水平之高超。在文献注疏中以互训为重要方法的中国古代，这更是难能可贵的。可以说，刘徽的《九章算术注》在内容上是革命的，而在形式上是保守的。然而，正是这种保守的形式，而不是撰著一部自成系统的高深著作，使刘徽的数学创造避免了《缀术》的厄运。

第十三章　隋唐历法中的数学方法

中国古代数理天文学的一个鲜明特点是以计算方法来描述日月五星的运动及其有关天文问题，并不断地提高算法精度，从而形成了一套丰富的算法系统，其中内插法起着重要作用。隋唐以前的历法主要以线性插值算法为主，公元600年前后，隋刘焯在《皇极历》中首创二次内插算法，并将其用于计算太阳位置、定朔时刻、日月交食、五星运行等历法问题，从而开创了历法计算的新格局，并为中国传统数学贡献了极有特色的成就。①

第一节　隋唐历法的创造性转变

一　张子信的发现及其意义

北齐天文学家张子信由天文观测发现的日月五星运行不均匀变化导致了隋唐历法的变革。张子信的天文观测记载于《隋书·天文志》：

> 至后魏末，清河张子信，学艺博通，尤精历数。因避葛荣乱，隐于海岛中，积三十许年，专以浑仪测候日月五星差变之数，以算步之，始悟日月交道有表里迟速，五星见伏有感召向背。言日行在春分后则迟，秋分后则速。合朔月在日道里则日食。若在日道外，虽交不亏。月望值交则亏，不问表里。又月行遇木、火、土、金四星，向之则速，背之则迟。五星行四方列宿，各有所好恶。所居遇其好者，则留多行迟，见早。遇其恶者，则留少行速，见迟。②

陈美东分析了这段记载在天文学上的意义③：

（1）发现太阳运动的不均匀性。

中国古代以浑仪测日，太阳每日行度的较小变化往往被赤道坐标与黄道坐标的变换关系所掩盖，这是中国古代发现太阳运动不均匀性要比古希腊晚的主要原因。虽然东汉末年刘洪在交食计算中隐含了太阳运动的不均匀改正，但后人并没有理解刘洪“消息术”的真正意义。正是张子信经过约30年的观测、推算与研究，发现了太阳运动的不均匀性。他指出：“日行在春分后则迟，秋分后则速。”并将这一现象作为“入气差”引入推算日月交食。

（2）发现五星运动的不均匀性。

在张子信之前，关于五星位置的推算以五星与太阳一个会合周期和会合周期内的动态为主要依据。张子信发现五星的实际观测结果与传统方法预推的位置经常存在偏差，认识到这种偏差的大小、正负与五星晨见东方时所值的节气有密切稳定的关系，因此，欲求五星晨现

---

① 本章的论述参考：纪志刚，南北朝隋唐数学，第七章“隋唐历法的创造性转变”，河北科学技术出版社，2000年。

② 唐·李淳风，隋书·天文志中，中华书局，1973年。本章关于张子信、刘焯及《皇极历》的资料，均据此。

③ 陈美东，中国科学技术史·天文学卷，科学出版社，2003年，第299～303页。

东方的真实时间，就需要在传统的计算方法的基础上，加减相应的偏差量。张子信实际上发现了五星运行的不均匀现象，而且给出了计算五星位置的“入气加减”法。

（3）发现月亮视差对日食的影响。

自刘洪《乾象历》提出了判断是否发生交食的食限概念和具体数值，此后历法皆承袭沿用。但是张子信发现：对于日食而言，并不是日月合朔入食限就一定发生日食现象，入食限只是发生日食的必要条件，不是充分条件。他指出，只有当这时月亮位于太阳之北时，才发生日食；若月亮位于太阳之南，就不会发生日食，即所谓“合朔月在日道里则日食，若在日道外，虽交不亏”。这一现象是由于月亮的视差使日、月相对视位置的增大所致。

张子信的三大发现以及相应的具体定量的描述方法，开启了中国古代对于太阳运动、日月交食和五星运行认识的新纪元，为历法计算结构数学化的突破性进展开拓了道路。

二　隋唐历法计算结构的数学化

中国古代历法的基本原理认为太阳、月亮和行星在恒星背景间的视运动是有周期性的，而且在相当长的时间内认为这些周期是固定不变的。因此，一个周期以后，天体的运动又重复前期，周而复始。所以，只要确定了各种周期和起算点（历元），各年的日历就可以简单地用周期循环叠加推出。

自张子信发现日月五星不均匀运动的现象后，中国古代历法开始酝酿一场变革。隋张胄玄《大业历》、刘焯《皇极历》，唐李淳风《麟德历》、一行《大衍历》、边冈《崇玄历》等在定气、定朔、晷影、漏刻、日月交食、五星运行等计算中引入了新观念和新方法，开创了古代历法计算的新局面。这些算法也丰富和发展了隋唐时期的数学成就。兹概述如下：

（1）定气。由于太阳周年视运动的不均匀性，使得二十四节气的实际长度比平均长度发生了较大变化。刘焯于《皇极历》中编制“日躔表”，首次创用二次内插算法，用以推算一年中任何一日距冬至或夏至点的实际长度，即定气。

（2）定朔。由于日月运动的不均匀性，使得合朔时刻必须考虑太阳与月亮运行的因素。在刘洪《乾象历》中，已考虑月亮改正 $T_{月}$，并以线性内插法计算。在刘焯《皇极历》中则首次使用二次内插法推算太阳改正 $T_{日}$ 与月亮改正 $T_{月}$，即定朔时刻 = 平朔时刻 + $T_{日}$ + $T_{月}$，这一算法遂为隋代之后历法中推算定朔方法的主流。

（3）晷影。《周髀算经》中使用线性插值方法推算每日日中晷影，这一方法为后世袭用。李淳风在《麟德历》中创造性地把刘焯二次内插算法用于晷影推算，边冈《崇玄历》则使用“立方相减相乘法”，将古历晷影算法推向一个新的阶段。

（4）漏刻。刘焯给出了二十四节气初日的“初数”（L），又给出相邻两节气间每日增减的差数（Δ），已知该日所入该节气后的日数（t_0），并由昼夜漏刻表查得该节气初日的夜半漏刻值（K_0），则可应用昼夜漏刻长度计算任一时日昼夜漏刻长度（K）：$K = K_0 + \frac{1}{a}(t_0L + \sum_{0}^{t_0} t_i\Delta)$。其中，$a$ 为一常数。这一等差级数方法为李淳风、一行所完善，边冈则另创公式化方法。

（5）月亮极黄纬。这一测算项目始于刘洪《乾象历》，使用线性内插法。刘焯于《皇极

历》中创用二次内插法，并为李淳风沿用，边冈《崇玄历》则构建二次多项式函数来计算月亮的极黄纬。

（6）太阳视赤纬。太阳视赤纬的测算始自东汉四分历，以线性内插法推求。刘焯《皇极历》则改以等差级数推算，并经李淳风、一行等进一步完善。而边冈在《崇玄历》中则创建了一种特殊的四次多项式函数，在计算的公式化和便捷性道路上迈出了重要的一步，并对北宋的历法计算产生了极大的影响。

（7）日月交食。刘焯于《皇极历》中创立了一整套日月交食的推算法，包括确定交食发生时刻、食限、食分与食甚、亏起方位、初亏与复原时刻。其中，最具有代表性的是交食发生时刻的推算公式，称为“月亮入交定日”（P）和“太阳入会定日”（Q），所用算法是

$$\text{月亮入交定日}\ P = \text{入交平日及余} \pm T_{\text{日}} \pm \frac{\text{交率}}{\text{交数}} \times T_{\text{月}}$$

$$\text{太阳入会定日}\ Q = \text{入会平日及余} \pm T_{\text{月}} \pm \frac{\text{交数}}{\text{交率}} \times T_{\text{日}}$$

以上二式在计算月亮、太阳与黄白交点的时距时，既考虑了太阳、月亮运动的不均匀性影响，又虑及了黄白交点退行的影响，其天文概念十分准确和清晰。

（8）五星运行。五星运行是古代历法测算中的一个重要项目，但只是在张子信发现五星运行的“感召向背”、“好迟恶疾”的不均匀性之后，其推算方法才有本质上的进步。其定见时刻的推算方法是

$$\text{定见时刻} = \text{平见} \pm \text{行星改正} \pm T_{\text{日}}$$

其中，$T_{\text{日}}$ 即“太阳改正”，以“日躔表”按二次内插法推算；“行星改正”则是一种“入气加减法”，这一方法的数学意义是一种线性函数的分段拟合逼近。

以上所述是隋唐历法中主要项目的计算方法，下面还要深入讨论。由此看出，在张子信发现日月五星运行的不均匀性后，隋唐历家所追求的一个目标即以数学方法给予较精确的表述，从而有二次内插算法、等差级数、多项式函数等一系列先进数学方法的发明与应用，使中国古代历法的计算结构开始了特殊的数学化进程。因此，隋唐历法奠定了中国古代数理天文学的算法基础，实现了中国古代历法在天文理论与数理方法上的创造性转变。①

第二节　二次内插算法

一　《皇极历》

（一）隋朝关于历法的争论

首先接受张子信学说的是一批追随他的北齐天文学家。据史书记载：

又有广平人刘孝孙、张孟宾二人，同知历事。孟宾受业于张子信，并弃旧事，

① 纪志刚，隋唐历法的创造性转变，见：曲安京、纪志刚、王荣彬，中国古代数理天文学探析，西北大学出版社，1994年。

更制新法。又有赵道严，准晷影之长短，定日行之进退，更造盈缩，以求亏食之期。

公元581年杨坚取代北周，建立隋朝。杨坚为使“禅代”有借口，“欲以符命曜于天下”，急于推出一部新的历法。道士张宾便“揣知上意，自云玄相，洞晓星历，因盛言有代谢之征，又称上仪表非人臣相”。杨坚便令张宾编制新历法。张宾等“依何承天法，微加增损”，开皇四年（公元584）制成《开皇历》，隋文帝随即下诏颁行。未曾想历法刚刚颁行，就引来了刘焯等有识之士的责难。

刘焯和刘孝孙认为《开皇历》“学无师法，刻食不中”，列出六条批评意见，从而引发了一场激烈的历法争辩。他们的正确意见不仅没有被采纳，反而被张宾等诬陷为“非毁天历，率意迂怪”，“妄相扶正，惑乱时人”。刘焯遂“除名为民”。后刘焯知道隋文帝起用张胄玄制定新历，便“增损孝孙历法，更名《七曜新术》，以奏之”，希望能参与考验，以别疏密。但却遭到了张胄玄的诋毁，刘焯无可奈何，只得再回老家。

开皇十七年（公元597），张胄玄新历制成。他为了巩固自己在太史监的地位，又举进袁充。张、袁二人互相吹捧，“胄玄言充历妙极前贤，充言胄玄历术冠于今古。”袁充为取媚于皇帝，重提日长影短之事，奏曰“伏惟大隋启运，上感乾元，影短日长，振世希有”。隋文帝也借机大做文章，改开皇二十一年为仁寿元年，又令“此后百工作役，并加程课，以日长故”。如此闹剧，将中国古代天文学的政治功能表现得淋漓尽致。

开皇二十年刘焯再次增修其书，名曰《皇极历》，驳正张胄玄历法，得到皇太子杨广嘉许。仁寿四年（公元604），刘焯上书皇太子，历数张胄玄历法的六条失误，要求“请征胄玄答，验其长短”。次年杨广继位，即令刘焯与张胄玄参校历法。张胄玄指责刘焯在历法中采用定朔算法，并非新创，出自张衡、何承天，“执数以校其率，率皆自败，故不克成”。双方“互相驳难，是非不决”。大业四年（公元608）太史报告日食预报无效，震动隋炀帝，于是再召刘焯，“欲行其历”。当时，“袁充方幸于帝，左右胄玄，共排焯历，又会焯死，历竟不行”。这场旷日持久的历法争辩在中国历法史上具有重要的意义。历法家们在相互诘难之中，互相取长补短，并汲取当时新的研究成果，采用新的数学方法，推演高精度的历法常数，以提高历法的精度，锤炼出一批重要的历法，刘焯《皇极历》就是其著名的代表。

（二）《皇极历》

刘焯在《皇极历》中获得了一系列高精度的天文数据，规范了天文表格的编制，并在定气、定朔、交食、漏刻、黄赤道差以及五星位置计算上广泛采用了二次内插法、等差级数法和坐标变换法，从而把中国古代历法向数学化、精密化和合理化的方向上推进了一大步。《皇极历》是中国历法走向成熟的标志，尽管此历未能行用于世，但却受到了高度评价，“术士咸称其妙”。李淳风破例把它收入官修正史的律历志中，让其享有这一殊荣。

二　刘焯二次内插算法及其算理分析

刘焯关于二次内插算法的创建与使用，见于《皇极历》“推每日迟速数术”：

见求所在气陟降率，并后气率，半之。以日限乘而泛总除，得气末率。又日限乘二率相减之残，泛总除，为总差。其总差亦日限乘而泛总除，为别差。率前少者，以总差减末率，为初率，乃半①别差加之；前多者，即以总差加末率，皆为气初日陟降数。以别差前多者日减，前少者日加初数，得每日数。所历推定气日，随算其数，陟加降减其迟速，各为迟速数。

设 L 为该节气的长度；$n=0, 1, 2, \cdots\cdots, 11$；$t=1, 2, \cdots\cdots, L$，这是由某气迟速数 $f(nL)$、陟降率 Δ_1 和后一气陟降率 Δ_2，求该气内每日迟速数 $f(nL+t)$ 的问题。刘焯的术文可表示为公式

$$f(nL+t)=f(nL)+\frac{t}{L}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{L}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2) \qquad (13\text{-}2\text{-}1)$$

这就是著名的刘焯二次内插公式。薮内清②、严敦杰③、李俨④、钱宝琮⑤等著名学者对此做过精辟的论述。但对这一公式是怎么得到的，皆语焉不详。晚清数学家李善兰著《麟德术解》⑥，以说明李淳风《麟德历》算法含义。而李淳风术宗刘焯，李善兰的工作对分析刘焯二次内插算法亦有参考价值。下面，我们从术语内涵的分析、算法结构的剖解、造术之源的探索三个方面入手，来解释刘焯二次内插算法的构造原理。

设 Δ_1 为所在气陟降率，Δ_2 为后气率，二者均可由"日躔表"查得。其中，"日限"为 11，"泛总"系"盈泛"和"亏总"的合称，刘焯规定"秋分后春分前为盈泛（16），春分后秋分前为亏总（17）"，这样，24 节气分为两段：

$$秋分后至春分的每气间隔\ L=\frac{盈泛}{日限}=\frac{16\times10}{11}=14.55\ 日$$

$$春分后至秋分的每气间隔\ L=\frac{亏总}{日限}=\frac{17\times10}{11}=15.45\ 日$$

因此，气末率 $=\frac{日限}{泛总}\times\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}$，总差 $=\frac{日限}{泛总}\times(\Delta_1-\Delta_2)=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}$，别差 $=\frac{日限}{泛总}\times总差=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L^2}$。当"前少"，即 $\Delta_1<\Delta_2$ 时，初率为

$$初率=末率-总差=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}$$

当"前多"，即 $\Delta_1>\Delta_2$ 时，初率为

$$初率=末率+总差=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}$$

在图 13-2-1 中，几何量 AB 表示"前多"时的"初率"。CD 表示"气末率"，BC 为一气的长度 L。梯形 $ABCD$ 的面积为"所在气陟降率"（Δ_1），Δ_2 为后气率，图中所绘为"前多"（$\Delta_1>\Delta_2$）。注意，一气中每一日间隔为 1（BB_1），因此，"气末率"、"总差"、"别差"、

① 原文脱"半"字，纪志刚依意校补。

② ［日］薮内清，隋唐历法史之研究。三省堂版，1944 年。

③ 严敦杰，中算家的招差术，数学通报，1955，(1)：4～13；1955，(2)：35～67。

④ 李俨，中算家的内插法研究，科学出版社，1957 年。

⑤ 钱宝琮，从春秋到明末的历法沿革，历史研究，1960，(3)：35～67。

⑥ 清 · 李善兰，麟德术解，《则古昔斋算学》，同治六年（1867 年）莫有芝金陵刊本。

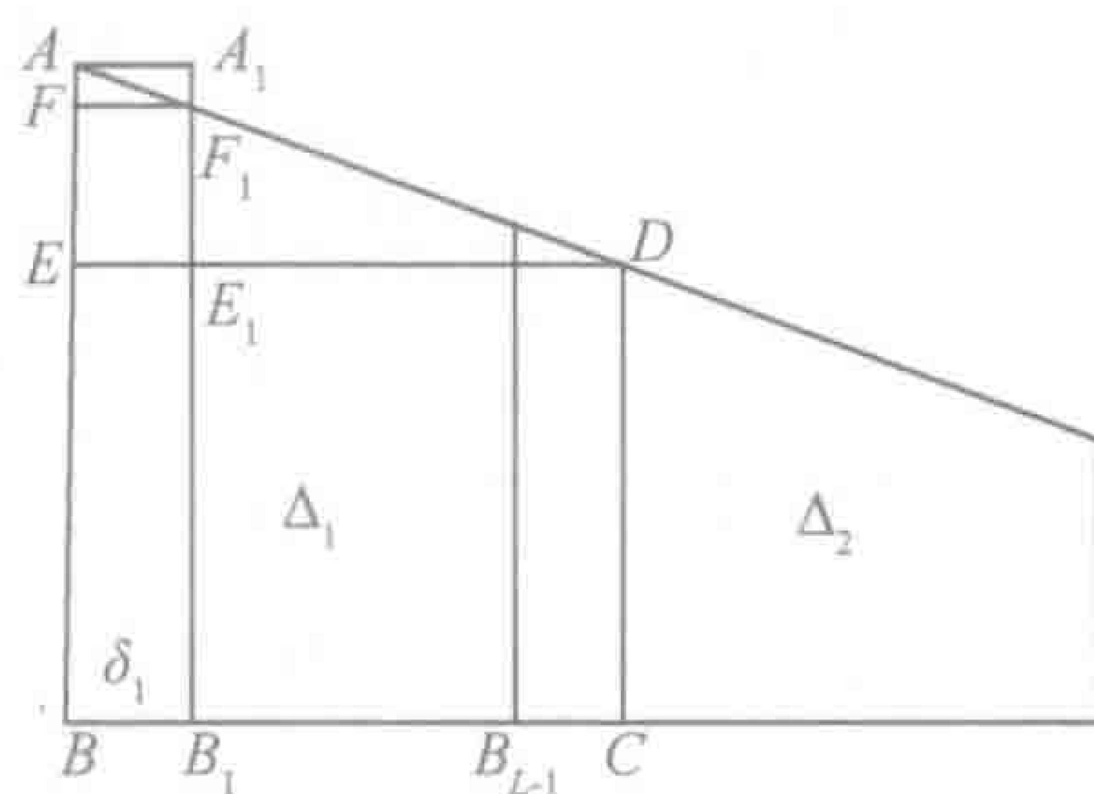


图 13-2-1　刘焯二次内插算法造术的几何解释

"初率"等都可以表示为底边为 1 的矩形面积：气末率 $=\square B_{L-1}D$；总差 $=\square AE_1$；别差 $=\square AF_1$；初率 $=\square AB_1$。设 δ_1 为初日陟降数，小梯形 ABB_1F_1 面积为 $\delta_1=$ 初率 $-\frac{1}{2}$别差；或者，在"前少"时，$\delta_1=$ 初率 $+\frac{1}{2}$别差。

刘焯认为太阳在一气内每日的改变量（"别差"）是相等的。因此，只要在"初日陟降数"中累次加减"别差"，就可求得"每日陟降数"（δ_t），对"前多"的情形即有（"前少"者仿此）$\delta_1=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2L^2}$，$\delta_2=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{3}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$，$\delta_3=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{5}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$，…一般

$$\delta_t=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{2t-1}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

术文"随算其数"的"随"字按《广雅·释诂一》训"顺"。因此，"随算其数"即顺次计算自本气初日到 t 日之间的"陟降数"。如此计算 δ_1，$\delta_1+\delta_2$，$\delta_1+\delta_2+\delta_3$，$\delta_1+\cdots\cdots+\delta_t$；可以验证，当 $t=L$ 时，$\delta_1+\cdots\cdots+\delta_L=\Delta_1$。这样，$t$ 日的迟速数 $f(nL+t)$ 为

$$f(nL+t)=f(nL)+t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+t\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

我们知道，等间距二次插值的牛顿差分公式为

$$F(t+nw)=F(T)+nF'(T)+\frac{n(n-1)}{2!}F''(T) \qquad (13\text{-}2\text{-}2)$$

其中，$F'(T)=F(T+\omega)-F(T)$，$F''(T)=F'(T+\omega)-F'(T)$。记 $\Delta_1=F'(T)$，$\Delta_2=F'(T+\omega)$，则 $\Delta_1-\Delta_2=F''(T)$。一般说来在内插计算中，n 常为分数。设函数所在间隔为 $T+t$，则有 $n\omega=t$，$n=\frac{t}{\omega}$；对公式（13-2-2）作如下变形：

$$F(T+t)=F(T)+\frac{t}{\omega}\Delta_1+\frac{t}{2\omega}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2\omega^2}(\Delta_1-\Delta_2) \qquad (13\text{-}2\text{-}2\ (a))$$

或者：
$$F(T+t)=F(T)+\frac{t}{\omega}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{\omega}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2\omega^2}(\Delta_1-\Delta_2) \qquad (13\text{-}2\text{-}2\ (b))$$

可见，刘焯二次内插公式（13-2-2）与公式（13-2-2（a））在形式上是一致的。公式（13-2-2（b））的形式将出现在边冈的《崇玄历》中。

刘焯二次内插算法的代数形式虽然与牛顿插值公式一致，但是其二者的构造思想却旨趣迥异。根据上述阐述，刘焯二次内插算法的造术思路可以分解成两个部分①：

（1）假定太阳在所求节气内视运动实行速与平行速之差（Δ）按等差数列排布成"日

---

① 对这一问题的阐述可参见：曲安京、纪志刚、王荣彬合著，中国古代数理天文学探析，西北大学出版社，1994年。王荣彬，刘焯《皇极历》插值法的构建原理，自然科学史研究，1994，13（4）。刘钝，《皇极历》中等间距二次插值方法术文释义及其物理意义（同前）。纪志刚，刘焯二次内插算法及其在唐代的历史演变，西北大学学报（自然科学版），1995，25（2）。这里的表述参考：曲安京，中国历法与数学，科学出版社，2005年，第248～249页。

躔表”，然后将一气的陟降率 Δ 仍按等差数列分解为各日的陟降数 δ_i；

（2）对此等差数列构成的等差级数 $\sum_{1}^{L}\delta_i$ 求和（L 为一气的长度）。

所以，刘焯二次内插算法原理的关键在于构造一个等差数列然后进行求和运算。而解决此类问题的算法，李继闵认为是遵循着《九章算术》金箠问及其刘徽注的思路。刘焯的“初率－末率＝总差”，相当于《九章算术》的“本重－末重＝四差凡数”，其“$\frac{总差}{一气间距}$＝别差”相当于“$\frac{四差凡数}{四间}$＝差数（公差）”，其“每日陟降数＝初日陟降数－（$n-1$）别差”相当于“各尺重＝本重－（$n-1$）×差数”。[①] 刘焯算法的第二部分的等差级数求和的方法，就是《九章算术》盈不足章的公式。

可见，刘焯二次内插算法的两个子算法在《九章算术》及其刘徽注中皆已具备。《隋书·刘焯传》述其学术造诣时，云其“为学不倦，《九章算术》、《周髀》、七曜历书十余部，推步日月之法，量度山海之术，莫不覆其根本，穷其奥秘。……”，由此可见，《九章算术》的深邃算理对中国古代数理天文学的深刻影响。

三　唐代历法对二次内插算法的改进与发展

（一）一行的不等间距内插法

一行制《大衍历》，改平气为定气，把刘焯的等间距二次内插方法发展到不等间距，被誉为是“中国历法科学的一大进步”。[②] 实际上，一行“不等间距”二次内插法乃是刘焯算法的自然拓展。一行《大衍历》术文先述“定气辰数”[③]：

> 以盈缩分盈减缩加三元之策，为定气所有日及余，乃十二乘日，又三其小余，辰法约而一。从之，为定气辰数。不尽，十之，又约为分。

术文中三元之策 $=15\frac{664\frac{7}{24}}{3040}$，辰法＝760，定气日及余（$L_i$）$=15\frac{664\frac{7}{24}}{3040}\pm\frac{盈缩分}{3040}$（盈－，缩＋），定气辰数（$W_i$）$=12\times L_i=12\times15+3\times\frac{664\frac{7}{24}\pm盈缩分}{760}$。将“日躔表”中各气盈缩分代入计算，即可求得“定气”长度 L_i 和“定气辰数” W_i。

一行“步日躔术”如下：

> 以所入气并后气盈缩分，倍六爻乘之，综两气辰数除之，为末率。又列二气盈缩分，皆倍六爻乘之，各如辰数而一，以少减多，余为气差。至后以差加末率，分后以差减末率，为初率。倍气差，亦倍六爻乘之，复综两气辰数除，为日差。半

① 这一观点为已故数学史家李继闵先生（1938～1993）指出。见：曲安京、纪志刚、王荣彬著，《中国古代数学天文学探析》，西北大学出版社，1994 年，第 13，191 页。

② Ho Peng Yoke（何丙郁），*Li，Qi and Shu：An Introduction to Science and Civilization in China*，Hong Kong：Hong Kong University Press，1985，158.

③ 北宋·欧阳修等，新唐书·历志四上，中华书局，1975 年。本章凡引《大衍历》的文字，如不注明，均据此。

之，以加减初末，各为定率。以日差至后以减、分后以加气初定率，为每日盈缩分。乃驯积之，随所入气日加减气下先后数，各其日定数。

以代数符号将一行算法表述如下：

$$末率=\frac{12\ (\Delta_1+\Delta_2)}{W_1+W_2}+\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}\ (因为\ W=12L)$$

$$气差=\frac{12\Delta_1}{W_1}-\frac{12\Delta_2}{W_2}=\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}$$

$$日差=\frac{12\times 2\ 气差}{W_1+W_2}=\frac{2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_2}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$$

$$初率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}\pm\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)(至以后+；分以后-)$$

$$定率=初率\mp\frac{1}{2}日差=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}\pm\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)\mp\frac{1}{2}\frac{2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$$

（至以后用上符号 - 或 +，分以后用下符号 + 或 -）。下面以“至以后”为例，说明术文中的“驯积”。据术文，其“每日盈缩分”（δ_i）：

$$\delta_1=定率=初率-\frac{1}{2}日差$$

$$\delta_2=初率-\frac{1}{2}日差-日差$$

$$\vdots$$

$$\delta_i=初率-\frac{1}{2}日差-\ (t-1)\ 日差=初率-\frac{2t-1}{2}日差$$

$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}+\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}-\frac{2t-1}{2}\frac{2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right),\ (t=1,2,\cdots,L_i)$$

“驯积之”，即“累积”：$\sum_1^t\delta_i=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}+t\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)-\frac{t^2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$

同理，“分以后”有 $\sum_1^t\delta_i=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}-t\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)+\frac{t^2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$

可以验证：　$\delta_1+\delta_2+\cdots\cdots+\delta_{L1}=\Delta_1$

最后，“至以后”“其日定数”为

$$f(U+t)=f(U)+t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}+t\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)-\frac{t^2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)\qquad(13\text{-}2\text{-}3)$$

“分以后”“其日定数”为

$$f(U+t)=f(U)-t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}-t\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)+\frac{t^2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)\qquad(13\text{-}2\text{-}4)$$

这一公式与现今不等间距二次内插公式完全相合。

对一行不等间距二次内插公式的数学原理，我们拟从几何与代数两个方面加以说明。

作一行“日躔表”相邻两气的盈缩分图。在图 13-2-2 中，梯形 $ABB'A'=\Delta_1$，梯形 $A'B'CC'=\Delta_2$，$BB'=L_1$，$B'C=L_2$，$BB_1=1$. M，M_1，M_2各为BC、BB'、$B'C$的中点，则有

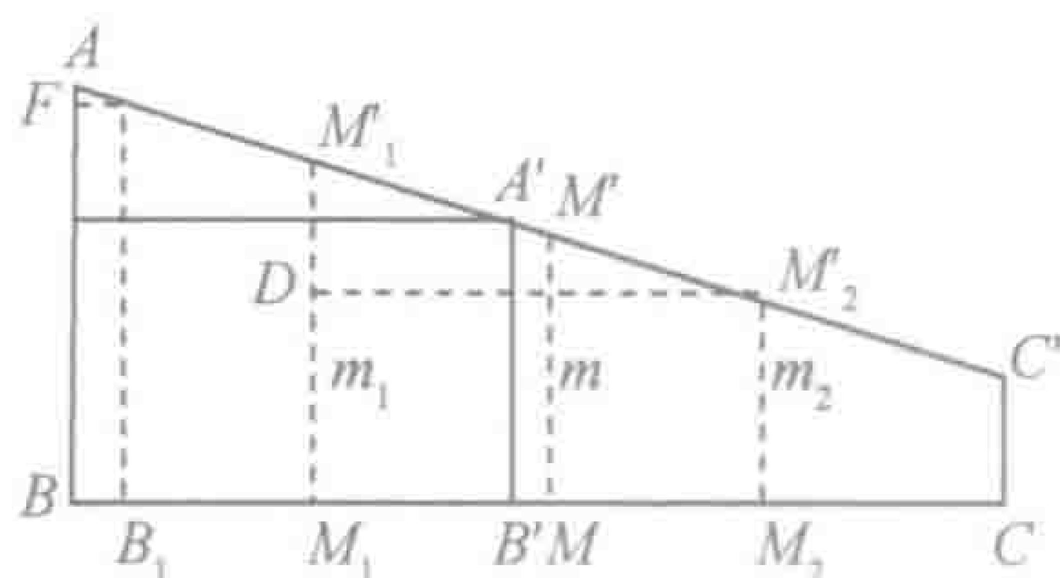


图 13-2-2　一行不等间距二次内插算法的几何解释

$$末率(m)=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2};气差=\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}=m_1-m_2=M'_1D$$

据图 13-2-2 中相似三角形的比例关系，有（注意：$BB_1=1$）

$$AF(日差)=\frac{M'_1D}{DM'_2}=\frac{2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$$

又：

$$末率(m)=\frac{1}{2}(AB+CC'),\ 气差=\frac{1}{2}(AB-CC')$$

故有

$$初率(AB)=末率+气差=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}+\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}$$

此后，以“日差”累减定率即得“每日盈缩分”。

将《大衍历》的“定率”公式与《九章算术》“九节竹”问及《张丘建算经》“十人分金”问的方法相比照，可知前者“至以后”定率就是后者的末项，“分以后”定率就是首项。这样，我们看到中算家们处理插值算法的思想源头正在《九章算术》：

比率→衰分⟶ {“五尺金箠”⟶等间距二次内插法；“九节竹”⟶不等间距二次内插法}

《五纪历》（公元 762）、《正元历》（公元 783）法同《大衍历》（公元 729）。

（二）一行关于爻象历和阴阳历所用的插值法

在《大衍历》岁星爻象历进退积是一个四次差值为零的差分表（表 13-2-1）。严敦杰认为这是一行发明了三次内插法近似公式的结果。① 但是，进一步的研究表明，一行实际上是采用了两级等间距二次差内插方法，属于对刘焯算法的一种发展。②

表 13-2-1　《大衍历》岁星爻象历四阶差分表

进退积	一次差	二次差	三次差	四次差
0				
773	773			
1494	721	52		
2124	630	91	39	
2624	500	130	39	0
2955	331	169	39	0
3078	123	208	39	0

徐昂《宣明历》（公元 822）也以不等间距计算“日躔盈缩”，但是在计算方法上比一行算法有了进一步的改进。徐昂方法简述如下：气中率：$\frac{\Delta_1}{L_1}$；合差：$\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}$；中差：$\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$。初末率：$\frac{\Delta_1}{L_1}\pm\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$（初 +，末 −）。日差：$\frac{2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$。

① 严敦杰，中国古代数理天文学的特点，见：科技史文集，第 1 辑，上海科学技术出版社，1978 年。

② 王荣彬，中国古代历法中的插值法构建原理。见：曲安京、纪志刚、王荣彬，《中国古代数理天文学探析》，西北大学出版社，1994 年，第 281～288 页。

定率：初末率$\mp\frac{1}{2}$日差（初－，末＋）。据术文“以日差累加、减之，为每日盈缩分”，如术计算第 t 日盈缩分 δ_t

$$\delta_t=\text{“定率”(初)}-(t-1)\times\text{“日差”}=\frac{\Delta_1}{L_1}+\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)-\frac{2t-1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$$

“累而裁之”得

$$f(U+t)=f(U)+t\frac{\Delta_1}{L_1}+t\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)-\frac{t^2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)\qquad(13\text{-}2\text{-}5)$$

这是中国古代不等间距二次内插公式的又一形式。

边冈《崇玄历》（公元893）重新改用平气，即各气长度相等，从而徐昂公式（13-2-5）简化为

$$f(nL+t)=f(nL)+\frac{t}{L}\Delta_1+\frac{t}{2L}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)\qquad(13\text{-}2\text{-}6)$$

此式正是牛顿插值公式的第二种形式。

刘焯的“日躔盈缩”算法自边冈简化之后，多为后世历法所沿用。直到郭守敬《授时历》（1280）创立平、立、定三次内插法，才使这一传统算法跃上了一个新台阶。

四　相减相乘法

唐建中（公元780）时曹士蒍作《符天历》“始变古法”，以“相减相乘”计算“日躔盈缩”。

根据现代天文学理论，天体沿椭圆轨道运行的真近点角（λ）与平近点角（l）之间的关系，可以表示为以下公式：

$$\lambda-l=2e\sin l+\frac{5}{4}e^2\sin 2l+\cdots$$

其中，左端（$\lambda-l$）就是中心差，亦即天体的实行度与平行度之差；e 为轨道偏心率。

在中国古代的大多数历法中，计算中心差的传统方法是插值法，虽以逼近精度高见长，但术语生僻，算理深奥，非专习者难洞晓其义。突破这一点的是曹士蒍。日本学者中山茂从日本天理图书馆发现了《符天历》的残本，并破译了《符天历经日躔差立成》的数理内涵，发现这种新的“日躔盈缩”计算方法在中国数学史与天文学史上具有开拓性的重大意义①。兹将天理图书馆所藏《符天历》中的部分内容引录如下：

符天历经日躔差立成一卷

日躔差法，经文幽微，非久习者，致或难了固。

今新张立成，得其意，定率即固，经朔、弦、望、中日度分，以差积度分盈加缩减，为定日度分。其后累加一度。若盈缩历一度已上九十一度已下，以差率盈加缩减；九十二度已上百八十二度已下者，以差率盈减缩加。次日定度分，去命度数，加常定法。专与经意不相违之。

① 中山茂，符天历的天文学史的位置，［日］科学史研究，1964，第71号。

于时兴福寺，仁宗依长德元年八月十九日造历宣旨推步。

廿一时分八分三十三

日躔立成

盈缩度数	差积度数
百八十二度	空
一度百八十一	五分四十八
二度百八十	十分九十一
五分三十六	
三度百七十九	十六分二十七

……

这是说，欲求某一天的太阳实行度，只需从近地点开始，每天加一度，作为中日度分，再以差积度分，与其盈加缩减，前半周以中日度分加差积度分，后半周以中日度分减差积度分，即得太阳实行度。

更重要的是“日躔立成”中“盈缩度数”与“差积度分”的数理构成。在此“立成”末尾有一段日文说明，较晦涩难解。中山茂认为，这是说，平黄经 l 与真黄经入之差为太阳平黄经的正弦函数，应符合 $\lambda - l = A\sin l$，而《符天历》使用了经验公式：

$$\lambda - l = \frac{1}{3300} l (182 - l) \tag{13-2-7}$$

$(\lambda - l)$ 即等于“立成”中的差积度数，而盈缩度数则是相邻两差积度数之差。例如：

$$l = 2 \text{ 度}, \lambda - l = \frac{1}{3300} \times 2 \times (182 - 2) = 0.1091 \text{ 度}$$

$$l = 3 \text{ 度}, \lambda - l = \frac{1}{3300} \times 3 \times (182 - 3) = 0.1627 \text{ 度}$$

16 度 27 小分 - 10 度 91 小分 = 5 度 36 小分

据此可以算出《符天历》的日躔盈缩表。

我们知道，一个二次插值公式可以表示为一个二次三项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$，因此，二次插值函数的构造一般需要三个插值点 $(x_1, f(x_1))$、$(x_2, f(x_2))$、$(x_3, f(x_3))$，再利用待定系数法确定上式的系数。由于太阳沿椭圆轨道运行的特点，有 $f(0) = f(182) = 0$，因此，上述二次函数的形式可以简化为 $f(x) = ax(182 - x)$。这样只需在 $[0, 182]$ 内任选一点为插值点。根据观察结果易知，太阳的盈缩差分在区间的中点 $\frac{182}{2}$ 处达到最大值 $f\left(\frac{182}{2}\right) = 2.5094$ 度，从而系数 a 被唯一确定：

$$a = \frac{f(91)}{91^2} = 0.0003 = \frac{1}{3300}$$

曹士蒍的“新张立成”算法在形式上是与刘焯分段二次插值算法完全不同的插值算法。它形式简单，计算简便易行，且“与经意不相违”，同时保持较高的逼近精度。更重要的是它带有一种明显的“公式化”特征，开启了中国古代历法计算公式化的一个新时代。[①]

① 陈美东，中国古代有关历表及其算法的公式化，自然科学史研究，1988，7（3）：232～236。

不过，曹士蔿算法所蕴含的重要价值并未被立刻认识，公元822年徐昂《宣明历》未用此法。近100年之后，曹士蔿的思想才被边冈在《崇玄历》中发扬光大，并明确称为“先相减、后相乘”，即今之所谓“相减相乘法”，这在下面还要详细分析。此后北宋史序《仪天历》（1001）、周琮《明天历》（1064）、皇居卿《观天历》（1092）皆用此法。

第三节　隋唐历法中若干典型数学方法

一　刘焯《皇极历》定朔算法

《皇极历》定朔计算可分为两个主要部分，一是利用“日躔表”计算太阳改正即“迟速定数”，二是利用“月离表”计算月亮改正即“定朓朒”。

（一）关于“迟速定数”的计算

若合朔（平朔）时刻恰为整日，则根据公式（13-2-1）求出 $f(nl+t)$ 即该日迟速定数。

但一般来说，合朔时刻并不为整日。为此，刘焯给出了第二种算法：

> 求月朔弦望应平会日所入迟速：各置其经余为辰，以入气辰减之，乃日限乘日，日内辰为入限；以乘其气前多之末率，前少之初率，日限而一，为总率。其前多者，入限减泛总之残，乘总差，泛总而一，为入差，并于总差，入限乘，倍日限除，加以总率；前少者，入限再乘别差，日限自乘，倍而除，亦加总率，皆为总数。乃以陟加、降减其气迟速数为定。

术文第一句中“入限”，即合朔时刻与前一气之间的距离：

$$\text{入限}=\text{日限}\times\text{日(朔大余)}+(\text{朔小余}-\text{气小余})_{\text{辰}}$$

$$\text{若令 } t=\frac{\text{入限}}{\text{日限}}=\text{日（大余）}+\frac{\text{朔辰}-\text{气辰}}{\text{日限}}\text{，此即“气朔距”。}$$

对于太阳改正，分前多、前少两种情况来考虑。“前多”（$\Delta_1>\Delta_2$）时，据术文有

$$\text{总数}=\text{总率}+\frac{1}{2}\frac{\text{入限}}{\text{日限}}(\text{总差}+\text{入差}) \qquad (13\text{-}3\text{-}1)$$

式中，$\text{总率}=\frac{\text{入限}}{\text{日限}}\times\text{前多之末率}=t\,\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}$

$$\text{入差}=\frac{\text{泛总}-\text{入限}}{\text{泛总}}\times\text{总差}=\left(1-\frac{t}{L}\right)\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}$$

化简（13-3-1）式得到：$\text{总数}=\frac{t}{L}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{L}\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}+\frac{t}{2L}\left(1-\frac{t}{L}\right)(\Delta_1-\Delta_2)$

（13-3-1（a））

“前少”（$\Delta_1<\Delta_2$）时：$\text{总数}=\text{总率}+\frac{\text{入限}^2\times\text{别差}}{2\text{日限}^2}$　（13-3-2）

式中，$\text{总率}=\frac{\text{入限}}{\text{日限}}\times\text{前少之初率}=t\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}\right)$，$\frac{\text{入限}^2\times\text{别差}}{2\text{日限}^2}=\frac{t^2}{2}\frac{\Delta_2-\Delta_1}{L^2}$，化

简公式（13-3-2）得

$$总数 = \frac{t}{L}\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - \frac{t}{L}(\Delta_2 - \Delta_1) + \frac{t^2}{2L^2}(\Delta_2 - \Delta_1) \qquad (13\text{-}3\text{-}2\ (a))$$

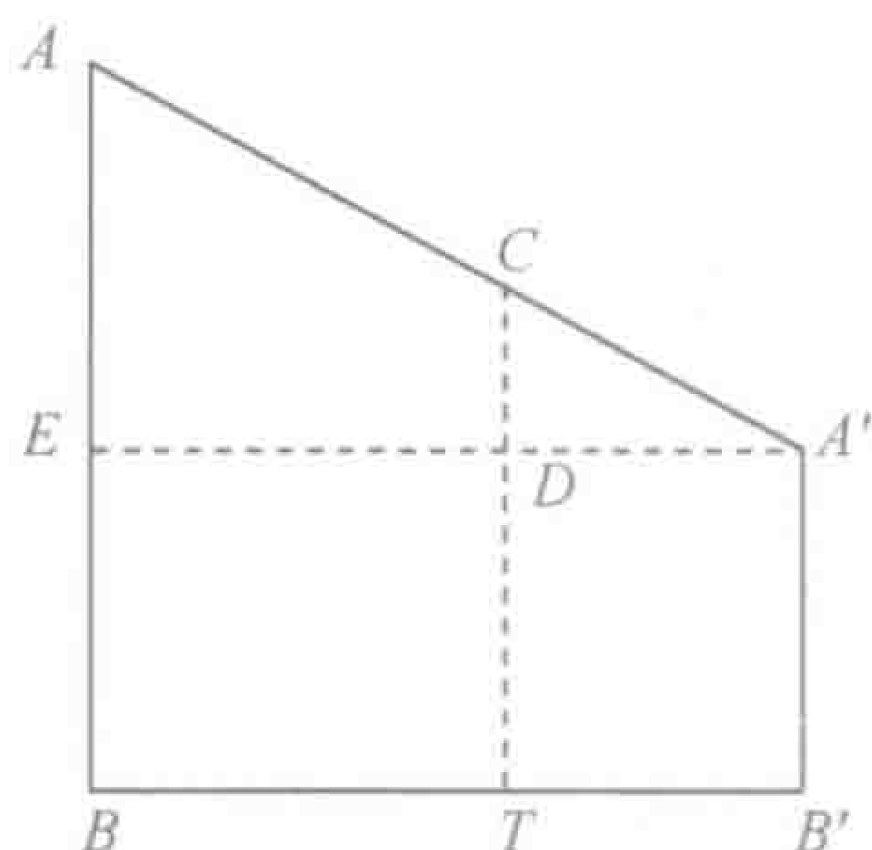


图 13-3-1　“总数”的几何解释

公式（13-3-1（a））和（13-3-2（a））在形式上可统一为

$$总数 = \frac{t}{L}\Delta_1 + \frac{1}{2}\frac{t}{L}\left(\frac{t}{L} - 1\right)(\Delta_2 - \Delta_1)$$

记 $f(nL)$ 为“其气迟速数”，这样合朔时刻（t）的太阳改正为公式 $f(nL)$ + 总数。要分析此式的造术之源，关键是寻找公式（13-3-1）、公式（13-3-2）即“总数”的立论之据。图 13-3-1 给出了“总数”（“前多”）的一种几何解释。

$$总率 = \frac{入限}{日限} \times 前多之末率 = BT \times TD = \square BD,$$

$$入差 = \frac{\dfrac{泛总}{日限} - \dfrac{入限}{日限}}{\dfrac{泛总}{日限}} \times 总差 = \frac{BB' - BT}{BB'} \times AE = CD$$

$$所以：\frac{1}{2}\frac{入限}{日限}(总差 + 入差) = \frac{1}{2}BT \times (AE + CD) = ⏢ AEDC$$

因此，

$$总数 = 总率 + \frac{1}{2}\frac{入限}{日限}（总差 + 入差） = ⏢ ABTC$$

“前少”的分析类此。

（二）关于“定朓朒”的计算

在求得平朔时刻的太阳改正值之后，《皇极历》采取的步骤是先加入平朔时刻，如其术曰：

> 以月朔弦望会日所入迟速定数，亦变从转余，乃速加迟减其经辰所入余，即各平会所日余。

即有：

$$平会所入日余 = 经辰所入余 \pm 会日所入迟速定数 \qquad (13\text{-}3\text{-}3)$$

需要指出的是公式（13-3-3）右端“经辰所入余”和“迟速定数”均已变为以近点月分母（2263）为法度，这种分母的转换，历术中称为“变从转余”，例如上弦月龄为 $7\dfrac{475\frac{1}{2}}{1242}$，“变从转余”则有 $7\dfrac{865\dfrac{1160\frac{3}{4}}{1242}}{2263}$，此即术文中所言“因朔辰所入，每加日七余八百六十五秒千一百六十太，秒满日法成余，亦得上弦”。

根据公式（13-3-3）加入太阳改正后的平朔时刻，再求月亮改正，《皇极历》的算法是：

> 推朔弦望定日术：各以月平会所入之日加减限，限并后限而半之，为通率；又二限相减，为限衰。前多者，以入余减终法，残乘限衰，终法而一，并于限衰而半

之；前少者，半入余乘限衰，亦终法而一，减限衰。皆加通率，入余乘之，终法而一[1]，所得为平会加减限数。其限数又别从转余为变余，朓减朒加本入余。限前多者，朓以减与未减，朒以加与未加，皆减终法，并而半之，以乘限衰；前少者，亦朓朒各并二入余，半之，以乘限衰；皆终法而一，加于通率，变余乘之，终法而一。[2] 所得以朓减、朒加限数，加减朓朒积而定朓朒。乃朓减、朒加其余会日所入余，满若不足，进退之，即朔弦望定日及余。

术文可分为三段。第一段是计算“加减限数”，即不足一日部分的月亮改变量：记 Δ_1 为“（前）限”、Δ_2 为“后限”，术文中通率 $=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$；限衰 $=\Delta_1-\Delta_2$ 或 $\Delta_2-\Delta_1$，则“前多”时

$$限数=\left[通率+\frac{1}{2}\left(\frac{终法-入余}{终法}\times限衰+限衰\right)\right]\times\frac{入余}{终法} \qquad (13\text{-}3\text{-}4\ (a))$$

“前少”时

$$限数=\left[通率-限衰+\frac{1}{2}\frac{入余}{终法}\times限衰\right]\times\frac{入余}{终法} \qquad (13\text{-}3\text{-}4\ (b))$$

若令 $t=\frac{入余}{终法}$，则“前多”时的公式的形式同于公式（13-3-1（a）），“前少”时的公式同于公式（13-3-2（a））。这里，$L=1$。此时此二式亦可合为一式：

$$平会加减限数=t\Delta_1+\frac{1}{2}t(t-1)(\Delta_2-\Delta_1) \qquad (13\text{-}3\text{-}5)$$

第二段是将第一次求得的“限数”作为“变余”，以“变余”为自变量求其改变量——“变率”，即术文中的“所得”。尔后视月速变化的“朓”、“朒”加减第一次的“限数”，即进行二次修正。刘焯叙述极为简略，术意隐秘不明，纪志刚有详细阐释。[3] 大意是

$$\begin{aligned}朓：&\frac{1}{2}\{(终法-入余)+[终法-(入余-变余)]\}\frac{限衰}{终法}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{终法-入余}{终法}\times限衰+\frac{(终法-入余)+变余}{终法}\times限衰\right]\\朒：&\frac{1}{2}\{(终法-入余)+[终法-(入余-变余)]\}\frac{限衰}{终法}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{终法-入余}{终法}\times限衰+\frac{(终法-入余)-变余}{终法}\times限衰\right]\end{aligned}$$

令 $t_0=\frac{变余}{终法}$，化简得：

$$\begin{aligned}“变率”(朓)&=\left[通率+\frac{1}{2}\left(\frac{终法-入余}{终法}+\frac{终法-入余+变余}{终法}\right)限衰\right]\frac{变余}{终法}\\&=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t_0(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)+\frac{t_0^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2) \qquad (13\text{-}3\text{-}6(a))\end{aligned}$$

---

① “终”，原文讹作“日”，纪志刚校正。

② “终”，原文讹作“日”，纪志刚校正。

③ 纪志刚，刘焯《皇极历》定朔算法分析，见：李迪主编，数学史研究文集，（四），1996，内蒙古大学出版社。又见：纪志刚，刘焯二次内插算法及其在唐代的历史演变，西北大学学报（自然科学版），1995，（2）。

$$“变率”(朓) = \left[通率 + \frac{1}{2}\left(\frac{终法 - 入余}{终法} + \frac{终法 - 入余 - 变余}{终法}\right)限衰\right]\frac{变余}{终法}$$

$$= t_0\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + t_0(1-t)(\Delta_1 - \Delta_2) + \frac{t_0^2}{2}(\Delta_1 - \Delta_2) \qquad (13\text{-}3\text{-}6\ (\text{b}))$$

第三段是对“限数”进行二次修正，并求“月亮改正”和“朔弦望定日余”。“限数”的修正视“朓”、“朒”而有不同。“朒”时修正：“限数” − “变率”；“朒”时修正：“限数” + “变率”。

$$“限数” = t\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + t\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{1}{2}t(1-t)(\Delta_1 - \Delta_2)$$

将公式（13-3-6（a）（b））变形为

$$“变率” = t_0\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + t_0\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{1}{2}(t_0 - 2t_0t \pm t_0^2)(\Delta_1 - \Delta_2)\ (“朓”：+；“朒”：-)$$

这样，
$$“限数” - “变率”(“朓”) = (t - t_0)\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + (t - t_0)\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{1}{2}(t - t_0)[1 - (t - t_0)](\Delta_1 - \Delta_2) \qquad (13\text{-}3\text{-}7\ (\text{a}))$$

$$“限数” + “变率”(“朒”) = (t + t_0)\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + (t + t_0)\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{1}{2}(t + t_0)[1 - (t + t_0)](\Delta_1 - \Delta_2) \qquad (13\text{-}3\text{-}7\ (\text{b}))$$

同理，“前少”时“变率”为：朓：$t_0\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - t_0(\Delta_1 - \Delta_2) + \left(t_0t - \frac{t_0^2}{2}\right)(\Delta_1 - \Delta_2)$

朒：$t_0\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - t_0(\Delta_1 - \Delta_2) + \left(t_0t - \frac{t_0^2}{2}\right)(\Delta_1 - \Delta_2)$

修正后的“限数”为：

$$朓：(t - t_0)\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - (t - t_0)(\Delta_2 - \Delta_1) + \frac{(t - t_0)^2}{2}(\Delta_2 - \Delta_1) \qquad (13\text{-}3\text{-}8\ (\text{a}))$$

$$朒：(t + t_0)\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - (t + t_0)(\Delta_2 - \Delta_1) + \frac{(t + t_0)^2}{2}(\Delta_2 - \Delta_1) \qquad (13\text{-}3\text{-}8\ (\text{b}))$$

若令

$$T = t \pm t_0\ （朓 -，朒 +）$$

则公式［13-3-7（a）（b）］、公式［13-3-8（a）（b）］可以统一为

$$T\Delta_1 + \frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2 - \Delta_1)$$

这说明，新自变量 $T(t \pm t_0)$ 的改变量形式与原“限数”的形式［见公式（13-3-5）］是一致的。但是，注意到这里的 t_0 正是原先的“限数”，即第一次插值。因此，皇极历二次修正结果的数学原理，就是把第一次插值结果做一次变量替换回代于原式再作一次插值运算，这一思想与现代逐次插值方法几相一致。最后，月亮改正 =“朓朒积”±｛“限数”±“变率”｝(朓 −，朒 +)。即有

$$f(n+T) = f(n) \pm \left[T\Delta_1 + \frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2 - \Delta_1)\right]$$

这样，定朔时刻的计算公式为

$$定朔日余 = 平朔日余 \pm 太阳改正\begin{pmatrix}迟 & - \\ 速 & +\end{pmatrix} \pm 月亮改正\begin{pmatrix}朓 & - \\ 朒 & +\end{pmatrix}$$

二　李淳风《麟德历》晷影算法[①]

李淳风等在《隋书·天文志》、《周髀算经注释》中批评了以前的历法沿用《周礼》冬夏二至晷影陈旧数据之陋习，指出《周髀》二十四节气晷影之均差“是为天体正平，无高卑之异，而日但南北均行，又无升降之殊”所致。他认为“欲求至当，皆依天体高下远近修规以定差数。自霜降毕于立春，升降差多，南北差少。自雨水毕于寒露，南北差多，升降差少。依此推步，乃得其实”。[②]

经过多年的观测，李淳风在《麟德历》中给出了新的二十四节气晷影表如表13-3-1所示。《旧唐书·历志二》所列“日中影”、“陟降率”有9处讹误，根据李俨《中算家的内插法研究》校正。

表13-3-1　《麟德历》二十四节气晷影（单位：尺）

中气	日中影	陟降率	中气	日中影	陟降率
冬至	12.75	陟［0.47］	夏至	1.49	降0.15
小寒	12.28	陟［1.13］	小暑	1.64	降0.34
大寒	11.15	陟［1.53］	大暑	1.98	降0.51
立春	9.62	陟1.55	立秋	2.49	降0.81
雨水*	［8.07］	陟1.53	处暑	［3.30］	降0.94
惊蛰	6.54	陟［1.21］	白露	［4.24］	降1.09
春分	5.33	陟1.09	秋分	5.33	降1.21
清明	［4.24］	陟0.94	寒露	6.54	降1.53
谷雨	3.30	陟0.81	霜降	8.07	降1.55
立夏	［2.49］	陟0.51	立冬	9.62	降1.53
小满	1.98	陟0.34	小雪	11.15	降1.13
芒种	1.64	陟0.15	大雪	12.28	降0.47

*麟德历以惊蛰、雨水为序。

在二十四节气晷影表之下，李淳风给出了推求一年中每日日中影长方法。究其旨意，乃是刘焯二次插值算法的应用。其术共分求恒气初日影泛差术、求恒气初日影定差术、求次日影差术、求恒气日中影定数术、求次日中影等五段。详释如下。[③]

---

① 本节参阅纪志刚，麟德历晷影计算方法研究，自然科学史研究，1994，4（13）：316～325。

② 唐·李淳风等，周髀算经注释，《周髀算经》，刘钝、郭书春点校，见：《算经十书》，郭书春、刘钝点校。辽宁教育出版社，1998年，第26页。繁体字修订本，台湾九章出版社，2001年，第57页。

③ 后晋·刘昫，旧唐书·历志二，中华书局，1975年。

（一）求恒气初日影泛差术

见所求气陟降率（Δ_1），并后气率（Δ_2），半之，十五而一，为泛末率。又二率相减，余，十五而一，为总差。前少，以总差减泛末率；前多，以总差加泛末率。加减泛末率讫，即为泛初率。

此处，李淳风均取每气长度为15日，设陟降率为Δ_1，后气率为Δ_2，有泛末率 $=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$，总差 $=\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15}$，泛初率 = 泛末率 ± 总差 $=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15}$（$\Delta_1>\Delta_2$：+，$\Delta_1<\Delta_2$：－）。

术文自注曰："其后气无同率，因前末率即为泛初率，以总差减初率，余为泛末率。""后气无同率"系指芒种、大雪二气，提出了此二气泛末率的计算方法。即有

$$泛末率_{芒种}=\frac{1}{15}\frac{\Delta_{小满}+\Delta_{芒种}}{2}-\frac{1}{15}(\Delta_{小满}-\Delta_{芒种})$$

$$泛末率_{大雪}=\frac{1}{15}\frac{\Delta_{小雪}+\Delta_{大雪}}{2}-\frac{1}{15}(\Delta_{小雪}-\Delta_{大雪})$$

（二）求恒气初日影定差术

求恒气初日影定差术曰：

十五除总差，为别差。半之为限差。① 前少者，以限差加泛初、末率；前多者，以限差减泛初、末率。加减泛初、末率讫即为定初、末率，即恒气初日影定差。

据术文，

$$别差=\frac{1}{15^2}|\Delta_1-\Delta_2|，限差=\frac{1}{2}\frac{1}{15^2}|\Delta_1-\Delta_2|$$

$$初日影长定差=泛初率\mp限差（\triangle_1>\triangle_2：－。\triangle_1<\triangle_2：+）$$

$$=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{1}{15}|\Delta_1-\Delta_2|\mp\frac{1}{2}\frac{1}{15^2}|\Delta_1-\Delta_2|$$

（三）求次日影差术

求次日影差术曰：

以别差，前少者加初日影定差；前多者减初日影定差，加减初日影定差讫，即为次日影定差。以次积累②，即各得所求。

据术文：

$$次日影长定差=\underbrace{\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{1}{15}|\Delta_1-\Delta_2|\mp\frac{1}{2}\frac{1}{15^2}|\Delta_1-\Delta_2|}_{初日影定差}\mp\underbrace{\frac{1}{15^2|\Delta_1-\Delta_2|}}_{别差}$$

① 《旧唐书 · 历志二》脱"为限"前之"半之"，后之"差"字，纪志刚校补。《历志》校勘记云："据下文及《新旧唐书合钞》卷四二《历志》，下'为'字为衍文，当删。"实际上"为限"下脱一"差"字，下文两处以"限差"入算可证。"为"非衍字；再据算理分析，"为限"前脱"半之"二字。李俨未删"为"字，却以"别差"为"限差"，遂导致对李淳风晷影算法公式复原的失误。

② "以别差"，原文"别"下衍"定"字，"以次积累"，"累"下衍"岁"字，纪志刚校删。

术文“以次积累”即累以“别差”加或减“初日影定差”。如此求得第 t 日影长定差 $\delta(t)$：

$$\delta(t)=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{1}{15}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{1}{2}\frac{2t-1}{15^2}(\Delta_1-\Delta_2)(\Delta_1>\Delta_2) \qquad (13\text{-}3\text{-}9\ (a))$$

或

$$\delta(t)=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-\frac{1}{15}(\Delta_2-\Delta_1)-\frac{1}{2}\frac{2t-1}{15^2}(\Delta_2-\Delta_1)(\Delta_1<\Delta_2) \qquad (13\text{-}3\text{-}9\ (b))$$

（四）求恒气日中影定数术

求恒气日中影定数术曰：

置恒气小余，以半总减之，余为中后分。不足减者反减半总，余为中前分。置前后分，影定差乘之，总法而一，为变差。冬至后，午前以变差加气影，午后以变差减气影。夏至后，午前以变差减气影，午后以变差加气影。冬至一日，有减无加；夏至一日，有加无减。加减讫，各其恒气日中定影。①

表13-3-1中所列影长为恒气日中影长，而恒气时刻多不在日中。这样，恒气时刻的影长应作必要的修正。李淳风设计的修正方法为

$$\text{恒气日中定影}=\text{测算影长}\pm\frac{|\text{恒气小余}-670|}{1340}\times\text{初日影定差} \qquad (13\text{-}3\text{-}10)$$

其中，“恒气小余”即平气时刻不足一日部分（t），670即“半总”（总法1340之半），亦即日中时刻。

设在时刻 t（$0<t\leqslant 1340$）时，影长为 $f(t)$，假定相邻两日影长变化是均匀的，记 t_0 为日中，故有

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{f(t_0+1340)-f(t_0)}=\frac{t-t_0}{(t_0+1340)-t_0}$$

由此得

$$f(t)=f_0+\frac{t-t_0}{1340}[f(t_0+1340)-f(t_0)] \qquad (13\text{-}3\text{-}11)$$

公式（13-3-11）中 $t-t_0$ 即相应于术文中“前后分”；$f(t_0+1340)-f(t_0)$ 相应于“影定差”。这样，

$$\text{“变差”}=\frac{t-t_0}{1340}[f(t_0+1340)-f(t_0)]$$

冬至后晷影渐短，夏至后晷影渐长，再考虑到 t 与 t_0 的时距来决定“变差”符号。

（五）求次日中影

求次日中影术曰：迭以定差陟减降加恒气日中定影，各得次日中影。

术文最后给出一气内每日日中影长的计算方法：

$$\text{次日中影}=\text{恒气日中定影}\pm\sum\text{定差}\qquad(\text{陟：}-\text{。降：}+) \qquad (13\text{-}3\text{-}12)$$

下面导出公式（13-3-12）的代数形式，记 $f^*(a)$ 为由公式（13-3-10）确定的“恒气

① 此四“变差”之后之“加”，原文均误为“减”，“减”均误为“加”，纪志刚校正。

日中定影”，所谓“迭以定差陟减降加”即计算 $\sum\delta(t)$，由前公式（13-3-9（a））及（13-3-9（b））：

$$\sum_{1}^{t}\delta(k) = \frac{t}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{15}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{1}{2}\frac{t^2}{15^2}(\Delta_1-\Delta_2)(\Delta_1>\Delta_2)$$

$$\text{或} = \frac{t}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-\frac{t}{15}(\Delta_2-\Delta_1)-\frac{1}{2}\frac{t^2}{15^2}(\Delta_2-\Delta_1)(\Delta_1<\Delta_2)$$

注意到在“前多”（$\Delta_1>\Delta_2$）或“前少”（$\Delta_1<\Delta_2$）时，$\Delta_1-\Delta_2$ 可以改变式前符号，则两式可以合为一式。如此，各日影长公式为

$$f(t) = f^*(a) \pm \left[\frac{t}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-\frac{t}{15}(\Delta_1-\Delta_2)+\frac{1}{2}\frac{t^2}{15^2}(\Delta_1-\Delta_2)\right] \quad (13\text{-}3\text{-}13)$$

（陟：-。降：+）；公式（13-3-13）正是刘焯二次内插公式。

查四分、景初、元嘉、大明诸历，虽列有二十四节气晷影，却无每日日中晷影算法。李淳风之法当属新创。对于此点，李淳风自己于上述术文之末特以小字说明：

> 后汉及魏宋历，冬至日中影一丈三①尺，夏至一尺五寸，于今并短，各须随时影校其陟降，及气日中影应二至率，他皆仿此。前求每日中影术，古历并无，臣等创立斯法也。

李淳风每日晷影算法有着继往开来的重要意义。一方面，他继承了刘焯二次插值算法，首先正确地应用于日中影长计算。另一方面，他开创了以数学方法研究晷影计算的新局面。

三　一行《大衍历》的九服晷影算法

（一）九服晷影算法

在《大衍历》中，一行给出了太阳天顶（T）为 0 ~ 81 度时，8 尺表影长（L）的数值表格。该表格的天文学和数学含义是

$$L = 8 \times \tan T$$

1982 年，古克礼（Christopher Cullen）首先指出《大衍历》“步晷漏术”是一张“正切函数表”②，后来刘金沂等又进一步论述。③ 我们知道，中国古代数学一般不涉及角度度量和计算，因此“正切函数表”就引起了人们的普遍关注。另外，由于术文存在脱漏，虽经学者们多方校订仍未能完善，对术文的复原也是莫衷一是。重要的转机出现在曲安京发现《高丽史》卷五十所载唐《宣明历》的相关术文几乎与《大衍历》一致，特别重要的是此《宣明历》记载 45 度和 61 度增率值正好弥补了《大衍历》的缺漏。曲安京对《大衍历》相应术文做出的复原澄清了此前的种种谜团，而更加可信。下面所引术文，则依据曲安京校正。④

---

① “三”，原文误做“二”，纪志刚校正。

② Christopher Cullen，An Early Century Chinese Tableof Tangents，*Chinese Science*，1982，5.

③ 刘金沂、赵澄秋，唐代一行编成世界上最早的正切函数表，《自然科学史研究》，1986，5（4）：298 ~ 309。

④ 曲安京，大衍历晷影差分表的重构，《自然科学史研究》，1997，16（3）。或见：曲安京著《中国古代历法与数学》第六章第五节“正切函数表及其应用”。

其术曰：南方戴日之下，正中无晷。自戴日之北一度，乃初数千三百七十九。自此起差，每度增一，终于二十五度，计增二十六分。又每度增二，终于四十度。又每度增六，终于四十四度，增六十八。又起四十五度，增一百四十八分。又每度增二，终于五十度。又每度增七，终于五十五度。又每度增十九，终于六十度，增百六十。又每度增三十三，终于六十五度。又每度增三十六，终于七十度。又每度增三十九，终于七十二度。增二百六十。又度增四百四十。又度增千六十。又度增千八百六十。又度增二千八百四十。又度增四千。又度增五千三百四十。各为每度差。因累其差，以递加初数，满百为分，分十为寸，各为每度晷差。又累其晷差，得戴日之北每度晷数。

关于一行如何推算九服晷影、漏刻和食差，属于天文学史探讨的范围，陈美东在《中国科学技术史·天文学卷》中已有详细论述。

(二) 一行的五次差分表

曲安京发现在《大衍历》正切函数表中蕴涵着一个高达五次的差分表（表13-3-2）。这是在中国古代历法中发现的次数最高的差分表，它充分地说明了一行在设计晷影计算方法时所做的数学努力。

表13-3-2　《大衍历》正切函数表中的五次差分表

z	l	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
73	246 147	13 354	1098	440	620	180
74	259 501	14 452	1538	1060	800	180
75	273 953	15 990	2598	1860	980	180
76	289 943	18 588	4458	2840	1160	180
77	308 531	23 046	7298	4000	1340	
78	331 577	30 344	11 298	5340		
79	361 921	41 462	16 638			
80	403 563	58 280				
81	461 843					

四　边冈《崇玄历》对黄赤道差与月亮黄纬的计算

(一) 黄赤道差的计算公式

中国古代历法中的黄道度 l 与赤道度 a 皆从冬至点按天球上逆时针方向度量，它们与黄经 λ 和赤经 α 的关系分别为 $l=\frac{\pi}{2}-\lambda$，$a=\frac{\pi}{2}-\alpha$，并称 $l-\alpha=a-\lambda$ 为黄赤道差。

后汉《四分历》上已有黄赤道差的记载，当时叫“进退差”，进差最大是三度，退差最

大是四度，故知《四分历》的进退差尚无一定规律。张衡提出三气一节差三度，即黄赤差的变化在进三度和退三度之间，后为刘洪引入历法计算，沿用了数百年，直到刘焯《皇极历》始指出它的变化规律，提出了黄赤道差的计算方法。①

《皇极历》推黄道数如下：

> 准冬至所在为赤道度，后于赤道四度为限，初数九十七，每限增一，以终百七；其三度少弱，平，乃初限百七，每限损一，终九十七，春分所在；因为百七，每限损一，以终九十七，亦三度少弱，平，乃出限九十七，每限增一，终百七，夏至所在；又加冬至后法得秋分所在，又加春分后法得冬至所在数。各以数乘其限度百八十而一，累而总之，即黄道度也。

按严敦杰疏解，刘焯术文相应算法如下：

$$l-a=\frac{a}{4}\left[\frac{-97}{450}+\frac{\frac{a}{4}-1}{2}\left(\frac{-1}{450}\right)\right]=\frac{1}{10}\left[\frac{a}{180}\left(-97+\frac{4-a}{8}\right)\right] \qquad (13\text{-}3\text{-}14)$$

其中，$\left(-97+\frac{4-a}{8}\right)$即术文内的“限度”，$a$ 为术文内的“所在数”（赤道积度），故称“各以数乘其限度百八十而一”。又《皇极历》内每将$\frac{1}{10}$省略（“文不著母者，皆十为法”）故上述初数（-97），与公差（-1）下分母为450。

事实上，《皇极历》“推黄道度”算法乃是等差级数求和方法的应用。如于公式 $S_n=n\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right)$中令 $n=\frac{a}{4}$,初数 $a_1=\frac{-97}{450}$,$d=\frac{-1}{450}$，即得公式（13-3-14）。

在《崇玄历》之前，唐代各历基本上采用刘焯方法将某象限内的赤道度等分若干段，分别给出各结点的黄赤道差值。边冈在《崇玄历》中首次布列了此数的算式，其术文称：

> 凡冬至赤道日度及约余，以减其宿全度，乃累加次宿，皆为距后积度。满限九十一度三十一分三十七，小分去之，余半已下为初；已上，以减限，为末。皆百四十四乘之，退一等，以减千三百一十五，所得以乘初、末度分，为差。又通初、末度分，与四千五百六十六先相减后相乘，千六百九十除之，以减差，为定差，再退为分②。

中国古代以太阳运行一周天的日数为周天度分，《崇玄历》一周天 $=365\frac{5}{19}$度，合一象限为91.3158度，约等于91.32度。术文中之距后积度，是指任意时刻太阳距冬至点的赤道积度，由于各象限黄赤道差对称，因此，以累减象限度分91.3157的方法令其变换为第一象限之情形（$a<91.3157$）。又由于黄赤道差 $l-a$ 在一象限中被认为是镜面对称，因此只需要计算 $0\leqslant a\leqslant 45.66=\frac{91.32}{2}$度的情形；若 $a>45.66$ 度时，以91.32反减之，余数在末限。

按术文所得“差”为

$$f_1(a)=\frac{a\left(1315-\frac{144}{10}a\right)}{100}\text{分}=\frac{a(91.32-a)}{1000/14.4}\text{度} \qquad (13\text{-}3\text{-}15)$$

① 严敦杰，中国古代的黄赤道差计算法，科学史集刊，第一集，科学出版社，1958年，第47～58页。

② 北宋·欧阳修等，新唐书·历志六，中华书局，1976年。

其后，“通初、末度分”相当于取 $100a$，得

$$f_2(a) = \frac{100a(4566 - 100a)}{100 \times 1690}\text{分} = \frac{a(45.66 - a)}{1690}\text{度} \qquad (13\text{-}3\text{-}16)$$

由此所得“定差”，即黄赤道差：

$$l - a = \frac{a(91.32 - a)}{10000/144} - \frac{a(45.66 - a)}{1690}\text{度} \qquad (13\text{-}3\text{-}17)$$

其中，$0 \leqslant a \leqslant 45.66$。公式（13-3-17）显系公式（13-3-15）与公式（13-3-16）之迭加。比较公式（13-3-15）、公式（13-3-16）、公式（13-3-17），可以发现它们之间的某种奇妙关系（图13-3-2，依曲安京绘）。f_1（a）是在［0，91.32］区间上对 $l-a$ 的第一次逼近，由 f_1（0）$=f_1$（91.32）$=0$，可知 f_1（a）$=\frac{a\ (91.32-a)}{b_1}$，查《大衍历》黄赤道差，知其最大值为 $a=45$ 度时有 $l-a)_{\max}=3$ 度。

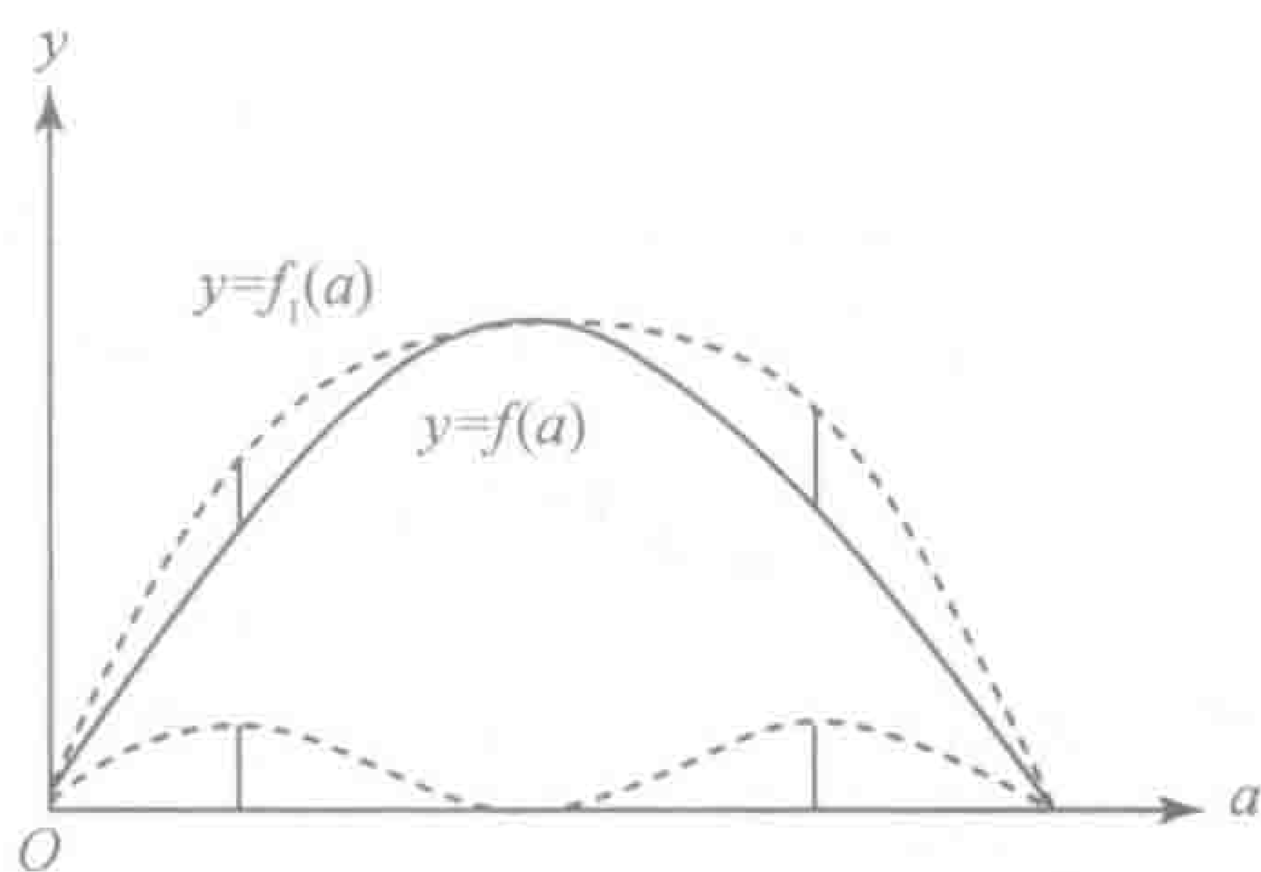


图 13-3-2　崇玄历黄赤道差

令 $\max f_1$（a）$=f_1$（45.66）$=3$ 度，则有 $\frac{1}{b_1}=\frac{1}{45.66^2}=0.0014390\approx\frac{14.4}{10000}$。由此即得 f_1（a）。插值点为 0，45.66，91.32。f_2（a）为［0，45.66］区间上的第二次逼近，令 f_2（0）$=f_2$（45.66）$=0$，可知 f_2（a）$=\frac{a\ (91.32-a)}{b_2}$。

《崇玄历》之前的唐代历法，均以每 5 度为一段给出黄赤道差值，按［0，45.66］区间上接近中点之数可取 $a=20$ 或 25，查《大衍历》，$a=20$ 度时，得黄赤道差 $=1.75$ 度，而

$$f_1(20) = \frac{20 \times (91.32 - 20)}{10000/144} = 2.0540\text{ 度}$$

两者之差为 $2.0540-1.75=0.3040$ 度，f_2（a）之逼近修正数，即应弥补此一误差，令 f_2（20）$=0.3040$ 即得：$b_2=\frac{20\times\ (45.66-20)}{0.3040}=1688\approx1690$；于是，［0，45.66］区间上黄赤道差公式即如公式（13-3-17）所示，由对称性，立知［45.66，91.32］区间上相应的算式。

由于 f_1（a）与 f_2（a）皆为抛物线，故其迭加仍为抛物函数，于是，以 0，20，45.66 为插值点或以 45.66，71.32，91.32 为插值点的分段抛物插值公式，通过两个简单函数的迭加获得。

（二）　边冈《崇玄历》月亮黄纬计算公式

边冈于《崇玄历》中所构造的月亮极黄纬公式，是他对相减相乘法及函数迭加法又一个漂亮的应用。其术称：

如一象益下，为在少象；已上者，（反）减［半］半交，余为入老象。皆七十三乘之，退一等，用减千三百二十四，余以乘老、少象度及余，再退为分，副之。在少象三十度已下，老象六十一度已上，皆与九十一度先相减后相乘，五十六除为差。若少象三十度以上，反减九十一度，及老象六十［一］度已下，皆自相乘，

百［十］五除，为差。皆以减副，百约为度，即朔望夜半月去黄道度分。

《崇玄历》取一象 =90.9341 度 =91，半交 =181.8682 度≈182。设 n 为所求时刻月亮距黄白交点的度分，则当 $n<91$ 度时，为在少象；当 $91<n<182$ 度时，取 $n-91$ 为在老象。

由于$\frac{1324}{182}=7.2747\approx 7.3$，依术得“副之”的函数为

$$f_1(n) = \frac{\left(1324-\frac{73}{10}n\right)\cdot n}{10000} = \frac{(182-n)n}{10000/7.3}\text{度} \qquad (13\text{-}3\text{-}18)$$

此式显然是区间［0，182］插值函数，其中$\frac{7.3}{10000}$，可于 $f_1(n)=\frac{(182-n)n}{b_1}$中，令 $f_1(91)=6$，解出$\frac{1}{b_1}=\frac{6}{91^2}\approx\frac{7.3}{10000}$。经过简单的试算，很容易发现若直接以 $f_1(n)$ 去计算整个区间［0，182］上的月去黄道度，则产生较大的误差。例如，取 $n=30$ 度时，实测值约为 $2\frac{118}{120}$度（《大衍历》）。而由（13-3-18）式算得 $f_1(30)\approx 3.308=\frac{397}{120}$度，误差为 $f_1(30)-f(30)=\frac{39}{120}$；因此，需要在［0，30］上即“少象三十度已下”需再构造一个修正函数 $f_2(n)$，且 $f_2(n)$ 满足 $f_2(0)=f_2(30)=\frac{39}{120}$。显然，边冈构造的“差”为

$$f_2(n) = \frac{(91-n)n}{5600};0\leqslant n\leqslant 30$$

式中的5600，由$\frac{1}{b}=\frac{39}{120\times30\times61}\approx\frac{1}{5600}$确定。同理，在对称区间［152，182］上亦有

$$f_2(n) = \frac{(182-n)\cdot(n-91)}{5600};152\leqslant n\leqslant 182$$

以 $f_2(n)=\frac{(91-n)\cdot n}{5600}$修正 $f_1(n)$，在［0，30］上吻合较好，而在［30，91］上 $f_2(n)$ 略嫌大了一些。例如，$f_1(60)-f_2(60)=4.984$ 度，而大衍历所取值则为 $f(60)=5.167$ 度，两者相差达 0.183 度。因此，边冈又在［30，152］上重新构造一个修正函数 $f_2(n)$。显然，这个 $f_2(n)$ 要满足：$f_1(91)=0$，$f_2(30)=f_2(152)=\frac{61\times30}{5600}$；自然，$f_2(n)$ 可选为：$f_2(n)=\frac{(91-n)^2}{b}$。式中 $b=\frac{61^2\times5600}{61\times30}\approx 11387$，因此 b 值可约取为 11400。但上述术文中却以“百五除”，按以上计算，应当校改为“百十四除”才能保证有较好的衔接。

综上所述，边冈的月亮极黄纬算法可以概括一个算式：

$$F(n = f_1(n) - f_2(n) = \begin{cases}\frac{(182-n)\cdot n}{10000/7.3}-\frac{(91-n)\cdot n}{5600},0\leqslant n\leqslant 30\\ \frac{(182-n)\cdot n}{10000/7.3}-\frac{(91-n)^2}{11400},30\leqslant n\leqslant 152\\ \frac{(182-n)\cdot n}{10000/7.3}-\frac{(182-n)\cdot(n-91)}{5600},152\leqslant n\leqslant 182\end{cases}$$

此式表明边冈月亮极黄纬算法，实质是在［0，182］的区间上构造了一个分段抛物线插值

迭加函数。曲安京绘出了 $F(n)$ 的函数图像，如图 13-3-3 所示。边冈应作为一位重要的数学家而载入史册。[①]

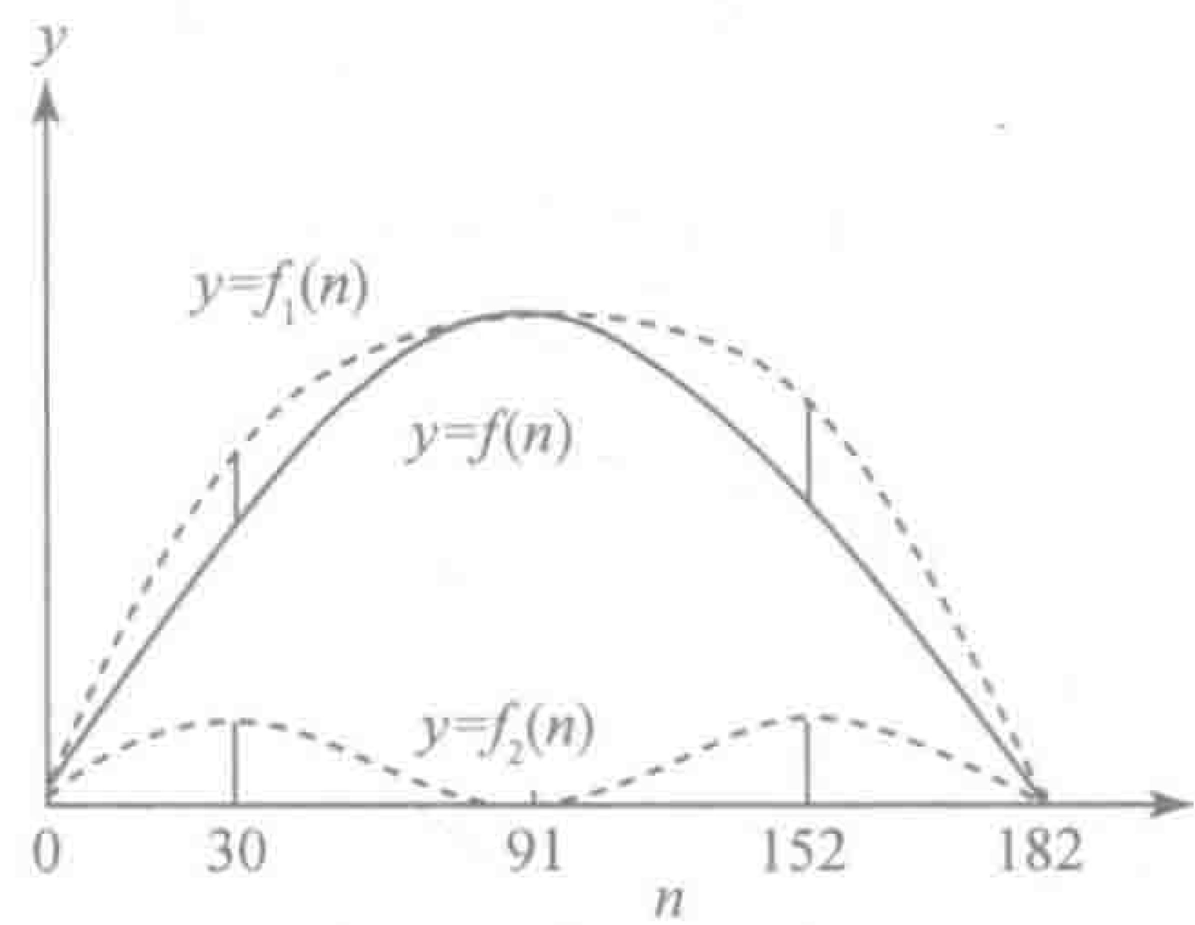


图 13-3-3 《崇玄历》月亮极黄纬迭加函数图示

① Qu Anjing, Bian Gang, A mathematician of the 9th century, Historia Scientiarum. 1996, 6 (1): 17～30.

第十四章　隋唐时期中国和朝鲜、日本、印度的数学交流

第一节　中国和朝鲜的数学交流

朝鲜在历史上与中国一直保持着极为密切的关系，其文化和科学技术都深受中国的影响。起码自西汉起中国的天文历法和数学也先后传入朝鲜半岛，并产生了持久的影响。中国天文历算传入朝鲜，始于西汉时期。

早期中国移民是其主要传播者。据《后汉书·循吏列传》记载，西汉初年"诸吕作乱"时，琅琊不其人王仲"好道术、明天文"，为避战乱而移居朝鲜半岛。此后朝鲜元封三年（公元前108）汉武帝灭卫氏朝鲜，使朝鲜与中国的联系更加紧密。王仲的八世孙王景，居于"乐浪郡讷邯县"，少学《易经》，又博览群书，"好天文术数之事，沉深多伎艺"。王氏祖孙几代移民无疑将汉代的天文、数学传播到了朝鲜半岛。4～7世纪，朝鲜半岛形成高句丽、百济、新罗三国鼎立的局面，与中国的文化联系越来越密切。朝鲜半岛已较广泛地接受了汉文化，使用汉字、引进汉典，成为汉字文化圈的成员。公元372年，高句丽始设太学，以汉学为主要教学内容。

历算方面，中国南朝刘宋之《元嘉历》就为当时的百济所采用。《周书·百济传》云：百济"又解阴阳五行。用宋《元嘉历》，以建寅月为岁首"①。百济与日本有着密切的交往，因而也成为中国文化东传日本的重要桥梁。日本最初通过百济引进中国的历算知识。据《日本书纪》记载，在5世纪，一些掌握各种手工技艺和精通汉文的移民从朝鲜南部的百济一带来日本，被称为"渡来人"，他们主要由移居乐浪、带方郡的中国人后裔和百济韩人组成，大都能写会算，掌握特种技能，不仅将各种手工业技术带到了日本，而且其中称做"博士"或"师"的渡来人被朝廷任用担当史部（文部）、藏部、财部的文书记录、涉外文书、会计出纳、税务征收等职。② 包括算术知识、计算技能及历术知识在内的大陆文化传到了日本。据《日本书纪》记载，日本朝廷于公元553年派使者前往百济，要求派遣医博士、易博士、历博士等，并携带"卜书、历本、种种药物"来日本。于是翌年有易博士施德王道良、历博士固德王保林等人从百济来到日本。③

隋唐时期，中国与朝鲜在天文和数学方面的交流进入了一个重要的发展时期。公元676年新罗统一了朝鲜，并仿唐朝于公元682年设立国学，中算书籍与算学制度进入朝鲜。

朝鲜的《三国史记》关于新罗国学记载道：

　　国学属礼部，神文王二年（公元682）置。景德王（公元742）改为大学监。

---

① 唐·令狐德棻，周书，中华书局，1971年。

② ［日］杉本勳，科学史，见：体系日本史丛书，山川出版社，1976年。本编凡引此书，均据此。

③ ［日］《日本书纪》卷十九。

惠恭王（公元764）复故。…或差算学博士若助教一人，以《缀经》、《三开》、《九章》、《六章》教授之。凡学生位自大舍已下至无位。年十五至三十皆充之，限九年。若朴鲁不化者罢之，若才器可成而未熟者，虽逾九年，许在学。位在奈麻，奈麻而后出学。①

其中，《缀经》即《缀术》，而《三开》、《六章》二书在《隋书》、《旧唐书》和《新唐书》中未见著录。但在日本稍早或同期的数学教育中，也采用《六章》、《三开重差》和《九司》等中国未见文献著录的教科书。日本数学史家普遍认为这两部书是由新罗传入日本的，日本的数学教育制度也参考了新罗的算学制度。②

韩国数学史家金容云、金容局对此观点提出了异议。他们指出，新罗的漏刻制度比日本晚设立50余年，算博士官职名的出现也晚于日本。此外三国统一前后新罗与日本是敌对国。因而新罗传入说难以得到支持。他们认为由于大和朝廷的科学技术政策由百济人承担实务，算学当不例外，而历史上精通技术的百济人进出新罗也不乏其例。因而得出《三开》、《六章》、《九司》等是百济人据中国算书重新编写的教科书并分途传入日本和新罗的结论。③ 韩国学者的说法，其理由比较充足。但是他们认为《三开》、《六章》、《九司》出自百济人之手并由百济传入日本、新罗的说法，史料依据却不充分。中朝文献中都没有百济建立算学制度的记载。日本在7世纪末、8世纪初建立算学制度时，百济早已灭亡，采用百济数学教科书之说难以成立。而新罗在唐初与中国文化的交流已日益深入和广泛，具备直接吸收中国章典制度和学术文化的良好条件和能力，且有不少留学生到唐朝学习。新罗统一三国后建立的算学制度，主要仿照唐的算学体制，并根据新罗的具体情况加以变通而成。说新罗的算学教科书传自百济，同样缺乏说服力。因此《三开》、《六章》的作者出自何人之手，有待进一步探讨。

朝鲜长期直接采用中国的历法。《三国史记》卷七说："文武王十四年春三月，入唐宿卫大奈麻德福，传学历术还，改用新历法。"唐高宗麟德二年（公元665）颁布了由李淳风制定的《麟德历》，一直采用到公元728年。新罗天文历法制度也仿照唐朝设立。《三国史记》卷八载，公元692年，新罗僧侣在唐学习历法后归国，向新罗国王"上天文图"。卷三十八云，公元718年，新罗仿唐建立漏刻制度，"漏刻典，圣德十七年始置，博士六人，史一人。"卷九云，公元749年，新罗又仿唐"置天文博士一员，漏刻博士六员"。因此新罗天文机构逐步完善。公元766～779年，新罗学生金岩赴唐求学，在唐学习历法，回国后，任新罗司天大博士。

《高丽史·历志》载："高丽不别治历，承用唐《宣明历》。自长庆壬寅下距太祖开国殆逾百年，其术已差。前唐已改历矣，自是历凡二十二改，而高丽犹驯用之。至高丽忠宣改用元《授时历》。"④ 从新罗开始直至高丽忠宣王时期（1309～1313），朝鲜采用唐徐昴《宣明历》长达400年之久。

朝鲜采用的历法都是中国古代优秀的历法，其中包含了许多重要的数学知识，如其中应

---

① ［朝］全富轼，三国史记，卷三十八，"杂志第七"。

② ［日］日本学士院明治前日本科学史刊行会，明治前日本数学史，第一卷，野间科学医学研究资料馆，1979年新订版，第3～5页。

③ ［韩］金容云、金容局，韩国数学史（日文），桢书店，1978年，第47，48页。

④ 郑麟趾，高丽史，志四，历一。

用调日法、二次内插法、差分表及相当于正切函数表的数表等都是当时世界上先进的数学方法。这些数学知识也随中国历法一同传入了朝鲜半岛。

综上所述，隋唐时期中朝的天文历法和算学交流，对朝鲜半岛数学和科学的发展具有重要的影响，奠定了朝鲜数学繁荣与进一步发展的基础。

第二节　中国和日本的数学交流

一　中国历算传入日本

中国传统历算最初是经由朝鲜半岛传入日本的。据《日本书纪》记载，日本最早接触中国科学文化的时间在5世纪，一些掌握各种手工技艺和精通汉文的移民从朝鲜南部的百济一带来日本。这些移民将各种手工业技术和中国的算术知识、计算技能及历术知识输入了日本。

在4世纪和5世纪之交，经百济太子之师阿直岐推荐，通达典籍的学者王仁由百济被征聘到日本，为汉典传入日本之始。中国的十进位值制记数法、干支纪年、日法当在这一时期传入了日本。

《日本书记》卷二十二载，推古天皇十年（公元602），又有百济僧人观勒来倭国，“贡历本及天文、地理书并遁甲、方术之书也。是时选书生三、四人，以俾学习于观勒矣。”当时百济采用的是何承天所作的《元嘉历》。《日本书纪》持统四年（公元690）十一月条云：“奉敕始行《元嘉历》与《仪凤历》。”《仪凤历》即唐代李淳风制定的《麟德历》。由于唐仪凤年间（公元676～679）传入新罗，故名。从《日本书纪》的记载看，当时似乎两种历法并用。但两种历法有较大差别，前者采用平朔，后者则采用定朔，同时施行是有困难的。据日本学者的研究，《元嘉历》和《仪凤历》从持统六年到文武元年（公元697）并用了六年，但就日历来说主要是使用《元嘉历》。可以把两历并用的含义理解为，月朔的计算是以《元嘉历》为主，而日食的预报则采用《仪凤历》。

日本从7世纪行用《元嘉历》起，到1684年采日本自己制定的《贞享历》为止采用中国历法历时千年之久。《明治前日本天文学史》将这段时期称为“中国历适用时代”。在《仪凤历》之后，日本还陆续采用过僧一行的《大衍历》、郭献之的《五纪历》、徐昂的《宣明历》，其中《宣明历》在日本行用时间最长，从平安时代至江户时代达823年，可见中国历法对日本影响的深刻和久远。

日本采用的历法也都是中国古代优秀的历法，其中包含了调日法、二次内插法、差分表及相当于正切函数表的表格等重要的数学知识。

隋唐时期中日建立了正式的交往关系，开辟了文化交流的直接通道，中国传统数学和历算知识更多是在隋唐时期中日文化大规模的交流中直接传入日本的。据《日本书纪》和《隋书》等记载，日本先后在公元600、607、608、614年四次派使节去隋朝。[①] 入唐，日本

① 夏应元，相互影响两千年的中日文化交流，见：周一良主编，中外文化交流史，河南人民出版社，1987年，第314页。

将全面吸取先进的唐文化作为一项基本国策，先后任命遣唐史19次，实际到达中国者15次。使团规模庞大，多达500人，其中包括不少留学生和学问僧。留学生（僧）一般在唐停留20年左右，学习包括天文历法和数学在内的中国各种经典和实用之学。他们学成后大都随遣唐史返国。其中最有代表性的人物是吉备真备。杉本勳《科学史》说，吉备真备于公元717年来到中国，在唐17年，专心致志于学业，不仅钻研儒家五经、三史、明法，而且学习算术、天文、历学、兵法、音韵、书法等各种学问，名声远播。他归国后在大学传授中国学问，学生有400人之多。《大衍历》就是由他首次传到日本的。《续日本书纪》载，公元735年"朝臣真备献《唐礼》一百卅卷、《大衍历经》一卷、《大衍历立成》十二卷、测影铁尺一枚、铜律管一部……平射箭十只"。[①] 说明《大衍历》在中国刚刚颁行就传到了日本，公元764年便在日本颁布行用。

日本在大化革新（起始于大化元年，即公元645）后模仿唐朝制度建立起了完备的律令制度。天文历法机构也成为国家不可缺少的组织。朝廷对天文和历算工作十分重视。孝德天皇五年（公元649）始置百官八省，其中有天文博士、历博士、算博士、阴阳博士等。齐明天皇六年（公元660）始作漏刻器。天智天皇时期（公元662～671）设置官吏培养学校，置算博士2人、算生20名。又建天文台、制计时器。持统天皇七年（公元693）建占星台并设置天文博士和天文生。[②] 此时日本已经建立起了比较齐备的天文观测、历法推算和计时制度。天文历法工作由中务省的阴阳寮统管。这是一个相当于唐代太史局的机构。据元正天皇养老二年（公元718）发布的《养老令》，阴阳寮由阴阳头统领，有阴阳师6人，阴阳博士、历博士、天文博士各一人，阴阳生、历生、天文生各10人，漏刻博士2人，守晨丁20人。由此可知它是掌管"天文"、"阴阳"和"历法"三科的机构。此机构虽仿唐制设立，但与唐制又有变通。唐朝的天文、历法、漏刻为太史令属下，而占卜由另一机构太卜署管辖。日本则把二者的功能统括于一个机构之中。

《续日本纪》卷二十载，当时对于阴阳寮学生的教科书有明令规定："天文生者：《天官书》、汉晋《天文志》、三色（家）簿赞、《韩杨要集》；阴阳生者：《周易》、新撰《阴阳书》、《黄帝金匮》、五行大义；历算生者：汉晋《律历议（志）》、《九章》、《六章》、《定天论》。"其中《天官书》是《史记》的，《旧唐书·经籍志》载晋太史令韩杨撰《天文要集》四十卷，《隋书·经籍志》载《定天论》三卷。这一记载表明日本的历算工作与数学密也是不可分。当时规定历算生的必读书目包括：《汉书·律历志》、《续汉书·律历志》（司马彪）、《晋书·律历志》、《九章算术》、《六章》、《周髀算经》、《定天论》等。其中，数学书占了近半数。后来，《大衍历》也成为历算生必读的课本。[③]《日本国见在书目录》[④] 载有《六章》六卷高氏撰，过去日本学者都认为《六章》是新罗的算书。我们认为高氏为北魏数学家高允，后面将进一步论述。可以确定，阴阳寮学生的必读书基本上是由中国传入的著作。

中国历算著作在唐代源源不断传入日本，奠定了日本天文历算的基础，也促进了日本天

---

① 《续日本纪》卷十二"天平7年4月"条。

② 林鹤一，本邦编历史，见：林博士遗著刊行会，《林鹤——博士和算研究录》，东京开成馆，1937年，第546页。

③ 《延喜式》卷二十"大学寮"条。

④ 《日本国见在书目录》，见：《续群书类从》卷八百八十四、杂部卅四。

文历法的发展和演进。遣唐使录事羽栗臣翼于光仁天皇宝龟十一年献《五纪历》。阴阳头兼历博士大春日、朝臣真野麻吕在平安元年（公元857）上奏，《大衍历》施用已久与唐现行历相差悬殊，于是第二年就采用《五纪历》。日本贞观元年（公元859）渤海国来日使臣马孝慎献上《长庆宣明历经》，这是当时唐行用历法的历经。真野麻吕验明这是一部非常优秀的历法，于是从贞观四年开始颁行《宣明历》。①

但当时传入的天文历法知识并不限于日本已经采用的这些历法及与之直接相关的著作。从《日本国见在书目录》可以得知，还有大量的天文历算著作也传到了日本。这些书籍后面将进一步介绍，这里仅介绍其中一条涉及跨文化圈历算交流的史料。

《符天历》（公元780～783）在中国已经失传，但在日本却保存下来一个残抄本。由“日躔立成”末尾的说明可知，这个残本的母本先经宿曜师整理抄写成文，宽喜二年（1230）又约书童重新抄写。江户时宝历六年（1756）经安平叔又之手将原文修补后，收入《天文秘书》，才保留至今。

日本在宽平六年（公元894）废止了遣唐史政策，两国间的官方交往宣告结束，天文历法交流也大受影响。但此后的交流也未完全中断，只是交流形式变为民间渠道，《符天历》再度传日便是证明。

二　早期算学教育制度的引进

日本数学也是通过全面引进中国数学建立起来的。在律令制时代，土地的丈量、调庸征收、财会计账以及大规模的城市规划建设和土木工程都离不开数理知识和计算技术的运用。据《日本书纪》载，孝德天皇在大化二年（公元646）曾下诏书，征集强干聪敏能书算者担任主政、主账。随着律令政治的加强，要求行政官员具备更高的数学素养，进而能够有效的管理各种行政事务。为此，日本在引进中国数学的同时也模仿中国建立起了数学教育机构。

日本早在天智和天武时期（公元662～686）就已设置了数学教育，但是这一制度的正式确立是在发布《大宝律令》的大宝二年（公元702）。《大宝律令》今已散失，但其中大部分内容包含在公元718年发布的《养老令》中。《养老令》的“学令”记载了大学寮的制度，由学令可以了解当时数学教育的情况。《养老令》的注解书《令义解》（公元833年成书）对招生对象的说明如下：

凡大学生，取五位以上子孙及东西史部子为之。若八位以上情愿者听国学生取郡司子弟为之。并取十三以上十六以下聪令者为之。

《养老令》“学令”还规定设置“算博士二人，算生三十人”。对数学教科书的规定如下：“凡算经：《孙子》、《五曹》、《九章》、《海岛》、《六章》、《缀术》、《三开重差》、②《周髀》、《九司》各为一经，学生分经习业。”③

---

① 明治前日本科学史刊行会，明治前日本天文学史，丸善株式会社，1970年，第248～249页。

② 《三开重差》应是一部书，简称为《三开》。盖《令义解》“学令”规定《九章》组试9条，若《三开重差》为二部书，则与试9条矛盾。有的数学史著述将其标点为《三开》、《重差》，有误。

③ 《令义解》卷三，“学令”。

上述9种教科书中，《周髀》、《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《缀术》6种都是中国唐以前的经典算书，并被国子监算学馆确定为教科书。但《六章》、《三开重差》、《九司》等3种在《隋书》、《旧唐书》和《新唐书》中却不见著录。前已指出，在朝鲜的古文献中有《三开》和《六章》的记载。李俨推测："日本所采的或是显庆以前制度。"① 这一推断是有道理的，显庆元年（公元656）算学开始行用李淳风等注释的十部算经，其中包括《缉古算经》。而隋及贞观时所用的少数几种算学教科书从此也被废止不用，《六章》、《三开》可能就在其中之列。

日本算学的考试方式、合格标准的评定也都仿照中国的制度，只是根据日本的国情略有变动。《令义解》云：

其算学生，辨明术理然后为通。试《九章》三条，《海岛》、《周髀》、《五曹》、《九司》、《孙子》、《三开重差》各一条，试九全通为甲，通六为乙。若落《九章》者，虽通六犹为不第。其试《缀术》、《六章》者，《缀术》六条，《六章》三条谓若之《九章》与《缀术》，及《六章》与《海岛》六经，愿受试者亦同令听也试九全通为甲，通六为乙，若落经者谓六章总不通者，也虽通六犹为不第。

由以上记载可知，日本同中国一样都是分二组教学，考试也分组进行。日本第一组的教科书为7种。中国第一组的教科书为8种，其中5种为两国共同使用。日中第二组的教科书都是两种，两国教科书中都有《缀术》，而另一种日本用《六章》，中国用《缉古》。考虑到日本引进的算学制度可能为显庆元年以前中国的算学制度，可以推断，《缉古算经》是从显庆元年开始取代《六章》成为标准教科书的。

为了进一步说明日本算学制度的特点，有必要将日本与中国和新罗三国的算学制度作一综合性的比较。下面将三国算学制度情况的对照列于表14-2-1。

表14-2-1　东亚三国算学制度的比较

内容 \ 国家	日本	中国（唐朝）	新罗
教师编制	博士2人（博士之下有教学人员，定额没有记载）	博士2人（《新唐书·百官志》所记为博士2人，助教1人）	博士或助教1人
学生数额	30	30	
招生对象	五位以上子孙及东西史部子弟	文武八品以下及庶人子	大舍（十七品官位中的十二品官）至无官位人
入学年龄	13～15岁	14～19岁	15～30岁
学习内容（教科书）	第1组：《九章》、《海岛》、《周髀》、《五曹》、《孙子》、《九司》、《三开重差》 第2组：《缀术》、《六章》	第1组：《九章》、《海岛》、《周髀》、《五曹》、《孙子》、《张丘建》、《夏侯阳》、《五经算》兼习《记遗》、《三等数》 第2组：《缀术》、《缉古》兼习《记遗》、《三等数》	《缀术》、《三开》、《九章》、《六章》
学习年限/年	7	7	9

① 李俨，中算输入日本的经过，见：李俨，中算史论丛，第五集，科学出版社，1955年，第170页。

从教师编制及学生名额看，日、中数学教育规模相当，略大于新罗。学生的入学年龄以日本为最小，但与中国比较接近，而与新罗相差很大。新罗的学员以成人为主，有些学员还是国家的行政官员（12 品及以下官员）。从学习内容和形式看，日本与中国都十分接近。中日两国都将算学分成两个组学习。新罗是否分组，尚不清楚。教科书的种类以中国为最多，日本次之，新罗最少。中国除了主课程的十部算经外，还有兼习的两部数学著作。而日本、新罗都没有兼习的科目。新罗的 4 种教科书都包含在了日本的教科书之内，而与中国的教科书只有 2 种相同。学习年限方面，日本与中国相同，都是 7 年，而新罗的学习年限却达 9 年或更长，这大概与新罗招收的学生多数为在职官员有关。

总的来说，尽管日本、新罗的算学制度都是受中国的影响而建立的，但是在引进算学制度时也是有选择性的，对于中国的制度进行了不同程度的简化。其中，日本简化较少，而新罗简化较多。

《六章》和《三开》是奈良、平安时代日本和新罗算学教育中使用的两部数学教科书，但是目前我们对这两部数学书的情况却了解甚少，有多种不同说法。日本学者认为他们是由新罗传入的，而韩国学者则认为这两部书是百济人的作品。钱宝琮《中国数学史》说这两部书是“由朝鲜传入的算书”。也有的中国学者受日韩学者观点的影响，更明确指出：“《三开》与《六章》则非中国算书。”① 李迪《中国数学通史 · 上古到五代卷》注意到，《日本国见在书目录》著录有《六章》六卷，且注明“高氏撰”。又查隋唐以前与数学有关而见诸记载且又姓高的人物只有北魏的高允。因而怀疑高允可能是《六章》的作者。他说：

> 他（高允）有‘算术三卷’。此‘算术’必是书名，也可能叫《六章算术》，写书目时简化成《六章》。在书目中把《九章算术》都写成《九章》便是例子，或者在‘算术三卷’之外另有《六章算术》六卷并非不可能。这个看法是否正确，不敢断言，提出来供大家讨论。

通过进一步研究《日本国见在书目录》和高允的传记资料，我们发现了重要证据，可进一步支持高允确系《六章》的作者的观点。② 从当时人们的评价分析，高允是 5 世纪时北朝高水平的数学家和历算家。

在《日本国见在书目录》“天文家”中录有“天文要会一，高氏撰”。由此记载可知《天文要会》一卷的作者与《六章》的作者同为高氏，两书当出自一人之手。而高允不但著有算学书，而且据《魏书》记载，他确实著有论述天文灾异的著作，此书献于魏太武帝后还受到很高的评价。《魏书 · 高允传》云：

> 允表曰：“往年被敕，令臣集天文灾异，使事类相从，约而可观。臣闻箕子陈谟而《洪范》作，宣尼述史而《春秋》著，皆所以章明列辟，景测皇天者也。故先其善恶而验以灾异，随其失得而效以祸福，天人诚远，而报速如响，甚可惧也……臣学不洽闻，识见寡薄，惧无以裨广圣德，仰酬明旨。今谨依《洪范传》、《天文志》撮其事要，略其文辞，凡为八篇。世祖览而善之，曰：‘高允之明灾异，亦岂减崔浩乎。’”

《日本国见在书目录》“天文家”所录著作有不少冠以“天文灾异”之名，如《天文灾

---

① 那日苏，中国传统数学对日本和算的影响，见：李迪主编，数学史研究文集，第三辑，内蒙古大学出版社，1992 年，第 17 页。

② 冯立昇、李迪，《六章》、《三开》新探，西北大学学报（自然科学版），2000，30（1）：89 ~ 92。

异杂占》一、《天文杂灾异图》廿七等。这些著作与《天文要会》无疑为同类著作。我们认为，高允撮其天文灾异事要编撰而成的八篇著述就是《天文要会》。由此可以推知《六章》的作者也是高允。

此外，在日本文献中也可找到《三开》作者的信息。注释《养老令》的《令集解》十五“学令”条有如下注记：

> 《六章》，释云六卷，高氏也，《古记》无别。《三开重差》，释云三卷，高氏也，《古记》无别。《九司》，释云一卷；《九司》、《古记》云一卷，《九司》事，杂计出。

由此可知，《三开重差》的作者也是高氏。前面提到，李迪曾推测高允所著“算术三卷”可能为《六章》，但这与《六章》为“六卷”的记载不符。由于高允著有“算术三卷”，与《三开》三卷卷数相符，我们认为“算术”未必指具体书名，《三开》才是《魏书·高允传》所说的“算术三卷”的书名。

《六章》在日本的算学制度中是一部重要的教科书。由前面所引有关日本算学考试制度的史料可知，在结业考试时，第一组学生《九章》3条试题没有通过，即使其余算书的试题全部通过，也不合格；而第二组学生《六章》3条都不能通过，即使《缀术》全部通过，也不合格。可见《六章》在日本算学教育中的地位仅次于《九章》，两者都是要求必须掌握的内容。

三　隋唐时期传入日本的中算书与日本古代算学内容的遗存

（一）关于《日本国见在书目录》所载的中算书

《日本国见在书目录》是日本平安时期的国家藏书目录，由当时主持文化教育的长官大学头藤原佐世奉敕而撰。关于编著的时间没有记载，目前比较一致的意见是编于日本宽平年间（公元889~897）。可以认为，该目录是这一时期日本的大学寮、图书寮、弘文院、校书殿、太政官文殿及天皇个人藏书的图书总目，目录反映了传到日本的汉籍的整体状况。此目录所列书籍从易家到总集家共分为40类，著录1568部，合计16734卷。[①] 如果以中国的官方目录《隋书·经籍志》和《旧唐书·经籍志》为对照标准，那么当时约有半数的中国文献典籍传到了日本。对天文、历算著作的统计则高于这一比例，表14-2-2列出具体结果。

表14-2-2　中日古代国家藏书目录所录天文、历算书数目比较

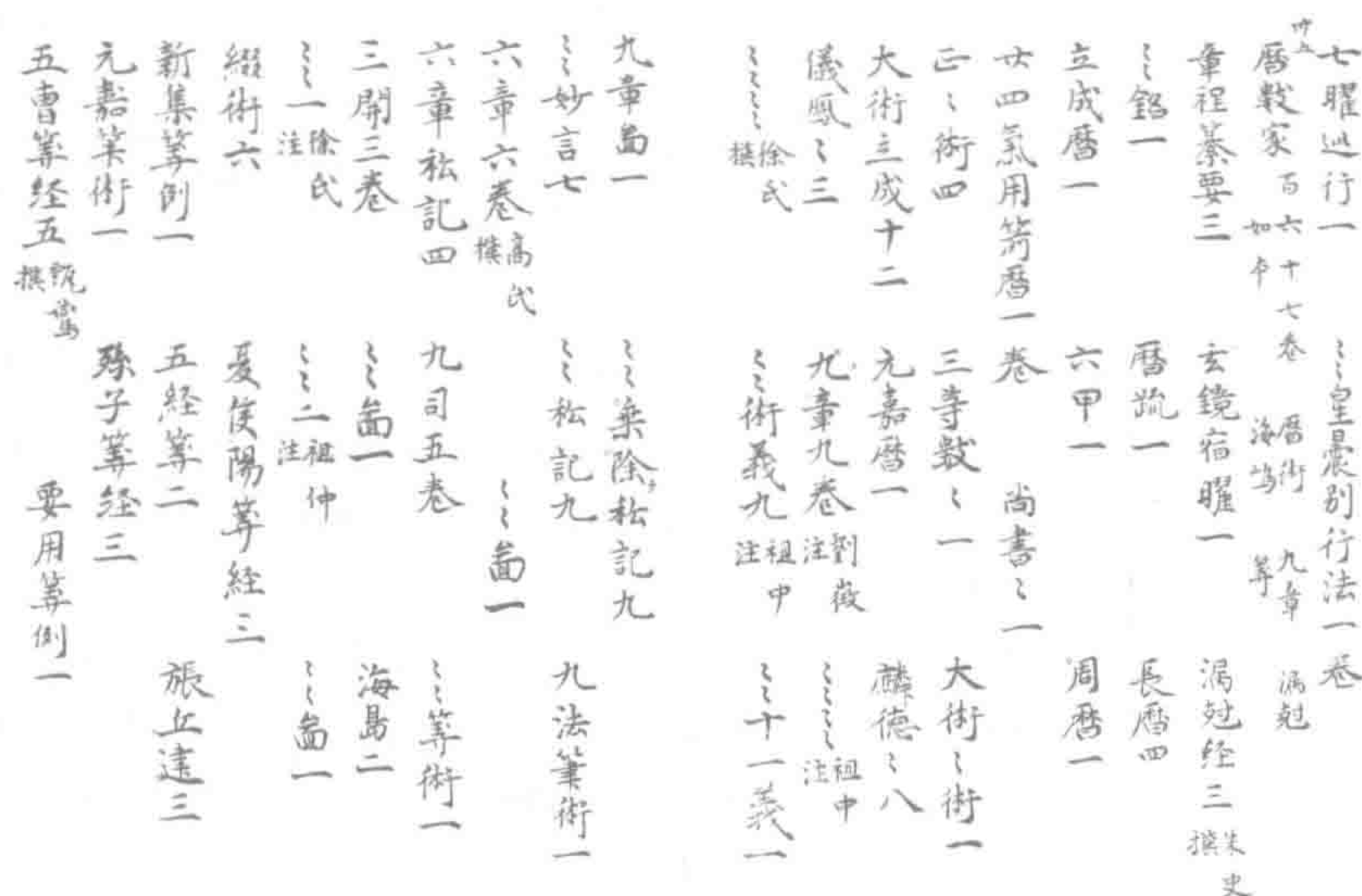
目录书名称	书籍总数	天文书籍	历算书籍
《日本国见在书目录》	1568部16734卷	85部461卷	55部167卷
《隋书·经籍志》	3127部36708卷	97部675卷	100部263卷
《旧唐书·经籍志》	3060部51852卷	26部260卷	58部167卷

《日本国见在书目录》的编纂时期正好处于《隋书·经籍志》和《旧唐书·经籍志》编撰年代之间，而且三种目录均具有官方性质，为权威人物所编，所以彼此进行比较很有意

① 合计卷数统计结果不一，这里采用了日本学者小谷惠吉的结果。中国学者严绍璗的统计结果为16725卷。

义，能说明不少问题。

在古代的图书分类体系中，数学书与律历书被归为同一类书。《日本国见在书目录》是数学书归在“历数家”门类之下（图 14-2-1）。《日本国见在书目录》“历数家”目录如下：



七曜過行一　〻〻皇震別行法一卷
曆數家 百六十七卷 如本 曆術 九章 漏剋 海島 算
章程纂要三　玄鏡宿曜一　漏剋經三 撰朱史
〻〻銘一　曆疏一　長曆四
立成曆一　六甲一　周曆一
廿四氣用箭曆一卷　尚書〻一
正〻術四　三等數〻一　大術〻術一
大術立成十二　元嘉曆一　麟德〻八
儀鳳〻三　九章九卷 注劉徽　〻〻〻〻注祖中
〻〻〻〻撰徐氏　〻〻術義九 注祖中　〻〻十一義一
九章圖一　〻〻乘除私記九
〻〻妙言七　〻〻私記九　九法算術一
六章六卷 撰高氏　〻〻圖一
六章私記四　九司五卷　〻〻算術一
三開三卷　〻〻圖一　海島二
〻〻一 注徐氏　〻〻二 注祖仲　〻〻圖一
綴術六　夏侯陽算經三
新集算例一　五經算二　張丘建三
元嘉算術一　孫子算經三
五曹算經五 撰甄鸞　要用算例一

图 14-2-1　《日本国见在书目录》“历数家”部分书影

历数家（百六十七卷 历术 · 九章 · 漏刻 如本 海岛 · 算）

章程纂要三	玄镜宿曜一	漏刻经三（朱史撰）
漏刻经铭一	历疏一	长历四
立成历一	六甲一	周历
廿四气用箭历一卷	尚书历一	
正历术四	三等数历一	大衍历术一
大术（衍）立成十二	元嘉历一	麟德历八
仪凤历三	九章九卷（刘徽注）	九章九卷（祖中注）
九章九卷（徐氏撰）	九章术义九（祖中注）	九章十一义一
九章图一	九章乘除私记九	
九章妙言七	九章私记九	九法算术一
六章六卷（高氏撰）	六章图一	
六章私记四	九司五卷	九司算术一
三开三卷	三开图一	海岛二
海岛一（徐氏注）	海岛二（祖仲注）	海岛图一
缀术六	夏侯阳算经三	
新集算例一	五经算二	张丘建三
元嘉算术一	孙子算经三	
五曹算经五（甄鸾撰）要用算例一		
中星历三	历例一	注疏一
历注二	婆罗门阴阳算历一	

记遗一　　　　　　　　　　五行算二

由此目录可知，《养老令》规定的算学教科书被全部著录。《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《五经算术》、《数术记遗》和《三等数》等唐代的算学教科书也被著录，说明这些书都传到了日本。其中《九章》九卷、《九章术义》九下标有“祖中注”，当为“祖冲之注”之误。而其中所载撰《九章》九卷、注《海岛》一卷的“徐氏”当为东汉末数学家徐岳。但三种书目所记卷数互有出入。所载与《九章》有关的著作多达10种，而《隋志》著录有11种，《旧唐志》著录6种。由此可知日本对《九章》的重视程度不亚于中国。

《日本国见在书目录》所录的《新集算例》、《元嘉算术》、《要用算例》和《五行算》等十余种算书，不见于中国古代算学书目，也不见于朝鲜历代书目。笔者在中国书目中见到少数几种算书与上述一些算书名称相近，或许之间存在某种联系。《隋书·经籍志》有《元嘉历术》一卷，与《元嘉算术》名称接近，卷数也相同。又《旧唐书·经籍志》有《算经要用百法》一卷，徐岳撰，或许为《要用算例》一卷的全称，《日本国见在书目录》收录了徐岳的另外三种著作，著录此书的可能性也较大。《新唐书·艺文志》有鲁靖《新集五曹时要术》三卷，与《新集算例》名称相近。《五行算》则还没找到来源的线索。

从《日本国见在书目录》“历数家”一门的全部书名分析，可以确定其中一半以上为纯算学书，达32部之多。而分析、统计《隋书·经籍志》“历算家”中的算书，其数量虽也接近30部，却不到整个历算书的1/3。《旧唐书·经籍志》著录的全部算书也只有20部多一点。也就是说，奈良至平安中期，中国算书在日本的算书种类的存有量和当时中国的算书存有量相当，甚至可能超过中国。当时日本官方对算学的重视程度也超过了中国。这在数学文化传播史上，无疑是十分令人惊叹的现象。对此现象的成因，值得探讨。

日本的算学教学人员的地位也高于唐代的同行，唐代主持算学教育的算博士为从九品下，是等级最低的官员，而助教则连品级都没有。主持天文历算工作的太史监为正三品，对应于算博士的天文博士是正八品下，历博士为从八品上。日本的算博士、历博士为从七位下，而主持天文历算及占卜工作的阴阳头为从五位下的品级，阴阳和天文两博士是正七位下。而实际担任算博士之职的人，品位往往要高于规定的品位，一般由正六位以上的官员行算博士之职。如《续日本记》卷八“养老五年正月”条：“诏曰，文人武士国家所重，医卜方术古今斯崇，宜擢于百僚之内优游学业堪为师范者，特加赏赐劝励后生。”当时受到奖励的算学人员，有以下三人：正六位上，山口忌寸田主；正八位上，志斐连三四次；正八位下，私部首石村。又从《文德实录》卷八载：“齐衡三年（公元856）四月戊戌散位外从五位下冰宿祢继麻吕卒。继麻吕……精于算术，天长二年（公元825）为主计算师，稍迁。承和八年（公元841）为算博士兼为主计助，年老致仕。”日本贞观十三年（公元871）有官员请求“加增算博士位阶”，获得批准（据《类聚三代格》）。这些记载都说明日本主持算学的人员有较高的社会地位，这是唐朝的算学教师所无法相比的。日本的算学教育从奈良时代到平安时代，一直没有中断，并且延续到了江户时代。而唐代算学教育却兴废无常，到了唐中后期，明算减至10人，有时停办。

日本对天文、历算，阴阳之学的重视程度远不及唐朝。不仅阴阳头的地位不及太史监，编制规模也很悬殊。日本负责天文、历、漏刻、阴阳的博士各1名，天文生、历生、阴阳生各10名，三者之和才是算生数额。而唐朝天文、历、漏刻和卜筮的博士数额相应为2名、2名、20名和2名，学生数对应为50名、55名、40名和45名。每一科的学生都远多于算学

生。通过以上分析比较，也就不难理解日本所存算书多于中国的奇特现象了。

日本朝廷虽然重视算学，但其发展算学的目的是为律令制国家培养从事财会、税收等方面的低级行政官员，实用性和有效性是其选择算学内容的标准，因而教授的内容以计算技术为中心。由于不以培养优秀的数学家为目标，对比较高深的数学理论内容没有特别的要求。官方数学教育虽然培养了许多具有计算技能的行政业务人员，但却没有培养出几个真正的数学家。这与唐代的情况也极为类似。

（二）日本古代数学内容的遗存及其与中国算学的联系

日本到了平安时代后期，随着土地国有制和律令制统治趋于瓦解，算学也逐渐衰落，导致中国传入的数学书籍大多失传，先进的数学知识没能被继承下来。平安中期以降，日本流行的数学是一些初等的算术和趣味性的数学游戏内容。但是日本朝廷、官府对中国古典数学的全面引进和移植，使数学在日本一开始就成为知识分子和统治阶层的一种官方文化，而这种文化又通过各种渠道浸透到庶民阶层中来，成为整个日本民族文化的有机组成部分，从而产生了持久的影响。从日本数学的格调和内部规范的基本定型来说，中国传统数学引进的意义和作用，不可低估。虽然江户时代以前有关数学具体内容的资料流传下来的很少，但是通过少数古籍文献的片断记载和文物遗存，仍然可以获得许多重要的信息。中国传统数学的深刻影响至少在以下三个方面体现出来。

1. 九九乘法表的广为流传

平安时期，源为宪为左亲卫相公藤原为光的儿子松雄（当时 7 岁）编写的教材《口游》中有完整的九九乘法表。(图 14-2-2)[①] 室町时代的作品《拾芥抄》中也有完整的九九表，顺序也是从九九开始。江户初期的和算书所载的九九表，已改为相反的顺序，九九是最后一句。由此可知，在上千年的历史中，九九表已成为日本人的脍炙人口的口诀。

2. 算筹与筹算方法的应用

中国算筹及筹算方法在隋唐时期传入日本后，便成为日本人长期使用的基本计算工具和方法，其影响极为深远。直到明治初期，和算家仍在使用算筹。算筹在日本被称做“算木”，在珠算普及之前，它是唯一被广泛使用的算器。

在传世的算木实物中，时代较早的是奈良的东大寺内的二月堂所藏的算木(图 14-2-3)。东大寺的二月堂建于天平胜宝四年（公元 752）或六年，一说宝字六年（公元 762 年)。但在宽文七年（1667）被焚毁。现在的二月堂是宽文九年重建的。算木被装在小木箱内，木箱上记有“大宿所”字样。因大宿所也毁于宽文七年，因而可以断定这盒算木是二月堂未毁时的物品。日本学者一般推定这是镰仓时代（1192 ~ 1333）僧侣的用品。

算筹在中国明末已经停止使用，但在朝鲜和日本却一直被保留下来。直到近代算筹仍是朝鲜最主要的计算工具，包括政府部门和民间都广泛使用，而珠算的使用不及算筹。日本虽然珠算非常普及，但和算家在求解复杂的数学问题（如解高次方程）时经常用到算木（即算筹)，一直使用到明治时期。和算家用筹布算时，为了定位的需要还要用到纸作的筹算盘。

---

① 下平和夫，萩野公刚，日本数学の新知识，富士短期大学出版部，1978 年，第 3 页。

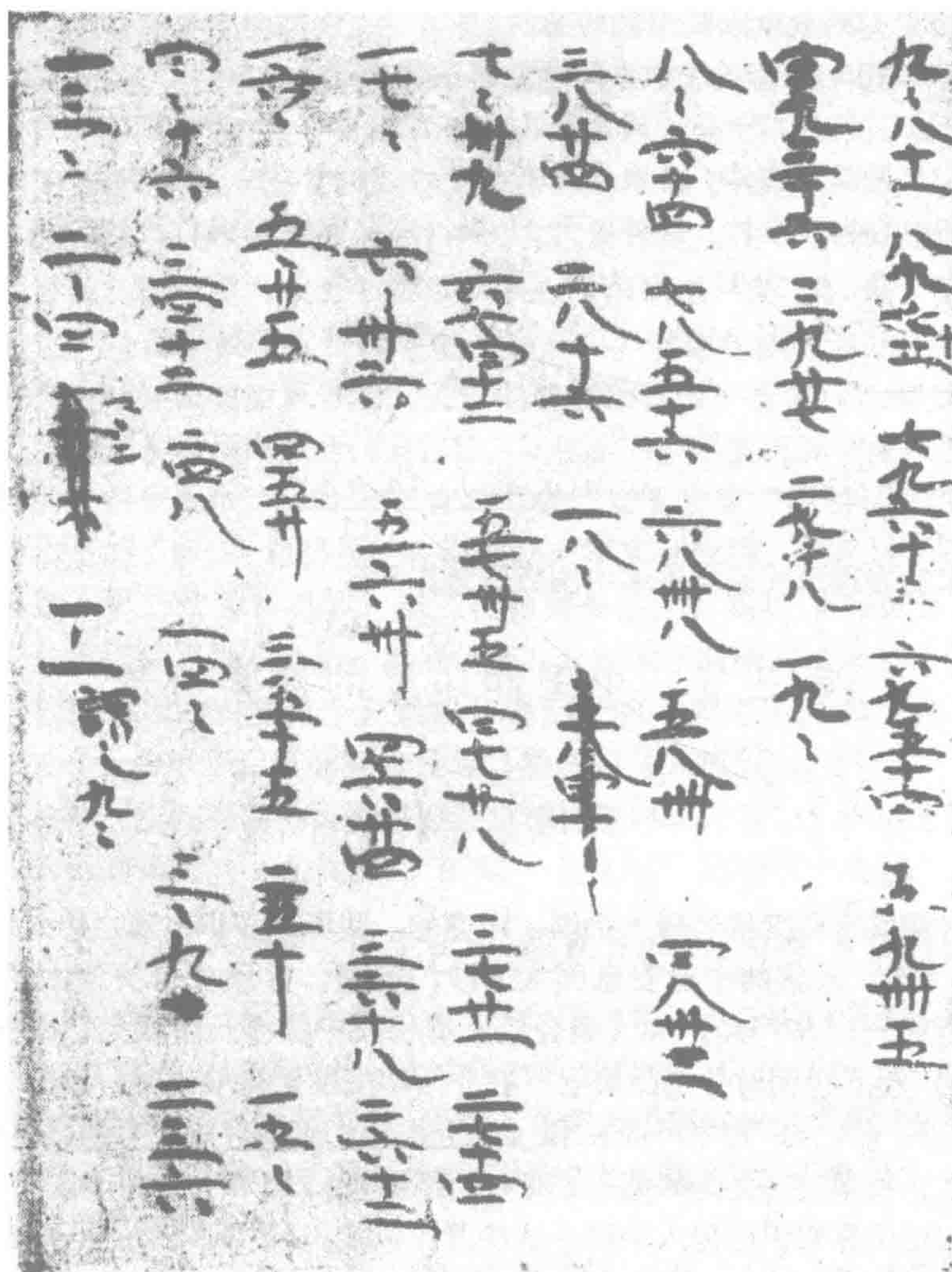


图 14-2-2　《口游》中的九九乘法表（采自古典保存会刊行的《口游》）

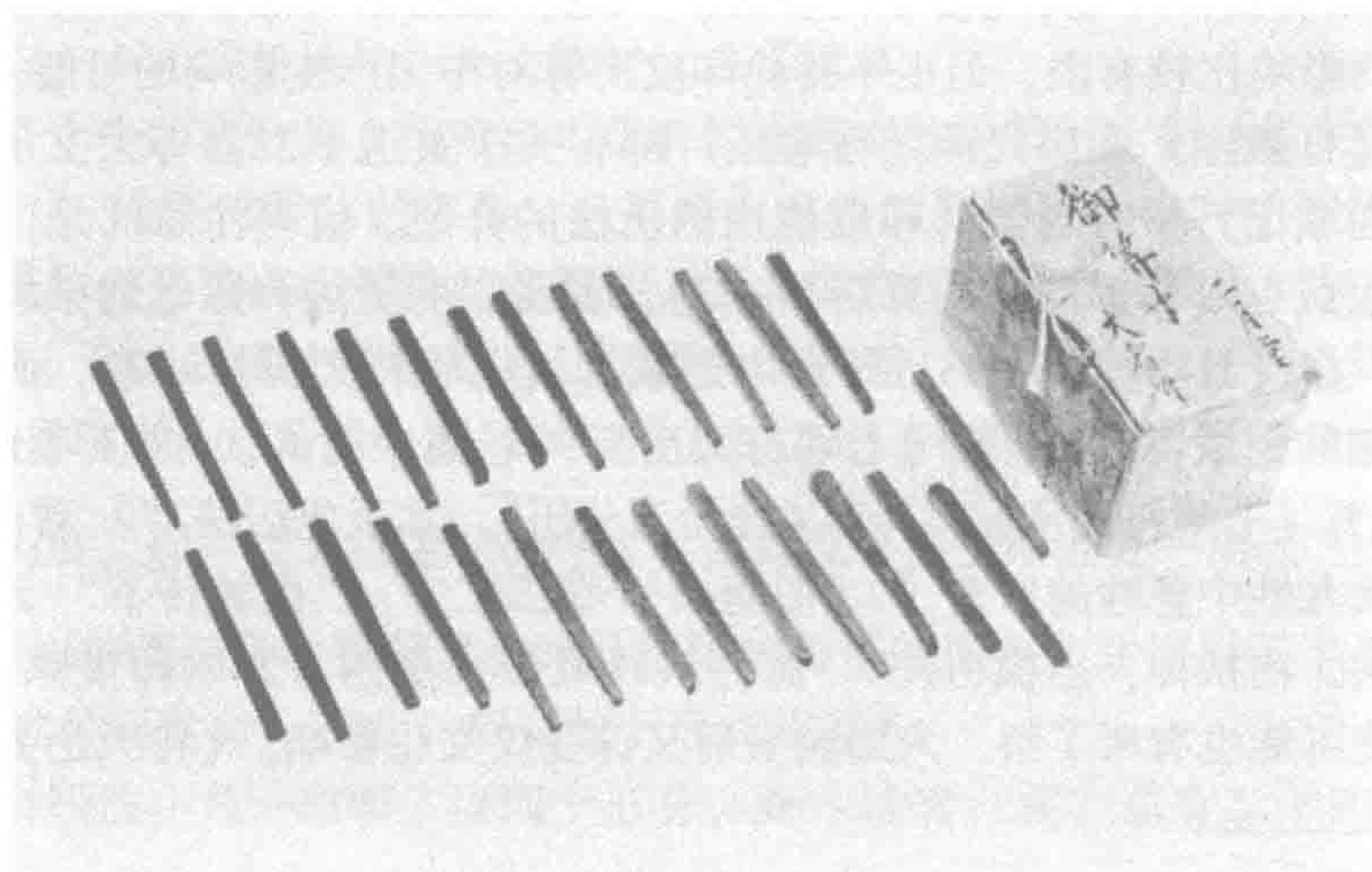


图 14-2-3　东大寺内的二月堂所藏的算木

3. 以算法为中心的数学表现形式的确立

《口游》"杂事门"中有关于数学问题及解法的表述：

今有竹束，周员二十一，问总数几（何）。（答）曰四十八。

术曰：置周圆加三算，自乘得五百七十六，以十二除，得四十八。

此题是一个已知中心为3根竹，最外层为21根，求共有多少根竹。这是一个等差级数求和的问题。设n为项数，a_n为21，S_n为前n项和，则

$$n = \frac{a_n + 3}{6}$$

故

$$S_n = \frac{n(a_n + 3)}{2} = \frac{(a_n + 3)^2}{12}$$

这种问—答—术的表现形式是与许多中国数学著作一致。

第三节　中国和印度的数学交流

一　印度数学传入中国

早在东汉时期就有印度佛经传入中国，印度的一些历算知识也随之传入中国。东汉桓帝时（公元147～167）入华的中亚安息国太子沙门安清，曾译《舍头谏太子二十八宿经》。中文的《佛本行经》、《华严经》和《俱舍经》等佛典中都涉及印度大、小数名称和各种进位。《摩登伽经》卷下"明时分别品第七"在介绍印度度量衡单位时，包括了单位以下的极细微数的名称。在《大方广物华严经》和《大宝积经》等佛经中也有细微单位的小数记法。隋唐时中印天文、数学交往尤为兴盛。《隋书·经籍志》著录了多种印度天文、数学著作，表明较系统的印度历算知识已传入中国。这些著作包括：《婆罗门天文经》二〇卷（婆罗门舍仙人所说），《婆罗门竭伽仙人天文说》三〇卷，《婆罗门天文》一卷，《婆罗门算法》三卷，《婆罗门阴阳算历》一卷，《婆罗门算经》三卷。这些书可能多数未译成中文，因此对中国传统历算的影响比较有限，但也不排除印度历算对中国产生影响的可能。

隋代所译《日藏经》和唐代译《宿曜经》都有关于黄道十二宫等天文历算的内容。在玄奘的《大唐西域记》中有对当时印度使用的历法的介绍。值得注意的是，在《日本国见在书目录》中也载有《婆罗门阴阳算历》一卷，表明印度历法和数学的某些知识在这时也曾传到了日本。在《日本国见在书目录》中还载有《七曜符天历》一卷，而《新唐书·艺文志》有更详细的记载："曹士蒍《七曜符天历》一卷建中时人。"宋王应麟《困学纪闻》则称："唐曹士蒍《七曜符天历》，一云《合元万分历》，本天竺历法。"① 曹士蒍可能是来自撒马尔罕的昭武九姓中曹姓的后裔。②《旧唐书》卷二二一，"西域传下"云"以十二月为岁首，尚浮图法，祠祆神，出机巧技"。他们从西域带来受西方影响印度系统的历算知识，并且对波斯文化可能也有所了解，入居长安后又深受汉文化影响。《符天历》的太阳视运动

① 《困学纪闻》卷九。

② 陈久金，回回天文学史研究，广西科学技术出版社，1996年，第36～51页。

中心差计算公式是历法计算中的新方法，在希腊和印度天文学中尚未见到这种算法，考虑到《符天历》"本天竺历法"的事实和曹士蒍的族属，也不排除中印两种历算传统的互相作用对这一方法诞生产生了某种影响。

隋唐时期有不少印度人入仕中国朝廷，其中不乏天文历算家。据杨景风于广德二年（公元764）为《宿曜经》所作注文，当时中国有三家印度历法"并掌在太史阁"，它们分别是迦叶氏、瞿昙氏、俱摩罗（又作拘摩罗）氏。《旧唐书·历志》载，李淳风的《麟德历》有对推交食的"叶迦孝威等天竺法"的简要介绍。叶迦孝威为迦叶氏家族入华印度天文历算家，此法当为叶迦派的历算方法。关于俱摩罗氏，僧一行的《大衍历》在有关交食术的论述中曾提到"天竺僧俱摩罗所传日蚀法"。上述三个印度历算学派以瞿昙氏家族影响最大，流传至今的史料也最多。1977 年，在陕西省长安县发现了瞿昙譔的墓志，使人们对这一家族有了较清楚的了解。① 瞿昙氏约在南北朝末期来到中国，世代居于长安。知道名字的第一代为瞿昙逸，第二代为瞿昙罗，第三代为瞿昙悉达，瞿昙譔为瞿昙悉达之第四子，而他又有六子。从第二代瞿昙罗开始一连四代都有人任职于唐朝的司天监，前三代都曾长期担任监正。该家族所编著的历法见于记载的有瞿昙罗的《光宅历》和《经纬历》、瞿昙谦（瞿昙譔之弟）的《大唐甲子元辰历》以及瞿昙悉达的《九执历》。

在瞿昙氏家族中，影响最大的人物是瞿昙悉达，他约于公元712年起任太史监，开元六年（公元718）奉命翻译天竺《九执历》。所谓"九执历"是指以"九执"为基础的历法，九执包括日、月、五大行星及啰睺、计都两个人眼看不见的"暗曜"。该历法以 $29\frac{373}{703}$日为一月，二月为时，六时为岁。周天三百六十度，十度为相，十二相而周天。瞿昙悉达又奉敕编撰《开元占经》，120 卷，完成于开元十六年。该书内容虽以星占为主，但却保存了大量中国上古和中古天文学和历法方面的珍贵资料，是关于中国古代天文历法的一部宏著。《开元占经》卷一〇四"算法"收入了瞿昙悉达编译的《九执历》，还介绍了一些印度数学知识。其中印度数字及笔算的介绍：

> 算字法样　一字　二字　三字　四字　五字　六字　七字　八字　九字　点
>
> 右天竺算法用上件九个字，乘除其字皆一举札而成。凡数至十进入前位。每空位处，恒安一点，有间咸记，无由辄错，运算便眼。

这段文字介绍了十个印度数码，但传刻本没有印出印度数码符号，但从注文可知符号是一笔写成的，以"点"代表"零"的空位，且采用十进位值制记数。当时中国历算家习惯于用算筹演算，未能体会到数码和笔算的优越性，因此未能被中算家所接受。

《开元占经》介绍的弧度量法是为分圆周为 360 度，每度分 60 分，一周又分为 12 相，一相 30 度。这是印度从古希腊人那里学来的方法。由于中国历算家采用太阳视运动平均每日经过的弧长为度，即一周天约为 $365\frac{1}{4}$度，因此没有接受印度分一周天 360 度的制度。

《九执历》以球面三角法推算月食时月球距离黄道的度数，并使用了半弦数表。在"算法"节关于"推月间量命"部分，载有如下形式的数表：

推月间量命段法：凡一段管三度四十五分，每八段管一相，总有二十四段，用管三相，

① 晁华山，唐代天文学家瞿昙譔墓的发现，文物，1978，(10)：49～53。

其段下侧注者，是积段并成之数。

第一段　二百二十五

第二段　二百二十四，并四百四十九

第一相

第三段　二百二十二，并六百七十一

第四段　二[1]百一十九，并八百九十

第五段　二百一十五，并一千一百五

第六段　二百一十，并一千三百一十五

第七段　二百五，并一千五百二十

第八段　一百九十九，并一千七百一十九

第九段　一百九十一，并一千九百一十

第十段　一百八十三，并二千九十三

第二相

第十一段　一百七十四，并二千二百六十七

第十二段　一百六十四，并二千四百三十一

第十三段　一百五十四，并二千五百八十五

第十四段　一百四十三，并二千七百二十八

第十五段　一百三十一，并二千八百五十九

第十六段　一百一十九，并二千九百七十八

第十七段　一百六，并三千八十四

第十八段　九十三，并三千一百七十七

第三相

第十九段　七十九，并三千二百五十六

第二十段　六十五，并三千三百二十一

第二十一段　五十一，并三千三百七十二

第二十二段　三十七，并三千四百九

第二十三段　二十二，并三千四百三十一

第二十四段　七，并三干四百三十八。[2]

这实为每隔3°45′的90°内的数表，其中“并”是指“加得”，如第一段下有225，第二段下有224，“并”得449，以下皆由前段“并”加本段数。每段下之数为两“并”之差数。90°分为三相，第一相由第三段到第十段，第二相由第十一段到第十八段，第三相由第十九段到开头的两段。上表改为现代形式就是：

段数	角度	段法	差数
一	3°45′	225	224
二	7°30′	449	222
三	11°15′	671	219

① “二”传本误为“一”。今依李俨校。

② 唐 · 瞿昙悉达，《开元占经》，卷一〇四。

四	15°	890	215
五	18°45′	1105	210
六	22°30′	1315	205
七	26°15′	1520	199
八	30°	1719	191
九	33°45′	1910	183
十	37°30′	2093	174
十一	41°15′	2267	164
十二	45°	2431	154
十三	48°45′	2585	143
十四	52°30′	2728	131
十五	56°15′	2859	119
十六	60°	2978	106
十七	63°45′	3084	93
十八	67°30′	3177	79
十九	71°15′	3256	65
二十	75°	3321	51
二十一	78°45′	3372	37
二十二	82°30′	3409	22
二十三	86°15′	3431	7
二十四	90°	3438	

因一周天 $360° = 21600'$，以 2π 除该值约得 3438，因此取 3438 为圆半径。即

$$2\pi r = 360 \times 60 \quad (\pi = 3.1416)$$

$$r = \frac{360 \times 60}{2\pi} \approx 3438$$

90°弧的正弦线段等于半径，故等于 3438′。30°弧的正弦线段为半径的一半，即 1719′。上面的数表实为通过比例插值法确定的 0°～90°差为 3°45′的弧对应的半弦，也即正弦线段，相当于我们现在通常所说的正弦函数值的 r（$=3438$）倍。用现代符号表示就是

$3438\ \sin 3°45' = 225$

$3438\ \sin 7°30' = 449$

$3438\ \sin 11°15' = 671$

⋮

$3438\ \sin 86°15' = 3431$

$3438\ \sin 90° = 3438$

三角学在希腊衰落后几个世纪后在印度得到了发展。印度著名的天文数学家阿耶波多（Aryabhata I，476～？又译圣使）对三角学的发展做出了重要贡献。他将半弦与全弦所对弧的一半相对应，构造了半弦表，完成了从希腊全弦表到半弦表的转变。他于公元 499 年完成的一部名为《阿利亚巴第亚》（Aryabhatiya）的天文学和数学文集中，第一章有一小节专讲半弦表，将四分之一圆 24 等分，如以秒作单位，给出的半弦长度差分别为："二二五、

二二四、二二二、二一九、二一五、二一〇、二〇五、一九九、一九一、一八三、一七四、一六四、一五四、一四二、一三一、一一九、一〇六、九三、七九、六五、五一、三七、二二、七。"① 这与瞿昙悉达所引《九执历》中的差数完全一致，《阿利亚巴第亚》第二章有专论"正弦值的几何学计算方法"等三角学方法的内容，计算正弦线段 $r\sin x$ 时，r 取为 3438，给出了计算 0°～90°相差为 3°45′的 24 段正弦线的方法。这说明《九执历》的三角函数表当源自于阿耶波多的工作。这些正弦函数表的数值与现代所求值非常接近，但这一先进的方法未能引起中国历算家的重视，没有在天文学和数学中发挥其应有的作用。

印度数学对中国产生了多大的影响，是一个有待进一步探讨的问题。一行和瞿昙悉达为同时代人，两人很可能见过面。实际上，在《大衍历》有涉及《九执历》的内容，《大衍历》的"九服食差"的概念，与《九执历》的"随方眼"相关，说明一行至少是了解《九执历》的内容的，且知道其中的正弦表。《大衍历》中"步晷漏术"的思想与正弦表思想相近，可能受到了印度算法的启发。瞿昙譔在司天监任职时，曾上书指责《大衍历》"写《九执历》未尽"，也说明一行也参考过《九执历》。

二　中国数学对印度的影响

中国数学对印度是否产生过重要影响，也是值得深入探讨的课题。有许多迹象表明中国数学传到了印度，且涉及了多方面的数学内容。中国很早就出现十进位制记数法并长期使用，印度对十进位制的采用却晚得多，印度最早的记载只能追溯到阿耶波多的时代。5 世纪后的印度分数表示法，与中国古代算筹分数记法一样，分子在上，分母在下，没有分数线；若是带分数，则整数部分又写在分子之上。三率法在印度算术中有广泛应用，与《九章算术》中"今有术"相同，但较"今有术"出现晚得多。12 世纪印度数学家婆什迦罗（Bhāskara Ⅱ）用图证明勾股定理的方法与中国三国时赵爽方法相同。中国古代数学中重差术、开方术、相似勾股形等问题均可在印度数学著作找到类似形式的或解法，而印度在记载上都晚于中国。此外，一些错误的算法或近似结果，印度也有与中国相似之处，如《九章算术》中的求弓形面积的公式和求球体积的"开立圆术"，是两个误差很大的公式，却都出现在 9 世纪印度数学家摩诃吠罗（Mahāvīra，即大雄，9 世纪）的著作中。印度的一些著名古算题与中国算经中的问题有惊人相似之处，如印度的水槽问题、莲花问题分别与《九章算术》的五渠共池、引葭赴岸问题完全类同，后来摩诃吠罗的著作中有与《九章算术》"竹高折地"相同的问题，而婆罗摩笈多与摩诃吠罗书中都有与《孙子算经》"物不知数"题相同的一次同余方程组问题。《张丘建算经》中最先出现百鸡问题，也在摩诃吠罗和婆什迦罗的著作中出现。

尽管目前还找不到确切的直接证据，说明中国数学知识大量传入了印度。但考虑到中印古代文化关系密切，中印人员交往频繁，如中国僧人赴印，以及入华印度人回国，都有可能将中国数学知识输入印度。由于中印数学中相似的内容，多数先在中国出现，因此许多数学史家认为，印度数学与中国的相似性，反映了印度数学的发展受到过中国的影响。

---

① ［日］矢野道雄，科学の名著，1，见：インド天文学・数学，朝日出版社，1980 年，第 93 页。

第四编　中国传统数学的高潮

——唐中叶至元中叶的数学

第十五章　唐中叶至元中叶数学概论

安史之乱（公元755～763）尽管被平息，但是，它严重地动摇了李唐政权，此后唐朝陷入藩镇割据的混乱时期。公元907年，朱温篡唐，在中原建立梁，后经唐、晋、汉、周，到公元960年赵匡胤篡周建立北宋，50几年更迭了五个朝代，史称五代。而南方则有吴越、南唐等九个割据政权，加上北方的北汉，史称十国。赵宋政权在近20年间消灭了南唐等割据势力，中国复归统一。10世纪初，契丹族在北方强大起来，公元916年建立契丹国，公元947年改国号辽。12世纪初，东北地区的女真贵族建立金国。宋、辽、金长期对立，互有战和。1125年，宋、金联合灭辽，1127年，金占领汴京（今开封），北宋灭亡。赵构逃到江南，在临安（今杭州）建立政权，史称南宋。12世纪末，居于大漠的蒙古族在成吉思汗领导下强大起来，1206年建立蒙古汗国。1234年元在南宋支持下灭金，遂占领黄河流域。1271年蒙主忽必烈改国号为元。1279年，元灭南宋，中国重新统一。1368年朱元璋领导的农民起义推翻元朝，建立明朝。

在这一时期，中国传统科学技术达到了最高潮，数学也不例外。唐中叶至元中叶是中国传统数学的第三个高峰，数学史界通常称为宋元数学高潮或中国筹算的高潮。

第一节　传统数学的高潮与唐中叶开始的社会变革

一　唐中叶开始的社会变革和数学的发展

中国在宋元时期达到数学高潮，是唐中叶之后中国社会经济、政治发展的必然产物。

唐中叶至北宋初年，中国社会的经济、政治和思想文化方面产生了新的变革。由于农业生产工具的改进，提高了农产品的产量，加之经济作物种植的扩大，为手工业的发展开辟了道路，并促进了商品经济的发展。这种发展极大地冲击着魏晋以来以庄园农奴式经济为主导的经济体制，促使中国社会发生了若干带有新特点的变革。北宋初年，基本上完成了这种变革。国家承认土地的自由买卖，地主阶级主要以购买方式扩大土地的占有，而不再是按等级占田，宋代的地主是名副其实的“田主”。政府还掌握的一些“官田”，也不实行均田制分配，而是采取租佃经营或出卖。土地的商品化取代了土地国有制，这是历史的进步。同时，魏晋以来的门阀世族及其部曲佃客制度已经完全瓦解，宋朝的官僚地主以品级高低而不是以门阀决定其社会地位。地主阶级的剥削方式变成以出租土地收取实物地租为主，劳役地租退居次要地位，农民对生产的支配权有所提高。部曲佃客制完全被租佃制代替，佃农不再是地主的私属，而是编入国家户籍，有较大的人身自由。农民的生产积极性大为提高。

后周和北宋政权奖励垦荒，重视农桑。据统计，公元975年，全国有295万多顷农田，到1021年，不到半个世纪，就达到525万顷，增加近1倍。农具和农耕技术不断改进。南方稻作区成为全国经济的重心。农业的发展不仅为许多手工业提供了原料，而且也刺激了商

业和各种手工业的发展。交换农产品和手工业产品的定期集市“坊墟”大量增加，规模扩大，形成了若干新的经济中心，甚至不得不打破原先的州县布局，许多坊墟升格为县(军)，有的县（军）升格为州，州升格为府，公元962～1006年不到半个世纪，从坊墟升格为县（军）的达39个。城市工商业者人数大大增加，他们面街而居，随地经营，打破了唐以前的坊（居民区）、市（商业区）制度，形成厢坊制度，具有了近代城市的面貌。

社会的变革及农业、手工业、商业的繁荣推动了数学和科学技术的发展。指南针、火药、印刷术虽不是宋元时期发明的，但是指南针用于航海，火药用于军事，印刷术用于印刷文史和数学经典著作，都始于五代和北宋，造纸技术也有长足进步。元丰七年（1084），北宋秘书省刊刻了《九章算术》等汉唐算经，这是世界文明史上首次印刷数学著作。13世纪初，南宋鲍澣之翻刻了这些算经，尚有5部半传世，是为世界上现存最早的印刷本数学著作。宋元许多数学著作成书不久即被刊刻。印刷和造纸对数学和科学技术知识的传播，进而对其发展的作用是不可估量的。

女真、蒙古贵族先后入主中原对中国历史，包括对科学技术发展所起的作用，仁智各见。但是，辽、金、元有远见的统治者大都“恃北方之马力，资中原之技巧”①，采取了以汉化为方向的加速各民族融合的政策，沿袭中原地区先进的经济制度和政治制度，学习中原传统文化。各民族的大融合也提高了中华民族的素质。宋、辽、金、西夏、元之间的战争，当然对经济和科学技术的发展有破坏作用，但是，战争也促进了与之有关的数学和科学技术的发展，而且各个政权所统治的地区大部分时间还都保持了相对稳定。同时，乱世堵塞了知识分子读经入仕的道路，使他们摆脱科举仕途，有的便转向了数学和科学技术的研究。儒家经典从个人发展的敲门砖变成了一种知识。

二　思想宽松是数学发展的必要条件

唐中叶之后，儒家的统治地位遭到极大削弱。两宋期间，儒家虽居于统治地位，产生了程朱理学，又称为道学、新儒学，北宋的程颐、程颢、周敦颐、张载等，南宋的陈亮、朱熹等是其代表人物。但他们的思想主张并不一致，经常互相争辩。宋辽金元时期，程朱理学有相当大的影响，但还没有占据思想界的统治地位。理学对数学和科学技术发展的影响是负面的还是正面的，或者是正面的成分大还是负面的成分大，值得进一步研究。金、元统治者在倡导汉化时尽管褒奖儒学，两宋的理学在金、元统治的北方也传播开来，但是北方知识分子往往是既佩服宋儒，同时也提出不少独立见解。“宋儒之议论不为无功而亦不能无罪焉”②，反映了金元知识分子的主流思潮。大数学家李冶深受当时议论之学的影响，在《敬斋古今黈》中任自己的思想在历史的长河中驰骋，对历代经史子集中的论述尽情褒贬。

战乱给道家和道教的发展、传播提供了土壤。乱世本身和个人的遭遇也会使读书人反思过去的信仰、所走过的道路和作为。一些道教徒热衷于数学、自然科学和技术的研究，讨论勾股形与圆的关系的“洞渊九容”就是洞渊派道教的杰作。南宋末元初的道教徒赵友钦在数学、天文学上有突出贡献。另一方面，战乱使一些知识分子常常以道观作为避乱、逃世的

① 多桑蒙古史。
② 元·王若虚，论语辨惑序，见：《滹南遗老集》卷三。

场所，他们的思想不可避免地会受到道家和道教影响。李冶年轻时是名重中原的大儒，元灭金的战乱及金亡后多年的颠沛流离的困苦生活，使他倾向于道家思想。

总体说来，宋元时期思想界还相对宽松。而思想界宽松，数学家的思想不被一些僵死的教条束缚，有自由想象的空间，能够充分发挥自主思考，是数学发展的必要条件。宋元时期在一定程度上满足了这个条件。

三　社会需要是数学发展的强大动力

中国传统数学以实际应用为目的。社会生产、生活的需要是数学发展的强大动力。李冶《益古演段·自序》云："术数虽居六艺之末，而施之人事，则最为切务。"① 秦九韶尽管囿于传统思想，《数书九章·序》② 将数学的作用概括为"大则可以通神明，顺性命；小则可以经世务，类万物"，但他坦诚地说：对所谓大者，"固肤末于见"，而致力于小者，"窃尝设为问答以拟于用"。《数书九章·序》中的9段系文更形象地说明了数学的实际应用：

昆仑旁礴，道本虚一。圣有大衍，微寓于《易》。奇余取策，群数皆捐。衍而究之，探隐知原。数术之传，以实为体。其书《九章》，唯兹弗纪。历家虽用，用而不知。小试经世，姑推所为。述大衍第一。

七精回穹，人事之纪。追缀而求，宵星昼晷。历久则疏，性智能革。不寻天道，模袭何益？三农务穑，厥施自天。以滋以生，雨膏雪零。司牧闵焉，尺寸验之。积以器移，忧喜皆非。述天时第二。

魁隗粒民，甄度四海。苍姬井之，仁政攸在。代远庶蕃，垦菑日广。步度庀赋，版图是掌。方圆异状，袤窳殊形。叀术精微，孰究厥真。差之毫厘，谬乃千里。公私共弊，盍谨其籍。述田域第三。

莫高匪山，莫浚匪川。神禹奠之，积矩攸传。智创巧述，重差、夕桀。求之既详，揆之罔越。崇深广远，度则靡容。形格势禁，寇垒仇墉。欲知其数，先望以表。因差施术，坐悉微渺。述测望第四。

邦国之赋，以待百事。畡田经入，取之有度。未免力役，先商厥功。以衰以率，劳逸乃同。汉犹近古，税租以算。调均钱谷，河菑之扦。惟仁隐民，犹己溺饥。赋役不均，宁得勿思。述赋役第五。

物等敛赋，式时府庾。粒粟寸丝，褐夫红女。商征边籴，后世多端。吏缘为欺，上下俱殚。我闻理财，如智治水。澄源浚流，维其深矣。彼昧弗察，惨急烦刑。去理益远，吁嗟不仁。述钱谷第六。

斯城斯池，乃栋乃宇，宅生寄命，以保以聚。鸿功雉制，竹个木章。匪究匪度，财蠹力伤。围蔡而栽，如子西素。匠计灵台，俾汉文惧。惟武图功，惟俭昭德。有国有家，兹焉取则。述营建第七。

---

① 元·李冶，益古演段，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年，第873～941页。本编凡引《益古演段》均据此。

② 南宋·秦九韶，数书九章，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年。本编凡引用《数书九章》的文字，如不说明，均据此。

天生五材，兵去未可。不教而战，维上之过。堂堂之阵，鹅鹳为行。营应规矩，其将莫当。师中之吉，惟智、仁、勇。夜算军书，先计攸重。我闻在昔，轻则寡谋。殄民以幸，亦孔之忧。述军旅第八。

日中而市，万民所资。贾贸墆鬻，利析锱铢。蹛财役贫，封君低首。逐末兼并，非国之厚。述市易第九。

秦九韶在这里论述了数学在天文、历法、雨雪量、田亩面积、目的物的高深广远、赋税、财政、土木工程和建筑、军旅、海内外贸易等方面的应用，几乎包括了数学应用的所有方面。中国古代历来天算不分家。历法的制定一刻也离不开数学方法。两宋是中国古代改历最为频繁的时期，除了天文历法本身发展的需要外，数学的蓬勃发展是一个重要原因。雨雪的多少直接影响到农作物的丰歉。《数书九章》记载了人们创造的天池盆，是世界文化史上现存最早记录的量雨器。两宋时期人们通过开荒，耕种沿海新涨的沙田、沿湖淤积的湖田、人造的圩田等方式扩大土地面积。这些田地的形状当然都不规则，计算其面积成为人们的迫切需要。秦九韶重视营建问题，设计了筑城、修坝、开河以及建筑宫室、天文台等各方面的题目，其中“计作清台”是世界上现存最早的天文观象台设计图。

数学知识不仅应用于生产、生活中的问题，而且对维护社会正义也有极大的作用。秦九韶反对横征暴敛，认为赋役应该取之有度，公平合理，反对豪强地主隐田逃税，主张精确测算土地面积，按土地的肥腴制定赋税量；秦九韶认为理财应该像大禹治水那样，“澄源浚流”，既要防止官吏的欺瞒豪取，使国家与民众资殚财尽，也要防止不体察下情，动辄用刑的暴政；所有这些，都离不开数学计算。秦九韶有强烈的仁政思想，将数学知识看成反对官府和豪强地主横征暴敛的有力工具。

秦九韶主张抗战，适应抗金、抗蒙战争需要，特设“军旅类”。他认为大敌当前，“兵去未可”。他反对寡谋轻敌，主张做好军事训练和军需供应。为此，他设计了有关军营布置、队列变换、军需供应、兵器制造、敌情侦察等11个题目。

四　宋元统治者重视数学

北宋的统治者比较重视数学。11世纪上半叶出现了以楚衍、贾宪、朱吉等师徒为核心的数学研究团队。在利用雕版印刷文史典籍后约100年，元丰七年（1084），秘书省就刊刻了《周髀算经》、《九章算术》等十部算经（图15-1-1），可见对数学之重视。

算学馆在北宋尽管几经置废，但大部分时间还是存在的；崇宁（1102～1106）间还发布国子监算学令、算学格，反映了北宋统治者重视数学教育的态度。算学令、算学格全文如下：

崇宁国子监算学令

诸学生习《九章》、《周髀》义及算问，谓假设疑数。兼通《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》算法并历算、三式、天文书。

诸试以通、粗并计。两粗当一通。算义、算问，以所对优长通，及三分以上为合格。历算，即算前一季五星昏晓、宿度；或日月交食，仍算定时刻早晚，及所食分数。三式，即射覆及豫占三日阴阳风雨。天文，即豫定一月或一季分野、灾祥。

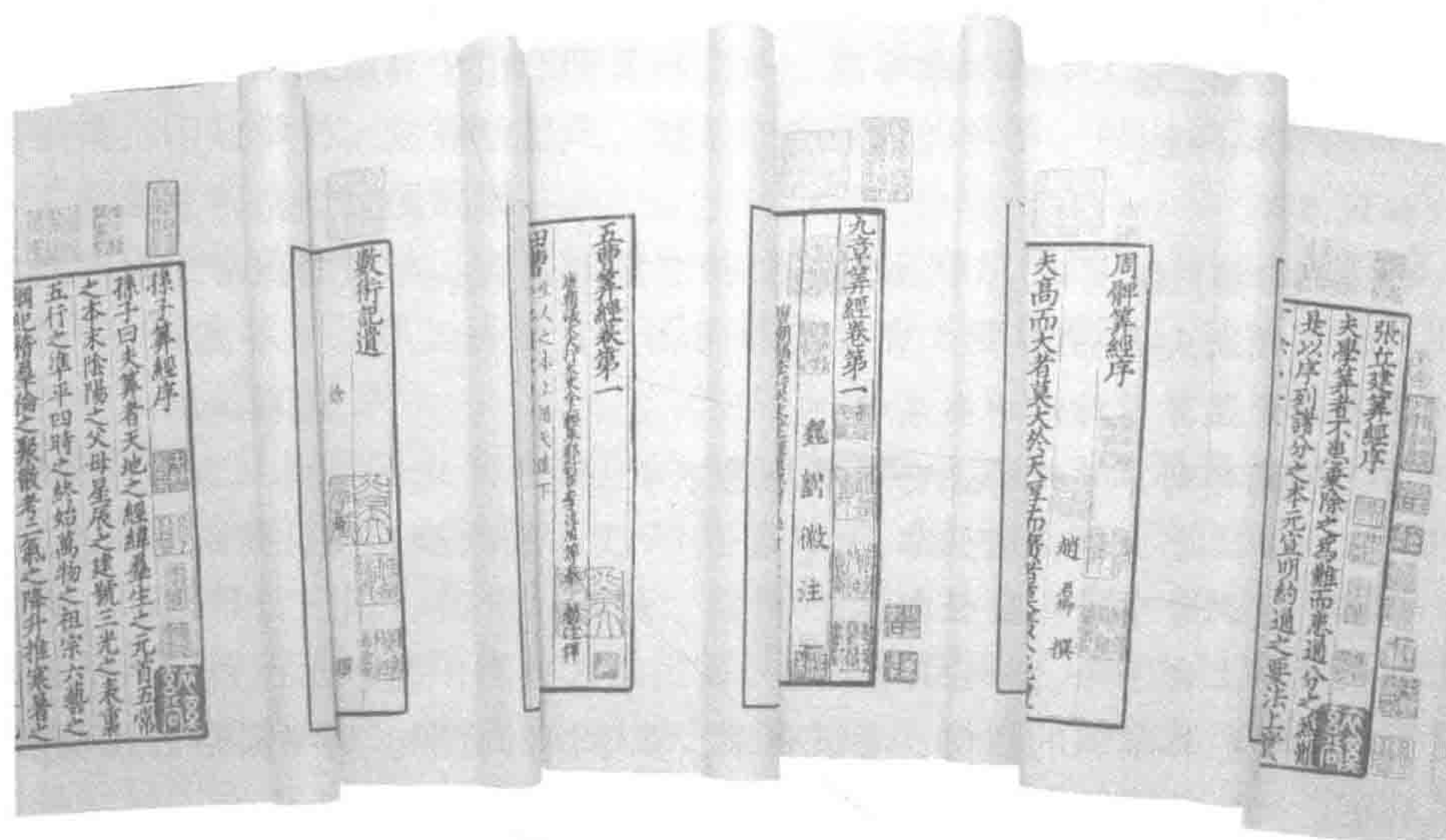


图 15-1-1　宋刻算经六种

并以依经备草合问为通。

崇宁国子监算学格

官属

　　博士四员。内二员分讲《九章》、《周髀》，二员分习历算、三式、天文。

　　学正举行学规一员。

职事人

　　学录佐学正纠不如规者一人，

　　学谕以所习业传谕诸生一人，

　　司计掌饮食支用一人，

　　直学掌文籍及谨学生出入二人，

　　司书掌书籍一人，

　　斋长纠斋中不如规者。斋谕，掌佐斋长道谕诸生。斋各一人。

学生

　　上舍三十人，

　　内舍八十人，

　　外舍一百五十人。

补试命官公试同。

　　《九章》义三道，

　　算问二道。

私试孟月

补上内舍第一场

　　《九章》、《周髀》义三道，

　　算问二道。

私试仲月

补上内舍第二场

历算一道。

私试季月

补上内舍第三场

三式或天文一道

崇宁国子监算学对修中书省格

秋试奏到算学升补上舍等第推恩下项

上舍上等：通仕郎，

上舍中等：登仕郎，

上舍下等：将仕郎。①

在这里对国子监算学馆的教材、考试要求，算学馆的官职，科举科目以及及第后的任用等都做了规定。

《宋史·礼志八》载北宋大观三年（1109）礼部颁布的“算学祀典”云：

时又有算学。大观三年，礼部、太常寺请以文宣王为先师，兖、邹、荆三国公配享，十哲从祀，自昔著名算数者画像两庑，请加赐五等爵，随所封以定其服。于是中书舍人张邦昌定算学：封风后上谷公，箕子辽东公，周大夫商高郁夷公，大挠涿鹿公，隶首阳周公，容成平都公，常仪原都公，鬼俞区宜都公，商巫咸河东公，晋史苏晋阳伯，秦卜徒父颖阳伯，晋卜偃平阳伯，鲁梓慎汝阳伯，晋史赵高都伯，鲁卜楚丘昌衍伯，郑裨灶荥阳伯，赵史墨易阳伯，周荣方美阳伯，齐甘德菑川伯，魏石申隆虑伯，汉鲜于妄人清泉伯，耿寿昌安定伯，夏侯胜任城伯，京房乐平伯，翼奉良成伯，李寻平陵伯，张衡西鄂伯，周兴慎阳伯，单飏湖陆伯，樊英鲁阳伯，晋郭璞闻喜伯，宋何承天昌卢伯，北齐宋景业广宗伯，隋萧吉临湘伯，临孝恭新丰伯，张胄玄东光伯，周王朴东平伯，汉邓平新野子，刘洪蒙阴子，魏管辂平原子，吴赵达谷城子，宋祖冲之范阳子，后魏商绍长乐子，北齐信都芳乐城子，北齐许遵高阳子，隋耿询湖熟子，刘焯昌亭子，刘炫景城子，唐傅仁均博平子，王孝通介休子，瞿昙罗居延子，李淳风昌乐子，王希明琅琊子，李鼎祚赞皇子，边冈成安子，汉郎顗观阳子，襄楷隰阴子，司马季主夏阳男，落下闳阆中男，严君平广都男，魏刘徽淄乡男，晋姜岌成纪男，张丘建信成男，夏侯阳平陆男，后周甄鸾无极男，隋卢大翼成平男。寻诏以黄帝为先师。②

这里给五代前66位数学家、历算学家加封五等爵，陪祀孔子。应当指出，囿于当时的认识水平和制定者的局限性，所封爵位的高低与数学、天文学成就的大小以及在中国数学史、天文学史上的地位极不相称。受封爵位最高的公爵者大都是传说人物，贡献最大的刘徽、祖冲之、刘洪等，爵位都很低，占有重要地位的陈子竟被漏封，而陈子所批评的在数学上“未能通类”的荣方反而被封为伯爵。而且，制定这个名单的张邦昌后来投靠金朝，建立伪齐

---

① 北宋·佚名，算学源流，见：宋刻算经六种，文物出版社，1981年。又见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第1册。河南教育出版社，1993年，第425~429页。

② 元·脱脱等，宋史，中华书局，1977年。本编凡引《宋史》均据此。

政权，名声不好。但是，算学祀典本身无论如何反映了北宋政权对数学的重视。

北宋之前，除了隋唐设算学馆和明算科之外，数学活动基本上是个人的行为。北宋则不然，设算学馆，印数学书，立算学祀典，都是中央政府的举措。可以说，清康熙之前，没有任何一个王朝像北宋这样重视数学。

少数民族政权也重视数学。契丹族建立的辽，规定穿汉服的五品以上的文官要“佩手巾、算袋”等。[①] 实际上，穿契丹服者也不例外。沈括《梦溪笔谈》卷一记载，他1075年使辽，看到胡人佩戴算囊。[②]

《金史·百官志》记载，女真族建立的金朝迁都燕京之后，设司天台，“掌天文历数”等工作[③]，采用杨级制订的，赵知微于1175年重修的《大明历》。严敦杰说：“历法内日月食食限辰刻，即求日食三限：初亏、食甚、复圆辰刻；月食五限：初亏、食既、食甚、生光、复圆辰刻。宋代历法内都用代数方法推算，金大明历则用几何方法求得。”此“虽可用我国传统的勾股方法求得，但在我国古代天文学中确是创建，其后元《授时历》即用此法求日月食限辰刻”。[④] 李迪认为，《大明历》“在‘步晷漏’部分中给出了一份‘二十四气陟降及日出分表’，就是通过插值法计算二十四节气中每日的‘日出分’”。当时应该有三次差分表。[⑤] 由此可知，金代的数学，尤其是几何相当发达。

元朝的统治者也重视数学教育。《元史·世祖本纪》云，元世祖至元八年（1271）五月，“令蒙古官子弟好学者，兼习算术”。[⑥] 二十四年，世祖又颁诏书，云官员、近卫军的子弟应该像汉族那样有“文字、算子教学”。如今官员的子弟有，近卫军的子弟无。而“算子、文字学呵，后头勾当理使唤呵”。遂下令近卫军的子弟“交太史院里学算子，国子监里学文书”。[⑦] 莫若说：“方今尊崇算学，科目渐兴”，并不是虚浮粉饰之辞，确实反映了经过忽必烈的提倡，尊崇数学，已成为社会风气。正是在这种社会氛围下，朱世杰“以数学名家周游湖海”，才能出现“四方之来者日众”[⑧]，“踵门而学者云集”[⑨] 的景象。

在这种社会背景下，中国的筹算数学在宋元达到了最高峰，出现几个明显的数学研究中心。北宋11世纪上半叶在汴京（今开封）有一个以楚衍、贾宪为代表的数学中心，在开方术的改进，算法的抽象化等方面有重大贡献。13世纪下半叶同时出现了南北两个数学中心。一个是长江下游以秦九韶、杨辉为代表，发展了高次方程数值解法、同余方程组解法、垛积术以及乘除捷算法等。另一个是太行山两侧，发展了勾股容圆以及以天元术、二元术、三元术等为主的列出并求解高次方程和多元高次方程组的方法。元统一中国之后，朱世杰综合两

---

① 元·脱脱等，辽史·仪卫志二，卷五六，中华书局，1974年。

② 北宋·沈括，梦溪笔谈。见：胡道静，梦溪笔谈校证，上海古籍出版社，1987年。本编凡引《梦溪笔谈》均据此。

③ 元·脱脱等，金史，中华书局，1975年。本编凡引《金史》均据此。

④ 严敦杰，宋金元历法中的数学知识，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年。第220，221页。

⑤ 李迪，中国数学通史·宋元卷，江苏教育出版社，1999年。本编凡引此书，均据此。

⑥ 明·宋濂等，元史，中华书局，1976年。本编凡引《元史》均据此。

⑦ 元·通制条格，卷五，学令。转引自李迪卷主编，《中国数学史大系》第六卷“西夏金元明”。北京师范大学出版社，1999年，第196页。

⑧ 元·莫若，《四元玉鉴》前序，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第1册，河南教育出版社，1993年，第1205页。本编凡引莫若《四元玉鉴》前序均据此。

⑨ 元·祖颐，松庭先生《四元玉鉴》后序，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第1册，河南教育出版社，1993年，第1206页。本编凡引祖颐《四元玉鉴》后序均据此。

个中心的长处，创造四元术，将垛积术和招差术发展到相当系统、完备的程度，在改进筹算乘除捷算法方面也有杰出的贡献。

当时出现了一系列欧洲近代才达到的重大成果。例如，唐中叶就有十进小数的概念，最迟在13世纪有了完整的十进小数记法，而欧洲在1585年斯台文（Simon Stevin）才在运算中使用小数，其记法还十分不方便；贾宪创造的贾宪三角，西方称为帕斯卡三角(Pascal)，晚出五六百年；贾宪的增乘开方法，欧洲19世纪初鲁菲尼（P. Ruffini，1804）、霍纳（W. G. Horeoner，1819）才有同类的成果；秦九韶总结的大衍总数术即一次同余方程组解法，近代数学大师欧拉（L. Euler，1707～1873）、高斯才达到其水平；朱世杰的四元术即多元高次方程组解法，别朱（E. Bézout，1775）才有同类的方法；朱世杰的高次招差法公式，欧洲格利高里（J. Gregory，1670）、牛顿（I. Newton，1676）才得到。① 这些高深的方法都超前世界数学的先进水平。

五　宋元数学的特点

宋元时期的数学发展有一些与过去不同的特点。

第一，追求简捷运算并出现算法歌诀。自唐中叶起，适应商业交换的繁荣需要计算得快的要求，人们化乘除为加减，创造各种乘除捷算法。同时人们还将某些算法编成口诀，更加便于传颂记忆。南宋荣棨指责当时某些数学著作“或隐问答以欺众，或添歌象以炫己”，说明宋代数学著作的歌诀已经司空见惯。现存杨辉、朱世杰等的著作中都有不少歌诀。朱世杰的《四元玉鉴》“或问歌象门”还以歌诀形式编写了12个题目，是现存数学著作中最早用诗词歌诀编写算题者。朱世杰的这些歌诀有的在明代的算书中反复出现。乘除捷算法和歌诀的改进、简化，导致最迟在南宋发明了珠算盘。化乘除为加减，简化运算的思想还从民间数学渗入高深的数学。贾宪提出了贾宪三角以及以贾宪三角作为“立成”的立成释锁法，并将开方术推广到高次方，同时创造了具有更强的程序化更加简捷的增乘开方法。求贾宪三角中各廉的方法和增乘开方法的核心就是随乘随加，体现了化乘除为加减的思想。人们还将唐之前人们视为畏途的方程造术程序化、机械化，创造了列方程的方法天元术。

第二，开展专题研究，出现以某一课题为研究对象的专门性著作。唐以前的数学著述，大都是综合性著作。《海岛算经》是专以测望重差为专门对象，但它本不是一部独立的作品，而是刘徽《九章算术注》的第十卷。到宋元时期，许多数学家分别关注某一个或某几个专题。例如，“洞渊九容”就是专门研究若干勾股形和一个圆的九种相切关系，元李冶由此演绎成《测圆海镜》，是一部讨论勾股容圆的专题著作。此外，例如，南宋杨辉的《乘除通变本末》是专门研究乘除捷算法的著作；北宋蒋周的《益古集》及李冶由此演绎出来的《益古演段》，北宋刘益的《议古根源》及杨辉由此演绎出来的《田亩比类乘除捷法》，是专门研究田亩计算的著作。

第三，对开方术的研究受到空前重视。开方术在隋之前是各种数学著作的重要内容，但不占主导地位。唐初王孝通的《缉古算经》是以开方术为主体的著作。而对这一专题的研

① 中国自然科学史研究室数学史组，宋元数学综述，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年，第1～9页。

究在宋元达到一个新的阶段。这包括两个方面。一是开方技术的改进，贾宪总结出立成释锁法，并创造贾宪三角作为其“立成”；更重要地，贾宪创造增乘开方法，刘益在祖冲之的《缀术》失传之后重新引入负系数方程，秦九韶、李冶、朱世杰将以增乘开方法为主导开方术发展为求高次方程正根的完备方法。二是设未知数列方程的方法，这就是天元术。后来又发展为二元术、三元术和四元术，即多元高次方程组解法。

第四，出现纯数学研究的著作。中国古代实际上存在着纯数学和应用数学的分野。例如，刘徽的《九章算术注》基本上是纯数学，但这是为已有的著作作注，而不是独立的著作。宋元数学固然继承了数学理论密切联系实际的传统，但是有的数学著作则明显地与应用关系不大。例如，李冶的《测圆海镜》，围绕着一个圆和十五个勾股形的关系，展开了170个问题，应该是一部纯数学著作。宋元还有一些数学内容应该归于纯数学的范畴。

第五，特别重视有关军事的数学问题。《数书九章》特设军旅类。数学著作中设军事类问题，并不是从《数书九章》开始的。北周甄鸾的《五曹算经》中就有“兵曹”卷，然而，其中所用的数学方法都非常浅近。而秦九韶《数书九章》适应抗金、抗蒙战争的需要，设立了11个直接与军事有关的军旅问题，占13%多。所用到的数学知识，除一般加减乘除外，还用到勾股、重差、开方等比较高深的方法。对军事问题像《数书九章》这样重视，设计的问题这样多，并且使用了最新的数学方法，在中国传统数学著作中是罕见的。

第六，探讨数学与道的关系。宋元时期思想界关于“道”及“道”与“器”关系的讨论比较深入。例如，秦九韶的同代人、理学家黄震就认为“道不离器”，道就是“日用常行之理”，主张经世致用。[①] 杰出的数学家受到思想界的影响，也在探讨这类哲理问题。他们对数学的认识，尽管还遵循传统思想的看法，比如秦九韶将数学的作用概括为“通神明，顺性命”，“经世务，类万物”这两类，与《汉书·律历志》、刘徽《九章算术注序》的看法一脉相承。但是，许多数学家，不管是南方的秦九韶还是北方的李冶，都将数学与“道”联系起来。例如，秦九韶说：“数与道非二本”，愿将自己的数学知识“进之于道”。李冶在《测圆海镜序》中谈到自己研究数学不被人们理解时感慨地说：“由技兼于事者言之，夷之礼，夔之乐，亦不免为一技。由技进乎道者言之，石之斤，扁之轮，非圣人之所与乎？”[②] 因此，李冶主张“推自然之理，以明自然之数”，与数学不可知论和数字神秘主义划清了界限。

第七，完整的数学教学计划的制定。在中国数学史上，数学家和开明士人历来重视数学教育，隋唐还创设算学馆，但是一直没有见到数学教学计划的记载。南宋杨辉在《乘除通变本末》[③] 卷上之首在中国数学史上第一次提出了教学计划——“习算纲目”：

习算纲目

先念九九合数。一一如一至九九八十一，自小至大，用法不出于此。

学相乘起例并定位。功课一日。

温习乘法题目。自一位乘至六位以上，并定位。功课五日。

---

① 南宋·黄震，黄氏日钞。

② 元·李冶，测圆海镜，十二卷，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年。本编凡引《测圆海镜》，如不说明，均据此。

③ 南宋·杨辉，乘除通变本末，《杨辉算法》，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年，第1047～1072页。本编凡引《乘除通变本末》的均据此。

学商除起例并定位。功课一日。

温习除法题目。自一位除至六位除以上，并更易定位。功课半月日。

既识乘除起例，收买《五曹》、《应用算法》二本，依法术日下两三问。诸家算法不循次第，今用二书，以便初学。且未要穷理，但要知如何发问，作如何用法答题，如何用乘除。不过两月，而《五曹》、《应用》已算得七八分矣。《详解算法》第一卷有乘除立问一十三题，专说乘除用体。玩味注字，自然开晓。

诸家算书用度不出乘、除、开方三法。起例不出如、十二字，下算不出横、直二位。引而伸之，其机殆无穷尽矣。乘除者本钩深致远之法，《指南算法》以加、减、九归、求一，旁求捷径，学者岂容不晓？宜兼而用之。

学加法起例并定位。功课一日。

温习“加一位”、“加二位”、“加隔位”。三日。

学减法起例并定位。功课一日。

加法乃生数也，减法乃去其数也。有加则有减。凡学减必以加法题答考之，庶知其源。用五日温习足矣。

学“九归”。若记四十四句念法，非五七日不熟。今但于《详解算法》“九归”题术中细看注文，便知用意之隙，而念法、用法一日可记矣。

温习“九归”题目。一日。

“求一”本是加减，乃以倍、折兼用，故名。求一其实无甚深奥，却要知识用度。卷后具有题术下法，温习只须一日。

“穿除”又名“飞归”，不过就本位商数除而已。《详解》有文，一见而晓。加减至“穿除”皆小法也。

商除后不尽之数，法为分母，实是分子。若乘而还原，必用通分。分母、分子繁者，必用约分。诸分母、子不齐而欲并者，必用合分。分母、子有二，较其多寡者，必用课分。均不齐之分者，则用平分。斤连铢两，匹带尺寸，亦犹分子，非乘分、除分不能治之。治分乃用算之喉襟也。如不学，则不足以知算。而诸分并著《九章·方田》。若以日习一法，不旬日而周知。更以两月温习，必能开释。《张丘建算经》序云：不患乘除为难，而患分母、子之为难。以辉言之，分子本不为难，不过位繁。剖析诸分，不致差错而已矣。

开方乃算法中大节目。勾股、旁要、演段、锁积多用。例有七体：一曰开平方，二曰开平圆，三曰开立方，四曰开立圆，五曰开分子方，六曰开三乘以上方，七曰带从开方，并载少广、勾股二章。作一日学一法，用两月演习题目。须讨论用法之源，庶久而无失忘矣。

《九章》二百四十六问，固是不出乘、除、开方三术。但下法布置尤宜遍历。如互乘、互换、维乘、列衰、方程，并列图于卷首。

《九章》二百四十六问，除习过乘、除、诸分、开方，自余方田、粟米，只须一日。下编衰分，功在立衰。少广全类合分。商功皆是折变。均输取用衰分、互乘。每一章作三日演习。盈不足、方程、勾股用法颇杂，每一章作四日演习。更将《九章纂类》消详，庶知用算门例，《九章》之义尽矣。

《事物纪原》载勾股、旁要，本是两章，今总为一章。详观法意，实是两端。刘徽以旁要之术，变重差减积，为《海岛》九问。刘益以勾股之术治演段锁方，

撰《议古根源》二百问，带从益隅开方，实冠前古。《九章》序云：或得一二，以能自成一家之书，信矣。但《海岛》题法隐奥，莫得其秘。李淳风虽注，只云下法，亦不曾说其源。《议古根源》元无细草，但依术演算，亦不知其旨。自《九章·勾股》而有二书，因二书增续诸家之妙。序又云：《九章》犹儒者之六经，医家之《难》、《素》，兵法之《孙子》欤。是故勉学者知《九章》矣。

它包括了学习的内容、方法和时间安排，是一个从九九表开始，到《九章算术》中各种数学方法完备的教学计划。它从低到高，由浅入深，循序渐进，注意培养学生的计算能力，切实可行。它强调学习的重点是乘、除、分数和开方。乘除法和分数四则运算历来受到数学家的重视，而开方原本不过是数学的一个分支，在“九数”和《九章算术》中甚至没有成为一类或一章，但是，宋元时期开方术发展得最快，成为最为发达的分支，杨辉称为“大节目”。在“习算纲目”中，杨辉强调要明算理。例如，他讲减法时不仅讲算法，而且指明：“加法乃生数也，减法乃去数也，有加则有减。”在讲乘除法时，他说：“乘除者，本钩深致远之法。”并认为：“因法不独能乘，而亦能除。”在明算理的基础上，杨辉强调要多做题，即精讲多练。严敦杰认为，杨辉的数学教育思想可以归纳为三条：

（1）循序渐进与熟读精思的学习方法；

（2）积极诱导培养学习者自觉的计算能力；

（3）不放松在学习中的细小环节。[①]

这种看法是中肯的。应该说，这个教学计划是两宋数学高度发达的产物。

第二节　传本《夏侯阳算经》

传本《夏侯阳算经》三卷，撰人不详。唐初李淳风注释十部算经有《夏侯阳算经》一种。今传《夏侯阳算经》三卷则含有唐中期的若干史料，非复原本。

一　传本《夏侯阳算经》的年代与内容

（一）《夏侯阳算经》的编纂年代

清戴震认为原本《夏侯阳算经》是隋人的作品，“韩延乃作注者姓名”，又认为辨度量衡、课租庸调、论步数不等等章的制度“皆据隋制言之。则是韩延传其学而以己说纂入之，序亦当为延所作”。[②] 钱宝琮认为：“传本《夏侯阳算经》是在唐代宗在位时期（公元762～779）写成的。”[③] 近年陈明光认为成书年代：“为德宗贞元四年（公元788）之后，其下限可至宪宗元和十一年（公元816）之前。”[④] 李兆华细考传本《夏侯阳算经》所含具有时代

---

① 严敦杰，宋杨辉算书考，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年，第149～165页。本编凡引此文，均据此。

② 清·戴震，夏侯阳算经跋，见：戴震撰，张岱年主编，戴震全书，第六册，黄山书社，1995年，第337页。

③ 钱宝琮，夏侯阳算经提要，见：钱宝琮校点，算经十书，下册，中华书局，1963年，第552页。又：李俨钱宝琮科学史全集，第四卷，辽宁教育出版社，1998年，第552页。

④ 陈明光，传本《夏侯阳算经》成书年代补证，见：中国历史文献研究会编，历史文献研究（北京新一辑），燕山出版社，1990，第248～253页。此项资料系邹大海先生提供。

性的史料，认为其成书年代当以德宗贞元元年（公元785）左右为宜。盖该书除涉及唐代租庸调法之外，还有“公廨本钱”，“变造法”，“两税法”及“除陌法”。[①] 兹依次说明于后。

卷中第七题，“今有官本钱八百八十贯文，每贯月别息六分”，“内六百文充公廨”，余由太守、别驾等七人逐官高卑共分[②]。此事属唐代公廨本钱制度。按《新唐书》卷五五载：“天下置公廨本钱，以典史主之，收赢十之七，以供佐使以下不赋粟者常食，余为百官俸料。”《唐会要》卷九十三亦说明所收利息“充添修司廨宇什物”。《新唐书》卷五五亦载，贞观二十二年（公元648）规定公廨本钱额数，“上州，二百四十二万”，“中州，一百五十四万”，“下州，八十八万”。题云八百八十贯文与下州数额相同。《新唐书》同卷又载：“（开元）十八年（公元730），……复置天下公廨本钱，收赢十之六。”十之六即六分取息。题云“每贯月别收息六分”与此正同。题云太守等下州职官与《新唐书》百官志所载定制亦大致相符。故本题内容当系730年之后的史实。

卷上第九题，计算“依租变米，每谷三斛为米一斛四斗”，卷中第四题、第五题、第六题皆云：“官令纳谷三斛准米－斛四斗”，卷中第二十题计算“折布为轻货绢”。此五题属唐代变造法。因漕运耗资过费，江淮地区的租调原有“变造”的先例，即将所纳租调实物易为轻货（当地土特产）运抵长安。《唐会要》卷九十三载，开元二十五年（公元737）敕：“自今以后，关内诸州庸调资课并宜准时价变粟取米送至京，逐要支用。其路远不可运送者宜所在收贮，便充随近军粮。其河南、河北有不通水利宜折租造绢以代关中调课。”故上述五题当系公元737年之后的史实。

卷中第二十一题计算两税米，卷中第二十二题，卷下第十题、第十六题、第二十七题计算两税钱。此五题属唐代两税法。唐高祖武德七年（公元624）始定租庸调法，其法以人丁为本征收实物税。武德初又规定“凡天下人户，量其资产，定为九等”。代宗大历四年（公元769）明定“天下百姓及王公已下，每年税钱分为九等”。此为户税。自太宗始设有义仓以备荒年，亩税二升。大历五年诏京兆府百姓税，“夏税，上田亩税六升，下田亩税四升。秋税，上田亩税五升，下田亩税三升”。此系地税。户税、地税为租庸调法的补充，与两税法不同。开元以后，户口久不更造，贫富升降不实，加以连兵不息，财政益屈。租庸调法瓦解，而以资产为宗的两税法成立。《旧唐书》卷一一八杨炎传载，德宗建中元年（公元780）诏“以贫富为差”，“居人之税，秋夏两征之”，“夏税无过六月，秋税无过十一月”。“行商者，在郡县税三十分之一。”两税法以缗钱计税，所纳实物要估为钱数。上述卷中第二十一题言及两税米，似是公元770年之后的情形，而卷中第二十二题等四题所云两税钱则当在公元780年之后。

卷下第三十题，“今有钱五千四百六十三贯四百五十文，准例每贯纳五十文充垫陌。问：合垫几何？”本题所云“垫”，系唐代的一种杂税，税法称除陌法。据《旧唐书 · 食货志》、《新唐书 · 食货志》载，此法行于玄宗以后。两税法成立之后，明令“此外敛者以枉法论”，而杂税依然存在。除陌钱是其中一种。且公钱支出亦需除陌。因藩镇之乱，军费无着，有户部侍郎赵赞请“税间架，算除陌”。《新唐书》德宗纪：“建中四年六月庚戌（公

① 李兆华，传本《夏侯阳算经》成书年代考辨，自然科学史研究，第26卷第4期，2007年。

② 唐 · 夏侯阳算经，郭书春点校，见：郭书春、刘钝点校，算经十书，辽宁教育出版社，1998年；台湾九章出版社，2001年。本编凡引用《夏侯阳算经》的文字，均据九章版。

元783年7月8日）税屋间架，算除陌钱。”据《旧唐书》卷四九：“除陌法：天下公私给与货易，率一贯旧算二十，益加算为五十。给与他物或两换者，约钱为率算之。……至兴元二年正月一日①（公元785年2月14日）敕悉停罢。”此后30年间仍维持一贯垫二十的规定。《新唐书》卷五五载，德宗贞元三年（公元787）李泌为相，规定“中外给用，每贯垫二十，号户部除陌钱”。《新唐书》卷五五：“（宪宗）元和四年（公元809），京师用钱缗少二十及有铅锡钱者，扑之。”同卷：“元和九年，户部除陌钱每缗增垫五钱。”《旧唐书》卷四八载穆宗长庆元年（公元821）九月敕：“从今以后，宜每贯一例除垫八十，以九百二十文成贯。”上述卷下第三十题言“准例每贯纳五十文充垫陌”，所谓准例犹言依照规定。而此一规定与上述建中四年六月至兴元二年正月实行的除陌法恰符。此外，未见一贯垫五十之规定。故上述卷下第三十题当是公元783年至785年间的史实。

卷下第二十八题，“今有钱三千四百六十三贯五百文，欲每贯垫四十二文。问：垫几何？”由上述可知，自建中四年至长庆元年近四十年间，所知除陌法之率每贯二十，五十，二十五，八十等均为整五倍。本题所云每贯垫四十二文无与焉。且卷下第二十八题与第二十九题同类。前者以若干钱乘以千分之四十二，术文为“先置钱数，以六、七因之，退位即得”。后者以若干钱乘以四十二，术文为“先置绢匹之价，以七、六因之，即得”。此相连两题似为解说以四十二乘某数的筹算简算法而设。故卷下第二十八题所云每贯垫四十二文当为设题之辞，似与除陌法无涉。

以上各题涉及公廨本钱、变造法、两税法及除陌法，大致为两税法成立（公元780）前后的史实，而以“除陌法”废除的年代（公元785）为最迟。若将公元785年左右视为传本《夏侯阳算经》成书年代当与事实不远。

（二）传本《夏侯阳算经》的内容

该书除第八章第五节所述属于原本《夏侯阳算经》的内容外，其余各题多与唐中期经济史料有关。作者可能是一位长期从事会计的人，结合当时的实际计算问题，征引前贤之作，“纂定研精，刊繁就省”，完成此作。

就数学内容而言，该书值得重视之处是十进小数的使用和筹算乘除法的简化算法。《夏侯阳算经》多次通过“二因”或“折半，五因”将以丈、尺、寸等为单位的数量分别化为以端、匹为单位的十进小数。

筹算乘除法原为三层布算。该书以分解乘数、分解除数、以加代乘、以减代除等方法使筹算乘除法以一层布算完成。此类算法在南宋杨辉《乘除通变算宝》三卷中有进一步的发展。

二　《夏侯阳算经》的版本

传本《夏侯阳算经》的北宋秘书省刻本及其南宋鲍澣之翻刻本在清初之后都已失传。现在的传本有两个来源：一是清康熙二十三年（1684）毛扆影抄的南宋本，世称汲古阁本，后传入清宫，藏天禄琳琅阁，今存台北故宫博物院。1932年，北平故宫博物院影印汲古阁本，

① 兴元二年正月一日丁酉改元贞元。


夏侯陽筭經序
夫愽通九經爲儒門之首學該六藝爲伎術之
宗若非材性通明孰能與於此也然筭數起自
伏羲而黄帝定三數爲十等隸首因以著九章
[illegible]有虞乃同律度量衡孔子曰謹權量審法
度漢備五數紀於一協於十長於百大於千衍
於萬度長短者不失毫釐量多少者不失抄撮
權輕重者不失黍絫五曹孫子述作滋多甄鸞
劉徽爲之詳釋稽之往古妙絶其能儲校今時

图 15-2-1　《夏侯阳算经》书影（汲古阁本）

收入《天禄琳琅丛书》（图15-2-1）。二是明永乐六年（1408），将与北宋本的底本不同的另一抄本分类抄入《永乐大典》“算”字条各卷。清乾隆三十九年（1774）戴震在《四库全书》馆从《永乐大典》辑录出《夏侯阳算经》，略加校勘。其副本在乾隆四十一年活字排印，收入《武英殿聚珍版丛书》。其修订本于1993年影印收入《中国科学技术典籍通汇 · 数学卷》。乾隆四十三年，以戴震辑录校勘本的正本为底本，抄入《四库全书》，藏清宫文渊阁。后又抄成六部，分藏文津阁等全国六家皇家书阁。《四库全书》文渊阁本今藏台北故宫博物院，1986年台北商务印书馆将其影印。2005年，北京商务印书馆影印了文津阁本。

乾隆四十一年，戴震以汲古阁本为底本，以戴震辑录校勘本参校，重加整理，并做了某些修辞加工，由孔继涵刻入微波榭本《算经十书》。微波榭本在清中叶之后多次翻刻，还被刻入鲍廷博《知不足斋丛书》和刘铎的《古今算学丛书》等，流传广泛。

1963年，钱宝琮以微波榭本为底本，重加校勘，写出校勘记56条，纠正各本俱误的文字25条，作为附录收入钱宝琮校点《算经十书》①。

1998年，郭书春以汲古阁本为底本，重加校勘，收入郭书春、刘钝点校《算经十书》（简体字，辽宁教育出版社）。2001年，又加修订，收入台北九章出版社出版的《算经十书》（繁体字）②。

1999年，纪志刚以钱校本为底本校勘，收入“《孙子算经》《张邱建算经》《夏侯阳算经》导读”。③

第三节　贾宪和《黄帝九章算经细草》

一　贾宪和他的老师楚衍

贾宪是宋元时期现在知道其成就的第一位著名数学家，著有《黄帝九章算经细草》九卷和《算法敩古集》二卷。前者因被作为杨辉《详解九章算法》的底本而尚存约三分之二（图15-3-1），后者已失传。他的同代人王洙（公元997～1057）说：“近世司天算，楚衍为首。既老昏，有弟子贾宪、朱吉著名。宪今为左班殿直，吉隶太史。宪运算亦妙，有书传于

① 《夏侯阳算经》，钱宝琮校点。见：《算经十书下册》，钱宝琮校点，中华书局，1963年。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第四卷，辽宁教育出版社，1998年。

② 夏侯阳算经，郭书春点校，见：《算经十书》，郭书春、刘钝点校，台湾九章出版社，2001年。

③ 纪志刚：《孙子算经》、《张邱建算经》、《夏侯阳算经》导读，湖北教育出版社，1999年。

世，而吉驳宪弃去余分，于法未尽。”① 关于贾宪的生平，除了王洙的记载外，没有任何别的资料。左班殿直是个下级武官，看来，数学只是他的业余爱好。关于《黄帝九章算经细草》成书的年代，无可靠记载。北宋王尧臣等编的《崇文总目》（11 世纪 30 年代初）记有《九章算草》，当是贾宪此书。那么它在这以前已经成书了。

贾宪对宋元数学的发展影响极大。宋元数学的主要成就，除了大衍总数术外，现存的《黄帝九章算经细草》中都有其滥觞。贾宪是宋元数学高潮的主要推动者。30 余年来，人们津津乐道数学上的“宋元四大家”，指的是秦九韶、李冶、杨辉、朱世杰。这是不公正的。这四位称为 13 世纪数学“四大家”，没有什么不可。但是，若要说“宋元四大数学家”，则不能没有贾宪。

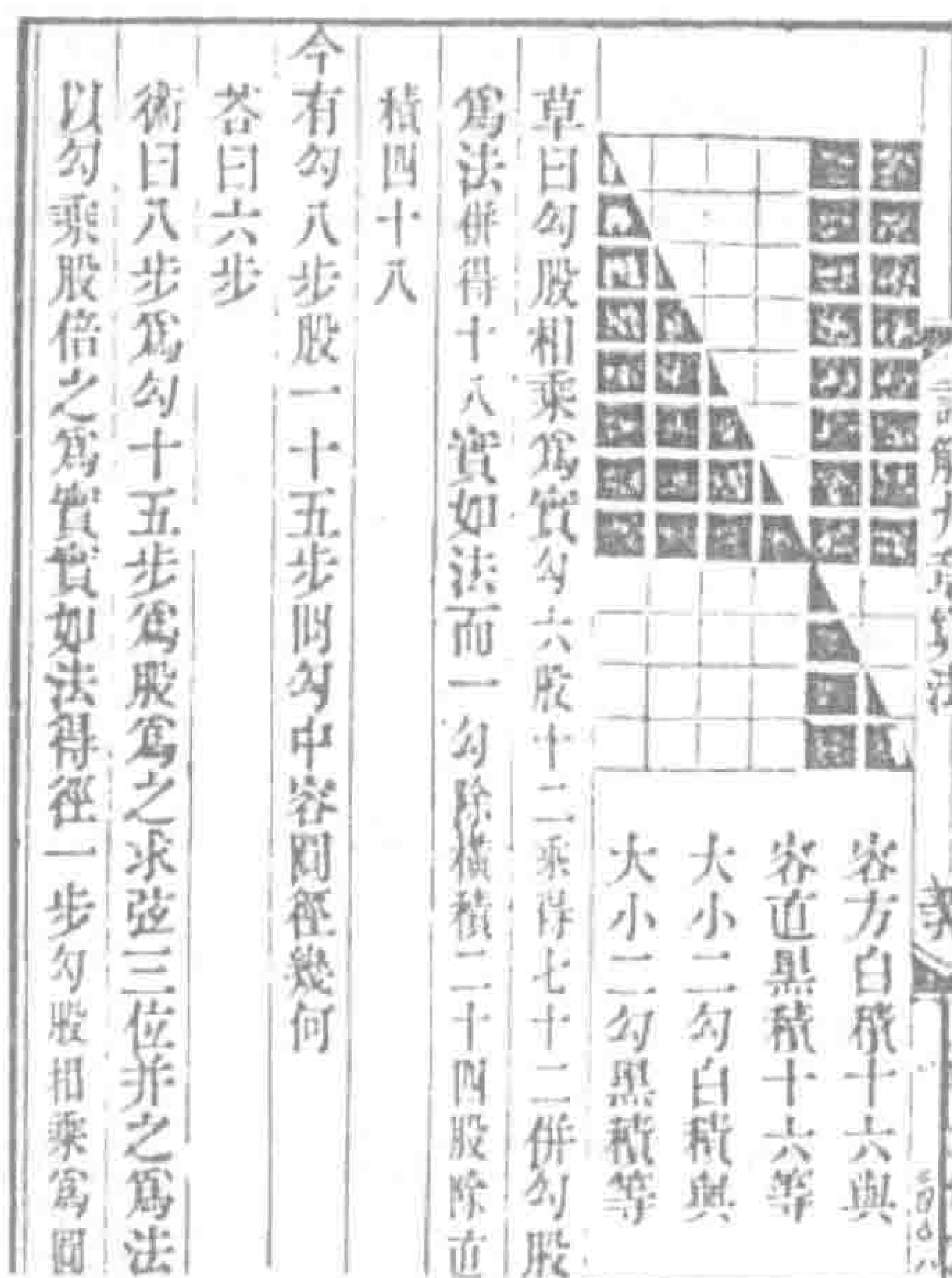

容方白積十六與
容直黑積十六等
大小二勾白積與
大小二勾黑積等
草曰勾股相乘爲實勾六股十二乘得七十二倂勾股
爲法倂得十八實如法而一勾除積二十四股除直
積四十八
今有勾八步股一十五步問勾中容圓徑幾何
荅曰六步
術曰八步爲勾十五步爲股爲之求弦三位并之爲法
以勾乘股倍之爲實實如法得徑一步勾股相乘爲圓

图 15-3-1　贾宪《黄帝九章算经细草》书影（杨辉《详解九章算法》引）

贾宪的老师楚衍，开封胙城（今河南省延津县）人，是北宋著名历算学家。对《九章算术》、《海岛算经》、《缉古算经》等十部算经深有研究，并多次参与或主持历法的修订。先补司天监学生，迁保章正。乾兴初（1022）参与改历。天圣初（1023）人们推崇楚衍精通历数，授灵台郎，与掌历官宋行古等九人集天章阁，制成《崇天历》。楚衍遂晋升为司天监丞，入隶翰林天文。庆历中任司天监判监。皇祐（1049～1053）中参与制订《司辰星漏历》十二卷。后与周琮共同管理司天监。

楚衍有女亦精通算术。还有一位学生朱吉，亦精通数学。

二　《黄帝九章算经细草》大部存世考

《黄帝九章算经细草》，9 卷，北宋贾宪著。许多著述误为《黄帝九章算法细草》，是以讹传讹。

自 1842 年郁松年刻宜稼堂本《详解九章算法》起直至 20 世纪 80 年代中期，学术界的传统看法是，贾宪的《黄帝九章算经细草》除了杨辉在《详解九章算法》中抄录了贾宪三角、立成释锁法和增乘开方法等内容外，均已失传。这是不确切的，实际上，贾宪此书像《九章算术》本文、刘徽注、李淳风等注释一样，被杨辉的《详解九章算法》全部抄录，从而现今仍存在约 2/3。② 其理由如次：

杨辉《详解九章算法序》自述道：

> 辉虽慕此书，未能贯理，妄以浅也，聊为编述，择八十题以为矜式，自余一百

---

① 北宋·王洙，王氏谈录，见：陈继儒，《宝颜堂秘笈》广集，第二十秩。

② 郭书春，贾宪《黄帝九章算经细草》初探，自然科学史研究，1988，7（4），328～334。

六十六问，无出前意，不敢废先贤之文，删留题次，习者可以闻一知十。①

就是说，整个《九章算术》，他只详解了 80 个题目，另有 166 个题目，没有他的文字。为了判断这种看法是否正确，我们考察一下《详解九章算法》的实际情况。现存约半部《详解九章算法》的《宜稼堂丛书》本共有 98 个题目，其在各章的分布及构成情况如下：

章名	"九章算术"题数	《详解九章算法》存题数	《详解九章算法》有《九》、刘、李以外文字者
商功	28	13	13
均输	28	27	24
盈不足	20	20	17
方程	18	14	14
勾股	24	24	24
合计	118	98	92

就是说现存《宜稼堂丛书》本《详解九章算法》4 卷半 98 道题目中有《九章算术》本文、刘徽注、李淳风等注释以外的文字者达 92 道。若全书，当然会更多。这与杨辉说自己只详解了 80 个题目是不可调和的矛盾。换言之，《详解九章算法》中，除《九章算术》本文、刘徽注、李淳风等注释以外的文字不可能都是杨辉的详解，必定有他人的文字。这个人是谁呢？实际上杨辉已经告诉了我们，是贾宪。他说：

向获善本，得其全经，复起于学，以魏景元四年刘徽等、唐朝议大夫行太史令上轻车都尉李淳风等注释、圣宋右班直贾宪撰草。

就是说，杨辉是以刘徽注、李淳风等注释、贾宪细草的《黄帝九章算经细草》为底本作详解的。他照录了《九章算术》本文、刘徽注、李淳风等注释，那么，他不敢废其文的先贤，当然包括贾宪及其细草在内。

贾宪的细草包括哪些内容呢？杨辉在谈到他的详解时说：

恐问隐而添题解，见法隐而续注释，刊大小字以明法草，僭比类题以通俗务。

这是说，杨辉详解的内容仅限于解题、比类及部分注释，并且用大小字将自己的详解与贾宪的细草区别开来：自己的详解用小字，贾宪的细草用大字。这与《详解九章算法》中除《九章算术》本文外的法和草都用大字，是完全一致的。因此，《详解九章算法》中的法和草，是贾宪的细草的主要内容。上述《宜稼堂丛书》本所存《详解九章算法》约 4 卷半中有《九章算术》本文、刘徽注、李淳风等注释的 92 题，全都有法、草，而有解题、比类及注释者，只有 44 问，没有超出这 92 题的范围。这里有两个问题值得注意，一是考虑到《九章算术》前 4 卷中卷二有 31 个今有术的应用题、卷三有 11 个异乘同除类题，卷四有 11 个少广术的应用题，这 53 个题目，如果贾宪要提出新的法或草的话，最多 3 ~ 4 条，因此，后 4 卷半 92 个题目中杨辉详解了 44 个，大体符合他全书详解了 80 题的比例。二是杨辉实际上是为贾宪的细草作详解，而不是为《九章算术》作详解。

综上所述，杨辉的《详解九章算法》含有《九章算术》本文、刘徽注、李淳风等注释、贾宪细草和杨辉详解五种内容。因此，贾宪的《黄帝九章算经细草》像《详解九章算法》

---

① 南宋·杨辉，详解九章算法，宜稼堂本，见：郭书春主编．中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年。本编凡引用贾宪《黄帝九章算经细草》及杨辉《详解九章算法》的文字，如不说明，均据此。

一样，今存约占全书的2/3。具体说来就是：衰分章中的异乘同除类问题、少广章的全部（以上存《永乐大典》卷16343、16344中），商功章约半章，盈不足、勾股两章的全部，均输、方程两章的绝大部分（以上存《宜稼堂丛书》本《详解九章算法》中），另有2问存《诸家算法及序记》中。

三　《黄帝九章算经细草》的数学成就和数学思想

《黄帝九章算经细草》的数学成就主要有：

（1）提出立成释锁法。这是在传统开方术基础上总结出来的。它的重要意义是将开方术推广到任意高次方。

（2）创造"开方作法本源"即贾宪三角，作为立成释锁法的立成。他提出增乘方造表法，可以得出任意次方的展开式的系数 。

（3）创造增乘开方法。这是一种程序化、机械化更强的开方法。贾宪给出了开平方、开立方的一般程序，还给出了开四次方的方法，是为中国数学史上第一个开四次方的程序。当然，贾宪的增乘开方法可以推广到开任意高次方。

比以往的数学方法有更强的程序化、机械化，而且有更高的抽象性，这是贾宪数学思想的重要方面。众所周知，《九章算术》卷三的异乘同除类问题、卷六的非均输类问题、卷九的解勾股形类问题大都是具体问题的演算细草，抽象程度不高。刘徽《九章算术注》对其作了一般性概括，但没有改写术文。例如，对勾股章"引葭赴岸"题，《九章算术》的术文没有离开"池方"、"出水"、"水深"、"葭长"这些特有对象，是具体运算，刘徽注曰：此以"池方半之"为勾，"水深为股，葭长为弦"，"出水者，股弦差"，并进行了证明，但没有改写术文。贾宪则就此概括出股弦较与勾求股法：

> 股弦较与勾求股法曰：勾自乘，以股弦较自乘减之，余为实。倍股弦较为法，实如法而一。

这是只依赖于勾和股弦较而不依赖于具体对象的抽象性公式（5-3-4）。

又如，《九章算术》方程术实际上具有普适性，然而由于过于复杂，不得不借助于求禾实来阐述，正如刘徽所说："此都术也。恐空言难晓，故特系之禾以决之。"贾宪则提出了更为抽象的术文：

> 术曰：排列逐项问数，命首位物多者为主，以邻行数增乘求等数。余物与价亦例乘之，以原多物对减。其余次第增减，价可为实，物可为法而止，以法除之。

此术虽未离开物与物价，然不再系之以禾，且行数不限，表述更为简洁，其抽象性比《九章算术》进了一大步。贾宪提出以物多者为主，亦可减省运算。

刘徽在《九章算术》方程章牛羊直金问中创造了互乘相消法，此后近800年没有受到重视。贾宪在方程章第2，4，5，6问的细草中使用了互乘相消法，并在第6问中提出了抽象性的术文：

> 术曰：以所求率互乘邻行，齐所求之率，以少减多，再求减损。钱为实，物为法，实如法而一。

此处所求率即是未知数系数，贾宪将它们称为所求率，反映了方程的本质。

总之，贾宪在《九章算术》和刘徽之后，将中国传统数学的程序化抽象化推进到一个

新的阶段。

第四节　刘益和《议古根源》

一　刘　益

刘益，北宋重要数学家，生平不详，著《议古根源》。南宋杨辉在《田亩比类乘除捷法》卷上说“中山刘先生益《议古根源》序曰‘入则诸门，出则直田’”。[①] 可见，刘益是中山府（府治在今河北省定州）人。刘益的生平，除上述文字外，没有任何可靠记载，甚至他的活动年代也无法确定。钱宝琮根据北宋河北西路的定州从政和三年（1113）起升为中山府，认为刘益《议古根源》的撰著年代大概在1113年之后。[②] 李迪在《中国数学通史·宋元卷》则根据程大位把《议古根源》列为宋元丰绍兴以来所刊算书之首，认为《议古根源》的成书应在元丰（1078～1085）之前。李迪认为“以中山府名之始定刘益年代不能成立”，因为说这话的是13世纪的杨辉，后人说前人可能用后来的地名，而且中山之名只有16年。如果在1113年之后，则刘益应为金人或北宋末流亡到南方的南宋人。这也没有根据。他查得真宗（公元998～1022）时有一位刘益，可能就是《议古根源》的作者。这位刘益在大中祥符三年（1010）因大河顺道北流，以职方员外郎的身份前往滑州（今河南省滑县）设祭。据《宋史·职官志》，职方员外郎属兵部，“掌天下图籍，以周至方域之广袤，及郡邑、镇砦道里之远近。……四夷归附，则分隶诸州，度田屋钱粮之数以给之”，应当有一定的数学知识和测绘技术。这位刘益与日侍内廷的权臣周怀政关系密切，后受周案牵连，磔于市。沈康身同意李迪早先的看法[③]，即推定刘益是11世纪中叶人。[④] 总之，关于刘益的著书年代，还是一个悬疑的问题。

二　《议古根源》

《议古根源》已失传，杨辉在《田亩比类乘除捷法》有三处谈到刘益及其《议古根源》。杨辉自序云：

> 为田亩算法者，盖万物之体，变段终归于田势；诸题用术，变折皆归于乘除。中山刘先生作《议古根源》，序曰“入则诸门，出则直田”，盖此义也。撰成直田演段百问，信知田体变化无穷，引用带从开方正负损益之法，前古所未闻也。

卷上在“直田法”及第一个例题后云：

> 中山刘先生益《议古根源》序曰“入则诸门，出则直田”。盖直田能致诸用而有是说。

---

① 南宋·杨辉，田亩比类乘除捷法。《杨辉算法》见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册。河南教育出版社，1993年，第1073～1094。本编凡引《田亩比类乘除捷法》的均据此。

② 钱宝琮，增乘开方法的历史发展，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年。又见：钱宝琮，李俨钱宝琮科学史全集，第九卷，辽宁教育出版社，1998年。本编凡引此文，均据此。

③ 李迪，简评《中国数学史》，科学通报，1965，(11)。

④ 沈康身主编，中国数学史大系·两宋卷，北京师范大学出版社，2000年。本编凡引此书均据此。

卷下在两个截直田求阔、长的例题之后云：

> 中山刘先生序谓：算数[1]之术，入则诸门，出则直田。《议古根源》故立演段百问，盖欲演算之片段也。知片段则能穷根源，既知根源，而于心无懵昧矣。今姑摘数问，详注图草，以明后学。其余自可引而伸之，触类而长，不待尽述也。

中国数学史界普遍认为，杨辉《田亩比类乘除捷法》卷下上述这段文字之后引用了《议古根源》的22个题目。实际上，这段文字之前的两个例题以及卷上“比类”等之前10个例题，很可能也是《议古根源》的内容。这从卷上与卷下的体例相同可以看出。无论如何，我们由《田亩比类乘除捷法》可以对《议古根源》有某种程度的了解。

杨辉《田亩比类乘除捷法》自序说《议古根源》100问。而杨辉在《乘除通变本末》卷上“习算纲目”却说是200问：

> 刘益以勾股之术治演段锁方，撰《议古根源》二百问，带从益隅开方，实冠前古。

看来两者似乎矛盾。我们认为，很可能是刘益的《议古根源》共有200问，其中有关田亩的问题有100问。当然，这里的200、100，都是举成数言之，不一定恰恰是这个数目。考虑到北宋之前的数学著作中只有《九章算术》的题数超过200问，无论如何，《议古根源》应该说是部头比较大的一部著作。

根据杨辉关于刘益“引用带从正负损益之法”的记载及现存的题目，刘益求解了带有负系数的方程。学术界一般认为，祖冲之的《缀术》已能解含有负系数的二次、三次方程，可惜此书在唐失传。《议古根源》是现存中国数学史上最早求解含有负系数方程的著作，是个重大创造，所以杨辉说它“实冠前古”，“前古所未闻”。

钱宝琮指出：《议古根源》“推广传统的带从平方到‘负方’和‘益隅’的两个类型”。对这两个类型刘益都提出了“益积术”和“减从术”两种开方法。“这两种计算法都不用增乘开方法，但其中‘减从术’和增乘开方法比较接近。”《议古根源》使数字二次方程的解法获得更进一步的发展。

《议古根源》还求解了一个益隅四次方程。

第五节　秦九韶和《数书九章》

秦九韶（1208～约1261），字道古，自称鲁郡（今山东省曲阜一带）人，生于普州安岳（今四川省）。他著《数书九章》，奠定了他在中国数学史和世界数学史上的地位。秦九韶是宋元数学高潮的代表人物之一。不管人们怎样界定宋元数学四大家，其中必定有秦九韶。美国著名科学史家萨顿（G. Sarton，1884～1956）称他是“他那个民族，他那个时代，甚至所有时代中国最伟大的数学家之一”。[2]

---

① 《宜稼堂丛书》本脱“数”，今补。

② ［美］G. Sarton.（萨顿）. *Introduction to the History of Science*. Vol. 3，Baltimore：Williams and Wilkins，（Carnegie Institution Pub. No. 376）1947.

一　秦九韶的生平

秦九韶，《宋史》无传。通过钱大昕[①]、余嘉锡[②]、钱宝琮[③]、严敦杰[④]、李迪[⑤]等历代学者根据刘克庄（1187～1269）及稍后的周密（1232～约1298）的记载考证，秦九韶的家世与履历已大致清楚。今概述如下：

其父秦季槱，字宏父，普州安岳人。秦九韶自称"鲁郡"。陈振孙《直斋书录解题·历象类》既说"鲁郡秦九韶道古"，又说"蜀人秦九韶道古"。[⑥] 这都说明"鲁郡"是其籍贯，安岳是其故乡。

秦季槱，绍熙四年（1193）进士，治《春秋》。[⑦] 1208年3月，秦九韶出生。[⑧] 1218～1219年，秦季槱任巴州（今四川省巴中县）太守。《宋史·宁宗本纪》记载，兴元（今陕西省汉中市）先后发生军士权兴、张福等兵变，侵犯巴州，旋兵败伏诛。周密说秦九韶"年十八，在乡里为义兵首"。

秦季槱在四川战事失利之后调往首都临安（今杭州），先后任工部郎中、秘书少监，兼任国史院编修官、实录院检讨官，与正直忠良之士友善。秦九韶"侍亲中都，因得访习于太史，又尝从隐君子受数学"，阅读了丰富的皇家藏书，熟悉建筑、修造、治河等各方面的技术和数学问题，并向太史令等学习天文、历法、数学知识。他学习数学的老师"隐君子"，据李迪考证是陈元靓。陈元靓撰《事林广记》，其中有"算法类"。周密说秦九韶还曾向李刘"学骈丽诗词"，他"性极机巧"，"星象、音律、算术以至营造之事，无不精究"，"游戏、球、马、弓、剑，莫不能知"[⑨]。

秦氏在秦季槱时已将家安在湖州。绍定二年（1229）十月，秦九韶任鄞县县尉[⑩]，负责治安。六年，由李刘等推荐，秦九韶从事校正秘阁的图书[⑪]。后来，先后任蕲州通判（州的

---

① 清·钱大昕，十驾斋养新录·数学九章。上海书店，1983年，第332页。

② 余嘉锡，南宋算学家秦九韶事迹考，大公报·文史周刊（上海、天津），1946年12月11日，（9）。本编凡引余嘉锡关于秦九韶的言论均据此。

③ 钱宝琮，秦九韶《数书九章》研究，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年，第60～103页。本编凡引钱宝琮对秦九韶的言论，如不说明，均据此。

④ 严敦杰，秦九韶年谱初稿，见：吴文俊主编，秦九韶与《数书九章》，北京师范大学出版社，1987年，第12～24页。本编凡引严敦杰关于秦九韶的言论，均据此。

⑤ 李迪，秦九韶传略，见：吴文俊主编，秦九韶与《数书九章》，北京师范大学出版社，1987年，第25～42页。

⑥ 南宋·陈振孙，直斋书录解题，见：《四库全书》文渊阁本，第674册，商务印书馆，1986年，第746～748页。本编凡引用陈振孙语，均据此。

⑦ 南宋馆阁续录，第7卷，见：《四库全书》，第595册，商务印书馆影印文渊阁本，1986年，第505页。

⑧ 杨国选，秦九韶生年及任县尉考，中国科技史杂志，29（4）：371～375，2008。关于秦九韶的生年，学术界争论颇多。杨国选近年发现秦九韶之父秦季槱的朋友乔行简于戊辰四月乙卯（嘉定元年，1208）写的《贺秦秘阁季槱得子》词，认为这是为祝贺秦九韶满月而作，由此断定秦九韶生于1208年三月（农历）。

⑨ 南宋·周密，癸辛杂识续集，卷下，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年，第647～648页。本编凡引用周密语，均据此。

⑩ 明．鄞县志，卷八，明嘉靖二九年（1550）编。此系杨国选查得。

⑪ 南宋．李刘：梅亭四六标准，第36卷。见：《四库全书》文渊阁本，第1177册。商务印书馆，1985年，第770页。

副长官）、和州太守。[1] 淳祐四年（1244）八月，秦九韶以通直郎出任建康府（今江苏省南京市）通判。同年丁母忧解官离任[2]，回湖州守孝，于淳祐七年九月完成《数书九章》。据《宋史·律历志》，当时行世的《开禧历》误差较大，而太史局无有能改历者。淳祐八年"召四方之通历算者至都，使历官学焉"。秦九韶以《数学大略》即《数书九章》"得对"。秦九韶与藏书家陈振孙关系密切。陈振孙云："秦博学多能，尤邃历法。凡近世诸历，皆传于秦。所言得失，亦悉著其语云。"严敦杰认为陈振孙《直斋书录解题》关于各历法的解题当均为秦九韶语。

宝祐二年（1254），秦九韶任沿江制置司参议[3]，参与军事谋划。六年正月初，秦九韶由贾似道推荐投奔广州驻军统帅李曾伯。当时琼州太守空阙，李曾伯命秦九韶权（代理）守琼州。有人向朝廷告状，六月宋理宗下令罢免秦九韶。

周密说秦九韶与吴潜"交尤稔"。吴潜是南宋重臣，抗战派首领。开庆元年（1259）秋冬，秦九韶先后任江南东路幕府参议及司农寺寺丞，曾去平江府（今江苏省苏州市）筹措米粮，均遭弹劾被免职。景定元年（1260）被命为知临江军（今江西清江县），又遭到刘克庄弹劾，是否到任，不得而知。同年七月，以贾似道为首的投降派击败吴潜，吴潜罢相。秦九韶受吴潜株连，"徐摭秦事，窜之梅州。在梅治政不辍，竟殂于梅"。据《宋史·理宗本纪》，景定三年正月宋理宗诏吴潜党人"永不录用"，九韶既卒于任，则必在景定二年（1261）。

二　秦九韶人品辨

关于秦九韶的人品，是学术界一个长期争论的重要问题。秦九韶的事迹，主要并且最早记载的是他的同代人刘克庄及稍后的周密，都是负面的。

清代学者焦循[4]等不相信周密所记的秦九韶的所谓"劣迹"，质疑其公正性。1946 年余嘉锡（1883～1955）发表《南宋算学家秦九韶事迹考》，以刘克庄的奏状与周密的《癸辛杂识续集》互相印证，认为刘克庄、周密所说秦九韶的罪状"固非横肆诬蔑"。此后，钱宝琮的《秦九韶〈数书九章〉研究》将秦九韶的人品概括为"为人阴险，为官贪暴"。20 世纪下半叶以来，秦九韶数学成就极大而人品极坏的观点，在学术界占据主导地位。

当然，余嘉锡所说吴潜虽贤，"潜所交游，岂必皆君子？"钱宝琮所说"有才学的人未必有德"，是有道理的。不能以秦九韶与吴潜关系密切而为贾似道所窜逐就认为他必为正人君子，也不能因为秦九韶在数学上有极大贡献就断言他人品高尚。

然而，余嘉锡、钱宝琮等学者只是从刘克庄和周密的文字出发，就事论事，而忽视了当时的社会背景。南宋末年，有两个重大的社会问题是不容忽视的。首先，当时政治非常黑暗，吏治异常腐败。此时朝廷中出现的弹劾官员的奏状，多数不会是公正的。因此，对这些

---

① 南宋．刘克庄，缴秦九韶知临江军奏状，见：《后村先生大全集·掖垣驳缴门》，第 81 卷，赐砚堂抄本，商务印书馆，1929 年。本编凡引刘克庄关于秦九韶的言论，均据此。

② 景定建康志·官守志二，第 24 卷。见：《四库全书》文渊阁本，第 489 册。商务印书馆，1985 年，第 208 页。

③ 南宋．沿江制置司题名·宝祐续题名记，卷二十五，见：《四库全书》文渊阁本，第 489 册，商务印书馆，1986 年，第 232～235 页。。

④ 清·焦循，天元一释，收入《里堂学算记》，影印收入郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 1411～1446 页。

奏状，包括刘克庄的《缴秦九韶知临江军奏状》，我们不宜轻易相信，必须具体分析。

偏安江南的南宋统治集团中与生俱来的主战、主和两派的斗争，在蒙古贵族强大的武力打击下更加激烈，在13世纪50年代末，发展到你死我活的境地，最突出的就是以贾似道为首的投降派和以吴潜为首的抗战派这两大派系的斗争。刘克庄、周密与秦九韶都深深地卷入了这两大派系的斗争中，必须将刘、周对秦九韶的攻击放在这种斗争中分析。

更重要的，刘克庄晚年投靠贾似道，周密是贾似道的门人，而秦九韶属于吴潜为代表的抗战派。在政治上，周密与刘克庄同属贾似道一派，在贾似道与吴潜、秦九韶的斗争中，反对吴潜、秦九韶。因此，一方面，刘克庄、周密与秦九韶是政敌。而政敌的指责，是不能轻易相信的。另一方面，同是贾似道的幕僚或门人的刘克庄和周密对秦九韶有基本相同的看法，是毫不奇怪的，他们的话能够相互印证，说明不了任何问题。余嘉锡等以周密之书"为证"，相信刘克庄对秦九韶的指责，当然是不合适的。

我们认为，在没有可靠的第三者资料的情况下，为了评判秦九韶的人品、为官之道和人生志向，我们宁可相信他的自述，这就是《数书九章序》，特别是其中的9段系文。

首先，秦九韶非常关心国计民生。《数书九章》的九类问题中除了"大衍"外，其余八类的标题都来源于人们的生产、生活实际。即使是第一类"大衍"的9个题目，也有8个是实际应用问题。表现了他关心国家的发展和人民生产、生活的各个方面，对国家、对民众有强烈的责任心。

其次，秦九韶强烈反对政府和豪强的横征暴敛，主张施仁政。在9段系文中，明确提到"仁"或"仁政"的有"苍姬井之，仁政攸在"（述田域第三）、"惟仁隐民，犹己溺饥"（述赋役第五）、"彼昧弗察，惨急烦刑。去理益远，吁嗟不仁"（述钱谷第六）、"师中之吉，惟智、仁、勇"（述军旅第八）等4处。施仁政的思想贯穿于整个《数书九章》之中。秦九韶以自心比人心，恪守传统的恕道，认为要像自己落水、挨饿那样理解下层的民众。在数学著作的序言中谈"仁政"，这是空前绝后的。没有强烈的仁政思想决不会这么做。

再次，秦九韶主张抗金、抗蒙，他在南宋统治集团主战、主和两派的斗争中，是站在抗战派一边的。他在《数书九章》中特设"军旅"，用到勾股、重差、开方等比较高深的数学方法。对军事问题像《数书九章》这样重视，设计的问题这样多，并且使用了最新的数学方法，在中国传统数学著作中是罕见的。这是秦九韶亲自参加抗金、抗蒙战争，将数学知识用于战争实践，并在战争中进行数学研究的结晶。

还有，秦九韶把数学看成促进国家各项经济事业的发展，在财政上开源节流，关心民众的疾苦，施行仁政以及进行抗金、抗蒙战争的有力工具，反对视数学为"浅近"的偏见。秦九韶认为，政府中管理财政税收的官吏应该通数学，对管钱粮的官吏不懂数学方法，遇到计算问题只会一一累加、累减，其上司又信任这类人的可悲状况，表示了愤慨。

相反，刘克庄、周密对秦九韶的指责，则都是靠不住的。

总之，秦九韶是一位具有实事求是的科学精神与创新精神的数学家，是一位关心国计民生，体察民间疾苦，主张施仁政，支持抗金、抗蒙战争的正直官吏，是一位把数学作为实现上述理想的有力工具的学者。[①]

---

① 郭书春，重新品评秦九韶，2000年9月在台湾清华大学历史系，2004年4月在秦九韶学术讨论会（湖州）上的报告。姜锡东等主编，宋史研究论丛，第10辑，河北大学出版社，2009年。

三　《数书九章》

(一) 关于《数书九章》的书名

《数书九章》，十八卷（一作九卷），陈振孙记作《数术大略》，又说本名《数术》。周密记作《数学大略》。明《永乐大典》（1408）将其分类抄入“算”字条各卷，作《数学九章》。清乾隆中开《四库全书》馆，从《永乐大典》中辑录出此书抄入《四库全书》，自然作《数学九章》。明万历间王应遴自阁钞本录得一册，云“元止名《数书》，‘九章’二字乃王添入”，四十四年（1616）赵琦美“借录一过”。赵琦美抄本后来先后转入张敦仁、沈钦裴手中，今存国家图书馆。沈钦裴进行校订，“以老病未卒业”，其弟子宋景昌受郁松年之托，“以赵本为主，参以各本”（主要是李锐校《四库全书》本），重加校订①，成为《宜稼堂丛书》本的底本，《数书九章》遂成为通行的书名（图 15-5-1）。


數書九章序
周教六藝數實成之學士大夫所從來尚矣其用本太虛
生一而周流無窮大則可以通神明順性命小則可以經
世務類萬物詎容以淺近窺哉若昔推策以迎日定律而
知氣髀矩濬川土圭度晷天地之大囿焉而不能外況其
間總總者乎爰自河圖洛書闓發祕奧八卦九疇錯綜精
微極而至於大衍皇極之用而人事之變無不該鬼神之
情莫能隱矣聖人神之言而遺其麤常人昧之由而莫之
覺要其歸則數與道非二本也漢去古未遠有張蒼許商
乘馬延年耿壽昌鄭元張衡劉洪之倫或明天道而法傳
於後或計功策而效驗于時後世學者自高鄙不之講此

數書九章序　　宜稼堂叢書

图 15-5-1　《数书九章》书影
(《宜稼堂丛书》本)

(二)《数书九章》的数学成就

秦九韶自述其撰著过程时说：“际时狄患，历岁遥塞，不自意全于矢石间，尝险罹忧，荏苒十祀，心槁气落，信知夫物莫不有数也。乃肆意其间，旁诹方能，探索杳渺，粗若有得焉。所谓‘通神明，顺性命’，固肤末于见；若其小者，窃尝设为问答以拟于用。积多而惜其弃，因取八十一题，厘为九类，立术具草，间以图发之。”这九类就是大衍、天时、田域、测望、赋役、钱谷、营建、军旅、市易，每类 9 题。

秦九韶在《数书九章》中提出大衍总数术，系统解决了一次同余方程组解法，现代数学大师欧拉（Euler，1707～1783）、高斯（Gauss，1777～1855）才达到或超过他的水平②；他又提出正负开方术，把以贾宪创造的增乘开方法为主导的求高次方程正根的方法发展到十分完备的程度，1427 年阿拉伯地区的阿尔·卡西，欧洲在十九世纪才创造这种方法，国外称为霍纳（Horner，1786～1837）法。这两项都是世界级的重要成就。此外，《数书九章》还提出与海伦公式等价的三斜求积公式，改进测望技术，使用并简化解线性方程组的互乘相消法等。另外，秦九韶使用了成熟的十进小数表示法。《数书九章》81 个题目中有 80 个来源于数学的实际应用，反映南宋社会经济情况之翔实，不亚于《宋史·食货志》。

---

① 清·郁松年，《数书九章》跋，道光二十二年（1842）。见：郭书春主编．中国科学技术典籍通汇·数学卷，第 1 册，河南教育出版社，1993 年，第 648 页。

② ［比利时］U. Libbrecht（李倍始），*Chinese Mathematiques in the Thirteenth Century*，*The Shu-shu-chiu-chang of Chin Chiu-shao*，Cambridge，Massachustts and London，England，the M. I. T. press，1973.

（三）秦九韶的数学思想

秦九韶高度评价数学的作用：

大则可以通神明，顺性命；小则可以经世务，类万物。讵容以浅近窥哉！

秦九韶将数学的应用概括为大、小两个方面，实际上继承了中国传统数学思想关于数学的作用的论述。然而，秦九韶通过自己的数学研究实践，认识到“所谓通神明，顺性命，固肤末于见”，而将自己的才智专注于“经世务，类万物”的“小者”上。这既反映了他具有实事求是的科学精神，也表明他专心于数学在国计民生中的应用。他认为“数术之传，以实为体”，数学是为了应用的，并在这种应用中得到发展。

此外，秦九韶认为“数与道非二本”，愿将自己的数学知识“进之于道”，这在前面已经讲过，此不赘述。

第六节　李冶和《测圆海镜》、《益古演段》

一　李　冶

（一）李冶的生平

李冶（1192 ~1279），字仁卿，号敬斋，真定（府治在今河北省正定市）栾城人，生于大兴（今北京市），金元数学家、历史学家。其父为官清廉正直，李冶自幼天资明敏，受到良好教育，爱好数学，青年时便被视为“经为通儒，文为名家”的著名学者。[①] 正大七年（1230）中词赋科进士，权钧州（今河南禹州市）知事。他为官廉洁，一丝不苟。

《元史 · 李冶传》载，1232 年蒙古军攻破钧州，李冶微服北渡，“隐于崞山之桐川（今山西省），聚书环堵中，闭关却埽”，过着粥饘不继，饥寒几至不能自存，人所不堪的生活，却潜心研究数学与其他学问，经、史、子、集无不深究，儒、道、释无不精研，“未尝一日废其业”。后来到太原、平定（今山西省），生活稍微安定。他从道教徒那里得到“洞渊九容”，又加钻研，从而掌握、发展了勾股容圆知识，以天元术为主要方法，于 1248 年著《测圆海镜》。

1251 年，李冶结束避难生活，回到少年求学时的元氏县封龙山定居，与张德辉、元好问交往甚密，人称“龙山三老”。跟随李冶学习的人越来越多，其居所容纳不下，乡民遂修葺因战乱而废弃的北宋李昉在封龙山上的读书堂，是为封龙山书院。此后李冶一直主持封龙山书院，从事授徒、研究和著述工作。《元史 · 李冶传》记载，1257 年，李冶在开平（后称为上都，今内蒙古正蓝旗）接受忽必烈召见，提出一些开明的政治建议。他表彰金将完颜仲德“以国忘家，以主忘身，实自读书中来”，含蓄地批评蒙古贵族的轻文尚武；他赞誉曹彬“伐江南，未尝妄杀一人”，婉转地批评蒙古贵族的杀戮暴行；他赞扬魏征“忠言谠论，知无不言”，批评忽必烈周围居官者“侧媚成风，欲比魏征实多愧矣”；他赞许忽必烈启用王鹗等汉族儒生，认为“汉人中有君子小人，回鹘人亦有君子小人”，“在国家择而用之

① 元 · 苏天爵，国朝名臣事略，中华书局影元刊本，1962 年。本编凡引《国朝名臣事略》，均据此。

耳”，劝忽必烈对各民族一视同仁；他说“为治之道，不过立法度、正纪纲而已”，劝导忽必烈要“辨奸邪，去女谒，屏谗慝，减刑狱，止征伐，上当天心，下合民意，则可变咎证为休征矣”。忽必烈赞赏他的看法，想委以清要官职，李冶以老病非所堪，恳求还山。

1259 年，李冶写成另一部数学著作《益古演段》。

1260 年，忽必烈即位于开平，次年在燕京（后称大都，今北京）设立翰林学士院，七月二日决定授王鹗、李冶、王恽等 6 人为翰林学士，八月十一日为李冶颁发制词。[①] 李冶至燕京，接受翰林学士知制诰同修国史的聘任。就职甫一年，深感“翰林视草，唯天子命之，史馆秉笔，以宰相监之，特书佐之流，有司之事耳，非作者所敢自专而非非是是也”，认为这些工作是“工谀誉而喜缘饰者为高选也，吾恐识者羞之”，又以老病为由辞职归山，继续他的“木石与居，麋鹿与游”的田园生活。

封龙山书院因李冶而名声大振，李冶更加受到人们的尊重。1265 年，人们在平定建立四贤堂，置元好问、李冶等四公像，时唯有李冶尚在世。李冶去世后，封龙山书院建李学士祠纪念他。“真定之学者升公之堂，拜公之像，未尝不肃容以增远想也。”[②]

李冶还著有《敬斋古今黈》[③] 40 卷，《文集》40 卷，《壁书丛削》10 卷，《泛说》40 卷，只有《敬斋古今黈》传世，这是一部读书笔记，在文史方面有不少独到见解。另有《泛说》的部分条目附于《敬斋古今黈》。

（二）李冶的思想倾向和治学态度

女真贵族入主中原建立的金朝，学术空气薄弱。世宗、章宗（1161～1209）奖励儒学，两宋经学、理学得到传播。但金朝儒生受宋儒派系影响较少，王若虚等更开创金代议论之学。李冶是金末元初的通儒，深受王若虚等前辈的影响。他的《敬斋古今黈》主要是对古今的人、事进行议论，不为教条、成见和权威所束缚，敢于发表独立见解，对历代大儒孟轲、刘歆、韩愈、苏轼、朱熹等都一分为二，表彰他们精辟见解的同时，指出他们的失误或不足。他对孔子虽没有批评，但对孔子的言行按照自己的见解重新解释，指斥历代注释之非。比如长期远离政治的隐居生活，使他对《中庸》的“素隐行怪”重新认识，认为“隐逸者初非孔子之所摈也”，郑玄、班固、颜师古等的解释都不妥。孔子只是反对“素隐”，而“国有大智之人不能大用，是国病也。故处士之名，自负也，谤国也”。

因此，李冶的隐居不是消极的，是乱世中及自己不被统治者所理解时不得已而为之。李冶一方面相信天人感应，《敬斋古今黈》认为“经可言命”，另一方面又与命运抗争，认为“史自不可言之”，“盖作史之体，务使闻之者知所劝戒”。所以他的为人处世是积极向上的。他极为赞赏杨万里的诗句“好人难做须著力”，认为著力处才是圣贤阶级。《国朝名臣事略》说他五十年如一日，“手不停披，口不绝诵”，他的朋友砚坚说他“世间书凡所经见，靡不洞究，至于薄物细故，亦不遗焉”[④]，并非过誉之辞。看到他研究数学的艰苦情形，许多人

---

① 元·王恽，秋涧先生大全文集·中堂事记下。见：张元济，《四部丛刊》影印本，商务印书馆，1936 年。关于忽必烈授李冶翰林学士的时间，《元史》各家传记互相抵牾，唯王恽所记最为准确。

② 元·袁桷，封龙山书院重修记，《清容居士集》卷十八。

③ 元·李冶，敬斋古今黈，中华书局，1995 年。本编凡引《敬斋古今黈》的均据此。

④ 元·砚坚，《益古演段》序，《知不足斋丛书》本《益古演段》，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年。

怜悯他，讥笑他，他表示："乃若吾之所得，则自得焉耳，宁复为悯笑计哉?" 李冶不断进取，其思想也与时俱进，他晚年在《泛说》中自述自己一生的思想历程时说：

> 李子年二十以来，知作为文章之可乐，以为外是无乐也；三十以来，知搴取声华之可乐，以为外是无乐也；四十以来，知究竟名理之可乐，以为外是无乐也。今五十矣，覆取二十以前所读《论》、《孟》、六经等书读之，乃知曩诸所乐，曾夏虫之不若焉。①

李冶"聚书环堵中"，长期过着恬淡的隐居生活，使他的思想与老庄和道教发生了共鸣。"环堵"是道门中人修行隐居的地方。当时盛行全真道，李冶流落忻、崞十几年间，很可能寓居于全真道观，与全真道士的来往应该十分密切。因此，道家思想的阐发在他的《敬斋古今黈》中占有相当大的比重。李冶熟悉全真道等内丹派的气功、胎息等养生内容，并身体力行。他曾作诗阐发对摄生之方的理解，邃于性命之学的李之和拊掌大笑曰："子得之矣!" 他与元好问的诗作唱和"无异于谈论玄机的道人"。② 洪万生也指出："无论李冶与全真道士的交往是否密切，他的'天元术'研究以及其支撑的社会条件，离不开全真教所参与、经营的学术环境。"③ 总之，从李冶对道家摄养之道的理解，对技与道的关系的论述，"推自然之理，以明自然之数"的数学研究方法的主张，接受洞渊九容的知识等方面，可以肯定地说，李冶深受道家思想的熏陶，起码也是一位有深邃道家思想的大儒。

李冶的治学方法也值得称道。据《泛说》云，有人问学于李冶，他答曰："学有三，积之之多不若取之之精，取之之精不若得之之深。" 这在今天也不失为箴言。

李冶对章宗以后的金朝文坛渐趋浮华的文风非常反感。他主张"毋以辞夺事"，认为"古人因事为文"，"专以意为主"，"不拘声病"，批评当时"专以浮声切响论文"，"是以文采焕发，观之可爱，而气质萎索，了无余味也"。这些评论，切中时弊，很有见地。

（三）李冶的数学思想

中国古代数学来源于并服务于人们生产、生活的实际，但长期不受重视。李冶驳斥了那种视数学为"九九贱技"的观点，在《益古演段自序》中指出："术数虽居六艺之末，而施之人事，则最为切务。" 他研究了各种学问，著述等身，但是他最重视的是《测圆海镜》。在他弥留之际，对儿子克修说："吾平生著述，死后可尽燔去。独《测圆海镜》一书，虽九九小数，吾常精思致力焉，后世必有知者，庶可布广垂永乎?"④ 可见他把自己的数学工作看得重于一切。

程朱理学鄙视实学。程颢斥责他的一个学生集录《五经语》为"玩物丧志"。李冶在《测圆海镜自序》中哀叹说："夫文史尚矣，犹之为不足贵，况九九贱技能乎!" 他进而提出"技兼于事"，"技进乎道"的思想，批驳了理学家的观点。他的"技兼于事"显然取自

---

① 元 · 李治，泛说。见：李治撰，刘德权点校，《敬斋古今黈 · 附录》，中华书局，1995 年。本编凡引《泛说》，均据此。

② 郭书春，李冶。见：金秋鹏，中国科学技术史 · 人物卷，科学出版社，1998 年。

③ 洪万生，全真教与金元数学——以李冶（1192 ~ 1279）为例，金庸小说国际学术研讨会论文集，1999 年。

④ 元 · 王德渊，敬斋先生《测圆海镜》后序，见：李冶《测圆海镜》。见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年。

《庄子》“上治人者事也，能有所艺者技也，技兼于事”。[①] 这就是说，从技艺用于实际来说，圣人所作的礼和乐也可看做一种技艺；从技艺中包含自然规律（即“道”）来说，工匠所用的工具也是圣人所赞赏的。从理论上驳斥了轻视数学和科学技术的谬说。

两宋时期，数字神秘主义开始泛滥，甚至将河图洛书看成数学的起源。谬种流传，连大数学家秦九韶也不能免俗，说“爰自河图洛书闿发（数学）秘奥”。李冶却坚持了正确的观点，他在《测圆海镜自序》中开宗明义便说：

> 数本难穷，吾欲以力强穷之，彼其数不惟不能得其凡，而吾之力且惫矣。然则数果不可以穷耶？既已名之数矣，则又何为而不可穷也！故谓数为难穷，斯可；谓数为不可穷，斯不可。何则？彼其冥冥之中，固有昭昭者存。夫昭昭者，其自然之数也。非自然之数，其自然之理也。数一出于自然，吾欲以力强穷之，使隶首复生亦末如之何也已。苟能推自然之理，以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，幽而神情鬼状，未有不合者矣。

李冶的这一思想可以从老庄学说找到渊源。庄子说：“夫昭昭生于冥冥，有伦生于无形。”李冶便是把庄子的这一思想用于数学研究，而追根溯源则与老子对“自然”的崇尚有关。老子说：“道之尊，德之贵，夫莫之命而常自然。”[②] 李冶在这里逐步深入地阐述了重要的数学思想。首先，李冶认为，数学确实是难以研究的，但并不是不可研究的。因为在昏暗不清的事务中，总有明显的东西存在，这就是它们的数量关系及其原理。它们都来源于自然，因而是可知的。其次，因为数量关系及其原理都是客观事物的反映，那么就不能一味蛮干。蛮干不仅发现不了数学的奥秘，而且自己会精疲力竭，即使像隶首再生也无能为力。更重要的，李冶认为，只要遵循事物的客观规律，推究其数学原理和数量关系，则什么困难问题都可以迎刃而解。显然，李冶继承发展了刘徽“以法相传，亦犹规矩度量可得而共，非特难为也”的思想，把我国对数学的认识提高到一个新的阶段。

二　洞渊九容和《测圆海镜》

（一）《测圆海镜》为何而作？

《测圆海镜》十二卷，李冶撰于1248年，初版于1282年。李冶在自序（图15-6-1）中谈到此书的撰著缘起时说：

> 余自幼喜算数。恒病夫考圆之术，例出于牵强，殊乖于自然。如古率、徽率、密率之不同，截弧、截矢、截背之互见，内外诸角，析剖支条，莫不各自名家与世作法。及反覆研究，卒无以当吾心焉。老大以来得洞渊九容之说，日夕玩绎，而向之病我者使爆然落去而无遗余。山中多暇，客有从余求其说者，于是乎又为衍之，遂累一百七十问。既成编，客复目之《测圆海镜》。盖取夫天临海镜之义也。

可见，《测圆海镜》是李冶在桐川得到洞渊算书，内有九容之说，为阐发洞渊九容而写的，是中国现存最早的系统解决勾股容圆问题的著作。西方的借根方方法在清初传入中国，梅瑴

① 战国·庄周，庄子，见：郭庆藩，庄子集释，中华书局，1961年。
② 春秋·老子·三十九章，见：二十二子，上海古籍出版社，1986年，第5页。

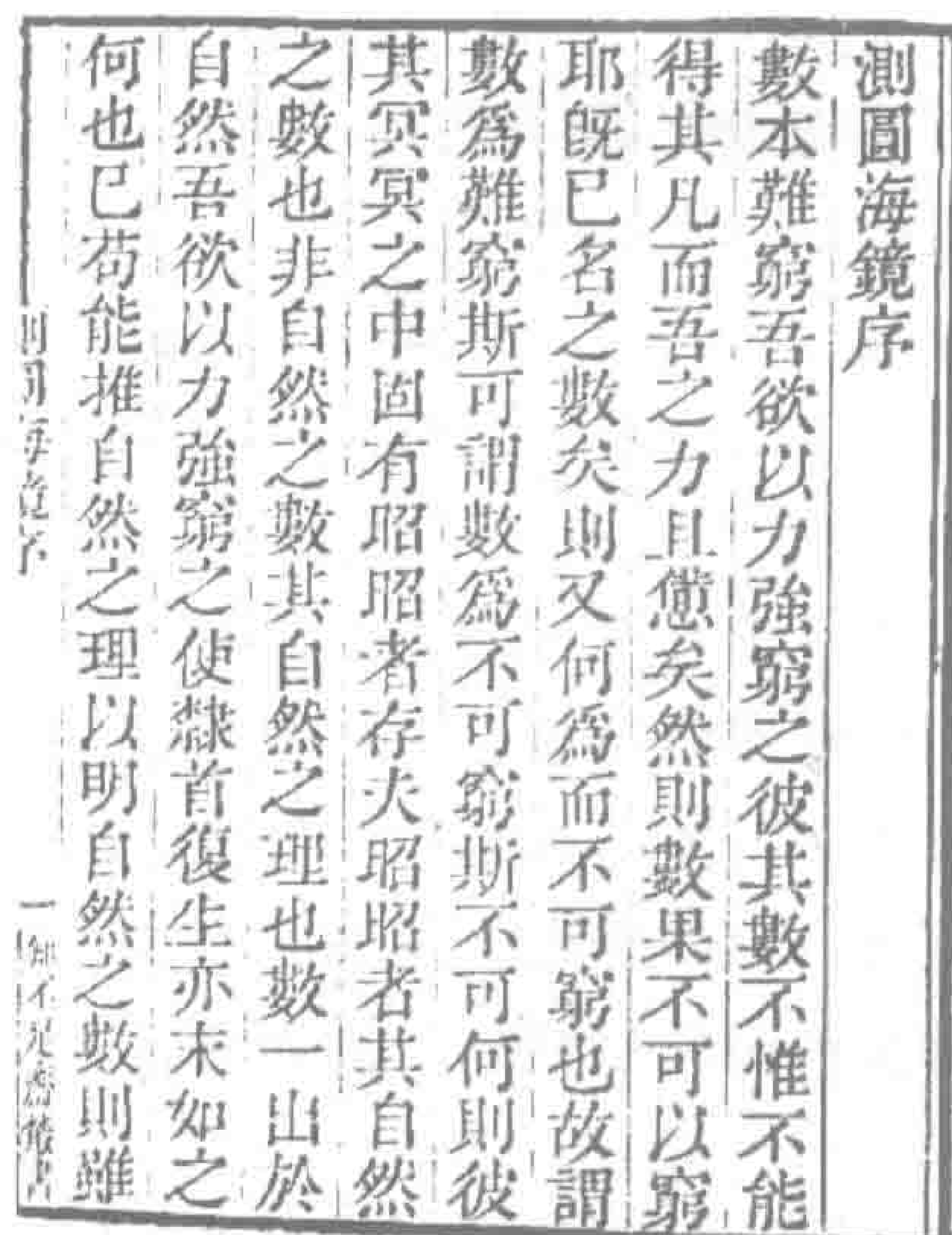

測圓海鏡序
數本難窮吾欲以力強窮之彼其數不惟不能
得其凡而吾之力且憊矣然則數果不可以窮
耶既已名之數矣則又何爲而不可窮也故謂
數爲難窮斯可謂數爲不可窮斯不可何則彼
其冥冥之中固有昭昭者存夫昭昭者其自然
之數也非自然之數其自然之理也數一出於
自然吾欲以力強窮之使隸首復生亦末如之
何也已苟能推自然之理以明自然之數則雖

图 15-6-1　《测圆海镜》书影

成发现其中使用的天元术与借根方是同一类方法，因为《测圆海镜》是现存最早的一部以天元术为主要方法的数学著作，人们遂特别重视其中的天元术，这当然是正确的。但是，自阮元提出“《测圆海镜》为何而作也？所以发挥立天元一之术也”[①] 之后，论者多将《测圆海镜》看成一部研究天元术的重要著作[②]，则既有乖于李冶的本意，也与《测圆海镜》的实际情况不符。事实上，不管是李冶的自序，还是他的朋友之子王德渊的后序，没有一个字谈到天元术；《测圆海镜》全书没有一个字对天元术进行界定，或解说天元术的表示方法，而且作为全书理论基础的卷一和卷二的绝大部分以及卷二—十二，即《测圆海镜》全部的 170 个问题说明方程系数的“法”中，根本没有提到天元术，更没有使用天元术，只是在卷二最后一问及卷三～十二的 157 个问题的“草”中在阐明“法”中的方程的列法时才将天元术作为现成的方法拿来使用。显然，天元术尽管在当时还在发展、改进，但是已是数学界的共识，而不是李冶的创造，可以说，是用不到李冶来阐发的。明顾应祥研究《测圆海镜》，不懂天元术，将其删去，只谈测圆，遗不知而作之讥。清中叶之后似乎矫枉过正，将《测圆海镜》说成天元术著作，忽视甚至掩盖了洞渊和李冶在勾股容圆方面的重大贡献，以致有的专门谈《测圆海镜》的著述只谈天元术，对测圆问题则吝于笔墨。

由于《测圆海镜》前的关于天元术的著述全部亡佚，《测圆海镜》成为关于天元术最早的也是最重要的第一手资料。我们今天重视其中的天元术内容，并从中探讨、归纳出天元术的表示法以及用天元术列方程的步骤等，是完全应该的，也是必要的。但是，切不可以我们今天的态度曲解甚至代替古人的意图。这是研究数学史所必须注意的一个原则问题。

（二）洞渊九容

“洞渊”的含义，一直困惑着中国数学史界：“‘洞渊’是人名或书名都已不可考。”[③] 洞渊实际上指洞天水府。据唐代道教学者杜光庭序称，晋代金坛马迹山道士王纂撰《太上洞渊神咒经》。入唐以后，以洞渊经系为传法系统形成洞渊一派，颇有声势，出现了韦善俊、叶法善等知名高道。洞渊派道教在宋元更加发展。历史上标题中有“洞渊”二字的道教经典很多。北宋虔州（今赣州）大中祥符宫道士李思聪有《洞渊集》五卷，金元全真道士长筌子所著《洞渊集》五卷，还有《太上洞神洞渊神咒治病口章》、《太上洞渊三昧神咒斋忏谢仪》、《太上洞渊三昧神咒斋清旦行道仪》、《太上洞渊三昧神咒十方忏仪》、《太上洞

---

① 清．阮元，重刻《测圆海镜细草》序，郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 729 页。

② 梅荣照，李冶及其数学著作，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966 年。本编凡引梅荣照关于李冶及其《测圆海镜》、《益古演段》的文字，均据此。

③ 钱宝琮主编，中国数学史，科学出版社，1964 年。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第五卷，辽宁教育出版社，1998 年。本编凡引钱宝琮主编的《中国数学史》，均据此。

渊三昧帝心光明正印太极紫微伏魔制鬼拯救恶道集福吉祥神咒》等。[①] 值得注意的是《冲妙先生李思聪集》中的《洞渊集》，其卷一的《三界咏序》（1050年撰写）曰：

> 夫三界者，应三才也。列八十一章者，应九九之数。玉清咏赞，三清旋象之神化；洞天咏著，五岳洞天之胜概；海山咏述，蓬壶阆苑之仙景。三才备矣，九数生焉。[②]

“九九之数”常常被作为数学的代称，“九数”是以《九章算术》为代表的数学的九个分支。可见李思聪是一位精通数学的道士。洞渊九容很可能是李思聪或其所在的洞渊派道教总结出来的，以后在道观中流传。因此，李迪认为“‘洞渊’大概为北宋虔州的洞渊大师李思聪”[③]，是有道理的。李思聪，号冲妙先生，北宋仁宗时人。其他有“洞渊”字样的道教经典都与数学了不相干，当然不会研究勾股容圆问题。

（三）《测圆海镜》的内容

《测圆海镜》的主要内容是研究圆与与之相切的各种勾股形的关系，集金元之前中国勾股容圆知识之大成。卷一之首为“圆城图式”，以一个直角三角形及其内切圆为基础，通过若干相互平行或垂直的直线，构成16个勾股形。这张图以天、地、日、月、乾、坤等汉字表示勾股形的顶点，是个创造。但是，这张图是洞渊九容原有的，还是李冶在洞渊基础上增订的，难以判定。圆城图式之后是“总率名号”和“今问正数”，前者给出图中各勾股形名称，后者以通弦680，通勾320，通股600为基数，给出各勾股形边长之间的关系，以便验证。卷一的最后部分“识别杂记”阐明了各勾股形边长及其与圆径的关系，共600余条，每条可看做一个定理或公式，除了8条以外，都是正确的。这是对中国古代勾股容圆问题的总结，包含了全书解题所需的基本理论，后面各卷问题的解法均可在此基础上以天元术为工具推导出来。而位于“识别杂记”之首的“诸杂名目”又包含了后面各命题的基础，它实际是全书的纲纪。由诸杂名目中的几十个定义和定理出发，可以推出识别杂记中其他部分的命题，而整个识别杂记则构成解题的理论基础。孔国平认为，《测圆海镜》形成了一个演绎体系。[④] 这个问题还可以继续讨论。不过说《测圆海镜》有演绎体系的萌芽，大致是不会错的。

卷二至十二为170个问题，都是已知某些勾股形的边长，求圆径。每题含问题、法、草三部分。所有的题目都是就同一个圆提问，因而其提问、答案都相同。法说明求解该题的方程的系数，其中，有的是李冶提出的，也有的是前人，比如洞渊等提出的。卷二前10问的“法”给出了包括《九章算术》勾股容圆公式（5-4-2）在内的根据勾股形与圆的10种相切关系，求圆直径的公式。这10种相切关系就是：勾股容圆、勾上容圆、股上容圆、弦上容圆、勾股上容圆、勾外容圆、股外容圆、弦外容圆、勾外容圆半、股外容圆半。这10种容圆中哪9种是洞渊九容，有没有李冶的创造，如果有，哪一条是他的创造，也无法定论。自清末以来，学术界一直争论，在没有发现可靠的资料之前，会一直争论下去。

---

① 盖建民，道教科学思想发凡，社会科学文献出版社，2005年。

② 北宋·李思聪，洞渊集。见：《道藏》，明万历刊本，上海函芬楼影印，1923～1926年。

③ 李迪，十三世纪我国数学家李冶，数学通报，1979，(3)。

④ 孔国平，李冶传，河北教育出版社，1988年，第52～70页。

草是演题的具体过程，应该全部是李冶完成的，这是为什么此书的全名为《测圆海镜细草》。自卷二最后一问（第14问）之后所有问题的“草”，李冶都是利用天元术列出开方式，即今之一元方程。这是今天人们重视《测圆海镜》的原因所在。天元术分为三步：首先“立天元一”，这相当于设未知数 x；然后寻找两个等值的且至少有一个含天元的多项式（或分式）；最后把两者“如积相消”，就成为一个方程。《测圆海镜》的天元式采用高次幂在上，低次幂在下的排列方式。

天元术的产生，标志着方程理论有了独立于几何的倾向。从此，方程便可用符号表示，从而改变了用文字描述方程的旧面貌。但它仍缺少运算符号，尤其是没有等号。这样的代数，可称为半符号代数。

《测圆海镜》表明，李冶已经掌握了天元式的加减乘除四则运算以及分式运算。此外，在《测圆海镜》中，李冶使用了〇、负号和一套相当简明的小数记法。

（四）《测圆海镜》的版本及后世的研究

元、明、清三代，《测圆海镜》多次再版。比较著名的版本有：1287年李克修再版本、清《四库全书》本（1784）、《知不足斋丛书》本（1798）、《白芙堂算学丛书》本（1874）、同文馆集珍本（1876）、《古今算学丛书》本（1898）等。

明清研究《测圆海镜》的人很多。明顾应祥对书中题目重新分类，写成《测圆海镜分类释术》（1550），但不知“天元一”为何物。由于清梅瑴成的提倡，人们认识了《测圆海镜》中天元术的意义。此后，关于《测圆海镜》的研究成为清代学者的焦点之一。1873年，张楚钟发表了《测圆海镜识别详解》，书中首次以几何方法对“识别杂记”几百条定理逐条证明。1896年出版的刘岳云（1849～1917）《测圆海镜通释》，采用一般方法叙述原书中各类问题的解法，发现圆城图式中各勾股形边长之间有简单的加减关系，于是列出“诸率加减表”。1898年出版的叶耀元《测圆海镜解》开始采用近代数学符号。

但在研究《测圆海镜》中取得理论突破的是李善兰、陈维祺、王季同三位。李善兰在《天算或问》（1867）中，给出测圆公式（即已知圆城图式中某些三角形边长求圆径之公式）的统一表达式。陈维祺在《各率和较泛积表》（1889）中，用“泛积”的概念把全部“识别杂记”统一起来。他还发现，只要知道高股、平勾、极勾、极股（见“总率名号”）、半径五事，就可通过加减法求得圆城图式中各勾股形的边长。王季同则在《九容公式》（1898）中进一步指出：只要知道平勾和高股，便可求得各勾股形边长，从理论上说明了《测圆海镜》中问题的统一性，由王季同的结论可以证明，所有问题可用不高于四次的方程求解。

三　《益古集》和《益古演段》

（一）《益古演段》是一部什么书

《益古演段》三卷，1259年元李冶撰，主要是根据方田与圆田的不同关系列出一元一次或二次方程求解。关于此书的撰著过程，李冶自序（图15-6-2）中说：

> 近世有某者，以方圆移补成编，号《益古集》，真可与刘、李相颉颃。余犹恨其閟

匿而不尽发，遂再为移补条段，细缮图式，使粗知十百者便得入室啖其文，顾不快哉！

可见《益古演段》是在北宋蒋周《益古集》基础上完成的。全书64问，其中第11问有2道题。每一问都有“法”，第6问有3法，第40问有2法。所有的“法”都使用天元术列出一元或二元方程，并都有示意图，其中4问是一次方程，其余全是二次方程。大部分“法”有“依条段求之”和“义”，其中第44、59、60问及第40问的“又法”无“条段”和“义”，第45、56问无“义”。条段是一段段的条形面积，依条段求之即用一段段条形说明方程的实和一次、二次项系数。“义”是对“以条段求之”中的某些内容进一步解释或界定。值得注意的是，《益古演段》在二十多处引用“旧术”，无疑是《益古集》原有的方法。


益古演段自序
術數雖居六藝之末而施之人事則最爲切務故古之博雅君子馬鄭之流未有不研精於此者也其撰著成書者無慮百家然皆以九章爲祖而劉徽李淳風又加注釋而此道益明今之爲算者未必有劉李之工而褊心跼見不肯曉然示人惟務隱互錯糅故爲溟涬黯黮惟恐學者得窺其彷彿也不然則又以淺近觕俗無足觀者致使軒轅隸首之術三五錯綜之妙盡墮

益古演段序　三　知不足齋叢書

图15-6-2　《益古演段》书影

与《测圆海镜》一样，《益古演段》中的天元术只是它使用的一种方法，既没有天元术的界定，也没有关于天元术的使用和表示法的解说。李冶是发现《益古集》不通俗，为了初学者能够看懂而写的，而不是为了普及天元术。但是，自四库馆臣在《〈益古演段〉提要》中说“《测圆海镜》以立天元一法为根。此书即设为问答，为初学明是法之意也”① 之后，中国数学史界多认为《益古演段》不仅是为天元术而作的，而且“是一部普及天元术的著作”。这当然不是李冶的本意。李迪《中国数学通史·宋元卷》说“这是一本有关‘方圆移补’的入门书”，可谓中的之言。

（二）蒋周和《益古集》

元祖颐《〈四元玉鉴〉后序》云“平阳蒋周撰《益古》”。《益古》就是《益古集》，被祖颐看成天元术前史的第一部著作。明程大位《算法统宗·算经源流》记载元丰、绍兴、淳熙以来刊刻的算经的第二部是《益古算法》。一般认为，《益古算法》就是《益古集》，既被列入第二部，当在元丰年间（1078～1085）前后不会太久。

平阳即今山西省临汾市。蒋周，生平不详。南宋陈振孙《直斋书录解题》卷十四云“《应用算法》一卷，夷门叟郭京元丰三年序称‘平阳奇士蒋舜元撰’”。徐义保推测蒋舜元与蒋周是同一人，姓蒋名周字舜元②。此可为一说。

《益古演段》卷上第5、6、8、9、10、13、14、15、16、18、19、21、22问，卷中第33问，卷下第44、45、46、51、56、57、59、60、62等23问24法引用了“旧术”（第6问有2法附旧术）。“旧术”与“以条段求之”一样，都是说明方程的实和未知数的系数。除这些“旧术”是《益古集》的方法外，徐义保认为，凡没有引用“旧术”的诸问中的“以条

① 清·四库馆臣，《益古演段》提要，又，《知不足斋丛书》本《益古演段》，见：郭书春主编．中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年，第873页。

② 徐义保，对《益古集》的复原与研究，见：李迪．数学史研究文集，第一辑，内蒙古大学出版社、九章出版社，1990年，第64～73页。

段求之”也是《益古集》的旧术。其根据是：①上述这23问中除第46问外，其他题目的方程不是两者的未知数不同，就是系数不同。至于第46问的“旧术”是李冶为了把1.96乘某积定义为“展积”而留下的。②“旧术”中二次方程的二次、一次系数一般称为“廉常”、“从法”，而“以条段求之”对正系数分别称为常法与从，对负系数分别称为虚常法（或益隅、虚隅）与虚从（或益从）。但第33问的“旧术”将系数分别称为常法与从，第43，63问的“以条段求之”将系数分别称为廉常与从法。就是说，李冶把“旧术”与“以条段求之”的术语混用，说明《益古演段》中没有注明“旧术”者取自《益古集》，由此进一步推知，没有注明“旧术”诸问的“以条段求之”一定与“旧术”一致。正因为如此，“旧术”才被删除。③李冶说“再为移补条段……便得入室啖其文”，说明李冶没有对《益古集》的原题增删，“其文”就是《益古集》的文字。我们认为，这种看法是有道理的。

孔国平认为，蒋周在建立方程的过程中，已懂得寻找等值多项式和如积相消（即把两个等值多项式连为方程并进行移项及合并同类项），从而为天元术的诞生创造了条件。

（三）《益古演段》的成就和版本

天元术是来源于条段法并包含条段法的普遍方法。条段法比较直观，但复杂多变，需要较多技巧；天元术比较抽象，但方法是一般的，思维过程简单。《益古演段》新旧二术并列，两相比较，更可以看出使用天元术列方程比条段法的优越性。该书图文并茂，深入浅出，不仅利于教学，也便于自学。

《益古演段》在理论上也有创新，主要表现在化多元问题为一元问题以及设辅助未知数的方法。书中的问题与《测圆海镜》不同，所求量有时不止一个而是两个、三个甚至四个。一般说来，这种情况应该用方程术求解。但《益古演段》却不是这样。李冶在推导方程的过程中，运用传统的出入相补原理及各种等量关系来减少未知数个数，最后只剩“天元一”。一旦这个“天元一”求出来，其他要求的量便可根据与“天元一”的关系求出了。《益古演段》中的辅助未知数见于第40问。该书还给出另一种设辅助未知数的方法——之分术。砚坚《益古演段序》称赞此书说：“颇晓十百，披而览之，如登坦途，前无滞碍。旁蹊曲径，自可纵横而通。”它与《测圆海镜》“同出一源，致密纤悉，备而不繁，参考互见，真学者之指南也”。

《益古演段》初版于元至元壬午（1282），砚坚作序，李师珪刊行。明《永乐大典》分类抄录（1408），现有清《四库全书》本（1786），《知不足斋丛书》本（1798），《白芙堂算学丛书》本（1874），《古今算学丛》本（1898）等。1936年，商务印书馆出版了《丛书集成》本。

第七节　杨辉和《详解九章算法》、《杨辉算法》

一　杨　辉

杨辉，字谦光，钱塘（今杭州）人，南宋数学家和数学教育家。生平不详，仅知道他

做过地方官，足迹遍及钱塘、台州、苏州等地。他的同代人陈几先评价他："以廉饬己，以儒饰吏。吐胸中之灵机，续前贤之奥旨。"① 可见他为政清廉，格调高洁。

他注意收集社会生产和生活中的数学问题，多年从事数学研究和教学工作，先后完成数学著作5种21卷，即《详解九章算法》12卷（1261），《日用算法》2卷（1262），《乘除通变本末》3卷（1274），《田亩比类乘除捷法》2卷（1275）和《续古摘奇算法》② 2卷（1275）。后三种合称《杨辉算法》。关于这五部书的编纂过程，杨辉说：

> 《九章》为算经之首，辉所以尊尚此书，留意详解。或者有云：无启蒙之术，初学病之。又以乘除加减为法，秤斗尺田为问，目之曰《日用算法》。而学者粗知加减归倍之法，而不知变通之用，遂易代乘代除之术，增续新条，目曰《乘除通变本末》。及见中山刘先生益撰《议古根源》，演段锁积，有超古入神之妙，其可不为发扬，以裨后学，遂集为《田亩算法》。通前共刊四集，自谓斯愿满矣。一日忽有刘碧涧、丘虚谷携诸家算法奇题及旧刊遗忘之文，求成为集，愿助工板刊行，遂添摭诸家奇题，与夫善本及可以续古法草，总为一集，目之曰《续古摘奇算法》。

杨辉继承了刘徽弄通算学精理，"广异法"，算法"设动无方"的思想，在《乘除通变本末》卷中中也主张"算无定法，唯理是用已矣"。杨辉提倡一题多法，如《田亩比类乘除捷法》共61问，有14题提出两种或两种以上的方法。杨辉强调要明算理，要"讨论用法之源"。针对教师和学生两种不同的对象，杨辉提出"法将提问"和"随题用法"两条不同的原则。教师讲课应"法将提问"，"凡欲见明一法，必设一题"。就是以算法统帅习题，每种算法都设有相应的题目。而对学生来说，则应"随题用法"，即根据具体题目来选择相应的算法。杨辉作为一位杰出的数学教育家，在我国数学教育史上占有重要地位。

杨辉数学著作的特点是深入浅出，图文并茂，通俗易懂。结合严敦杰《宋杨辉算书考》的概括，杨辉的数学贡献主要是：

（1）发展垛积术。杨辉在《详解九章算法》商功章以各种垛积比类于《九章算术》的刍童、方亭、方锥、堑堵、鳖腝等多面体，给出了这些垛积的求和公式，发展了沈括的隙积术开创的高阶等差级数求和问题。

（2）改进筹算乘除捷算法。自唐中叶开始的简化筹算乘除运算工作，经北宋，到南宋得到更大发展。杨辉致力于民间各种捷算法及其口诀的收集、总结，为珠算的产生做出了贡献，有的口诀与20世纪还在使用的珠算口诀基本一致。

（3）发展纵横图。《续古摘奇算法》卷上载有十阶以内的纵横图并给出三阶和四阶纵横图的构造方法，还给出各种不是方形的纵横图。这些纵横图对后世深有影响，明代程大位，清代方中通、张潮、保其寿等都曾在此基础上进一步研究。

（4）继承《九章算术》、刘徽、贾宪、刘益等的出入相补原理，总结出容横容直原理，并用于勾股、测望方法的证明。

---

① 南宋·陈几先，《日用算法》序，转引自《诸家算法及序记》，抄本，影印收入：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第1册，河南教育出版社，1993年。

② 南宋·杨辉：续古摘奇算法，《杨辉算法》抄本，影印收入：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第1册，河南教育出版社，1993年。本编凡引《续古摘奇算法》，均据此。

（5）在数学教育方面，杨辉总结了自己多年的经验，写了一份相当完整的数学教学计划——“习算纲目”，给出数学学习的提纲以及各部分的学习要点、方法、时间及参考书。

（6）保存了古代的一些有价值的数学史料。杨辉不仅因以贾宪的《黄帝九章算经细草》为底本撰《详解九章算法》而保存了该书的2/3，而且在《田亩比类乘除捷法》引用了刘益《议古根源》若干个题目及其解法（《详解九章算法》勾股章引用《议古根源》1个题目），还在《续古摘奇算法》等著作中引用现已失传的《应用算法》释数篇1则、田亩篇2则、粟米篇1则、差分篇1则、杂法篇2则凡7则、《辩古通源》1问、《指南算法》4则、《谢经算术》1问。

二　《详解九章算法》


夫習算者以乘法爲主凡布置法者欲其得宜定位呼數欲其不錯除不盡者以法爲分母實爲分子繁者約之復通分而還源此乘除之規繩也題有分者隨母通之母同者齊子併之田不匠者折併直之數皆求者互乘換之差等除實別而衰之疊壘積者以形測之數隱互者維乘併之爲問正負入之勾股弱要開方求之節題匿積演段取之此算法之盡理也黃帝九章備全奧妙包括纂情謂非聖賢之書不可也靖康以來古本浸失後人補續不得其真致有題重法闕使學者難入其門好者不得其旨輝雖慕此書未能貫理妄以淺也聊爲編述擇八十題以爲矜式自餘一百六十六問無出前意不敢廢先賢之文删

图 15-7-1　《详解九章算法》书影

《详解九章算法》12卷，南宋景定二年（1261）杨辉撰。杨辉以北宋贾宪《黄帝九章算经细草》9卷为底本，取其中80题作为矜式，撰解题、比类、详解、注释等，其余166题则照录，并在其前补充图、乘除二卷，在其后补充纂类一卷而成。因此，《详解九章算法》含有《九章算术》本文、刘徽注、李淳风等注释、贾宪细草和杨辉详解5种内容。今存衰分章的异乘同除类、少广章（以上存《永乐大典》卷16343，16344中）、商功章约半卷、均输、盈不足、方程、勾股、纂类（以上见《宜稼堂丛书》本《详解九章算法》），另有2问存《诸家算法及序记》中①，约占全书的2/3，其余已亡佚。图15-7-1是《详解九章算法·自序》书影。

《详解九章算法》是针对贾宪的细草而作的。其主要成就是：

在商功章的比类中，以方垛比类方亭，以方锥形果子垛比类方锥和阳马，以三角垛比类鳖臑，以刍甍形果子垛比类刍甍，以刍童形果子垛比类刍童，提出了4个新的二阶等差级数求和公式。尽管这些公式都可以由沈括的隙积术导出，但毕竟扩展了二阶等差级数的应用，杨辉的功绩是不容低估的。

在纂类中，杨辉指出了《九章算术》分类的弊病：“如粟米章之互换，少广章之求田、开方，皆重叠无谓而作者。题问不归章次亦有之。今作纂类互见目录，以辩其讹。”遂根据贾宪的细草，将《九章算术》的术文和题目重新分类：

乘除第一：40问：方田章38问，粟米章2问。共15法：方田章14法：直田、里田方田、圭田、斜田、圆田、畹田、弧田、环田、约分、合分、课分、平分、乘分、除分；粟米

---

① 《诸家算法及序记》中引杨辉《详解算法》2问。严敦杰考证得《诸家算法及序记》的算题系《永乐大典》卷16361。一般认为，《详解算法》系《详解九章算法》的简称。则此2问应是贾宪所设，杨辉为之“解题”。但也有人认为《详解算法》是有别于《详解九章算法》的另一部著作。郭熙汉持是说。见：郭熙汉，杨辉算法导读，湖北教育出版社，1996年。

章1法：经率。

互换第二：55问：粟米章31问，衰分章11问，均输章11问，盈不足章2问。共2法：互换乘除法、先取用而求互换法。

合率第三：20问：少广章11问，均输章8问，盈不足章1问。共3法：少广、反用合分、并率除。

分率第四：17问：粟米章11问，盈不足章6问。共3法：贵贱率除法、反其率、分率。

衰分第五：18问：衰分章9问，均输章9问。共2法：衰分、均输。

叠积第六：28问，全在商功章。共15法：商功求积、城垣堤沟堑渠、垣积求广、方垛垛、圆垛垛、方亭、圆亭、方锥、圆锥、堑堵、阳马、鳖臑、刍童、刍甍、羡除。

盈不足第七：11问，全在盈不足章。共5法：盈不足2法、两盈朒法、盈朒适足2法。

方程第八：20问：方程章18问，均输章1问，盈不足章1问。共4法：方程、损益、分母子、正负。

勾股第九：37问：少广章13问，勾股章24问。共21法：贾宪立成释锁平方、增乘开平方、贾宪立成释锁立方、增乘（开立）方、勾股求弦、弦勾求股、股弦求勾、股弦较与勾求弦5法、股弦和与勾求股、勾股求弦和较法、勾股较与弦求股2法、勾腰容方、勾弦和股率求勾股、勾弦较股弦较求勾股法、勾股旁要、余勾股求容积。

尽管仍分为9类，分类中也还有不合理之处，比如将开方术列入勾股类，便不伦不类，却是中国数学史上第一次突破"九数"的格局，而且是完全按照数学方法，不再像先秦九数或《九章算术》那样有的按应用，有的又按数学方法来分类。

实际上对《九章算术》的算法重新分类不是从杨辉开始的。《纂类》中有三种稍有区别的分类方式。第一种很可能是贾宪的，第三种是杨辉的。这个问题值得进一步探讨。

三　《日用算法》和《杨辉算法》

《日用算法》和《杨辉算法》主要是关于改进乘除捷算法的著作。《杨辉算法》七卷，是杨辉后期的数学著作集，包括《乘除通变本末》3卷，《田亩比类乘除捷法》2卷，《续古摘奇算法》2卷。

（一）《日用算法》

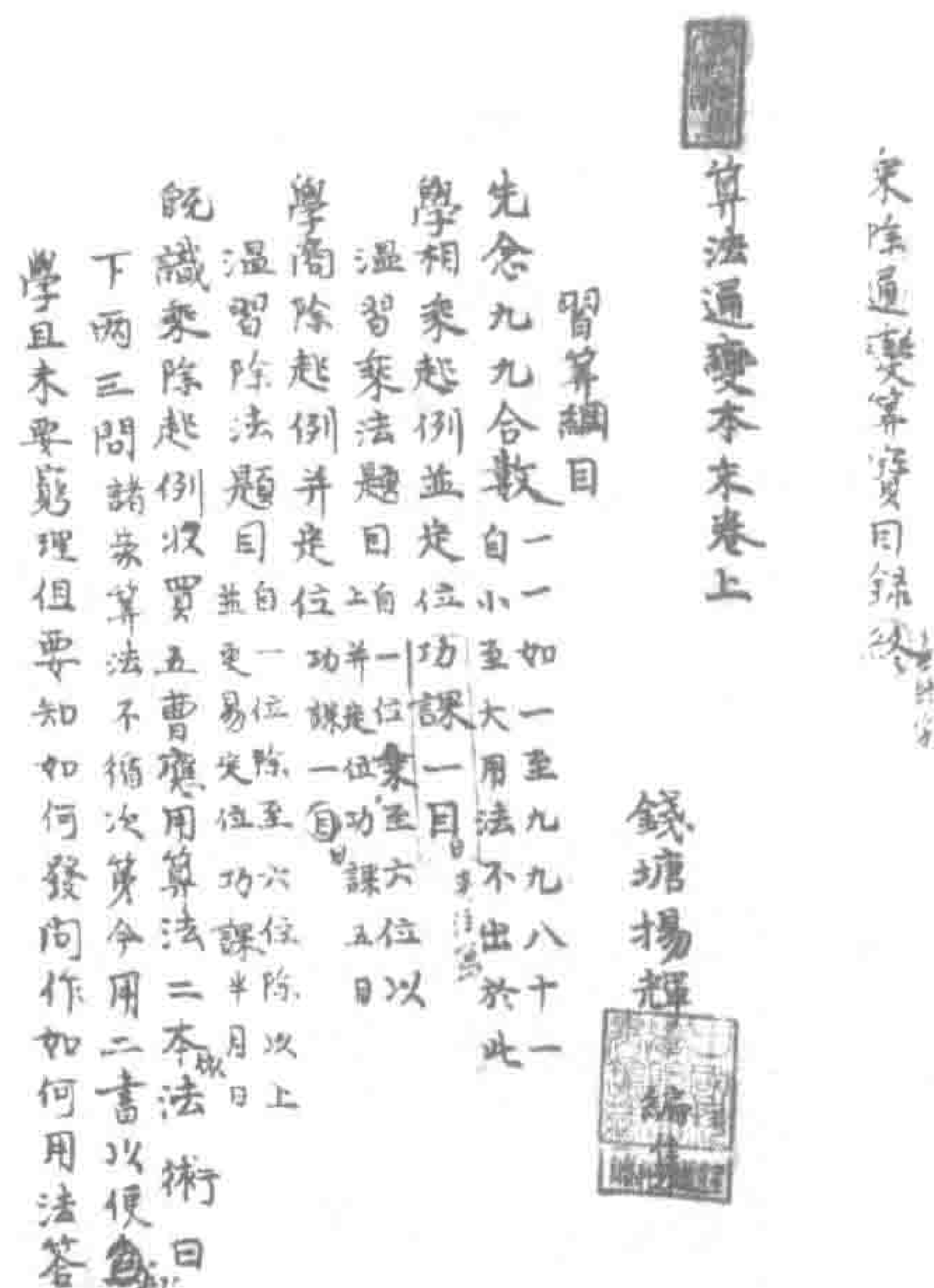
《日用算法》已失传，目前知道有："称则"和9问存《诸家算法及序记》中，其中以斤求两价五术中给出了"斤两法"，另有1问存《永乐大典》卷16343中。

杨辉《日用算法·自序》自述云，他在完成《详解九章算法》之后，有朋友对他说："无启蒙日用，为初学者病之。"遂编纂《日用算法》。关于是书，杨辉曰："今首以乘除加减为法，称斗尺田为问，编诗括十有三首，立图草六十六问，用法必载源流，命题须责实有。分上、下卷首，少补日用之万一，亦助启蒙之观览云耳。"① 可见《日用算法》分为卷

① 南宋·杨辉：日用算法·自序。《诸家算法及序记》。见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第1册，河南教育出版社，1993年．

首和上、下卷，是一部为数学的日常应用而写的启蒙读物。现存 10 问确实是来源于日用的简单问题。

（二）《乘除通变本末》



乘除通變算寶目錄終

算法通變本末卷上

錢塘楊輝編集

習算綱目

先念九九合數　一一如一至九九八十一自小至大用法不出於此

學相乘起例並定位　功課一日

溫習乘法題目

學商除起例并定位

溫習除法題目

既識乘除起例收買五曹應用算法二本法術曰

下兩三問諸家算法不循次第今用二書以便參

學且未要窮理但要知如何發問作如何用法答

图 15-7-2　《乘除通变本末》书影

《乘除通变本末》，又名《乘除通变算宝》（图 15-7-2）。三卷，各有卷名。卷上为“算法通变本末”，卷中为“乘除通变算宝”，卷下为“法算取用本末”。上、中两卷为杨辉编集，卷下与史仲荣合编。杨辉自序云：“夫算之数，起于九九；制算之法，出自乘除。法首从一者，则为加为减。题式无一者，则乃折乃倍。以上加名九归，以下损名下乘。盖副乘除羽翼，算家之妙。学者惟知有加减归损之术，而不知伸引变通之用。金科赋曰知非难而用为难，言不诬矣。今将诸术衍益取用，标注图草，目之曰《乘除算宝》。”①

卷上在习算纲目之后接着给出了垛积等例题，在沈括的隙积术的基础上进一步拓展了二阶等差数列的求和问题，还着重介绍了重因、损乘等乘除捷法。

卷中讨论身外加减、求一、九归诸术，为全书的核心。身外加减法，包括以加代乘的五术和以减代除的四术。他认为学生应“随题用法”，即根据具体题目来选择相应的算法。他说：“随题用法者捷，以法就题者拙。遇求一题则用求一法，遇九归题则用九归法，或倍或折，或加或减，或因或变，莫不随题。”

卷下为阐发卷中而作，介绍了多种捷算法。其前言云：“夫算者，题从法取，法将题验。凡欲见明一法，必设一题。若遇问题，须详取用，大概不出乘除。后人用加、减、归、折，乃乘除之曲径也。若猝然承题，未见取法之隙，用乘除为便。或日用定数，当立折变为捷，是皆得其宜也。却不必勉强，自取周折。今以一至三百为题，验诸加减，具载后云。”此卷分为“加因代乘”和“归减代除”两部分，分别以 1～300 为乘数、除数，设计了以加代乘和以减代除方法。在 211，223，227，229，233，239，241，251，257，263，269，271，277，281，283，293 后标有“连身加”三字，实际上是从 201～300 的全部素数。

（三）《田亩比类乘除捷法》

《田亩比类乘除捷法》，二卷（图 15-7-3）。杨辉《田亩比类乘除捷法 · 自序》说，“万物之体，变段终归于田势；诸题用术，变折皆归于乘除”，恰如其分地归纳出此书互相联系的两个主题，一是田亩问题，一是乘除捷法。

杨辉在自序叙述了刘益《议古根源》在开方术上的贡献之后说：“作术逾远，罔究本

---

① 南宋 · 杨辉：乘除通变本末。中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第 1 册。本编凡引《乘除通变本末》，均据此。

源，非探赜索隐而莫能知之。辉择可作关键题问者，重为详悉著述，推广刘君垂训之意。"①表现出他对刘益数学思想的继承和发展。他认为演段法以田亩问题为依托，"直田能致诸用"。直田面积公式是面积问题的基本公式，起到了公理的作用。杨辉进一步指出："诸家算法皆以直田为第一问，亦默会也。"在证明几何问题时，杨辉往往借助于"出入相补原理"。

杨辉的"比类"则以各种算术问题比附田亩问题，进一步发展了乘除捷算法。

《田亩比类乘除捷法》卷下纠正了《五曹算经》三个题目中的错误。一是"方田正中桑至隅"问，《五曹算经》使用"方五斜七"计算，杨辉认为误差太大，他指出："方五斜七仅可施于尺寸之间，其可用于百亩之外？"

二是"墙田"问，已知墙田的周长，求其面积。《五曹算经》按正方形计算。杨辉认为"田形既方，不当曰墙田"。若是墙田，"不可用外围两折半之法"。

三是"四不等田"。《五曹算经》使用对边相并折半，两者相乘求其面积，是错误的。杨辉指出："四围四面不等者，必有斜步。然斜步岂可作正步相并？"他对有一个直角的四不等田提出了将其分割成一个勾股形，一个半梯田的方法。

杨辉的批评是实事求是的，说明他对算理严谨的追求。这种态度和实践对明代王文素《算学宝鉴》影响很大。



图 15-7-3　《田亩比类乘除捷法》书影

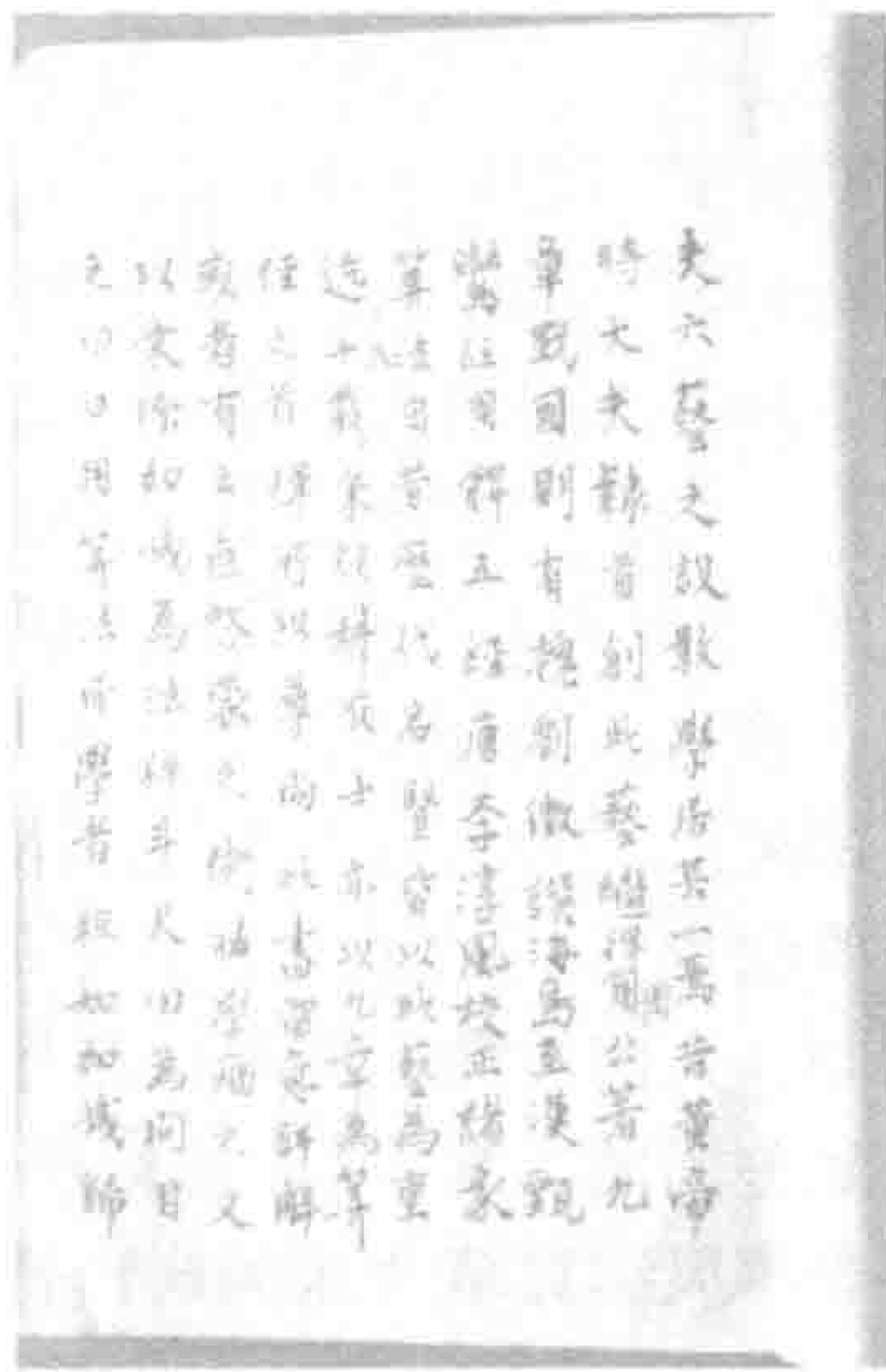


图 15-7-4　《续古摘奇算法》书影

（四）《续古摘奇算法》

《续古摘奇算法》，二卷（图 15-7-4），是杨辉在刘碧涧、丘虚谷所携"诸家算法奇题及旧刊遗忘之文"基础上"添摭诸家奇题与夫善本及可以续古法草"而成的。因此，内容杂芜，其中哪些是刘、丘二位所携，哪些是杨辉的工作，除少数外，已无法分辨。

---

① 宋·杨辉：田亩比类乘除捷法。中国科学技术典籍通汇·数学卷，第1册．本编凡引此书，均据此。

《续古摘奇算法》卷上主要论述纵横图，此外还有一次同余方程组解法等内容。后来人们最重视其中关于纵横图的论述。三阶纵横图又称为幻方，历来被披上神秘的面纱。卷上共画出了20个纵横图，给出了三阶和四阶纵横图的构造方法，在某种程度上破除了纵横图的神秘色彩。至于五阶至十阶的纵横图，只有图形而未留下做法，但全都准确无误。可见他们掌握了高阶纵横图的构成规律。当时的纵横图多是方形的。而《续古摘奇算法》在百子图（十阶纵横图）之后，给出聚五图、聚六图、聚八图、聚九图、八阵图、连环图等许多不是方形的纵横图。这些工作，将传统数学关于纵横图的研究推向一个新的阶段。纵横图是现代数学中组合数学的研究内容。

《续古摘奇算法》说《孙子算经》"物不知数"问"俗名秦王暗点兵，犹覆射之术"，而将其解法称为"翦管术"，又补充了4个题目。不过，关于一次同余方程组解法的水平远低于秦九韶。接下去是关于六十甲子内音的计算，严敦杰《宋杨辉算书考》说，把这"也当作数学而放进去，有些不伦不类"。"相乘"类有5个题目，前4个似关心最小公倍数的求法，但成绩不佳。第5问在目录中称为"倍息一月"，其中用到幂指数的运算。"正斛法"历述历代斛法及杨辉亲见京城和浙郡斛斗积尺之混乱，遂"今将官胜与市尺较证，少补日用万一"。"乘除"类12个题目以"田不求积竟答亩数"设问，"并率除"有3个题目，都是乘除捷法。

《续古摘奇算法》卷下的目录标明19问，实际上有29问，而作者又归类成"二率分身"、"三率分身"、"互换"、"衰分"、"盈不足"、"方圆总论"、"开方不尽法"、"海岛"等。"二率分身"引用《孙子算经》雉兔同笼、罗绫隐价2问，实际上是二元一次方程组问题。"三率分身"引用《张丘建算经》的"百鸡问题"、《辨古通源》"百果问题"、"三酒分身"等3问，都是三元一次不定方程组问题。"互换"就是《九章算术》的今有术，有8问。"衰分"又称"差分"，除引用《九章算术》外，还有《应用算法》、《指南算法》的内容，有4问。"盈不足"引用《九章》术，批评"《孙子算经》'贼人盗绢'题目不云《九章》本法，而以罗纹相乘，上下相并为答。盖其数差一，偶同也。若差数二、三，则上下相并不可用矣"。"方圆论"引用徽率与密率22/7，指出"圆三径一，方五斜七，算家之常谈，未易概论也"。"校正《辨古通源》开方不尽之法"提出的方法基本上与《九章算术》和刘徽相同。人们对卷下最重视的是关于测望的6个题目，除第1问引自《孙子算经》外，其余都是重差问题。其"《海岛》题解"阐述了重差术的主要方法和《海岛算经》的9题之名，批评李淳风续算草"未闻解白作法之旨"。杨辉说："辉尝置《海岛》小图于座右，乃见先贤作法之万一。"一般认为，此图当为刘徽重差图之幸存者，殊为宝贵。在两"竿不知高"问中，杨辉在赵爽、刘徽的论述和贾宪的容方容直原理基础上提出更一般的容横容直原理："弦之内外分二勾股，其一勾中容横，其一股中容直，二积之数皆同。"这一原理在勾股、测望、重差诸方法的证明中至关重要。

（五）《杨辉算法》的版本

《杨辉算法》杨辉本人的刻本已失传。明初洪武戊午年（1378）有古杭勤德书堂刊本行世，是为足本。朝鲜李朝宣宗宣德八年（1433）翻刻了明洪武本。今国家图书馆藏有此本。日本宽文元年辛丑（1661）关孝和抄写了朝鲜翻刻本。李俨藏有朝鲜翻刻本的抄本和关孝和抄本的转抄本，均捐赠中国科学院自然科学史研究所图书馆。《中国科学技术典籍通汇 · 数学

卷》影印了后者。元代的流传本已缺失《续古摘奇算法》卷上。清陆心源云："《田亩比类乘除捷法》二卷,《算法通变本末》一卷,《乘除通变算宝》一卷,《法算取用本末》一卷,《续古摘奇算法》一卷,汲古阁影元本。"① 汲古阁影元本当然是在明末。清《宜稼堂丛书》本(1842)以影元本为底本,由宋景昌校勘而成。《丛书集成》本(1936)排印了《宜稼堂丛书》本。清《知不足斋丛书》本刻有《续古摘奇算法》卷上,当辑自《永乐大典》。

第八节　朱世杰和《算学启蒙》、《四元玉鉴》

一　朱世杰

朱世杰,字汉卿,号松庭,寓居燕山(今北京附近)。生卒年代不可详考。据现传资料推知,其生卒年代大约在1279年前后各三十年左右。他在元统一中国之后以数学名家周游湖海20余年,吸收并综合前此北方太行山两侧和南方长江下游中国两个数学中心的长处,做了创造性的发展,著有《算学启蒙》,《四元玉鉴》。两书于1299年、1303年先后初刊于广陵(今扬州)。《算学启蒙》是一部算学入门上乘之作,简而不略,明而不浅。其内容既有传统的算法,也有宋元时期出现的优秀算法,是当时先进的启蒙算书。《四元玉鉴》是一部数学专门著作。该书运用当时南方数学成熟的筹算技术将北方数学的天元术、二元术、三元术、垛积术与招差术以及正负开方术等成就予以系统的总结和发展,创造四元术,即四元高次方程组解法,并将垛积术、招差术发展到前所未有的高度。在数学史上,该书被誉为"筹算系统发展的顶峰"②。

朱世杰是宋元时期一位成功的数学教师。莫若《四元玉鉴前序》称"四方之来学者日众",祖颐《四元玉鉴后序》称"踵门而学者云集",异口同声,当非虚誉。作为一位杰出的数学家亦早成定论。莫若序称"其学能发先贤未尽之旨","自成一家之书"。祖颐后序称"高迈于前贤"。《四元玉鉴》的各项成果可证两氏所论皆为由衷之言。清代罗士琳(1789~1853)称:"汉卿在宋元间,与秦道古、李仁卿可称鼎足而三。道古正负开方,仁卿天元如积,皆足上下千古。汉卿又兼包众有,充类尽量,神而明之,尤超越乎秦、李两家之上。"罗氏所作的比较虽非全面,而此一结论则属可信。

二　《算学启蒙》

(一)《算学启蒙》的内容

《算学启蒙》,三卷,卷首一卷,元朱世杰编撰,元大德三年(1299)赵城序。卷首一卷名总括,包括"释九数法"(九九表),"九归除法"(九归口诀),"斤下留法"(化两为斤)等共18项算学预备知识。正文三卷共20门259问。其中,卷上有纵横因法、身外加法、留头乘法、身外减法、九归除法、异乘同除、库务解税、折变互差等8门113问,卷中

① 清·陆心源,双百楼藏书志,卷四十八。
② 杜石然,朱世杰研究,见:钱宝琮主编,宋元数学史论文集,科学出版社,1965年,第168页。

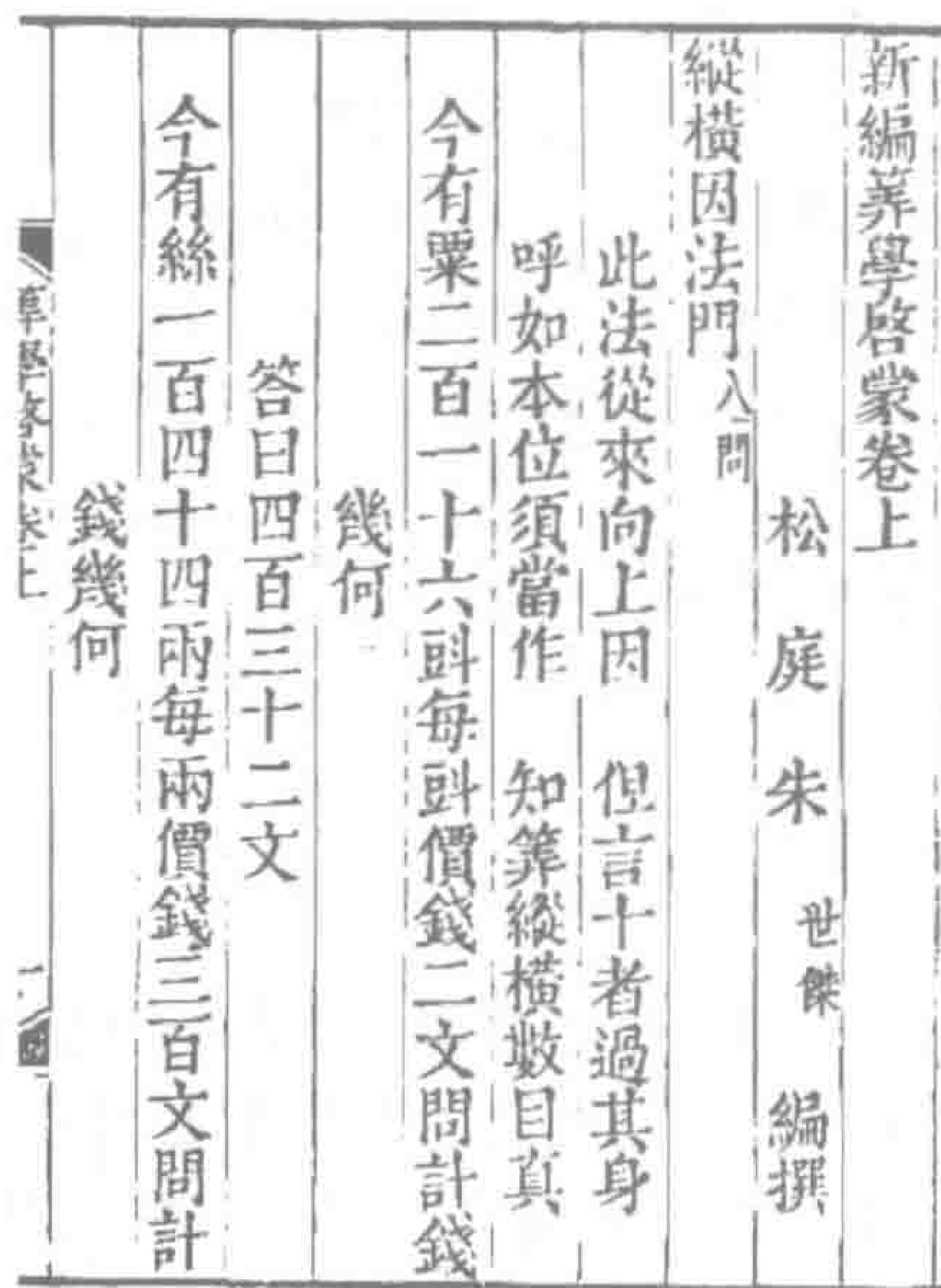

新編筭學啓蒙卷上
松庭朱世傑編撰
縱橫因法門 入問
此法從來向上因　但言十者過其身
呼如本位須當作　知筭縱橫數目真
今有粟二百一十六㪷每㪷價錢二文問計錢
幾何
答曰四百三十二文
今有絲一百四十四兩每兩價錢三百文問計
錢幾何

图 15-8-1　《算学启蒙》书影

有田亩形段、仓囤积粟、双据互换、求差分和、差分均配、商功修筑、贵贱反率等 7 门 71 问，卷下有之分齐同、堆积还源、盈不足术、方程正负、开方释锁等 5 门 75 问。正文内容包括筹算四则运算，比例算法，面积与体积计算，盈不足术，方程术以及垛积术、天元术。图 15-8-1 为《算学启蒙》书影。

该书下列各点值得注意。卷上留头乘法门首载留头乘法，九归除法门首载撞归法和起一法。留头乘法与九归除法（包括撞归和起一）的系统记载说明筹算简化的过程已趋完成。

卷首总括所载斤下留法亦为有用之史料。中国传统数学对进位制和不同进位制的换算有深入的研究，此为实例之一。

《算学启蒙》不仅涉及《九章算术》以来的一些传统算法，如盈不足术、方程术等，并且吸收宋元时期出现的优秀算法，如垛积术、天元术、增乘开方法以及系统的筹算简化算法。内容编排由易入难，循序渐进，简而不略，明而不浅，确是一部算学入门上乘之作。

（二）《算学启蒙》的版本

《算学启蒙》初刊本今已不传。现传最早的版本是 15 世纪上半叶朝鲜李朝世宗时期的铜活字本，今藏日本筑波大学。近年有影印本流传。清顺治十七年（1660）朝鲜全州府尹金始振重刊《算学启蒙》。道光十九年（1839），罗士琳“从都中人于琉璃厂书肆”访得金始振刊本，附识误、后记各一篇，又卷首阮元序一篇，刊于扬州。自是，《算学启蒙》复流传于中土。此后，有同治十年（1871）江南制造局影写重刊本，光绪八年（1882）醉六堂重印制造局本，光绪二十二年（1896）《测海山房中西算学丛刻》石印本等多种版本。此外，王鉴《算学启蒙述义》三卷，有光绪十年（1884）湖北崇文书局刊本，光绪二十四年（1898）《古今算学丛书》石印本等。徐凤诰《算学启蒙通释》三卷附《中西通术》二卷，有光绪二十二年（1896）上海石印本等。

道光十八年（1838），朝鲜金正喜（1786 ~ 1856）以“影写朝鲜刻本”赠徐有壬（1800 ~ 1860）。据载是本今藏美国国会图书馆。[①] 朝鲜、日本尚有多种版本入藏。《算学启蒙》在中、日、朝数学史上均为重要典籍，此有待进一步研究。

三　《四元玉鉴》

（一）《四元玉鉴》的内容

《四元玉鉴》，三卷，卷首一卷，元朱世杰编述，“大德癸卯上元日”（1303 年二月二

---

① 此项资料冯立昇先生提供。

日）莫若序，同年“二月甲子”（1303年二月二十二日）祖颐后序①。卷首包括今古开方会要之图（含梯法七乘方图和古法七乘方图），四元自乘演段之图，五和自乘演段之图，五较自乘演段之图，四象细草假令之图（含天元术、二元术、三元术和四元术各一问及演草）等。今古开方会要、四象细草假令二图为全书之纲领。正文三卷24门共284问。其中，卷上有直段求源18问，混积问元18问，端匹互隐9问，廪粟迴求6问，商功修筑7问，和分索隐13问等凡6门71问；卷中有如意混和2问，方圆交错9问，三率究圆14问，明积演段20问，勾股测望8问，或问歌象12问，茭草形段7问，箭积交参7问，拨换截田19问，如像招数5问等凡10门103问；卷下有果垛叠藏20问，锁套吞容19问，方程正负8问，杂范类会13问，两仪合辙12问，左右逢元21问，三才变通11问，四象朝元6问等凡8门110问。正文内容十分丰富，要之：端匹、廪粟、商功、测望、截田诸门具有实用意义。直段、混积、如意、方圆、三率、明积、或问、箭积、锁套、方程、杂范诸门似为数学基础训练而设。该书的突出成就分别集中在以下各门：和分与两仪等二门给出方程有理根的求法并揭示出一类有二正根的方程及其求法。茭草、如像与果垛等三门给出属于下列各种类型的垛积求和公式，即三角垛、四角垛、岚峰垛及四角岚峰垛。同时，该书还运用贾宪三角形将招差术一般化，揭示出建立高阶等差数列求和公式的一般方法。给出等差数列、二阶等差数列及三阶等差数列的求和公式。左右逢元、三才变通与四象朝元等三门集中讨论二元术、三元术和四元术，运用四元消法将二元、三元和四元的高次方程组消元成为一元高次方程以求解。全书288问均设立未知元建立方程或方程组，最后以解方程使问题获解。全书内容构成以代数为主的知识系统。图15-8-2是《四元玉鉴》书影。

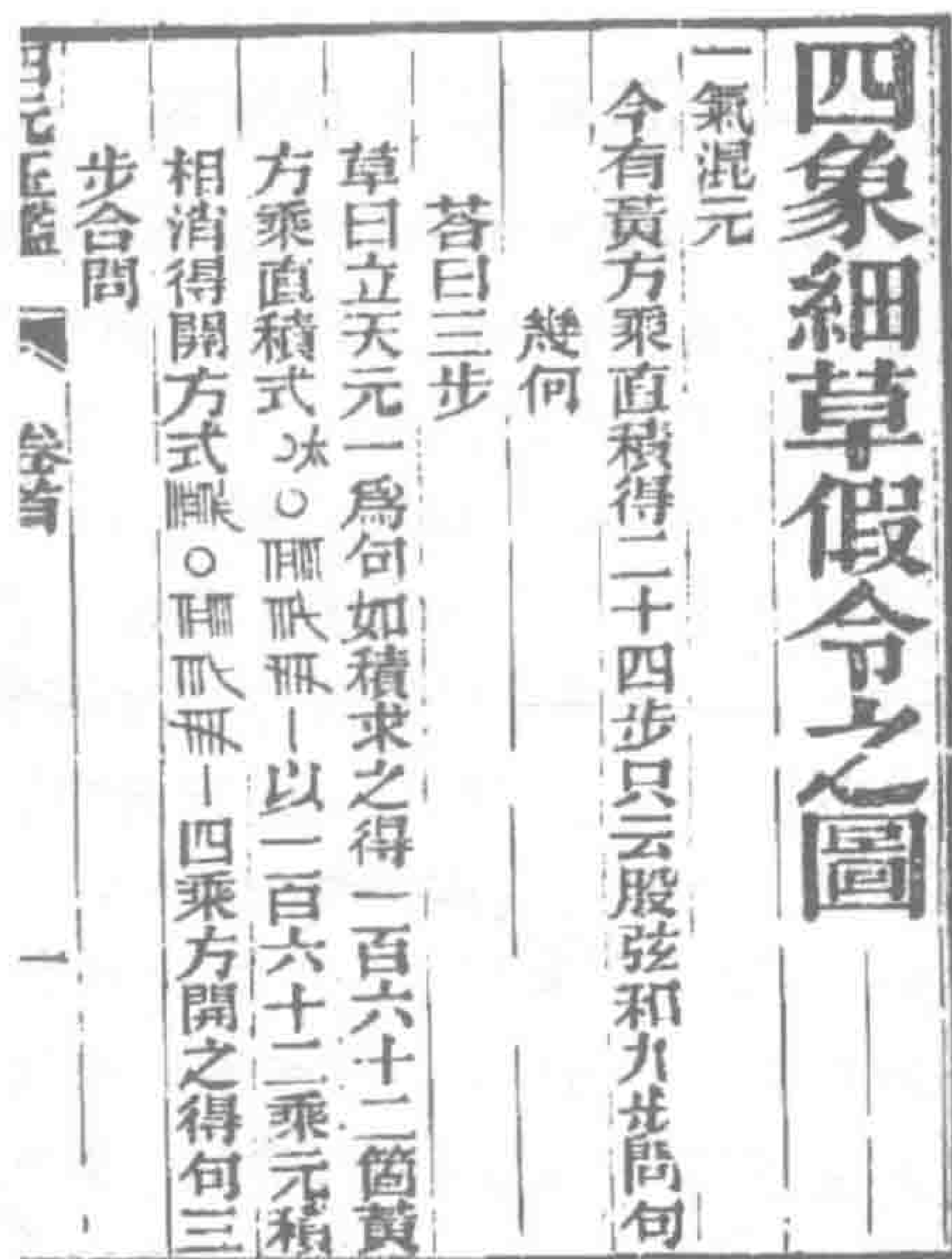

四象細草假令之圖
一氣混元
今有黃方乘直積得二十四步只云股弦和九步問句幾何
答曰三步
草曰立天元一為句如積求之得一百六十二箇黃方乘直積式 ○ 一以一百六十二乘元積相消得開方式 ○ 一四乘方開之得句三步合問
四元玉鑑　卷首　一

图15-8-2　《四元玉鉴》书影

该书卷首的“今古开方会要之图”与“四象细草假令之图”两图将贯穿《四元玉鉴》全书的数学方法予以精练的概括，同时表明其创造性成果各有本源。“梯法”即增乘开方法，系全书解方程的通法，“细草”所示的“消法”是消元法解方程组的范例。垛积术与招差术，实以“古法七乘方图”的斜行数字为之依据，方程有理根的求解则以“古法七乘方图”横行数字为之根本。四元术的创立，经历天元术、二元术及三元术的逐步发展。如无卷首所列此二图，则全书创造性的成果无由索解。

在数学成果和数学方法两个方面，《四元玉鉴》均有突出的成就。一般认为，在欧洲数学史上，插值多项式、方程组的消元法分别出现于17世纪后期和18世纪后期。较之朱世杰的工作均晚300年以上。以天、地、人、物表示未知量，建立方程组，以求解方程作为解决各类问题的统一方法，无疑是成熟的代数方法。《四元玉鉴》是“古代筹算系统发展的顶峰”，主要体现在上述两方面的成就上。

① 祖颐后序所署纪年为“大德登科二月甲子”。戴煦《四元玉鑑细草》认为“登科”为“癸卯”之误。

（二）《四元玉鉴》的版本

《四元玉鉴》自刊出至清中叶的五百余年间流传并不广泛。清梅瑴成曾研究过，但并不全面。乾隆三十八年（1773）诏开四库全书馆亦未征得该书。四元术几成绝学。嘉庆初，阮元任浙江巡抚时访获《四元玉鉴》旧抄本三卷并以影抄本进呈内府。此后，各种副抄本及何元锡（1766～1829）刻本（1818～1822）相继出现，遂引起学者的重视。数十年间，有关《四元玉鉴》的研究工作成书多种。四元术，尤其是四元消元法，亦因之成为研究的重点之一。就研究目的而言又可分为两种情形。其一，力求准确理解四元消元法的数学意义，务使消得之方程与《四元玉鉴》原术相同。其二，灵活运用四元消法，务使消得之方程最简。沈钦裴《四元细草》不分卷（1829 年自序，1830 年又自序）、罗士琳（1789～1853）《四元玉鉴细草》三卷（1835 年自述）、戴煦（1805～1860）《四元玉鉴细草》三卷（1844 自序）均属前一种情形。李善兰（1811～1882）《四元解》二卷（1845）、李锷《四元玉鉴省笔》不分卷（1879）、陈棠《四元消元法易简草》四卷（1899）等均属后一种情形。

经清代学者的阐释与研究，四元术渐行普及。在清学部审定教科书之前，《四元玉鉴》成为当时一些学堂、书院的教学参考书。四元术作为京师同文馆的考试题目出现在《算学课艺》（1880）之中。

第九节　其他数学家和数学著作

一　李籍和《九章算术音义》、《周髀算经音义》

李籍，生平不详。其生活的朝代也是数学史界争论的问题。他的《九章算术音义》和《周髀算经音义》却被完整地保存下来。

（一）李籍的活动年代

《武英殿聚珍版丛书》本和《四库全书》本《九章算术音义》和《周髀算经音义》皆题“唐李籍撰”。这当然来自于《永乐大典》，是关于李籍生活的朝代的最早记载。其他记载以上二书的史籍，如南宋郑樵《通志》卷六八《艺文 · 天文类》，王应麟《玉海》卷四四，元脱脱《宋史 · 艺文志》所记之《九章算术音义》、《周髀算经音义》，鲍澣之刻南宋本《周髀算经音义》，明赵开美校《周髀音义》等皆未言李籍的朝代。后二者有李籍的官衔“假承务郎秘书省钩考算经文字”。清末黄钟骏撰《畴人传四编》将李籍列入宋代，只写了上述官衔和著作，下注其资料来源为“《宋史 · 艺文志》”，不知何据。李俨《中国数学大纲》从黄钟骏说，并云“或题唐李籍，误”①，但并未给出理由。钱宝琮亦主张是北宋人。②

① 李俨，中国数学大纲，上册，科学出版社，1955 年。见：李俨钱宝琮科学史全集，第三卷，辽宁教育出版社，1998 年。本编凡引此书均据此。

② 钱宝琮，对《中国算学史》（上卷）两个问题的说明，见：钱永红编，一代学人钱宝琮，浙江大学出版社，2008 年。

清末以来，中国数学史界多遵从黄钟骏、李俨的说法。

郭书春认为，李籍是唐朝人的说法更为合理[①]，就是说，没有足够的理由推翻《永乐大典》的记载。首先看李籍服务的“秘书省”，这是唐宋间名称时常改动的一个部门。唐初设秘书省，龙朔二年（公元662）改称兰台，太极元年（公元712）又恢复旧称。再说李籍的官衔“承务郎”，本是唐朝设立的从八品文职散官。宋初无此官名，元丰三年（1080）始设承务郎。因此，李籍的著书年代或在公元712年至唐末，或北宋元丰三、四年间。如果他在北宋元丰年间著书，因为他在秘书省负责“钩考算经文字”，必定参加了元丰七年刊刻十部算经的校订。这是黄钟骏、李俨、钱宝琮等学者将李籍列为宋代的根本原因。然而，如果李籍参加了十部算经的刊刻，那么他撰《九章算术音义》所依据的《九章算术》必定是秘书省刻书所使用的抄本。可是事实恰恰相反。从第三章第七节的分析知道，李籍撰《九章算术音义》所使用的抄本根本不是北宋秘书省刻本的母本，而是与后来《永乐大典》中的《九章算术》属于同一个版本链的某个抄本。因此，李籍绝未参与北宋秘书省刻本的整理工作。将李籍看成宋代人的主要根据不复存在。换言之，《永乐大典》关于李籍是唐人的记载是准确无误的。

郭书春还以李籍在谈到祖冲之时均径云“宋南徐州从事史”为李籍不可能是北宋人的佐证。如果李籍生活在北宋，则应对祖冲之生活的“宋”加某个限制词。再者，李籍在提到前代人时，如刘安、梅福、甄鸾、祖冲之等都附加了朝代，而对李淳风则未加“唐”，这都说明李籍与李淳风同是唐代人。此外，李籍注音所用的反切也说明了他为唐人是合理的。

郭书春根据唐元和三年（公元808）、开成元年（公元836）有诏秘书省等校书、正字的记载，推断李籍是唐后期人，在公元9世纪初撰《周髀算经音义》、《九章算术音义》。

（二）《周髀算经音义》

《周髀算经音义》对《周髀算经》本文、赵爽注、李淳风等注释、甄鸾重述中的170余条字词注音、释义。从数量上略少于《九章算术音义》，而且关于“李淳风”，只在《九章算术音义》中有其简历，估计《周髀算经音义》写于此后。

有的释义相当有见地。例如，释“周髀”中说：“《周髀算经》者，以九数、勾股、重差算日月周天行度，远近之数皆得于股表，即推步盖天之法也。”以简洁的语言准确地概括了该书的宗旨、特点和内容。

（三）《九章算术音义》

《九章算术音义》顾名思义，就是对《九章算术》及其刘徽注、李淳风等注释中的人物、字词、术语等注其音，释其义，凡近200条。注音采用我国传统的反切法，如“术，食律切”，“数，色具切”，“率，所律切。数相与也。又音律，约数也”。其注音大多数与《唐韵》、《广韵》相同，不过与现存任何一部韵书都不完全相同。有少数与《广韵》不同，而与梁陈间顾野王的《玉篇》相同，如“袅，奴了切”，甚至还有的与元朝《韵会》相同，如“羡，以浅切”。这些是不是与失传的《唐韵》相合，需要进一步考察。

《九章算术音义》的释义多引自刘徽注、李淳风等注释、《孙子算经》、《五经算术》、《汉书》、《隋书》等。但也有少数条目，不是引自上述典籍，如“方程”条：“方者，左右

---

① 郭书春，李籍《九章算术音义》初探，自然科学史研究，1989，8（3），197～204。

也；程者，课率也。左右课率，总统群物，故曰方程。”

《九章算术音义》最为珍贵的是提供了《九章算术》在那个时代的几个抄本的版本资料。这在第三章第七节已经详细分析。

二 《谢察微算经》

谢察微，生平不详。关于其著作，《太平御览》云《谢察微算经》，《通志》云《谢经算术》三卷，《玉海》引《唐志》云《谢察微算经》三卷①，《玉海》引《崇文总目》云《谢察微算术》三卷，《说郛》卷一百八载“《算经》宋谢察微”，《宋史·艺文志》云“谢察微《发蒙算经》三卷”。以上所说《谢经算术》、《谢察微算经》、《谢察微算术》、《算经》等应该是同一部书的不同名称。至于《发蒙算经》与《谢察微算经》是不是一部书，目前无法判断。

《崇文总目》说谢察微《算术》“设为乘除法凡一百六事”，可见是一部内容相当丰富的著作。各种史料中残存的《谢察微算经》的内容仅有以下四点：

《太平御览·工艺部·数》引《谢察微算经》曰：“《易》称太极，是生两仪，盖数之先也。自隶首作术，容成造历，显算斯兴故也。”② 这应是其序言的片段，或者是序言的开首。

《说郛》卷108载谢察微《算经》中的大小数进位法，度量衡制度，田亩单位，九章名义及用字例义凡153条。③

南宋本《张丘建算经》“百鸡术”后云：“自汉唐以来，虽甄鸾、李淳风注释，未见详辨。今将算学教授并谢察微拟立术草，创新添入。”随即引出谢察微的方法，含有几条术、草，然亦不尽合理。

杨辉《续古摘奇算法》卷上录《谢经》一个题目：“一文日增一倍，倍至三十日。问：计钱几何?”给出了4条术文。

三 沈括和《梦溪笔谈》的数学成就

（一）沈括

沈括（1031～1095），字存中，北宋杭州钱塘人。多才多艺的政治家、思想家、天文学家、数学家、文学家。至和元年（1054）至嘉祐七年（1062）任地方官。八年后沈括登进士第，治平三年（1066）任昭文馆校书郎。后因母丧回乡守制，熙宁四年（1071）出任检正中书刑房公事，五年至七年兼提举司天监，积极参加王安石变法。沈括支持卫扑编制新的历法《奉元历》，制造天文仪器，组织天文观测，并著《浑仪议》、《浮漏议》、《景表议》。七年兼判军器监。八年沈括出使辽，维护了宋朝权益，还调查沿途山川险要、风土人情，撰成《使契丹图抄》。八～十年沈括任权发遣三司使，是国家财政的最高长官，九年封长兴县男，拜翰林学士。元丰三～五年（1080～1082）沈括到西北任军职，因西夏攻陷永乐城，

---

① 现传《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》无此记载。

② 北宋·李昉，太平御览·工艺部·数，嘉庆十四年（1809）张海鹏序刻，从善堂校明钞宋蜀刻本。

③ 元·陶宗仪，说郛，卷108。

沈括救助不力获罪，贬为均州团练副使，实遭软禁。八年改任秀州（今浙江省嘉兴市）。元祐三年（1088）因完成《天下州县图》，受到嘉奖，解除软禁，遂移居润州（今江苏省镇江市），筑园构舍，名之曰梦溪园。沈括总结历年见闻、研究所得，著成《梦溪笔谈》26卷，《补笔谈》2卷，《续笔谈》1卷。绍圣二年（1095）病逝。

《宋史·沈括传》云，沈括"博学善文，于天文、方志、律历、音乐、医药、卜算无所不通，皆有所论著"。据统计，沈括大约有40种著作，除上述者外，著名者还有《长兴集》41卷（存19卷）、《苏沈良方》10卷等。

（二）《梦溪笔谈》的数学成就

1.《梦溪笔谈》

《梦溪笔谈》是沈括最著名的著作，李约瑟称它是"中国科学史上的坐标"。关于此书的写作，沈括自序云："予退处林下，深居绝过从，思平日与客言者，时纪一事于笔，则若有所晤言，萧然移日。所与谈者唯笔砚而已，谓之《笔谈》。"《梦溪笔谈》的内容十分广泛、丰富，几乎包含了人文科学和自然科学的各个领域。据李约瑟统计，有人文资料270条，人文科学107条，自然科学207条。自然科学中，关于易经、阴阳五行7条，算学11条，天文历法19条，气象学18条，地质及矿物学17条，地理及制图学15条，物理学6条，化学3条，工程、冶金及工艺学18条，灌溉及水利工程6条，建筑学6条，生物学52条，农艺6条，医药学23条。① 关于科学技术条目的判定与分类，历来见仁见智。王锦光、闻人军认为科学技术类的条目有255条，包括自然观（阴阳五行）13条，数学12条（含度量衡3条），物理学40条（含乐律21条），化学9条，天文历法26条，地学37条（气象学10条，地理学20条，地质学7条），生物学71条，医药学17条，工程技术30条。②

2.《梦溪笔谈》的数学成就

《梦溪笔谈》单纯的数学条目的分量并不多，却十分重要。主要是卷十八"技艺"中的隙积术和会圆术（第301条）、棋局都数（第304条）、算术多门（第306条）。"算术多门"条叙述了当时的乘除捷算法的概况，提出"算术不患多学，见简即用，见繁即变，不胶一法"的思想。这显然是刘徽思想的继承和发展。

"棋局都数"计算了围棋可能出现的棋局总数是$3^{19\times19}=3^{361}$。这是一个相当大的数字。沈括在探讨这个问题时不自觉地运用了指数定律，这在中古时期还是先进的数学思想。③

隙积术和会圆术是沈括的两项最大的成就。沈括认为，《九章算术》关于多面体体积公式已经相当齐备，"独未有'隙积'一术"。他说："'隙积'者，谓积之有隙者，如累棋、层坛，及酒家积罂之类，虽似覆斗，四面皆杀，缘有刻缺及虚隙之处，用刍童法求之，常失之于少。"于是创造了隙积术。隙积术到南宋之后被称为垛积术，是高阶等差级数求和问题。沈括的隙积术开创了宋元数学的这一重要分支。

会圆术是已知弧田（弓形）的矢与所在圆的直径，求弦和弧长的方法。沈括说："履亩

---

① ［英］李约瑟，中国科学技术史，第1卷，科学出版社，上海古籍出版社，1990年，第140，141页。

② 王锦光、闻人军，沈括的科学成就与贡献，见：杭州大学宋史研究史，沈括研究，浙江人民出版社，1985年，第66页。

③ 钱宝琮，《梦溪笔谈》"棋局都数"条校释，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年，第266~269页。

之法，方田曲直尽矣，未有‘会圆’之术。凡圆田，既能拆之，须使会之复圆。古法惟以中破圆法拆之，其失有及三倍者。予别为‘拆会’之术。”后来王恂、郭守敬将其用于黄道积度的计算。

沈括还有许多条目含有运筹学的某些思想。①

四　王恂、郭守敬和《授时历草》

（一）王恂

王恂（约1235～1282），字敬甫，中山唐县（今河北）人。其父王良，金末为中山府掾，通伊洛之学，精天文律历。《元史·王恂传》载，王恂“六岁就学，十三岁学九数，辄造其极”。岁乙酉（1249），刘秉忠（1216～1274）北上途经中山，见而奇之。及刘秉忠南还，从刘秉忠“学于磁之紫金山”（河北武安境内）。岁癸丑（1253），经刘秉忠推荐，元世祖召见，为太子伴读，旋擢太子赞善，后领国子祭酒。王恂“师道卓然”，“国学之制实始于此”。至元十三年（1276）命以改历之事，官属悉听王恂辟置。因与郭守敬、许衡、杨恭懿等制订《授时历》。王恂尝言：“算数，六艺之一，定国家，安人民，乃大事也。”十六年（1279）授太史令。十九年，王恂卒，年四十七，谥文肃。

（二）郭守敬

郭守敬（1231～1316），字若思，顺德邢台（今河北）人。《元史·郭守敬传》载：“大父荣，通五经，精于算数、水利。”时刘秉忠、王恂等同学于武安紫金山中，大父令其从学刘秉忠。壬戌（1262），张文谦推荐郭守敬“习水利，巧思绝人”，元世祖召见，面陈水利六事，授提举诸路河渠。至元二年（1265）授都水少监。至元十三年，世祖以刘秉忠言修历。于是，与王恂、张文谦等同修历法。郭守敬上言：“历之本在于测验，而测验之器莫先仪表。”十六年，郭守敬为同知太史院事。十七年，《授时历》告成，郭守敬同诸臣上奏，详述《授时历》的“考正七事”与“创法凡五”。十九年，王恂卒。其时《授时历》虽已颁行，其推步之式与立成之数尚未定稿。郭守敬“比次篇类，整齐分秒”，完成《推步》七卷，《立成》二卷，《历议拟稿》三卷，《转神选择》二卷，《上中下三历注式》十二卷。二十三年，郭守敬迁太史令。二十八年，上言水利十一事，旋领都水监。三十一年，拜昭文馆大学士知太史院事。延祐三年（1316）卒，年八十六。《授时历》的各种文稿均由郭守敬整理成书，故常冠以郭守敬之名。

（三）《授时历草》

《元史·刘秉忠传》载，元世祖忽必烈即位之初，刘秉忠奉旨上书，内称：“见行辽历，日月交食颇差。闻司天台改成新历，未见施行。宜因新君即位，颁历改元。令京府州郡置更漏，使民知时。”《元史·张文谦传》载，至元十一年（1274）八月，刘秉忠卒于上都。此

① 何绍庚，《梦溪笔谈》中的运筹思想，见：傅树人：中国传统科技文化探胜，科学出版社，1992年，第117～122页。

议未付实行。十三年，“江左既平，帝思用其言”，遂以郭守敬、王恂分掌测验推步，张文谦、张易主领裁奏，左丞许衡参预其事。十六年，改局为太史院，以王恂为太史令，郭守敬为同知太史院事。又授张文谦昭文馆大学士领太史院事。王恂、郭守敬、许衡、杨恭懿等“遍考历书四十余家”，“四海测验二十七所”，“创立新法，参以古制”，历时四年，于至元十七年（1280）新历告成，赐名《授时历》。十八年颁行。《授时历》“是中国历史上一个最进步的历法”。[①] 其中，考正七事，创法凡五，详载于《元史》郭守敬传。在《授时历》制订的过程中，王恂和郭守敬做出重要贡献。据杨衡“太史院铭”载；“以太子赞善臣王恂素稽算术，凡日月盈缩迟疾，五星进退见伏，昏晓中星，以应四时者，悉付其推衍，寻迁太史令。以都水监臣郭守敬颖悟天运，妙于制度，凡仪象表漏，考日时，步星躔者，悉付规矩之，寻授同知太史事”。《授时历》中的数学成就当以王恂的工作居多。数学成就集中在所创五法。其中，包括招差术、弧矢割圆术以及四次方程正根的求法。

《授时历草》，卷数不详。由王恂、郭守敬等共同编制。王恂主要负责历法的计算工作。“凡日月迟疾，五星进退伏见，昏晓中星以应四时者，悉付其推演。”郭守敬主要负责仪器制造与观测工作。“凡仪象表漏，考日时步星躔者，悉付规矩之。”[②] 今已不传。明《大统历》实即元《授时历》。元明两代先后行用300余年。[③] 据梅文鼎（1633～1721）及其孙梅瑴成的著述以及《明史·历志》可以了解该书的部分内容。

梅文鼎《勿庵历算书目》载有《郭太史历草补注》二卷。《历草》即《授时历草》的简称。梅氏称：“据《元史》本传，郭太史（守敬）著撰极富，并藏于官。厥后畴人子弟皆以元统之《通轨》入算，逐末忘源。郭书存亡不可得而问，所仅存者，《历草》一书而已。其书有算例、有图、有立成，‘历经’立法之根多在其中。而深谙者稀，传写多误，因稍为订正，而于义之精微者特为拈出。”[④]

梅文鼎《平立定三差详说·序》称：“《授时历》于日躔盈缩、月离迟疾并云以算术垛积招差立算，而今所传《九章》诸书无此术也。岂古有而今逸耶？载考《历草》，并以盈缩日数离为六段，各以段日除其段之积度，得数乃相减为一差，一差又相减为二差，则其数齐同。乃缘此以生定差及平差、立差。……若其布立成法，则直以立差六因之以为每日平立合差之差。此两法者，若不相蒙而其术巧会，从未有能言其故者。”[⑤]

梅文鼎《堑堵测量》（约1703）卷二内附有“郭太史本法”一节，包括“弧矢割圆图”，“侧视之图”，“平视之图”，“《授时历》求黄赤内外度及黄赤道差法”等内容。梅氏注云：“见《授时历草》。”[⑥]

梅瑴成《赤水遗珍》收有“《授时历》立天元一求矢术”一文。注云：“以上并依《历草》原文而加注也。”[⑦]

---

① 钱宝琮，授时历法略论，见：李俨钱宝琮科学史全集，第九卷，辽宁教育出版社，1998年，第401页。

② 杨桓，太史院铭，《元文类》，卷十七，影印文渊阁四库全书本。

③ 《元史》关于《授时历》语焉不详。清初梅文鼎据郭守敬《授时历草》等书详加诠次，著《明史·历志》。是为研究《授时历》的主要依据。

④ 清·梅文鼎，勿庵历算书目，丛书集成本。

⑤ 清·梅文鼎，平立定三差详说，见：《梅氏丛书辑要》，卷四十五，乾隆二十六年承学堂刊本。

⑥ 清·梅文鼎，堑堵测量，卷二，见：《梅氏丛书辑要》，卷四十，乾隆二十六年承学堂刊本。

⑦ 清·梅瑴成，赤水遗珍，见：《梅氏丛书辑要》卷，六十一，乾隆二十六年承学堂刊本。

《明史》卷三十三载有“黄道每度昼夜刻立成”。表末注云：“右《历草》所载昼夜刻分乃大都（即燕京）晷漏也。……明既迁都于燕，不知遵用。”①

除此而外，还有一些文献言及《授时历草》的零星内容。

由以上的记载可知，《授时历草》乃是一部详细载有《授时历》主要创造性成果的重要文献。《授时历》（1280）“改正七事”“创法五端”，是中国古代的一部优秀历法。“创法五端”指下列五项新的算法：太阳盈缩，月行迟疾，黄赤道差，黄赤道内外度，白道交周。其中，前二项用招差术，后三项用弧矢割圆术。《授时历》的招差术与弧矢割圆术不仅是中国天文学史上的突出成就也是中国数学史上的突出成就。在上述所列的各种文献中，这些成就均有所记载。

在清代的数学思想史上，《授时历草》亦值得注意。梅瑴成“天元一即借根方解”一文篇幅不长而影响很大。该文指出中国数学的天元术与清初传入的列方程的方法“借根方”名异实同，从而推动了当时对于天元术的研究，同时亦为影响广泛的“西学中源”说提供一个具体的例证而常被引用。在清代西方数学传入的过程中，“西学中源”说在客观上产生过一定的积极作用，但在事实上是一个错误的认识。因当时天元术尚未复明于世，梅瑴成撰文所据实是《授时历草》中的天元术知识。无论对于了解《授时历》及其更名之《大统历》、宋元时期数学成就抑或清代的数学发展，该书均有重要的价值。

五　赵友钦和《革象新书》

（一）赵友钦

赵友钦，字敬夫，号缘督，饶州之德兴（今江西省）人。《革象新书》宋濂序称：“先生鄱阳人。隐遁自晦，不知其名若字，或曰名敬，字子恭，或曰友钦。其名弗能详也。故世因其自号称之为缘督先生。先生宋宗室之子。”重修《革象新书》王祎序称是书“鄱阳赵缘督先生所纂。先生名友某，字子恭。其先于宋有属籍”。《四库全书总目》子部天文算法类一，《原本革象新书》五卷提要称：“其人当在郭守敬（1231～1316）后，时代亦合。然语出传闻未能确定。都印《三余赘笔》称，尝见一杂书云，先生名友钦，字敬夫，饶之德兴人，其名敬字子恭及字子公者皆非，亦不言其何所本。”余嘉锡（1884～1955）《四库提要辨证》卷十二倾向上述意见。近人论缘督先生之名字、里以及年代多从之。

（二）《革象新书》

《革象新书》有五卷本和明王祎删定二卷本。《四库全书总目》提要称：“平心而论，原本词虽稍沓而详赡可考，改本文虽颇略而简径易明。各有所长，未容偏废。”今两本均有流传而篇目次第稍异。据明正德十五年（1520）重刊二卷本，是书卷上十三条，卷下二十条，所论以天文历法为主兼及物理、数学。关于恒星赤经差和赤纬的测量方法以及小孔成像、光强、照度与距离的光学问题的讨论均为有价值的史料。卷下第十八条“勾股测天”、第十九条“乾象周髀”分别讨论勾股测量和圆周率的计算，俱未见新意。

---

① 清·张廷玉等，明史，卷三十三，中华书局，1974年。

赵友钦从圆内接正四边形起算，逐次加倍至 $4\times2^{12}=16384$ 边形。每次均以勾股定理求出正多边形的边长与周长。最后得到，“三千一百四十一寸五分九厘二毫有奇则千寸径之周围也。置此周围之数，降呼为三尺一寸四分一厘五毫九丝二忽有奇，而以一百一十三乘之，果得三百五十五尺。此其为法所以精密也”。赵友钦仅以圆内接正多边形周长逼近圆周长，所得周长必为不足近似值，其方法不如刘徽严谨。355/113 是 π 的过剩近似值，而 3.141592 是不足近似值，以 3.141592×113 近似等于 355，说明 355/113 的精确程度亦欠严谨。

六　沙克什和《河防通议·算法门》

（一）沙克什

沙克什（1278～1351），字得之，元代水利学家、数学家。元、明译作赡思，清修《四库全书》改译今名。《元史·赡思传》云，其先为大食（今伊朗）人，祖父鲁坤东迁丰州（今内蒙古自治区呼和浩特附近），后定居于真定（今河北省正定市）。父斡直，轻财重义，不干仕进。沙克什自幼聪慧，从张祥瑞学习数学，9 岁日记经传千言，弱冠便博览群籍，为乡邦所重。有人劝他参加科举考试，他笑而不答。至治元年（1321）重订《河防通议》。沙克什人品、学识声名远播，朝廷许多显要交相推荐，于 1326 年、1330 年几次受到元帝召见，意欲委以重任，均因议论不合被沙克什以母老谢辞。1333 年，除国子博士，不赴任。1336 年，拜陕西行台监察御史，上封事 10 条，切中时弊，时人叹曰：“御史言及此，天下福也。”后来他在陕西、云南、浙江、湖北等地为官，抑制豪强，打击贪官，为民兴利除弊，颇有政声。1350 年召为秘书少监，议治河事，因病未赴任。次年病逝。沙克什花甲之后为官，但一生淡于功名，热衷学术，精于《周易》等传统文化经典，对数学、天文、律历、地理、水利等都有深邃的研究，著述丰硕。除《河防通议》外，还有《帝王心法》、《四书阙疑》、《五经思问》、《奇偶阴阳消息图》、《老庄精诣》、《镇阳风土记》、《续东阳志》、《西国图经》、《西域异人传》等著作及《文集》30 卷，均失传。从其经历及著述看，他受道家或道教影响较深。

（二）《河防通议·算法门》

1. 《河防通议》

沙克什重订的《河防通议》是现存最早的有关河工技术、工料规章的著作。沙克什精于治河，他的数学老师、真定壕寨官张祥瑞将从太史郭守敬处得到的金都水监本《河防通议》（15 门）赠送给他。后来他又得到北宋屯田员外郎沈立所撰的《河防通议》（成书于 1048 年后，一说 1056 年后，常称为汴本）。沙克什发现“二本之得失互见，其丛杂纷纠，难于讨寻。因暇日擿而合之为一，削去冗长，考订舛讹，省其门，析其类，使粗有条贯，以便观览，而资实用”。[①] 沙克什重订《河防通议》，凡二卷，6 门，68 目。六门依次是：河议，10 目，介绍治河起源，堤埽利病，信水、波浪等术语，辨土脉及河防令等；制度，6 目，介绍开河、闭河、水平测量、修岸、卷埽的方法等；料理，11 目，有关修筑堤岸、安

① 元·沙克什，河防通议，《守山阁丛书》本。

设闸坝及卷埽、造船的用料定额；功程，18 目，有关修筑、开掘、砌石岸、筑墙及采料等的计工方法；输运，18 目，有关船只装载量、运输计工、物料体积及历步减土法的计工等；算法，5 目，有关各种土方体积、工程分配及物料等的计算方法。

根据对《河防通议》内容的分析，我们认为，现存《河防通议》中的全部条目，不是沙克什撰写的，他只是对两本宋、金《河防通议》做了删削、考订、整理、归类，并撰写了一部分注。①

2. 算法门

《河防通议 · 算法门》有杂法、积垛、竹索积寸、卷埽、开河 5 目。杂法目有 5 道题目，都是运用加减乘除求物料及其运费的简单问题。积垛目有 4 道题目，不是宋元发达的垛积问题，而是垛成各种立体的物料的求积问题。其中，有长方体，还有可以分解成一个长方体和一个堑堵的立体以及形如圆亭的求积问题。竹索积寸目开首有以井檿求积土的井檿法，然后是 9 道题目，都是求堤坝、亭台的立体体积和商功问题，大都用《九章算术》的求积公式求解。唯第 6 问筑堤最复杂，用到了《缉古算经》第 3 问的“求堤都积术”。第 9 问的解法有误。卷埽目都是计算呈长方体、堑、圆柱的卷埽所用的梢、草的数量。开河目只有一个问题，是用天元术列出二次方程求解开渠中所截一段长、阔的问题。其天元术的使用是正确的，然而推理中有失误。

算法门将先进的数学方法，尤其是复杂的立体体积计算公式和天元术用于治河工程的设计规划、施工安排、人力调度、物料分配等，是十分有益的。这是当时数学高度发达的产物。其中，天元式的表示值得注意：

一是采用高次幂在上，低次幂在下的方式，这是 13 世纪上叶以前的方式，而不是 13 世纪下叶及 14 世纪上叶的方式。这再次说明算法门的题目不是沙克什创设的。这个题目不可能是汴本《河防通议》的，因为那时尚未产生天元术。因此，这是金都水监本的题目。都水监本中可考年代者最晚是泰和三年（1203）颁布的河防令。② 而据《金史 · 河渠志》，金朝黄河决口及大的河防工程主要在大定八年至明昌年间（1168 ~ 1195），因此，都水监本应定稿于 13 世纪初之前。换言之，开河题应产生于这之前。

二是不用在一次项或常数项旁表以“元”或“太”决定未知数的幂次，而是将常数项置于最下，如没有常数项则置以〇来决定未知数的幂次。这两点对我们认识天元术及其历史有特殊的意义。

《河防通议 · 算法门》也出现了某些公式或推理的失误。令人费解的是，天元术的使用，复杂的体积公式的运用往往是正确的，而个别并不复杂的《九章算术》已有的立体，却使用了错误的公式。

七　其他数学家和数学著作

唐中叶以后，除了上面提到的数学家和数学著作外，根据《旧唐书 · 经籍志》、《新唐

① 郭书春，《河防通议 · 算法门》初探，自然科学史研究，1997 年，16（3）：223 ~ 232。

② 姚汉源，中国水利史纲要，水利电力出版社，1987 年，第 571，433 页。

书·艺文志》、《崇文总目》[①]、《太平御览·工艺部·数》、《册府元龟》[②]、《通志》[③]、《玉海》[④]、《直斋书录题解》、《文献通考》[⑤]、《宋史·艺文志》等的记载，还有许多现今已经亡佚的数学著作及撰著这些著作的数学家。兹分述如下。

（一）唐中后期的数学家和数学著作

1. 陈从运和《得一算经》

陈从运亦作陈运。仕唐，为试右千牛卫胄曹参军。《新唐书》、《崇文总目》、《宋史》均载陈从运著《得一算经》七卷。《宋史·律历志》云："其术以因折而成，取损益之道，且变而通之，皆合于数。""得一"或"求一"是将乘数或除数的首位化成1，以便实施以加减代乘除的运算的方法。可见《得一算经》是一部改进筹算乘除算法的著作。

《新唐书》、《崇文总目》、《宋史》说陈从运还著《三问田算术》。

2. 江本和《三位乘除一位算法》

《玉海》云："江本撰《三位乘除一位算法》二卷，又以一位因折进退，作《一位算术》九篇，颇为简约。"《新唐书》、《崇文总目》、《宋史》并有江本《一位算法》二卷。《一位算法》是《三位乘除一位算法》的简称，当是化筹算乘除的三位布算为一位布算的著作。《一位算术》是关于筹算乘除捷算法的著作。《太平御览》引《一位算法》的三段文字：一为对大数"载"的解释，二为秦商鞅时的步法、亩法，三为周制之步法、亩法。不知这是《一位算法》二卷中的还是《一位算术》九篇中的。

3. 龙受益及其数学著作

龙受益，一作龙受，或龙受一。唐贞元间（公元785～804）人。史籍记载所著算书颇多，可惜均失传。《新唐书·艺文志》、《崇文总目》均云"龙受《算法》二卷"。《宋史·艺文志》云"龙受益《算法》二卷"。

南宋《秘书省续编到四库书目》有"《求一算术歌》二卷，唐龙受益"，《宋史·艺文志》记载龙受益《求一算术化零歌》一卷，这很可能是一部著作。《宋史·艺文志》在"张祚注《法算三平化零歌》"下注"龙受益法"。化零歌是将衡制中的以"两"为单位的数量化为以"斤"为单位的十进小数的歌诀。可见这是关于筹算乘除捷算法的著作。

《秘书省续编到四库书目》又有唐龙受益注《算范九例诀》一卷，《算范诀》二卷及龙受益撰《新易一法算范九例要诀》一卷（《宋史·艺文志》亦记）。《宋史·艺文志》还记有《算范要诀》二卷。关于这些有关"算范"的歌诀著作到底是不同的著作还是一部著作的不同的抄本抑或改编本，不得而知。我们倾向于后者。

据宋晁公武《郡斋读书志》云，龙受益还撰《六问算法》五卷，附《化零歌》。《文献通考》引用之。

4. 其他著作

《崇文总目》记载算书共31部79卷，可是当时已有20部亡佚，甚至连《九章算术》、

---

① 北宋·王尧臣等，崇文总目，见：《四库全书》文渊阁本，台北：商务印书馆，1986年，第674册，第76、77页。
② 北宋·王钦若等，册府元龟·总录·明算，明崇祯十五年（1642）黄国琦刻本。
③ 南宋·郑樵，通志·艺文·天文类。
④ 南宋·王应麟，玉海，台湾商务印书馆，1983年。本编凡引《玉海》，均据此。
⑤ 元·马端临，文献通考·经籍考·天文算法类。

《孙子算经》也没有找到。除上面提到的，《崇文总目》记载的还有：

《心机算术括》一卷（《新唐书 · 艺文志》，《通志》亦载，《宋史 · 艺文志》说僧一行撰，僧黄栖岩注），《新集五曹时要术》三卷（《新唐书 · 艺文志》，《宋史 · 艺文志》亦载，云鲁靖撰），《颖阳书》三卷（《新唐书 · 艺文志》，《通志》亦载，云邢和璞撰，邢隐颖阳石堂山），《明微算经》三卷（《宋史 · 艺文志》云作者是杨锴），《法算机要赋》一卷（《宋史 · 艺文志》亦载），《增成玄一算经》三卷，《一位算法问答》一卷（《宋史 · 艺文志》云作者是任弘济），《算法秘诀》一卷，《五曹乘除见一捷例算法》一卷（《宋史 · 艺文志》亦载），《求一算法》三卷，《算术玄要》一卷，《解注求一化零歌》一卷，《法算口诀》一卷。

以上这些著作除《算法秘诀》外，当时就已阙失，绝不会是北宋的作品，应该是唐代的，最迟也是五代。

《法象算经》，《太平御览》记载其关于"度之起"一段话。

《通志》还记有：《周易轨限算》一卷，《乘除算例》一卷，《法算细例》一卷，《量田要例算法》一卷，《求一算法九例》一卷，《算学通玄九章》一卷，青阳中山子撰。《婆罗门算法》三卷，《婆罗门阴阳算例》一卷，《婆罗门算经》三卷。最后三部是唐代传入的关于印度数学的著作。

（二）两宋的数学家和数学著作

1. *韩公廉及《九章勾股验测浑天书》一卷。*

韩公廉，生平不详，北宋天文学家、数学家、机械制造家。绍圣二年（1095）为吏部令史。通《九章算术》，常以勾股法测验天象。据《金史 · 历志下》记载，北宋苏颂（1020～1101）与沈括于元祐三年（1088）"详定《浑仪法要》，遂奏举吏部勾当官韩公廉通《九章》勾股法，常以推考天度与张衡、王蕃、僧一行、梁令瓒、张思训法式，大纲可以寻究。若据算术考案象器，亦能成就，请置局差官制造。诏如所言"。"公廉将造仪时，先撰《九章勾股验测浑天书》一卷"，此书一作《九章钩股验测浑仪书》，公廉并造机轮木样一座。"制度既成，诏置之集英殿，总谓之浑天仪"，今称水运仪象台。它包括浑仪、浑象和报时器三部分，由一套传动装置和一个机轮联结起来使浑仪随天球一起转动。这种设计思想早于欧洲约600年。其浑象天球直径一人多高，在球上因星凿窍，观测者在球中观测，类似于近代之天象仪。可惜公廉所著书金元时已亡佚，水运仪象台亦不存。李迪《中国数学通史 · 宋元卷》认为，此书"应是设计水运仪象台时的数学原理及计算书，是数学在机械设计上的具体应用"。

2. *蒋舜元和《应用算法》*

《玉海》引《崇文总目》：景德二年（1005）龙图阁子书有《算术》六卷。陈振孙云："《应用算法》一卷。夷门叟郭京元丰三年（1080）序称：平阳奇士蒋舜元撰。凡八篇：曰释数、田亩、粟米、端匹、斤秤、修筑、差分、杂法，总为百五十七问。前志在历算类。按：射、御、书、数均一艺也。不专为历算设，故列于此。"严敦杰《宋杨辉算书考》说，杨辉引用7问，不及全书1/20。徐义保《对〈益古集〉的复原与研究》认为蒋舜元与蒋周是同一人，舜元是其字。此可为一说。

3. 丁易东和《大衍索隐》

丁易东，南宋武陵人，字汉臣，号石坛。咸淳（1265～1274）进士，官编修。入元不仕，授徒以终。撰《大衍索隐》三卷，研究纵横图。李俨《中国数学大纲》（上册）说其卷中“洛书四十九得大衍五十数图”，与杨辉“攒九图”相似，卷下“九宫八卦综成七十二数合洛书图”，与杨辉的“连环图”相似。

4. 其他著作

还有一些亡佚的数学著作，资料更少，有的甚至连朝代也难以界定。

李绍谷《求一指蒙算术玄要》一卷（《通志》，《宋史·艺文志》）。《宋史·艺文志》所引其前是汉唐算书，之后是唐中后期、五代历法，似是唐代作品。

《宋史·艺文志》还记有：

程柔《五曹算经求一法》三卷，夏翰（一作翱）《新重演议海岛算经》一卷，徐仁美《增成玄一算经》三卷，王守忠《求一术歌》一卷，《明算指掌》三卷。

明程大位《算法统宗·算经源流》载“元丰（1078～1085）、绍兴（1131～1162）、淳熙（1174～1189）以来刊刻者多切以见闻者著之”还有：

《证古算法》、《明古算法》、《辨古算法》（疑即杨辉所引之《辨古通源》）、《明源算法》、《金科算法》、《曹唐算法》、《通微集》、《通机集》、《盘珠集》、《走盘集》、《三元化零歌》、《钤经》、《钤释》等。有人说曹唐是唐末进士，曾赋《游仙诗》。

李迪又提到《方圆算经》等书。

以上这些著作，除少数外，大都是关于改进筹算乘除法的。

（三）金元数学家和数学著作

金朝有哪些数学著作，一直不清楚。李冶早年曾在东平（今山东省）得到一部《算经》，或许是金朝的作品。《敬斋古今黈》卷三云：“余至东平，得一《算经》，大概多明如积之术，以十九字志其上下层数，曰：仙、明、霄、汉、垒、层、高、上、天；人；地、下、低、减、落、逝、泉、暗、鬼。此盖以人为太极，而以天、地各为元，而陟降之。”①这是用19个汉字分别表示未知数的不同幂次 $x^n, n = -9, -8, \cdots -1, 0, 1, \cdots 8, 9$。东平《算经》早已失传，我们知道的仅有李冶的记载。

祖颐在谈到天元术前史以及四元术发展史中提到的几部著作，除《益古集》及其作者蒋周是北宋的外，其余如《照胆》及其作者李文一，《钤经》及其作者石信道，《如积释锁》及其作者刘如谐以及最早的天元术著作《如积释锁细草》及其作者元裕，二元术著作《两仪群英集臻》及其作者李德载，三元术著作《乾坤括囊》及其作者刘大鉴②等，都无法确定其年代甚至其朝代。我们估计它们主要是金元的作品。

元中叶之后还有数学著作《透簾细草》、《锦囊启源》、《算法全能集》、《详明算法》、《丁巨算法》等，都是改进筹算乘除捷算法的著作，留待下一编再讲。

---

① 元·李治：敬斋古今黈. 中华书局，1995年。

② 郭世荣认为，“邢先生松不高弟刘大鉴润夫”中“高弟”是高足。因此，《乾坤括囊》的作者姓刘，名大鉴，字润夫，其老师是邢松不。

第十六章　计算技术的改进和珠算的发明

第一节　〇和十进小数

一　〇和数码

（一）〇

表示0的〇号什么时候产生的，没有确凿的资料。算筹数字用空位表示0，实际上是一种没有符号的符号。但是毕竟容易引起误会，特别是不严格遵从“一从十横”的规矩记数时，更容易出错。于是人们按照中国古代学者用方格表示缺字的习惯，便用方格表示空位。例如，宋蔡沈《律吕新书》用“十一万八千□□九十八”表示118098，其中第一个方格表示“另”，第二个方格表示空缺的百位数。蔡沈还用“十□万四千九百七十六”表示104976，其中方格表示空缺的万位数。后来由于书写的方便，□逐渐演变成〇号。现存资料中〇号的最早应用在金朝《大明历》中，有“四百〇三”、“五百〇五”、“三百〇九”等数字。数学著作中什么时候使用〇号，是比《大明历》早还是晚，无考。李冶《测圆海镜》卷七第2问又法中有数字“一千四百五十万〇〇八百六十四”，其中第一个〇表示“另”，第二个〇表示空缺的千位数；数字“一百一十五万〇〇一十六”，其中两个〇分别表示空缺的千、百位数；“三百三十七万〇三百一十八”，其中的〇表示空缺的千位数；“二百二十二万〇三百〇二”，两个〇分别表示空缺的千位数和十位数。上面所引《益古演段》中的“二万四千〇五十七步”，就是用〇记所空缺的百位数。

〇号什么时候引入筹算算草，亦无考。南宋秦九韶《数书九章》，元李冶《测圆海镜》、《益古演段》等著作的算草中都使用〇号。《数书九章》田域类“尖田求积”问的正负开三乘方式就是（其中的算筹数字用阿拉伯数字表示，下同）：

4	〇	6	4	2	5	6	〇	〇	〇	〇	实
										〇	虚方
					7	6	3	2	〇	〇	从上廉
										〇	虚下廉
										1	益隅

它表示四次方程

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0$$

李冶《测圆海镜》卷七第5问草曰：

立天元一为半城径，以自之，为股幂。又以二行差六十四以自之，得4〇96，为勾幂。并二幂，得

1
〇元，
4〇96

为弦幂。寄左。然后以斜行步自之，得18496太，

为同数。与左相消，得 $\begin{matrix} & & & -1 \\ & & & 〇 \\ 1 & 4 & 4 & 〇 & 〇 \end{matrix}$，开平方，得一百二十步，倍之，即城径也。

第一个式子是数 4096，其中的〇记空缺的百位数。第二个式子是天元二项式 x^2+4096，第四个式子是开方式 $-x^2+14400=0$。

《益古演段》卷上第 6 问第二条“又法”云：

立天元一为径，以三之，为外方面。以自之，得 $\begin{matrix}〇元 \\ 9\end{matrix}$，为外方积，于上。再立天元圆径，以自之，三之，四而一，得 $\begin{matrix}〇元 \\ 〇\ 7\ 5\end{matrix}$，为圆池积也。以此圆积减方积，得 $\begin{matrix}〇元 \\ 8\ 2\ 5\end{matrix}$，为一段如积。寄左。然后列真积（按：2673 步），与左相消，得下式：$\begin{matrix}2\ 6\ 7\ 3 \\ 〇 \\ -8\ 2\ 5\end{matrix}$。平方开之，得一十八步，为圆径也。

第一、二、三个式子都是天元式，分别表示 $9x^2$，$0.75x^2$，$8.25x^2$。第四个式子是开方式，表示 $-8.25x^2+2673=0$。

可见〇既可以表示空缺的项，又可以表示空缺的位数。

（二）数码

算筹数字产生之后，出现了按这种数字书写的数码，但在计算中很少使用。唐中叶之后，开始用算筹数码记数。现存使用这种数码的最早著作是敦煌卷子中的《立成算经》。为了书写的方便，人们借用 5 的古字“×”，将算筹数字 5 写成×；借用 10 的汉字“十”，将算筹数字 10 写成十。北宋司马光（1019～1086）的《潜虚》已经采用这种写法。

人们创造〇号之后，便沿用算筹数字将 6，7，8，9 记成在 5 上加 1 的方式，将 5 记成“〇”上加一横成为$\overline{〇}$，或一竖成为⦶。如上面引出的秦九韶的正负开三乘方式中的实“×〇⊤×‖⦶⊤〇〇〇〇”中的“5”就是⦶，不再用“×”。

“×”不再记 5，大约考虑到它有四个方向，便用它来记 4。秦九韶《数书九章》天时类“治历演纪”问答案“入闰四十七万四千二百六十”，在筹算细草中有的就表示成“×⫪≡‖⊥〇”。

顺理成章地，将 9 记成在“×”上加一横成为$\overline{×}$，或加一竖成为⨯。秦九韶在同一问题中将日法 16900 记成“|⊥$\overline{×}$〇〇”，其中“9”是在“×”上加一横。

不过，在秦九韶的书中，并不是所有的 5，4，9 都改变了记法。同是 16900，其中的“9”在前面仍记成算筹数字𝍨。上面的“×⫪≡‖⊥〇”中，同一个数字“4”，既记成“×”，又记成算筹数字≡。同样，对 5 也是如此。例如，算草的文字叙述中的“三十五亿八千四百一十七万八千”，“五”在筹算细草中仍用算筹数字𝍤。

可见，上述的数字记法中，5，9 的记法仍有纵横的区别。就是说，这套数码记法仍有纵、横两式。但是如果作为一种记数而不是运算的数码，对 4～9 的纵横区别是没有必要的。因此，人们对 1，2，3 取纵横两式记法，对 5，6，7，8，9 取横式记法，形成了一套新的记数符号：

纵式　|　||　|||　X　Ō　T　𝍧　𝍨　X　○

横式　—　=　≡　X　Ȯ　⊥　⊥　⊥　X　○

随着珠算的发明，已无纵横的区别。这套记数法进一步发展，逐渐形成了一式的数码：

|　||　|||　X　8　⊥　⊥　⊥　夊　○

其中，5 和 9 是草写演变而来的。这就是沿用到 20 世纪上半叶的苏州码子。

二　十进小数

（一）十进小数的萌芽

魏刘徽在开方不尽时提出“求微数”，以十进分数逼近无理根。但是，刘徽本人实际上也没有认识到十进分数的意义。例如，他求出股幂 75（平方）寸之后说：

> 开方除之，下至秒、忽。又一退法，求其微数。微数无名知，以为分子，以十为分母，约作五分之二。故得股八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二。①

他求出 $5\frac{4}{10}$忽后，将$\frac{4}{10}$约作$\frac{2}{5}$，成为 $5\frac{2}{5}$忽。可见刘徽实际上没有认识到他的开方不尽求微数的真正意义。

《孙子算经》卷下第 2 问：

> 今有丁一千五百万，出兵四十万。问：几丁科一兵？
>
> 荅曰：三十七丁五分。②

“五分”就是 0.5，答案“三十七丁五分”就是 37.5 丁，有了明显的十进小数概念。

唐前期的天文学家在历法计算中也用到十进分数。唐中宗时太史丞南宫说制订的《神龙历》（公元 705）以百进分数表示回归年和朔望月的奇零部分。例如，他将一回归年表示成“三百六十五日，余二十四，奇四十八”，即 365.2448 日。后来僧一行制订的《大衍历》（公元 729）将一回归年的日数的分数部分化为分母为 10000 的分数，唐德宗（780 ~ 804）时曹士蔿制订的《符天历》称为万分历，显然都使用 10000 作为分母。

然而，十进分数和十进小数的概念在唐中叶之前没有得到广泛的应用和发展。③

唐中叶之后，适应商业发展的需要，柜坊（保管财物的店铺）、邸店（商店）与飞钱业（兑汇）等相继设立。大量的交换、赋税、兑汇等事务以及天文历法的计算，提出了许多新的非整数的计算问题，特别是非十进制的名数单位的换算问题，促进了十进小数的发展。

（二）度量的名数单位

唐以前，度量衡单位基本上采用十进制，但是也有少数例外。《孙子算经》概括了南北

① 魏 · 刘徽，九章算术注，见：郭书春汇校，汇校九章算术增补版，辽宁教育出版社、台湾九章出版社，2004 年。本编凡引《九章算术》及刘徽注文字，均据此。

② 晋 · 孙子算经，卷下，郭书春校点。见：郭书春、刘钝校点，算经十书，辽宁教育出版社，1998 年。繁体字修订本，台湾九章出版社，2001 年。本编凡引《孙子算经》，如不说明，均据九章版。

③ 梅荣照，唐中期到元末的实用算术，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966 年，第 10 ~ 35 页。

朝以前的单位及其进位制度。其卷上云：

度之所起，起于忽。欲知其忽，蚕所生，吐丝为忽。十忽为一秒，十秒为一毫，十毫为一厘，十厘为一分，十分为一寸，十寸为一尺，十尺为一丈，十丈为一引；五十尺为一端；四十尺为一匹；六尺为一步。二百四十步为一亩。三百步为一里。

称之所起，起于黍。十黍为一絫，十絫为一铢，二十四铢为一两，十六两为一斤，三十斤为一钧，四钧为一石。

量之所起，起于粟。六粟为一圭，十圭为一抄，十抄为一撮，十撮为一勺，十勺为一合，十合为一升，十升为一斗，十斗为一斛。

此据《隋书·律历志》所引[①]校订。其中，"度"的单位中的"秒"，南宋本[②]和戴震辑录本[③]作"丝"；"量"的单位中的"抄"、"撮"，南宋本和戴震辑录本互换。盖南宋本和《永乐大典》本都是依照唐制，可能是唐初李淳风等整理十部算经时的改动。

《算学启蒙·总括》概括了唐宋度量衡的进位制度：

斛斗起率：量起于圭。六粒之粟。十圭谓之一撮，十撮谓之一抄，十抄谓之一勺，十勺谓之一合，十合谓之一升，十升谓之一斗，十斗谓之一斛。

斤秤起率：衡起于黍，形大如粟。十黍谓之一絫，十絫谓之一铢，六铢谓之一分，四分谓之一两，十六两谓一斤。十五斤谓一秤。三十斤谓一钧，四钧谓之一硕。重一百二十斤。

端匹起率：度起于忽，蚕吐之丝。十忽谓之一丝，十丝谓之一毫，十毫谓之一厘，十厘谓之一分，十分谓之一寸，十寸谓之一尺，十尺谓之一丈。匹率或三丈二，或二丈四。端率或五丈五，或四丈八。

田亩起率：田起于忽，阔一寸，长六寸。十忽谓之一丝，十丝谓之一毫，十毫谓之一厘，十厘谓之一分，十分谓之一亩。百亩谓之一顷。三百步谓之一里。[④]

田亩的分、厘、毫、丝、忽等单位，在杨辉的《田亩比类乘除捷法》中就有了。杨辉在其卷下纠正《五曹算经》四不等田的错误时说：

称三亩八十步，非。实三亩四十步三尺九分六厘八毫七丝半。

制钱的单位，《九章算术》等算经用"钱"。《张丘建算经》中以 1000 钱为一贯。[⑤] 一贯后来俗称一吊。一钱就是后来的一文。《五曹算经》便以文为制钱的单位。"文"之下分为"分"、"厘"，皆用十进制。其金曹最后一问的答案：

答曰：二百五十九贯三百一十八文，奇足钱四分四厘。[⑥]

---

① 唐·魏征等，《隋书·律历志》，中华书局，1973 年，第 402，409 页。

② 晋·孙子算经，南宋鲍澣之翻刻北宋秘书省刻本，1213 年。见：《宋刻算经六种》。文物出版社，1980 年。

③ 晋·孙子算经，武英殿聚珍版丛书乾隆御览本。见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 228 页。

④ 元·朱世杰，算学启蒙，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年。本编凡引《算学启蒙》，均据此。

⑤ 北魏·张丘建，张丘建算经，卷下，郭书春校点。见：郭书春、刘钝校点，简体字《算经十书》，辽宁教育出版社，1998 年。繁体字修订本，九章出版社，2001 年。

⑥ 北周·甄鸾，五曹算经·金曹，郭书春校点。见：郭书春、刘钝校点，算经十书，辽宁教育出版社，1998 年。繁体字修订本，九章出版社，2001 年。

赝本《夏侯阳算经》卷下更以毫、丝作为“厘”以下的货币单位，亦用十进制。其卷下有题为：

今有绢一匹，当脚一十五文。问：丈、尺、寸各几何？

荅曰：

丈，三文七分五厘，

尺，三分七厘五毫，

寸，三厘七毫五丝。

可见，唐及宋元时期，度量衡和田亩、制钱基本上采用十进制，亦有采用非十进制者。

（三）化非十进名数单位为十进小数

十进小数的产生，主要应该归功于非十进制单位的换算。因为十进制单位的运算基本上与十进小数相同，虽然不如十进小数方便，但是要求创造新的表达方式的迫切性不大，在某种意义上说，由于它抹煞了整数和非整数的差别，甚至还延迟了小数概念的发展。然而，非十进制的运算却不那么方便。例如，《九章算术》粟米章其率术的几个例题，都是出钱13970，买丝1石2钧28斤3两5铢，却分别欲其贵贱石、钧、斤、两、铢率之，问各几何。为求得答案，需要将1石2钧28斤3两5铢分别化成以石、钧、斤、两为单位的分数，再投入运算，相当繁琐。在唐中叶之后运算日益增多并要求运算快的情况下，将其化成十进小数，成为迫切需要。人们将化非十进制度量单位为十进小数的算法编成歌诀，就是“化零歌”。化非十进制名数单位为十进小数主要有化丈、尺、寸等为端、匹的十进小数和化两为斤的十进小数两个方面。后者俗称斤两法，下面再讲。

化丈、尺、寸等为端、匹的十进小数在《夏侯阳算经》中十分普遍。其卷上“课租庸调”将有丈、尺、寸的度量化为以端为单位的十进小数的方法是“二因”，这是因为1端＝5丈。例如，将2丈2尺5寸化为以端为单位的十进小数就是2丈2尺5寸÷5丈＝2丈2尺5寸×2÷10丈＝0.45端。《夏侯阳算经》将有丈、尺、寸的度量化成以“匹”为单位的十进小数的方法是“于丈、尺已下折半，五因”，这是因为1匹＝4丈。例如，将3丈7尺5寸化成以“匹”为单位的十进小数就是3丈7尺5寸÷4丈＝3丈7尺5寸$\times\frac{1}{2}\times 5\div 10$丈＝0.9375匹。《夏侯阳算经》中这类例子很多。

（四）十进小数的记法

宋元时期的十进小数的记法各式各样，大体说来，有以下各种：

1. 在小数部分的下方加“分”字

朱世杰沿用了《孙子算经》小数记法。《算学启蒙》卷上“留头乘法门”今有沉香问的术文中将“九斤一十二两”化成“九斤七分五厘”。其“九斤七分五厘”就是9.75斤。

《四元玉鉴》卷上商功修筑门第2问术文：

术曰：立天元一为下广，如积求之。得四十一万二千三百四十八为益实，一万一千一百四十八步六分为从方，一万四千八百九十八步二分为从上廉，一百三十一

步八分为益下廉，一为正隅，三乘方开之，得下广。[①]

其中，“六分”、“二分”、“八分”分别为0.6步、0.2步、0.8步，术文表示求四次方程

$$x^4-131.8x^3+14898.2x^2+11148.6x-412348=0$$

的正根，即下广。这是文字叙述中用汉字表示小数的方式。

有时使用算筹表示算式，则在小数部分下加一“分”字。例如，《测圆海镜》卷八第5问的草中有：

> 立天元一为叀勾。置丙共步（按：288步），以天元乘之，复以六十四除之，得 $\begin{array}{c}4\ 5\\ \text{分}\\ 0\text{太}\end{array}$，为明勾也。

这里以阿拉伯数字代替算筹。此即单项式 $4.5x$。此术中还有筹式 $\begin{array}{c}-5\ 5\\ \text{分}\\ 6\ 4\text{太}\end{array}$，表示多项式 $-5.5x+64$。

2. 以位值制表示小数

在无整数部分时则在整数处标以〇。李冶《益古演段》卷上第1问法中有云：

> 再立天元一为内池径。以自之，又三因，四而一，得 $\begin{array}{c}0\text{太}\\ 0\\ 075\end{array}$，为池积。
>
> 以减头位，得 $\begin{array}{c}1600\text{太}\\ 80\\ 025\end{array}$，为一段虚积。寄左。

前一筹式即单项式 $0.75x^2$，后一筹式即多项式 $0.25x^2+80x+1600$。

对有整数部分者在个位数之后写出小数部分。《益古演段》第6问又法有云：

> 立天元一为等数，以自之，为外田积。又就分母九之，得 $\begin{array}{c}0\text{元}\\ 9\end{array}$，为九个方田积，于头。又立天元等数，以自之，为十二个圆池积也。三之，四而一，得 $\begin{array}{c}0\text{元}\\ 075\end{array}$，为九个圆池。以减头位，得 $\begin{array}{c}0\text{元}\\ 825\end{array}$，为九段如积，寄左。然后列真积（按：为2673步），就分九之，得二万四千〇五十七步。与左相消，得 $\begin{array}{c}24057\\ 0\\ -825\end{array}$，平方开，得五十四步，为等数也。

第一个筹式为 $9x^2$，第二个筹式亦是单项式 $0.75x^2$，第三个筹式即单项式 $8.25x^2$，最后一个筹式即二次方程

$$-8.25x^2+24057=0$$

3. 在整数部分的个位下加单位名称

南宋秦九韶《数书九章》钱谷类“囤积量容”问的答案中有方斛“深一尺五寸九分二厘”，圆斛“深一尺一寸一分四厘”，便分别表示成：$1\ \underset{\text{寸}}{5}\ 9\ 2$，$1\ \underset{\text{寸}}{1}\ 4\ 5$。亦即

---

① 元·朱世杰，四元玉鉴，见：郭书春主编．中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年。本编凡引《四元玉鉴》，均据此。

15.92 寸和 11.45 寸。

李冶书中有的小数的表示与秦九韶采取同一方式。上文所引《测圆海镜》卷八第 5 问的术文中李冶接着说：

> 又以天元减于六十四，得 $\begin{array}{l}-1\text{元}\\64\end{array}$，为虚勾也。并虚、明二勾：$\begin{array}{l}3\ 5\\ \quad\text{分}\\6\ 4\text{太}\end{array}$，为半径也。以自之，得 $\begin{array}{c}1\ 2\ 2\ 5\\ \text{步}\\4\ 4\ 8\ \text{元}\\4\ 0\ 9\ 6\end{array}$，倍之得 $\begin{array}{c}2\ 4\ 5\\ \text{步}\\8\ 9\ 6\ \text{元}\\8\ 1\ 8\ 2\end{array}$，为半段圆城径幂。

第一个筹式表示二项式 $-x+64$，第二个筹式表示二项式 $3.5x+64$，第三个筹式表示多项式 $12.25x^2+448x+4096$，第四个筹式表示多项式 $24.5x^2+896x+8182$。后二者都是在整数部分的个位下加单位名称。

在欧洲，14 世纪法国的莫尔（Joannes de Muris）才提出用十进分数表示根的奇零部分。1585 年，比利时的斯台文（Simon Stevin）才确定十进小数的记法和运算法则。但其记法很不方便。例如，27.847，就表示成 27⊙8①4②7③。

（五）斤两法

斤两法又称为化零歌，是唐中叶创造的将衡制中的以“两”为单位的数量化为以“斤”为单位的十进小数的歌诀。南宋杨辉在《日用算法》中记载了化两为斤的歌诀：

> 一求隔位六二五，二求退位一二五，三求一八七五，四求改曰二十五，五求三一二五，六求两价三七五，七求四三七五，八求转身变作五。①

这就是：

1 两 = 0.0625 斤　　2 两 = 0.125 斤　　3 两 = 0.1875 斤　　4 两 = 0.25 斤
5 两 = 0.3125 斤　　6 两 = 0.375 斤　　7 两 = 0.4375 斤　　8 两 = 0.5 斤

元朱世杰在《算学启蒙 · 总括》中的“斤下留法”歌诀则更为完整：

> 一退六二五　　二留一二五　　三留一八七五　　四留二五　　五留三一二五
> 六留三七五　　七留四三七五　　八留单五　　九留五六二五　　十留六二五
> 十一留六八七五　　十二留七五　　十三留八一二五　　十四留八七五　　十五留九三七五

除 1~8 两的十进小数外，这里又补充了

9 两 = 0.5625 斤　　10 两 = 0.625 斤　　11 两 = 0.6875 斤　　12 两 = 0.75 斤
13 两 = 0.8125 斤　　14 两 = 0.875 斤　　15 两 = 0.9375 斤

与现今的歌诀十分接近。化零歌还包括化斤为两的口诀。

第二节　计算技术的改进

唐中叶之后，人们改进筹算的乘除法，主要在两个方面，一是化三行布算为一行布算，

---

① 南宋 · 杨辉，日用算法，《诸家算法及序记》所引，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 1433~1434 页。

二是化乘除为加减。北宋沈括《梦溪笔谈》卷十八云：

算术多门，如求一、上驱、搭因、重因之类，皆不离乘除。惟增成一法，稍异其术，都不用乘除，但补亏就盈而已。假如欲九除者，增一便是；八除者，增二便是。但一位一因之。若位数少，则颇简捷，位数多，则愈繁，不若乘除之有常。然算术不患多学，见简即用，见繁即变，不胶一法，乃为通术也。

筹算乘除捷算法早期的几种方法，沈括在这里差不多都谈到了。而且，沈括提出的“见简即用，见繁即变，不胶一法”，概括了当时唐中叶以来简化算法的指导思想。

一　重因法、以加减代乘除与求一法

（一）重因法

“重因”就是化多位乘法为个位乘法，在现存资料中，其名见之于北宋，但方法在唐代就有了。运用这种方法可以将乘法从上、中、下三行布算变为在一行中完成。主要是将乘数或除数变换成若干个位数的因子。《新唐书·艺文志》记有江本《一位算法》①，南宋王应麟《玉海》云：

江本撰《三位乘除一位算法》三卷。又以一位因、折、进、退，作《一位算法》九篇，颇为简约。

这显然是通过“重因”化三行布算为一行布算。赝本《夏侯阳算经》多次使用重因法。如卷下第22问：

今有绢三千四百六十三匹一丈三尺四寸，每匹三贯五百文。问：计钱几何？

术曰：先置绢数，丈、尺已下折半，以五因之。以五、七因之，即得。

其算法是：

3463匹1丈3尺4寸×3贯500文=3463.335匹×5×7×100
=12121贯672文5分

《夏侯阳算经》还有将乘数化为个位数乘除的例子。如卷下第35问：

今有米一万三千四百六十五斛四斗三升，每斗一百三十五文。问：钱几何？

术曰：先置米数，三、九因之，折半，即得。

其算法是

13465斛4斗3升×135文=134654.3斗×3×9÷2×10
=18178贯330文5分

《杨辉算法》中这类例子更多，并且有所改进。

（二）以加减代乘除

“身外加减法”包括身外加法和身外减法两种内容，是唐中叶以来人们创造的用加减代替乘除的方法。杨辉在《乘除通变本末》卷中继承发展总结了这些方法，提出：

加法五术：一曰加一位，二曰加二位，三曰重加，四曰加隔位，五曰连身加。

---

① 北宋·欧阳修等，新唐书·艺文志三，中华书局，1975年，第1548页。

减法四术：一曰减一位，二曰减二位，三曰重减，四曰隔位减。

杨辉还提出了“身前因”的方法。沈括所说的“搭因”和“上驱”大约与《夏侯阳算经》的“身外加几”和杨辉的“身前因”类似。下面分别叙述。

1. 加减一位

当乘、除数为 11，12，13，……19 时常使用身外加减一位法。

（1）加一位。

身外加一位即用乘数中“1”后面的数乘被乘数，按照“言十当身布起，言如次身求之”的原则加到被乘数本身上。上面引出的《夏侯阳算经》卷下第 35 问的又术云：

又术：九因，五添，亦得。

这是因为 135 = 9 × 15，故 13465 斛 4 斗 3 升 × 135 文 = (134654.3 斗 × 9) × 10 + [(134654.3 斗 × 9) × 5] = 18178 贯 330 文 5 分。这是在“九因”之后使用了身外加五。杨辉总结“加一位”说：

术曰：以所有物数为实，为身，以法首之数定为得数，以所求物价“一”后零数于身后加之。言“十”当身布起，言“如”次身求之。

例如，《夏侯阳算经》卷下第 19 问：

今有绢二千四百五十四匹，每匹直钱一贯七百文。问：计钱几何？

术曰：先置绢数，七添之，退位一等，即得。

其算法就是

2454 匹 × 1.7 = 2454 匹 × 17 ÷ 10 = （24540 匹 + 2454 匹 × 7） ÷ 10

其中，2454 × 17 的程序是

𝍪 𝍣 𝍭 𝍣 ⟶ 𝍪 𝍣 𝍭68 ⟶ 𝍪 𝍣918 ⟶ 𝍪 7718 → 41718

在这里，算筹数字是运算前的数，阿拉伯数字是其乘积。

（2）减一位。

减一位与加一位相反。杨辉说：

术曰：以出钱数为实，以所求题“一”后零数为法。从实首位存身数减零。言“十”当身减，言“如”次身减之。

（3）加减二位等法。

当乘（除）数是 111，112，……119 时用加减二位法。此外，当乘（除）数是 101，102，……109 时用隔位加减法。当乘（除）数可以分解为两个首位是“1”的两位数时用重加减法。例如，247 × 195 = 247 × 13 × 15，或 247 × 195 = 195 × 13 × 19。

当乘数首位是“2”，且不能分解为因数者用连身加法。所谓“连身加”除了将“2”后的零数按上述的“加一位”、“加二位”、“隔位加”的方法加入被乘数中以外，还要将被乘数本身按原来的位置加入乘得的结果中。

2. 身前因

当乘数是 21，31，……91 时用身前因法。就是用“1”前面的数从首位起乘被乘数，并按照“言‘如’身前步位，言‘十’身前二位”的规定加入被乘数中。例如，234 × 41，其算法就是

𝍡 𝍫 𝍣 ⟶ 8 𝍡 𝍫 𝍣 ⟶ 94 𝍫 𝍣 ⟶ 9594

（三）求一法

然而，在实际问题中，乘数或除数的首位不一定是“1”或“2”，那么，如何将其首位不是“1”的乘数或除数的首位化为“1”，是唐宋人们考虑的问题，这就是“求一法”。《宋史·艺文志》除前文已经提到的著作外，还记载了许多关于求一法的著作：李绍谷《求一指蒙算术玄要》一卷、程柔《五曹算经求一法》三卷、鲁靖《五曹乘除见一捷例算法》一卷、徐仁美《增成玄一算经》三卷、陈从运《得一算经》七卷、龙受益《新易一法算范九例要诀》一卷、王守忠《求一术歌》一卷、江本《一位算法》二卷、任弘济《一位算法问答》一卷等。可惜都已失传。现在有传本的著作有杨辉的《乘除通变本末》、何平子的《详明算法》和贾亨的《算法全能集》等。

杨辉《乘除通变本末》卷中总结了求一法，提出了“求一乘”和“求一除”两种口诀。

> 求一乘曰：五六七八九，倍之数不走。二三须当半，遇四两折纽，倍折本从法，实即反其有。倍法必折实，倍实必折法。用加以代乘，斯数足可守。

例如：

> 支钱二百三十七贯。每贯收头子钱五十六文。问：若干？
>
> 求一草曰：倍法，倍五十六为一百一十二。折实。折总钱作一百一十八贯五百。加一二。合问。

这就是 $237\times56=(237\div2)\times(56\times2)=118.5\times112$。用“加一二”即可。

又如：

> 二百三十八亩，每亩二百四十步。问：共几何？
>
> 求一草曰：半法，亩法折半，作一百二十步。倍实。倍亩数，作四百七十六。加二。合问。

这就是 $238\times240=(238\times2)\times(240\div2)=476\times120$。用“加二”即可。

> 求一除曰：五六七八九，倍之数不走。二三须当半，遇四两折纽。倍折本从法，为除积相就。倍法必倍实，折法必折实。用减以代除，定位求如旧。
>
> 例如：
>
> 支钱一贯，收头子钱五十六文。今收一十三贯二百七十二文。问：元支钱若干？
>
> 求一草曰：倍法，倍五十六为一百一十二。倍实。为二十六贯五百四十四。减一二。合问。

这就是 $13272\div56=(13272\times2)\div(56\times2)=26544\div112$。用“减一二”即可。

元何平子《详明算法》中将“二三须当半，遇四两折纽”改为“二三折半四三因”①，即遇到首位是4的乘数、除数时，以用3乘代替两次折半，一般说来，会更简捷一些。

实际上，以减代除并不见得简捷，在14世纪归除歌诀简化后，“求一除”就被淘汰了。

---

① 元·何平子，详明算法，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年，第1369页。本编凡引《详明算法》，均据此。

二　留头乘法与九归、归除

（一）留头乘法

留头乘法亦称“穿心乘”，元代创造的三位以上乘数的一种乘法方式，因将乘数首位留至最后再与被乘数相乘而得名。起于筹算，用于珠算，初见于元朱世杰《算学启蒙》卷上。朱世杰说：

　　留头乘法别规模，起首先从次位呼。言十靠身如隔位，遍临头位破身铺。

其法先从乘数左起第二位起至末位，依次向右乘被乘数，再以乘数首位乘；先乘被乘数的个位，再乘其十位、百位等数。例如，563×874，计算的顺序是：3×70，3×4，3×800；60×70，60×4，60×800；500×70，500×4，500×800。

（二）九归

“归”是一位除法，“九归”就是从1至9的一位除数的除法。北宋沈括谈到的“增成”法实际上是“九归”。如果被除数的首位是1，用9除时只需在下位加1，用8除时加2。同样，用7除时在下位加3，依此类推。增成法大约产生于北宋初年。

南宋杨辉说古人有四句歌诀，他“以古句入注，两存之”，在《乘除通变本末》卷中提出“九归新括”：

　　归数求成十：九归：遇九成十。八归：遇八成十。七归：遇七成十。六归：遇六成十。五归：遇五成十。四归：遇四成十。三归：遇三成十。二归：遇二成十。

　　归余自上加：九归：见一下一，见二下二，见三下三，见四下四。八归：见一下二，见二下四，见三下六。七归：见一下三，见二下六，见三下十二，即九。六归：见一下四，见二下十二，即八。五归：见一作二，见二作四。四归：见一下十二，即六。三归：见一下二十一，即七。

　　半而为五计：九归：见四五作五。八归：见四作五。七归：见三五作五。六归：见三作五。五归：见二五作五。四归：见二作五。三归：见一五作五。二归：见一作五。

　　定位退无差。

被除数的各位数字自左至右按照九归口诀逐位改变后，所得的结果退一位，就是应该得到的商。七归口诀中依“见一下三”、“见二下六”，“见三”，应作“见三下九”，然而对下一位的“九”又可“遇七成十余二”，故改成“见三下十二”。六归口诀中的“见二下十二”，四归中的“见一下十二”，三归中的“见一下二十一”都是如此理解。后来朱世杰的九归口诀将它们分别改作“七三四十二”、“六二三十二”、“四一二十二”、“三一三十一”。

朱世杰《算学启蒙 · 总括》的九归口诀是：

　　九归除法

　　一归如一进，见一进成十。[1] 二一添作五，逢二进成十。三一三十一，三二六

---

① “见一”，清刻本讹作“九一”。

十二，逢三进成十。四一二十二①，四二添作五，四三七十二，逢四进成十。五归添一倍，逢五进成十。六一下加四，六二三十二，六三添作五，六四六十四，六五八十二，逢六进成十。七一下加三，七二下加六，七三四十二，七四五十五，七五七十一，七六八十四，逢七进成十。八一下加二，八二下加四，八三下加六，八四添作五，八五六十二，八六七十四，八七八十六，逢八进一十。九归随身下，逢九进成十。

与现今使用的珠算口诀基本一致。“三一三十一”就是10除以3商3余1。六归口诀“六一下加四”就是10除以6商1余4，其中第二个“一”既是被除数，又是商数；“逢六进一”就是6除以6，商1，口诀中省略除数6。明代柯尚迁、程大位等稍加增删，用于珠算。

（三）飞归

飞归也是宋元时期在九归口诀基础上创造发展起来的一种特殊除法。飞归之名初见于南宋杨辉《乘除通变本末》。其《习算纲目》说：

穿除又名飞归，不过就本位商数除而已。《详解》有文，一见而晓。加减至穿除皆小法也。

可见飞归又称为穿除。钱宝琮《中国数学史》认为，“飞归”就是当除数为二位数时，用编制的特殊口诀做除法。华印椿认为：“‘习算纲目’条上说的‘穿除’和‘飞归’，内容如何，无法查证。”除数是二位数的除法的特殊口诀，杨辉称做“混然归法”，“没有自称是‘飞归’，也没有说是‘穿除’。”“飞归”是后人命名的。② 它是将归、除合并，编成口诀，归后不用商除，以简化运算程序。例如，以12除100，便用“一归二除”的口诀“见一加七隔加四”，即以1加7，商数为8；商数8之下隔一位加4。这是因为以12除100，商8，以8乘12得96，减100余4。运算程序简便，但口诀繁琐。

（四）归除

归除是元明时期创造的除数在两位以上时的除法口诀，起于筹算，后来用于珠算。它是在九归与减法基础上发展起来的。朱世杰实际上已经懂得归除，但是书中没有细草。何平子的《详明算法》有归除细草。其法以除数首位对齐被除数首位，通过九归口诀，得出商数。随即将商数与除数首位以后各数的乘积，从被除数中减去，如是逐位进行，直到被除数减尽或商数满足要求的位数为止。运用归除可不经估计而直接求得商数。《详明算法》卷上“归除”第4问是：

今有钞四百八十八两九钱五分，买锦每尺价钞三两八钱五分。问：该锦几何？

法曰：置都钞数，以尺价三八五归除之。③

然后给出了布算细草。这是48895÷385，其细草是：列被除数𝍣𝍯𝍧𝍰𝍤，以阿拉伯数字表示商。见首位是4，呼逢三进一十，成1𝍠𝍯𝍧𝍰𝍤。呼一八除八，成1𝍠〇𝍧𝍰𝍤。呼一五除五，得1𝍠〇𝍢𝍰𝍤。见余数首位为10，呼逢六进二十，成12𝍫𝍢𝍰𝍤。呼二八除一十

① “二十二”，清刻本讹作“二十一”。

② 华印椿，中国珠算史稿，中国财政经济出版社，1987年。

③ 元·安止斋，详明算法，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册。

六，二五除一十，得 12 𝍪𝍥𝍰𝍣。余数首位是 2，呼三二六十二，为 12 𝍮𝍦𝍰𝍣。呼逢三进一十，成 127 𝍣𝍰𝍣。呼八七除五十六，五七除三十五，适尽，得到答案 127。

（五）撞归起一

除法中被除数与除数首位相同，而商数与除数首位之下各数乘积大于被除数首位之下的数值，须用撞归。丁巨的《丁巨算法》提出撞归法。贾亨的《算法全能集》将朱世杰的“无除还头位”和丁巨提出的撞归法结合起来，编成撞归起一歌诀：

> 惟有归除法更奇，将身归了次除之。有归若是无除数，起一回将元数施。或值本归归不得，撞归之法莫教迟。若还识得中间法，算者并无差一厘。
>
> 撞归法：谓如四归，见四本作一十。然下位无除，不以为十，以四撞身为九十四。则下位有数除也，故谓之撞归。推此法内用之。余仿此。
>
> 二归为九十二，三归为九十三，四归为九十四，五归为九十五，六归为九十六，七归为九十七，八归为九十八，九归为九十九。①

《详明算法》将撞归口诀改为：

> 见二无除作九二，见三无除作九三，见四无除作九四，见五无除作九五，见六无除作九六，见七无除作九七，见八无除作九八，见九无除作九九。

与现今的珠算口诀基本相同。例如，22908 ÷ 276，利用撞归起一法归除，其草就是：列被除数 𝍡𝍪𝍨〇𝍧。见首位与除数相同，而第二位小于除数，不够除，遂呼“见二无除作九二”，9 𝍬𝍨〇𝍧。余数不足 76 的 9 倍，便起一，下位还二，得 8 𝍮𝍨〇𝍧。从余数中除去“七八五十六”，“六八四十八”，得 80 𝍧𝍪𝍧。见余数首位是 8，呼“逢八进四十”，得 84 〇𝍪𝍧。余数𝍪𝍧不够除，遂起一还二，得 83 𝍡𝍪𝍧。除去“三七二十一”，“三六一十八”，适尽，得商数 83。

第三节　珠算的产生

一　珠算产生诸说

这里所说的珠算是指我们现在还在使用，而不是《数术记遗》中的那种。这种珠算起于何时，自清初以来，即有不同的看法。有人认为出土过北宋算珠，《清明上河图》中赵家药铺柜台上有一珠算盘。也有人认为所谓北宋算珠的出土土层有问题，赵家药铺柜台上是一钱板，而非算盘。关于现代珠算的起源，大致有以下几种。

（一）元及明初说

清梅文鼎先说珠算“起于明初”②，后来又说“起元末明初”：“其用珠盘盖起元末明

---

① 元 · 贾亨，算法全能集，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年。

② 清 · 梅文鼎，古算器考。《梅氏丛书辑要》，乾隆二十四年（1759 年）原刊本。

初，制度简妙，天下习用之。……作珠盘者甚巧，惜逸其名氏。”① 由于梅文鼎在清代数学的地位极高，他的看法有相当大的影响。直至20世纪持这种看法者还甚多。

（二）宋代说

梅文鼎之孙梅瑴成云：“观书目元丰、绍兴间所刻有《盘珠集》、《走盘集》，其（指珠算盘）昉于此欤？”② 后来凌廷堪赞同这种看法。

华印椿《中国珠算史稿》持宋代说，除了梅瑴成的理由外，他的主要论据还有：

1921年7月前北平历史博物馆发掘北宋大观二年（1108）因黄河泛滥淹没的巨鹿三明寺故址，掘得木质算盘珠1枚，扁圆形，直径2.11厘米。有人怀疑出土的土层有问题，他认为可以释疑。

北宋张择端所绘《清明上河图》卷末赵太丞药铺的柜台上绘有算盘的图形。有人认为这是钱板，但钱板一般是十槽，而此图是十五档。

《谢察微算经》中的“用字例义”云：

> 中，算盘之中。
> 上，脊梁之上，又位之左。下，脊梁之下，又位之右。
> 脊，盘中横梁隔木。
> 商总，合用商开之法于盘中。

这里讲的是珠算盘。

北宋大中祥符年间钱易任开封县令撰《南部新书》。其癸卷记述钟离令王仁岫的八卦五曹算法，附带提及“但用诸法径门，取其简要，若类鼓珠之法，且凝滞于乘除”。余介石首先发现此语，认为“鼓珠”或形容算珠如鼓形，当是算盘珠，或“鼓”作“拨动”解，即拨珠计算的方法，与《数术记遗》中的“太一算”、“两仪算”、“珠算”相似。华印椿认为“以前说为当”。

严敦杰发现了宋末元初的刘因《静修先生文集》卷十一的《算盘诗》，诗云：

> 不作瓮商舞，休停饼氏歌。执筹仍蔽簏，辛苦欲如何。

以珠算讽刺好财盘算之人。严敦杰据同卷有诗作于南宋祥兴己卯年，假定同卷诗都是同年所作，则成于1279年。以算盘入诗，说明算盘的使用已不是一二年了。

元王振鹏在元至大三年（1310）所绘的《乾坤一担图》中，货郎担上有一把算盘，其横梁和档子、穿珠极为清晰。

（三）唐代说

此说始于余介石，他认为唐末陈从运的“一位算法”用算筹改排不易，用珠算拨珠很方便，唐末宋初推行的一位算法是为珠算服务的。因此推断算盘起源于唐朝。③ 李培业支持这种看法，除了上述理由外，还提出唐中叶以后商业日盛，为适应商业计算的需要，算盘因之产生，以及十进小数在算盘上进行运算很方便，唐代完备了十进小数，为珠算创造了有利

---

① 清·梅文鼎，古算衍略。《梅氏丛书辑要》。

② 清·梅瑴成，《增删算法统宗》卷一。清刻本。

③ 华印椿，中国珠算史稿，中国财政经济出版社，1987年，第28~37页。

条件。

此外还有汉代说，这是将徐岳《数术记遗》中的珠算与宋元之后的珠算混为一谈了。

二　珠算最迟产生于宋代

筹算乘除捷算法的产生、发展，特别是各种歌诀的出现，带来两个明显的结果。一是使原来必须在三行完成的布算简化后可以在一行内完成。二是包括数字在内的汉字都是单音节，各种筹算歌诀都是用字极少而意义完整的句子，这就使得嘴念歌诀很快，而手摆弄算筹很慢，出现得心无法应手的矛盾。算筹显然已经无法适应由它产生出来的各种歌诀的需要。珠算和珠算盘应运而生。到宋代，现代珠算产生的算法条件已经完全成熟了。

上面的材料可以看出，珠算产生于元末明初说显然失之于太晚，而唐代说只是推测，并无实证。我们认为，宋代说庶几接近历史真相。除了华印椿所说的理由外，宋末元初陶宗仪的《南村辍耕录》中的“三珠戏语”也是旁证。其井珠喻条云：

> 凡纳婢仆，初来时曰擂盘珠，言不拨自动。稍久曰算盘珠，言拨之则动。既久曰佛顶珠，言终日凝然，虽拨亦不动。此虽俗谚，实切事情。[①]

陶宗仪说算盘珠“拨之则动”，可见算珠已经穿档。这是与徐岳的珠算的根本区别，无疑是当今还在使用的珠算盘。这是珠算在文献中的最早记载。既然是“俗谚”，说明珠算盘在民间流传已经有相当长的时间了。更重要的，南宋刘胜年绘的《茗园赌市图》也有珠算盘，算珠、档都清晰可见。见图版。

因此，珠算最迟在南宋已经产生，并在民间广泛使用。

珠算盘产生后，与算筹并用了很长的时间。明洪武间的《魁本对相四言》（1371）中既有算盘，也有算子。其中，算盘图式其形长方，周为木框，内穿档，档中横以梁。梁上二珠或一珠，每珠作数五；梁下五珠或四珠，每珠作数一。明中叶以前数学著作也是珠算、筹算并用。大约在明中叶以后，珠算盘完全取代了算筹，完成了计算工具的改革。明程大位的《算法统宗》（1592）对珠算的发展和普及发挥了极大的作用，这是后话。

① 元 · 陶宗仪，南村辍耕录，卷二十九。

第十七章　勾股容圆和割圆术

第一节　勾股容圆

勾股容圆是通过勾股形和圆的各种相切关系求圆的直径的问题，这是中国数学史上的一个重要课题。它源自《九章算术》勾股章的勾股容圆问。宋金时期，洞渊在此基础上研究了同一个圆和各种勾股形的相切关系，给出了由勾股形的三边求圆径的九个公式，称为“洞渊九容”。李冶在此基础上演绎成《测圆海镜》。他在卷一之首给出了“圆城图式”和“识别杂记”，卷二～十二给出了就同一个圆的圆径发问的170个问题。

一　洞渊九容

“洞渊九容”的公式在李冶的《测圆海镜》卷二“正率一十四问”中。他阐述了10种容圆公式。这些公式是：

第1问之法给出了勾股容圆即内切于勾股形的圆径公式：

以勾股相乘，倍之为实。并勾股幂，以求弦，复加入勾股共，以为法。

此即《九章算术》的勾股容圆公式（5-4-2）。

第2问之法给出了勾上容圆即圆心在勾上而切于股与弦的圆径公式：

以勾股相乘，倍之为实。并勾股幂，以求弦，加入股，以为法。

此即公式：

$$d=\frac{2ab}{b+c} \tag{17-1-1}$$

第3问之法给出了股上容圆即圆心在股上而切于勾与弦的圆径公式：

以勾股相乘，倍之为实。以勾股幂求弦，加入勾，以为法。

此即公式：

$$d=\frac{2ab}{a+c} \tag{17-1-2}$$

第4问之法给出了勾股上容圆即圆心在勾股交点而切于弦的圆径公式：

以勾股相乘，倍之为实。并勾股幂，如法求弦，以为法。

此即公式：

$$d=\frac{2ab}{c} \tag{17-1-3}$$

第5问之法给出了弦上容圆即圆心在弦上而切于勾与股的圆径公式：

以勾股相乘，倍之为实。以勾股和为法。

此即公式：

$$d = \frac{2ab}{a+b} \qquad (17\text{-}1\text{-}4)$$

第 6 问之法给出了勾外容圆即切于勾与股、弦的延长线的圆径公式：

以勾股相乘，倍之为实。以弦较共为法。

弦较共即 $c+(b-a)$，此即公式：

$$d = \frac{2ab}{c+(b-a)} \qquad (17\text{-}1\text{-}5)$$

第 7 问之法给出了股外容圆即切于股与勾、弦的延长线的圆径公式：

以勾股相乘，倍之为实。以弦较较为法。

弦较较即 $c-(b-a)$，此即公式：

$$d = \frac{2ab}{c-(b-a)} \qquad (17\text{-}1\text{-}6)$$

第 8 问之法给出了弦外容圆即切于股与勾、股的延长线的圆径公式：

以勾股相乘，倍之为实。以弦和较为法。

弦和较即 $(a+b)-c$，此即公式：

$$d = \frac{2ab}{(a+b)-c} \qquad (17\text{-}1\text{-}7)$$

第 9 问之法给出了勾外容圆半即圆心在股的延长线上而切于勾、弦的延长线的圆径公式：

以勾股相乘，倍之为实。以大差为法。

大差即 $c-a$，此即公式：

$$d = \frac{2ab}{c-a} \qquad (17\text{-}1\text{-}8)$$

第 10 问之法给出了股外容圆半即圆心在勾的延长线上而切于股、弦的延长线的圆径公式：

以勾股相乘，倍之为实。以小差为法。

小差即 $c-b$，此即公式：

$$d = \frac{2ab}{c-b} \qquad (17\text{-}1\text{-}9)$$

这 10 个公式中哪 9 个是“洞渊”的“九容”呢？自清末以来百余年间，研究《测圆海镜》的学者对这一问题众说纷纭。主要有两种观点。

一种以李善兰为代表。他说：勾股容圆系古法，非洞渊所创，故不在内。”①

另一种以刘岳云为代表，其《测圆海镜通释 · 算学丛话》说：“李壬叔先生谓除勾股容圆不计为九容。但弦上容圆，其用数既不相同，而图式亦无此线，恐原书之意，未必尔也。”②

---

① 清 · 李善兰，天算或问，见：《则古昔斋算学十三》，1867 年，卷一。

② 清 · 刘岳云，测圆海镜通释，算经书局，1896 年。本编凡引刘岳云的论述，均据此。

后来学者，有随刘说的，也有随李说的。梅荣照《李冶及其数学著作》依李善兰说。其理由如下：

第一，勾股容圆公式出自《九章算术》，非洞渊所创，并且已有证明。而李冶得到的洞渊九容，根据李冶自序说经过研究，“向之病我者，使爆然落去而无遗余”来看，可能全是一些未加证明的公式。

第二，《测圆海镜》讨论的中心是容圆问题，最基本的勾股容圆公式自然需要列入；李冶工作的重点是天元术，因此在容圆问题上没有新的增加，这是可以理解的。

第三，“用数既不相同，而图式亦无此线”不能说明李冶不懂弦上容圆，也不能说明它是李冶所创。传本的圆城图式未必是洞渊原图，疑为李冶所用的图。李冶从洞渊得到的弦上容圆，只是一个公式，无需画出。

孔国平认为刘岳云之说更合理，其理由是：

第一，洞渊九容应成一体系，具有共性。包括勾股容圆在内的九个勾股形都具有其弦或其延长线与圆相切的特点，独弦上容圆之弦过圆心，可见洞渊九容应包括勾股容圆而排除弦上容圆。李善兰所说“勾股容圆系古法，非洞渊所创”虽属实，但并不能说明它不应计入洞渊九容。一个体系的创立，往往以某些旧知识为基础并包含旧知识。李善兰的话，只能说明洞渊九容是在勾股容圆基础上创立的。既然这一体系内的绝大部分内容为洞渊所创，被称为“洞渊九容”是恰当的。若把非洞渊所创的古法排除在外，反而不妥，因为那将破坏体系的完整性。

第二，探究一下除弦上容圆以外的其他九容图形的生成，就会发现是按照一个完整思路构图的。过圆心作水平线与垂直线，再作内切圆的水平切线与垂直切线，这四条线与原勾股形恰巧组成九个勾股形，即除弦上容圆外的九容。如果要得出“弦上容圆”，必须过圆心作斜线，且所得勾股形不一定与原勾股形相似（其他九容中的勾股形都相似）。这是一个不同的思路，不应强加给洞渊。①

这两种观点都有某种道理，但由于资料缺乏，都没有十分充分的理由。这个问题值得进一步讨论。如果刘岳云的观点成立，那么，弦上容圆公式应该是李冶所创。无论如何，“弦上容圆”问题的提出，在理论上是一个突破，因为其他9个勾股形都是相似的，唯有弦上容圆之弦可通过圆心任取，其勾股形不一定与其他勾股形相似。只要该弦与原勾股形的勾、股相交，构成的新勾股形便与圆形成“弦上容圆”。

二　圆城图式

《测圆海镜》卷一由圆城图式、总率名号、今问正数、识别杂记等部分组成。圆城图式居于卷一之首，见图版。正如无法判断《测圆海镜》卷二之10种容圆公式中哪9种是洞渊的，这个圆城图式是不是洞渊原有的，也是无法判断的。很可能是洞渊已经有其雏形，李冶又做了补充。圆城图式是用纵横分别平行的4条线将勾股形天地乾分割成14个勾股形。连同天地乾及弦外的一个勾股形月山巽，共16个勾股形。其中，有3对，即日山朱与天日旦，月川青与川地夕，山月泛与月山巽分别是全等的，故不全等的勾股形只有13个。李冶称之

① 孔国平，李冶朱世杰与金元数学，河北科学技术出版社，2000年，第102页。

为“十三率勾股形”。

用天、地、日、月、山、川、乾、坤、巽、艮等汉字表示勾股形的顶点是该图的突出特点，这在以往是没有过的。这相当于现今之用字母表示点，是圆城图式的重大创造。

在图后列出“总率名号”，命名了上述15个勾股形，分别是：天地乾为通勾股形（又称为大勾股形），天川西为边勾股形，日地北为底勾股形，天山金为黄广勾股形，月地泉为黄长勾股形，天日旦为上高勾股形，日山朱为下高勾股形，月川青为上平勾股形，川地西为下平勾股形，天月坤为大差勾股形，山地艮为小差勾股形，日川心为黄极勾股形，月山泛为太虚勾股形，日月南为明勾股形，山川东为叀勾股形。值得注意的是，没有提到弦外的月山巽。还给出各勾股形的勾、股、弦的具体名称。

“今问正数”以通弦680、通勾320、通股600作为基数，给出各勾股形的勾、股、弦三事及五和五较的数值，以便验证。选用这三数作为通勾股形的边长是别具心裁的，它们使圆城图式中各勾股形的边长都是整数。

三　识别杂记

“识别杂记”分诸杂名目、五和五较、诸弦、大小差、诸差、诸率互见、四位相套和拾遗八项，共692条命题，每条可看做一个定理或公式、定义，阐明了诸勾股形各边及其和、差、积之间的关系以及它们与圆径的关系，是对中国古代关于勾股容圆问题的全面总结。各项内容的深浅及在全书中的作用差异较大。识别杂记为《测圆海镜》提供了理论基础。洞渊九容中的其他公式以及后面各卷算题的解法，均可由识别杂记推出。很多算题之首列出的若干条识别杂记的定理，便是解题的依据。例如，卷三第八问：“或问乙从乾地东行不知几步而止。甲出西门南行四百八十步望见乙，复就乙斜行六百八十步与乙相会。问答同前。”其草曰：“识别得二行相减，余二百步，即半圆径与小差共数也。”然而，识别杂记中哪些是洞渊原有的，哪些是李冶补充的，也没法划分。

（一）诸杂名目

1. 诸杂名目

诸杂名目不长，分段引录并以现代符号解释如下：

> 天之于日与日之于心同，心之于川与川之于地同。日之于心与日之于山同，故以山之川为小差。川之于心与川之于月同，故以月之日为大差。

设通勾股形的三边分别为 a，b，c，其余12个勾股形的三边分别表示为 a_i，b_i，c_i，$i=1, 2, \cdots 12$。也就是将圆城图式中各个勾股形的直角顶西、北、金、泉、旦（或朱）、夕（或青）、坤、艮、心、泛、南、东依次以1，2，3……12表示，如图17-1-1所示。① 这里给出 $c_5=b_9$，$a_9=c_6$，$b_9=c_5$，$c_{12}=c_8-b_9$，$a_9=c_6$，$c_{11}=c_9-a_9$。又给出小差、大差等术语的界定。

> 明勾、叀股相得②，名为内率，求虚积。明股、叀勾相得，名为外率，求虚

① 各家序号不同，此依梅荣照《李冶及其数学著作》。

② 李锐按，相得即相乘。

积。虚勾、虚股相得，名为虚率，求虚积。

这是说 $a_{11}b_{12}$ 称为内率，$a_{12}b_{11}$ 称为外率，$a_{10}b_{10}$ 称为虚率，通过它们可以求虚积 $a_{10}b_{10}$。

凡勾股和即弦黄和。凡大差即股黄较，凡小差即勾黄较。

这分别是：$a+b=c+(a+b-c)$，$c-a=b-(a+b-c)$，$c-b=a-(a+b-c)$。众所周知，黄方的边长为 $a+b-c$，也就是勾股容圆的圆径 $d=a+b-c$。

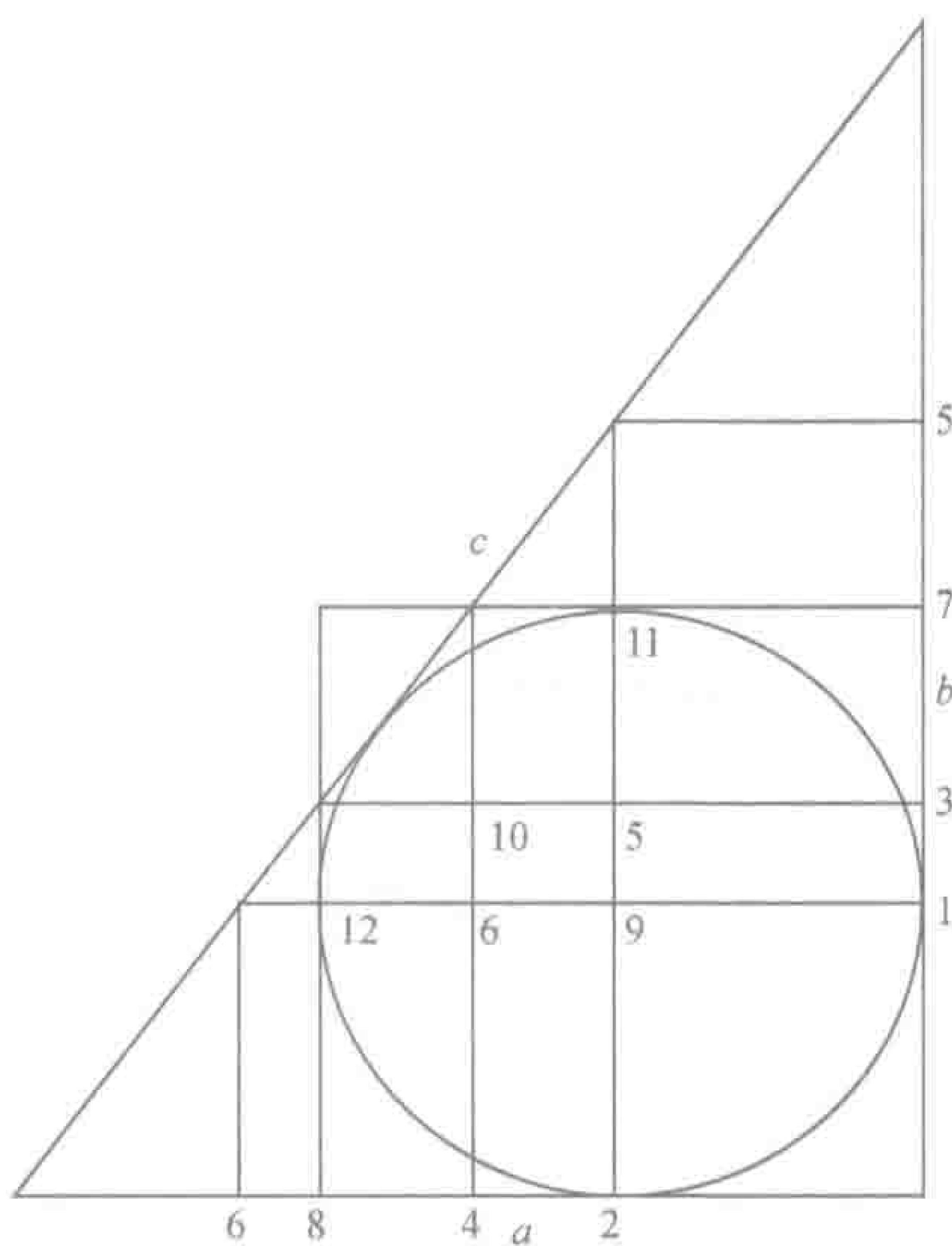


图 17-1-1　圆城图式

高股、平勾差名角差，又名远差。此数即高、平二差共也。又为明和、叀和较也。又为通差内去极差，又为极差、虚差共。① 明、叀二差共名次差，又名近差，又名戾和。此数又为明大差、叀小差较也。勾圆差之股、股圆差之勾相并名混同和。此数又为一径一虚弦共也。明、叀二差较名傍差。此数又为高、平二差较，又为极双差内减虚和，又为极弦内减城径也。虚差不及傍差名蔢差。此数又为大差差内去角差，又为极差内去二之平差，又为次差内去小差差，又为明股、叀勾共内去二之明勾也。虚差、傍差共名蔢和。

这里给出角差、次差、混同和、傍差、蔢差、蔢和等术语的界定，同时提出公式：

$$b_5-a_6=(b_5-a_5)+(b_6-a_6)=(a_{11}+b_{11})-(a_{12}+b_{12})$$
$$=(b-a)-(b_9-a_9)=(b_9-a_9)+(b_{10}-a_{10}),$$
$$(b_{11}-a_{11})+(b_{12}-a_{12})=(c_{11}-a_{11})-(c_{12}-b_{12}),$$
$$b_8+a_7=d+c_{10},$$
$$(b_{11}-a_{11})-(b_{12}-a_{12})=(b_5-a_5)-(b_6-a_6)$$
$$=(c_9-a_9)+(c_9-b_9)-(b_{10}+a_{10})$$
$$=c_9-d,$$
$$[(b_{11}-a_{11})-(b_{12}-a_{12})]-a_{10}=(b_7-a_7)-(b_5-a_6)$$
$$=(b_9-a_9)-2(b_6-a_6)=[(b_{11}-a_{11})+(b_{12}-a_{12})]-(b_8-a_8)$$
$$=(b_{11}-a_{12})-2a_{11}$$

凡大小差相乘为半段径幂。大差勾、小差股相乘亦同上。虚勾乘大股得半段径幂。虚股乘大勾亦同上。边股、叀股相乘得半径幂。明勾、底勾相乘亦同上。黄广股、黄长勾相乘为径幂。高股、平勾相乘得半径幂。明弦、明股并与叀弦、叀勾并相乘得半径幂。明弦、明勾并与叀弦、叀股并相乘亦同上。

这里提出 10 条命题，是全书大多数算题的演算所必须依据的基本公式。这些基本公式是

① “又为通差内”至此及下文最后 10 条公式［公式（17-1-10）～公式（17-1-19）］中对称的部分，原均为小字。查其内容与其他无异，故此处用大字。

$$\frac{d^2}{2} = b_7 a_8 \tag{17-1-10}$$

$$\frac{d^2}{2} = a_7 b_8 \tag{17-1-11}$$

$$\frac{d^2}{2} = a_{10} b \tag{17-1-12}$$

$$\frac{d^2}{2} = b_{10} a \tag{17-1-13}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = b_1 b_{12} \tag{17-1-14}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = a_{11} a_2 \tag{17-1-15}$$

$$d^2 = b_3 a_4 \tag{17-1-16}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = b_5 a_6 \tag{17-1-17}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = (c_{11} + b_{11})(c_{12} + a_{12}) \tag{17-1-18}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = (c_{11} + a_{11})(c_{12} + b_{12}) \tag{17-1-19}$$

高弦平弦相乘为一段皇极积，明勾叀股相乘倍之为一段太虚积，明股叀勾亦同。

此即

$$c_5 c_6 = a_9 b_9$$
$$2a_{11} b_{12} = a_{10} b_{10}$$
$$2a_{12} b_{11} = b_{10} a_{10}$$

同“识别杂记”中的其他命题一样，对“诸杂名目”中的命题，李冶中没有给出证明。实际上，诸杂名目中的定理是自成体系的，后面定理往往是前面定理的推论。

“诸杂名目”是“识别杂记”的基础，它包含了推导后面各命题所需的主要理论。

2. 诸杂名目与算题的关系

《测圆海镜》中的算题都以容圆直径为所求，诸杂名目中的定义和定理（公式）在算题中有许多直接应用。10 个圆径公式的作用尤为显著，大多数题的演算都离不开它们。

例如，卷三第十二问：

或问：见边股四百八十步，叀弦三十四步。问答同前。

法曰：叀弦乘边股，半之为实。半叀弦、半边股相并为从。半步隅法，平方得叀股 30。

草曰：立天元一为叀股。加叀弦，得 $\begin{array}{c}1\text{元}\\34\end{array}$，为平勾也。又以天元减边股而半之，得 $\begin{array}{c}-05\text{元}\\240\end{array}$，为高股也。平勾、高股相乘，得 $\begin{array}{c}-05\\223\text{元}\\8160\end{array}$，为半径幂。寄左。然后以天元乘边股，为同数。与左相消，得下式 $\begin{array}{c}-05\\-257\\8160\end{array}$，开平方，得叀股三十步。以乘

边股，开平方，倍之，即圆径也。

这是已知边股 $b_1=480$，叀弦 $c_{12}=34$，求圆径 d。用现代符号表示算草就是：立天元一即 x 为叀股 b_{12}，则平勾 $a_6=b_{12}+c_{12}=x+34$。又，高股 $b_5=\frac{1}{2}(b_1-x)=\frac{1}{2}(480-x)=240-0.5x$。于是由基本公式（17-1-17），$a_6b_5=(x+34)(-0.5x+240)=-0.5x^2+223x+8160=\left(\frac{d}{2}\right)^2$。寄左。然后由基本公式（17-1-14），得到 $xb_1=\left(\frac{d}{2}\right)^2$。将其与左式相消，得到二次开方式（即二次方程）

$$-0.5x^2-257x+8160=0$$

开方得到 $x=b_{12}=30$。最后由基本公式（17-1-14），$\frac{d}{2}=\sqrt{b_1b_{12}}=\sqrt{480\times30}=120$。

又如，卷四第十一问：

或问：甲乙二人同出北门，向东行至东北十字道口分路，乙折南行一百五十步而立，甲又向东行，甲前后通行了二百步，回望乙，恰与城相直。问答同前。

法曰：以二行步相乘于上，又以南行步乘之，为实。二行步相乘于上，又以乙南行减于甲东行，得数，复以乙南行乘之，加上位，共为法。得半径。

草曰：立天元一为半城径。副之，上位：加甲行步，得 $\begin{array}{c}1\text{元}\\200\end{array}$，为大勾也。下位：减于甲行步，余 $\begin{array}{c}-1\text{元}\\200\end{array}$，为小勾也。其乙折行即小股也。置大勾，以小股乘之，得 $\begin{array}{c}150\text{元}\\30000\end{array}$，内寄小勾 $\begin{array}{c}-1\text{元}\\200\end{array}$，为母，便以为大股也。再置天元，以母乘之，得 $\begin{array}{c}-1\\200\text{元}\end{array}$，减于大股，余 $\begin{array}{c}1\\-50\text{元}\\30000\end{array}$，为半个矮梯底，于上。内寄小勾为母。再置乙折行步，内减天元，得 $\begin{array}{c}-1\text{元}\\150\end{array}$。为半个矮梯头。以乘上位，得 $\begin{array}{c}200\\-1\\-37500\text{元}\\4500000\end{array}$，为半径幂。寄左。乃以小勾分母乘天元幂，得下式 $\begin{array}{c}-1\\200\\0\text{元}\end{array}$，为同数。与左相消，得 $\begin{array}{c}-37500\\4500000\end{array}$。上法下实，如法而一，得一百二十步，即城之半径也，合问。

这是已知 $b_8=150$，$a_2=200$，求 d。其草是："立天元一为半城径"就是设半城径为 x，那么 $a=a_2+x=200+x$，$a_8=a_2-x=200-x$。由于通勾股形天地乾与小差勾股形山地艮相似，故 $b=\frac{ab_8}{a_8}=\frac{(200+x)\times150}{200-x}=\frac{30000+150x}{200-x}$，$b_1=b-x=\frac{30000+150x}{200-x}-x=\frac{x^2-50x+30000}{200-x}$。又 $b_{12}=b_8-x=150-x$，而由诸杂名目中的基本公式（17-1-14），$r^2=b_1b_{12}=\frac{x^2-50x+30000}{200-x}(150-x)=\frac{-x^3+200x^2-37500x+4500000}{200-x}$。另一方面 $r^2=x^2$，于是 $-37500x=4500000$

$$x=\frac{4500000}{37500}=120$$

很明显，基本公式（17-1-14）是解决此问题的关键。

（二）五和五较

1. *五和五较*

“五和”就是勾股形的勾、股、弦三事的5种和的关系：勾股和 $a+b$，勾弦和 $a+c$，股弦和 $b+c$，弦较和 $c+(b-a)$，弦和和即三事和 $a+b+c$；“五较”就是勾股形的勾、股、弦三事的5种差的关系：勾股较 $b-a$，勾弦较 $c-a$，股弦较 $c-b$，弦和较即圆径 $a+b-c$，弦较较 $c-(b-a)$。

“识别杂记”还给出了每一率勾股形的勾、股、弦三事的各种和差与其他勾股形的关系。其中，以各率勾股形三事和与通勾股形的关系的12个公式最为重要。这些公式是

边勾股形：三事和即通弦上股弦和。亦即 $a_1+b_1+c_1=b+c$。

底勾股形：三事和即通弦上勾弦和。亦即 $a_2+b_2+c_2=a+c$。

黄广勾股形：三事和即两大股也。亦即 $a_3+b_3+c_3=2b$。

黄长勾股形：三事和为两大勾。亦即 $a_4+b_4+c_4=2a$。

高勾股形：三事和即大股。亦即 $a_5+b_5+c_5=b$。

平勾股形：三事和即大勾。亦即 $a_6+b_6+c_6=a$。

大差勾股形：三事和即股与股圆差共。亦即 $a_7+b_7+c_7=b+(c-a)$。

小差勾股形：三事和即勾与勾圆差共也。亦即 $a_8+b_8+c_8=a+(c-b)$。

皇极勾股形：三事和即通弦。亦即 $a_9+b_9+c_9=c$。

太虚勾股形：三事和即大黄方。亦即 $a_{10}+b_{10}+c_{10}=(a+b)-c$。

明勾股形：三事和即股圆差。亦即 $a_{11}+b_{11}+c_{11}=c-a$。

叀勾股形：三事和即勾圆差。亦即 $a_{12}+b_{12}+c_{12}=c-b$。

这12个公式在后面经常用到。

又如，关于底勾股形，除了上面已引出的三事和外还有：

> 底弦上勾股和为通勾、高弦共，其较则高弦内去小差勾也。勾弦和为通勾上弦较较与高股共，其较则高股也。股弦和为半个通弦上三事和，其较则叀弦上勾弦和也。弦较和为大差上勾弦和也，其较则小差上勾弦和也。三事和即通弦上勾弦和又为黄长三事和上带股圆差，其较则小差股也，又为高弦上弦较较，又为太虚弦上勾弦和。

以现代符号写出就是

$$a_2+b_2=a+c_5,\quad b_2-a_2=c_5-a_8, a_2+c_2=[c-(b-a)]+b_5, c_2-a_2=b_5, c_2+b_2=\frac{1}{2}(a+b+c), c_2-b_2=a_{12}+c_{12}, c_2+(b_2-a_2)=a_7+c_7, c_2-(b_2-a_2)=a_8+c_8, a_2+b_2+c_2=a+c=(a_4+b_4+c_4)+(b-d), (a_2+b_2)-c_2=b_8=c_5-(b_5-a_5)=a_{10}+c_{10}$$

其他各勾股形的和较公式亦可类似写出。

2. *五和五较与洞渊九容及其他算题的关系*

洞渊九容的公式可以由五和五较公式，特别是各勾股形与通勾股形三事关系的12个公式导出。例如，卷二的勾上容圆公式便可由边勾股形三事和与通勾股形股弦的关系推出：

因为边勾股形与通勾股形相似，故 $\dfrac{a_1}{a_1+b_1+c_1}=\dfrac{a}{a+b+c}$，$\dfrac{b_1}{b_1+c_1}=\dfrac{b}{b+c}$。两式两端相乘，

借助 $a_1+b_1+c_1=b+c$，得到$\frac{2a_1b_1}{b_1+c_1}=\frac{2ab}{a+b+c}$。由勾股容圆公式便得到勾上容圆公式。

（三）其他部分

“诸弦”是各勾股形中与弦有关的公式，“大小差”是与大差勾股形和小差勾股形有关的公式，“诸差”是有关各勾股形中各种差的公式，“诸率互见”是圆城图式中各线段间的关系式，“四位相套”是高、平、明、叀四勾股形的勾、股、弦之间的关系式，“拾遗”是不便归入以上七类的一些公式。这些公式中有个别错误，有的错误是偶合造成的，还有的大概是传抄讹误。

总之，识别杂记 692 余条定理，绝大多数是正确的，只发现 9 处程度不同的错误。

第二节　割　圆　术

一　沈括的会圆术

沈括会圆术给出了由弧形（弓形）的弦和矢求弧长的近似公式。其《梦溪笔谈》卷十八“技艺”“隙积术和会圆术”在叙述了创造会圆术的缘由之后云：

> 予别为拆会之术：置圆田径，半之以为弦。又以半径减去所割数，余者为股。各自乘，以股除弦。余者开方除为勾。倍之，为割田之直径。以所割之数自乘，倍之，又以圆径除，所得加入直径，为割田之弧。再割亦如之。减去已割之弧，则再割之弧也。

如图 17-2-1 所示，设圆的直径为 d，半径为 r，弧形的弦为 c，矢为 v，弧长为 s，沈括首先由勾股术给出了求弦的公式：$c=2\sqrt{r^2-(r-v)^2}$。接着给出了由弦、矢和圆直径求弧长的近似公式：

$$s=c+\frac{2v^2}{d}$$

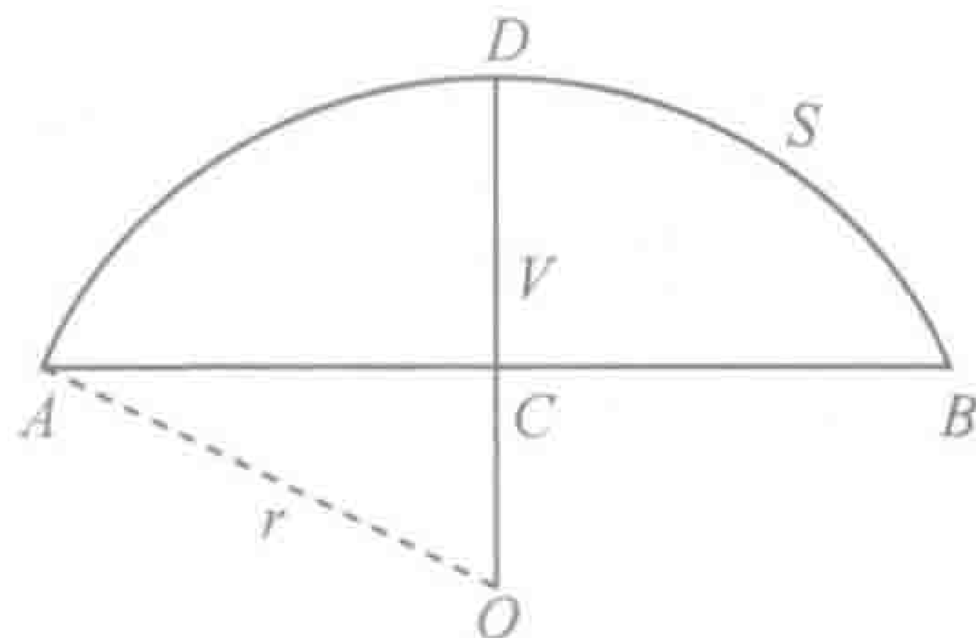


图 17-2-1　沈括会圆术

对这个公式，沈括没有给出推导方法，钱宝琮主编的《中国数学史》认为它是由《九章算术》的弧田面积公式（5-1-9）推导出来的。

二　《授时历》的弧矢割圆术

在《授时历》的“创法五端”之中，赤道积度、赤道内外度、白道交周的计算使用了弧矢割圆术。[①] 此处以赤道内外度与赤道积度的计算为例说明这种方法。[②] 如图 17-2-2 所示，点 O 是天球中心，$\overset{\frown}{ACE}$是赤道象限弧，$\overset{\frown}{ABD}$是黄道象限弧，A 是春分点，D 是夏至点，$\overset{\frown}{DE}$是黄赤

---

① 《明史》卷三十二，历志二，中华书局标点本。

② 钱宝琮，授时历法略论，见：李俨钱宝琮科学史全集，第九卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 418 ~421 页．

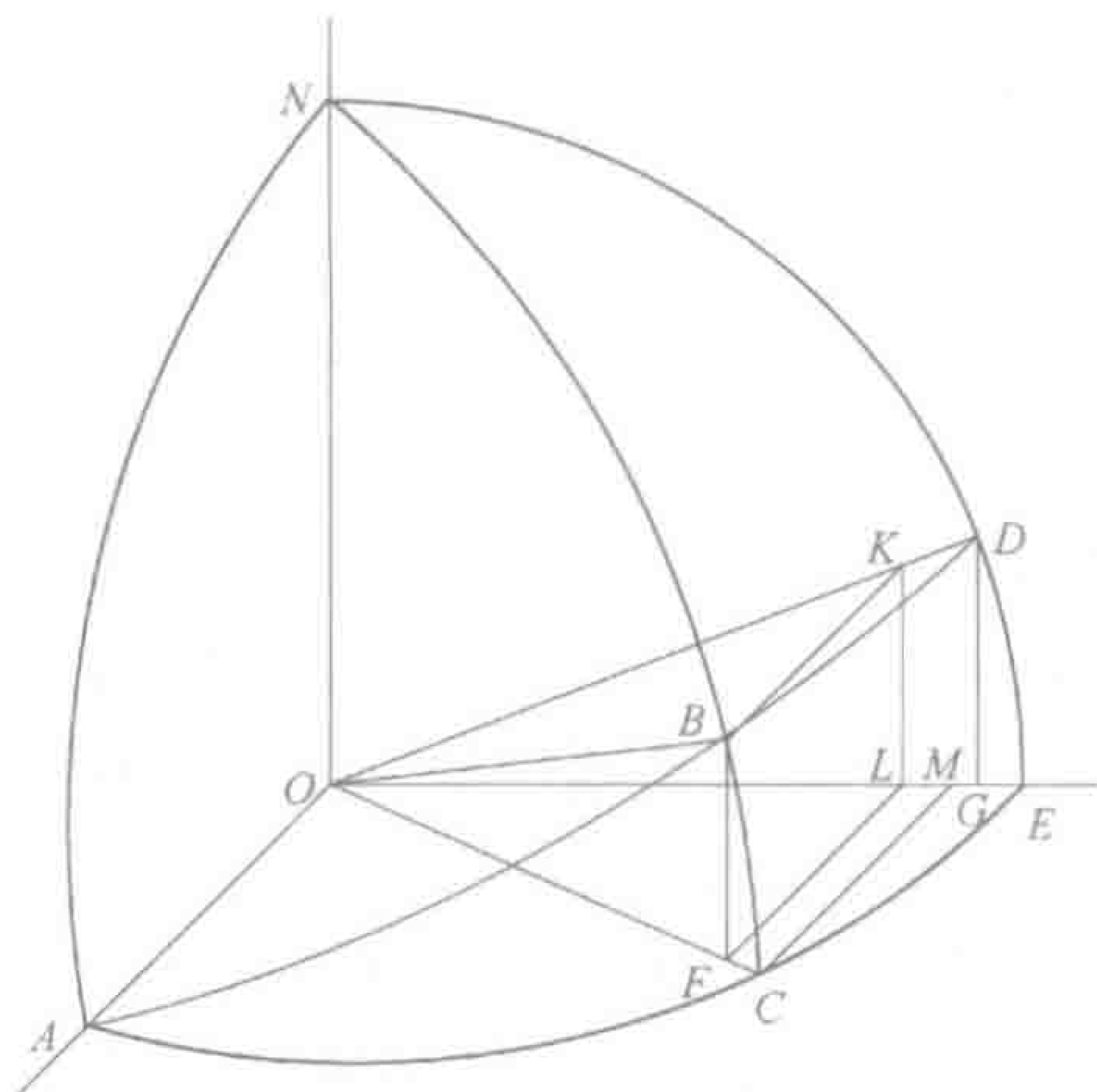


图 17-2-2　弧矢割圆术

大距。点 B 是太阳所在的位置。已知 $\overset{\frown}{BD}$（黄道积度），求 $\overset{\frown}{BC}$（当点 B 在北纬，$\overset{\frown}{BC}$ 称为赤道内度，当点 B 在南纬，$\overset{\frown}{BC}$ 称为赤道外度）和 $\overset{\frown}{CE}$（赤道积度）。中国古代的黄道度数由二至起算，故此术亦即由黄经余弧求赤纬和赤经余弧。

《授时历》取周天度数 = 365.25 度，圆周率 $\pi = 3$，黄赤大距 $a = 24$ 度。求得周天直径 $d = 121.75$ 度，半径 $r = 60.875$ 度。在勾股形 OGD 所在平面内，$DG = p$，$OG = q$，$GE = v$，由沈括会圆术有 $p = \sqrt{r^2 - (r-v)^2}$，$a = p + \frac{v^2}{d}$。由以上两式消去 p，得 $v^4 + (d^2 - 2ad)v^2 - d^3v + a^2d^2 = 0$。将 a，d 值代入，即可解得 v，进而可得 p，q。

在勾股形 OKB 所在平面内，令 $BK = p_1$，$OK = q_1$，$KD = v_1$，同法可得 p_1，q_1，v_1。

在勾股形 OFB 所在平面内，令 $BF = p_2$，$OF = q_2$，$FC = v_2$，作 $KL \perp OE$，连 FL，则 $FL = BK = p_1$。由勾股形 OGD 和勾股形 OLK 相似，则 $BF = KL = \frac{OK \times DG}{OD}$，即

$$p_2 = \frac{q_1 p}{r} \tag{17-2-1}$$

又，$OL = \frac{OK \times OG}{OD} = \frac{q_1 q}{r}$，$OF = \sqrt{OL^2 + FL^2}$，即 $q_2 = \sqrt{(\frac{q_1 q}{r})^2 + {p_1}^2}$。故 $FC = v_2 = r - q_2$。由会圆术，$\overset{\frown}{BC} = p_2 + \frac{{v_2}^2}{d}$。此即太阳在点 B 的赤道内外度。

在勾股形 OLF 所在的平面，作 $CM \perp OE$。令 $CM = p_3$，$OM = q_3$，$ME = v_3$。由勾股形 OMC 和勾股形 OLF 相似，则 $CM = \frac{OC \times FL}{OF}$，即

$$p_3 = \frac{r p_1}{\sqrt{(\frac{q_1 q}{r})^2 + {p_1}^2}} \tag{17-2-2}$$

又，$OM = \frac{OC \times OL}{OF}$，即

$$q_3 = \frac{q_1 q}{\sqrt{(\frac{q_1 q}{r})^2 + {p_1}^2}} \tag{17-2-3}$$

从而 $ME = v_3 = r - q_3$。由会圆术，$\overset{\frown}{CE} = p_3 + \frac{{v_3}^2}{d}$，此即太阳在点 B 的赤道积度。

《明史 · 历志二》记载上述算法的同时还记载了“割圆弧矢图”，“侧立之图”和“平

视之图”。梅文鼎认为此系“郭太史本法”。① 因此上述算法实即运用正投影原理将球面问题转化为平面问题，进而运用视图之间的等长线段、相似勾股形、勾股定理和沈括会圆术使问题获解。梅文鼎认为此法之精华在于“剖析浑体，于无勾股中寻出勾股”。② 所见极是。

如果运用三角知识，问题可以归结为，在球面直角三角形 ACB 中，已知 $\overset{\frown}{AB}$，$\angle A$，求 $\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AC}$。因而，由 $\sin a = \sin A \sin c$，$\cos A = \tan b \cot c$ 可以获解。《授时历》的算法与此不同而原理相通。将公式（17-2-1）变形为

$$\frac{p_2}{r} = \frac{q_1 p}{r^2}$$

即 $\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right)\sin A$ 或 $\sin a = \sin A \sin c$。

同理，由公式（17-2-2）、公式（17-2-3）可得

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1 r}{q_1 q}$$

即 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - c\right)\frac{1}{\cos A}$ 或 $\cos A = \tan b \cot c$。

比较之下，可知弧矢割圆术确是一种具有创意的算法。沈括会圆术是一种近似算法，因而决定了弧矢割圆术也是近似算法。此即弧矢割圆术与球面三角法的根本区别。

三　赵友钦的割圆术

赵友钦的《革象新书》在数学方面的主要贡献是割圆术。

在其卷五的《乾象周髀》中，赵友钦讨论了圆周率问题。他对古代的一些圆周率近似值如 3，$\frac{157}{50}$，$\frac{22}{7}$，$\frac{355}{113}$等进行了比较，认为：“径一百一十三而周围三百五十五最为精密。”又说：“既论其异同，亦当言其考究之术。”这“考究之术”就是割圆术：

> 画为百眼棋盘，一眼广一寸；横十寸名勾，在于东西相距。方图之内画为圆图，是去其方之四角也。圆径十寸与外方之股数相同。圆径名髀，圆之髀比方之股其数同而字义不异，但有方圆之别。就圆图之内又画小方图，其小方四角不指外方之四角，而斜抵东西南北之四正。盖其外大方四角在于乾坤艮巽，其内小方四角在于坎离震兑。
>
> ……
>
> 自四角之方添为八角曲圆为第一次，若第二次则求其为曲十六，若第三次则求其为曲三十二，若第四次则求其为曲六十四。凡多一次，其曲必倍。若至十二次，则求其为曲一万六千三百八十四。其初之小方渐加渐展，渐满渐实，角数愈多，而其为方者不复方而变为圆矣。故自一二次求之，以至一十二次，可谓极其精密。若节节求之，虽至千万次，其数终不穷，须当逐节作为大小勾，大小股，大小勾幂，大小股幂，小弦小弦幂，大弦大弦幂。但大弦与大弦幂不于节次作之，毕竟只用本数而已。

① 梅文鼎，堑堵测量，卷二，承学堂刊本.

② 梅文鼎，勿庵历算书目，郭太史历草补注条，丛书集成初编本。

今先以第一次言之，内方之弦十寸，名大弦，自乘得一百寸，名大弦幂。内方之勾幂五十寸，名第一次大勾幂，以第一次大勾幂减其大弦幂，余五十寸，名第一次大股幂。开方得七寸七厘一毫有奇，名第一次大股。以第一次大股减其大弦，余二寸九分二厘八毫有奇，名第一较。以此较折半得一寸四分六厘四毫有奇，名第一次小勾。此小勾之数乃是内方之四边与圆围最相远处也。以第一次小勾自乘得二寸一分四厘四毫有奇，名第一次小勾幂。以第一次大勾幂折半得二十五寸，又折半得一十二寸五分，名第一次小股幂。以第一次小股幂并第一次小勾幂得一十四寸六分四厘四毫有奇，名第一次小弦幂，以第一次小弦幂开方得三寸八分二厘六毫有奇，名第一次小弦，即是八曲之一。八乘其第一次小弦，得三十寸六分一厘有奇，是即八曲之周围也。

此以小数求之，不若改为大数。所以然者，盖求至十二次数之降者渐小，愈小则不便于数名。当将大弦改为一千寸，大弦幂改为一百万寸，第一次大勾幂改为五十万寸，大股亦如之，然后依法而求，若求至第二次者，以第一次小弦幂就名第二次大勾幂，以第一次大勾幂①减其大弦幂余为第二次大股幂，开方为第二次大股。以减其大弦，余为第二较，折半，名二次小勾。此小勾之数即是八曲之边与圆围最相远处也。以第二次小勾自乘，名第二次小勾幂，以第二次大勾幂两折，名第二次小股幂，以第二次小股幂并第二次小勾幂，名第二次小弦幂，以第二次小弦幂开方为第二次小弦，即是十六曲之一。以十六乘其第二小弦即是十六曲之周围也。

以第二次仿第一次，若至十二次，亦遞次相仿而已。置第十二次之小弦，以第十二次之曲数一万六千三百八十四乘之，得三千一百四十一寸五分九厘二毫有奇，即是千寸径之周围也。置此周围之数降呼作三尺一寸四分一厘五毫九丝二忽有奇，以一百一十三乘之，果得三百五十五尺，故言其法精密。要之，方为数之始，圆为数之终。圆始于方，方终于圆，周髀之术无出于此矣。②

图 17-2-3 赵友钦割圆术

如图 17-2-3 所示，赵友钦从直径为 10 寸的圆内接正四边形 $ABCD$ 开始割圆，直径 $AC=10$ 寸为大弦，则由勾股定理求得正四边形一边 $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=\sqrt{50}$，为第一次大股。

将正四边形割为正八边形，其一边为 AE。取 AB 的中点 P，考虑小勾股形 AEP：$EP=\dfrac{1}{2}(AC-AB)=\dfrac{1}{2}(10-\sqrt{50})$，为第一次小勾；$AP=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{50}$，为第一次小股；则正八边形的一边长

$$AE=\sqrt{EP^2+AP^2}=\sqrt{\left[\frac{1}{2}(10-\sqrt{50})\right]^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{50}\right)^2}=\sqrt{5(10-\sqrt{50})}。$$

同样，将正八边形割为正 16 边形，其一边为 AF。为了计算方便，将圆直径变为 1000

① “勾幂”，《四库全书》本误作“股幂”，以算校正。

② 元 · 赵友钦，革象新书，卷五，见：四库全书，文渊阁本，第 786 本册，台湾商务印书馆影印，1986 年。

寸。取 AE 的中点 Q，考虑小勾股形 AFQ：$FQ=\frac{1}{2}(AC-CE)$，为第二次小勾，其中 $CE=\sqrt{AC^2-AE^2}$；$AF=\frac{1}{2}AE$，为第二次小股；则正 16 边形的一边长 $AF=\sqrt{FQ^2+AQ^2}$。如此继续下去，可以求得圆内接正 32，64，…边形的边长及周长，割到第 12 次，求出正 $4\times2^{12}=16384$ 边形的一边长，计算出周长为 3 尺 1 寸 4 分 1 厘 5 毫 9 丝 2 忽有奇，以 113 乘之，得到 355，从而证明了祖冲之的密率$\frac{355}{113}$最为精密。

他的天文计算便采用这一结果。

赵友钦认为圆内接正多边形的边数无限倍增时，其极限就是圆。这是现存中国数学史文献中继刘徽之后，又一次明确使用极限概念。在现存宋元时代其他数学家的工作中，我们还没有发现有关极限的记载。赵友钦利用极限思想揭示了方与圆的关系，认识到在一定条件下，直线形可转化为曲线形，所谓“圆始于方，方终于圆”，实质上是一个由方到圆的极限过程。而且，赵友钦一方面认识到，尽管分割到 12 次的时候，“可谓极其精密”，但“若节节求之，虽至千万次，其数终不穷”。这就是说，可以继续求得更加精确的圆周率值，而且永远不会终结。另一方面他又说圆内接正多边形的边数无限加倍，“其为方者不复方而变为圆矣”，与刘徽的“割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”的思想一脉相承，而比刘徽更加明确，与现代极限观念相当接近。

赵友钦的推理严密，计算准确，但是也有明显的不足。首先，他没有十进小数的概念，他文字中的“小数”并不是十进小数，而是指 10 寸，是相对于 1000 寸这种“大数”而言的。因此，在假设圆径为“小数”10 寸而求得圆内接正 8 边形周长后，为了计算精确，不得不改直径为“大数”1000 寸。实际上，这是不必要的。自赵友钦之前四五百年的唐中叶起，人们便开始使用十进小数。如果说当时这是民间商业活动中的现象，不登数学的大雅之堂的话，那么在赵友钦之前的 13 世纪 40 年代，处于数学界领军地位的南方的秦九韶、北方的李冶不仅使用了十进小数，而且有明确的共同的小数记法，可见是当时南北方数学界的共识。赵友钦未采用这一先进数学成果，使计算徒生繁琐。

其次，计算中有许多赘笔。例如，每次分割得到某正多边形，求出其一边长之后，赵友钦都计算出它们的周长，是没有必要的，因为后来的计算根本用不到这些周长。只需计算第 12 次分割得到的正 16384 边形的周长，用以验证祖冲之的密率最准确就够了。计算正 8～8192 边形的周长，实在是节外生枝。这与刘徽求圆周率时只计算必要的数值，如求出正 12，24，48，96，192 边形的边长之后，只算出正 96，192 边形的面积，而对于计算无补的正 24，48 边形的面积则不予考虑，是根本不同的。

第十八章　高次方程数值解法与天元术、四元术

第一节　高次方程数值解法

一　立成释锁法

贾宪汲取了刘徽、《孙子算经》等对《九章算术》开创的开方术的改进，在《黄帝九章算经细草》中提出立成释锁法。“释锁”就是开方，将一个数的开方比喻为打开一把锁。“立成”是唐宋历算学家将一些常数列成的算表。因此，立成释锁法就是借助一个常数表进行开方的方法。正如钱宝琮《增乘开方法的历史发展》所指出的：“贾宪的立成释锁法可以解释作：利用一种表格上的数字来解决一般的开方问题。”贾宪提出了立成释锁平方法和立成释锁立方法。其立成释锁立方法是：

> 立方法曰：置积为实，别置一算名曰下法，于实数之下。自末至首，常超二位。约实。上商置第一位得数。下法之上亦置上商，又乘为平方。命上商，除实，讫。三因平方，一退。亦三因从方面，二退，为廉。下法三退。续商第二位得数。下法之上亦置上商，为隅。以上商数乘廉、隅，命上商，除实，讫。……①

求第一位得数时作上商、实、方、廉、下法五行布算，求第二位得数时作上商、实、方、廉、隅、下法六行布算。而在下法之上布置隅之后，下法不再投入运算，实际上仍为五行布算。显然，这种方法是《孙子算经》的开方法的直接发展。在《孙子算经》的开平方术中，商得第二位得数之后，置第二位得数“于方法之下，下法之上，名为廉法”。在这里，在“下法之上亦置上商”，只不过《孙子算经》称之为“廉法”，这里称之为“隅”。在贾宪的立成释锁平方法中，下法之上所置之上商，亦称为“隅”。

二　贾宪三角

那么，立成释锁法中的“立成”是什么呢？这就是贾宪三角。

贾宪三角，原名“开方作法本源”，又称为“释锁求廉本源”。华罗庚写过一本名为《杨辉三角》② 的小册子，将开方作法本源错误地称为“杨辉三角”，此后的中学数学教科

---

① 明·永乐大典算法，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年。本编凡引《永乐大典算法》，均据此。宜稼堂丛书本《详解九章算法·纂类》在“立方法”前有“贾宪立成释锁”六字。

② 华罗庚，杨辉三角。

书和许多科普读物遂以讹传讹。《永乐大典》所引杨辉《详解九章算法》中注曰："出释锁算书，贾宪用此术。"可见是贾宪最先用到它，应该称为贾宪三角。杨辉所说的"释锁算书"是一部书的名称，还是说一部讨论开方法的数学书，书简有缺，无法确定。无论如何，这部书肯定不是《黄帝九章算经细草》，或许就是《算法敩古集》，亦未可知。

所谓贾宪三角，就是将整次幂二项式 $(a+b)^n$ $(n=0, 1, 2, 3, \cdots)$ 的展开式的系数自上而下摆成的等腰三角形数表，如图18-1-1所示。

左　右
积　隅
本积 1
商除 1　1
平方 1　2　1
立方 1　3　3　1
三乘 1　4　6　4　1
四乘 1　5　10　10　5　1
五乘 1　6　15　20　15　6　1

图 18-1-1　贾宪三角

贾宪三角下面有几句话：

> 左衺乃积数，右衺乃隅算，中藏者皆廉。以廉乘商方，命实而除之。

前三句说明了贾宪三角的结构：最外左右斜线上的数字，分别是二项式 $(a+b)^n$ $(n=0, 1, 2, 3, \cdots)$ 展开式中 a^n 和 b^n 的系数，中间的数 2，3、3，4、6、4，……分别是各廉。后两句说明了各系数在立成释锁法中的作用。2 和 3、3 分别用于开平方和开立方，4、6、4，5、10、10、5，……分别用于开四次方（古代称为三乘方）、五次方（四乘方）。虽然贾宪只给出了立成释锁平方法、立成释锁立方法的程序，但是，贾宪三角的提出说明他已经能开任意高次方，这是一个重大突破。

贾宪三角之后附有造表法，即：

> 增乘方求廉法草曰释锁求廉本源：列所开方数，如前五乘方，列五位，隅算在外。以隅算一，自下增入前位，至首位而止。首位得六，第二位得五，第三位得四，第四位得三，下一位得二。复以隅算如前升增，递低一位求之。
>
> 求第二位
>
> 六旧数　五加十而止　四加六为十　三加三为六　二加一为三
>
> 求第三位
>
> 六　**十五**并旧数　十加十而止　六加四为十　三加一为四。
>
> 求第四位
>
> 六　十五　**二十**并旧数　十加五而止　四加一为五
>
> 求第五位
>
> 六　十五　二十　**十五**并旧　**五**加一为六
>
> 上廉　二廉　三廉　四廉　下廉

其中，楷体为法，是求二项式展开式各廉即贾宪三角各层的普遍方法；小宋体字为草；**粗体字**表示计算的结果。这是以求 $(a+b)^6$（称为五乘方）的展开式各廉即贾宪三角第七层的细草为例说明"增乘方求廉法"的应用。不考虑隅算，则几乘方就列几个1，那么五乘方列五位（隅算一在外），自隅算起自下向上（因将原文竖排改为横排，此处变成自右向左）递加（即增乘），递加到6，为第一位得数。计算第二位得数时，仍自下向上递加，低一位而止，得到15，如此继续下去，到不能递加为止，即：

		⇐递加					隅算
		1	1	1	1	1	1
第一位		**6**	5	4	3	2	1
第二位		6	**15**（止）	10	6	3	1
第三位		6	15	**20**（止）	10	4	1
第四位		6	15	20	**15**（止）	5	1
第五位		6	15	20	15	**6**（止）	1

这样得到

1	6	15	20	15	6	1

就是贾宪三角的第七层。显然，只要记住每次都要“低一位而止”，则求每一位得数的方法都是相同的。同时，只要记住几乘方就在第一行列几个一，则求每一层的方法都是一样的，就是说，用这种求廉法可以求出贾宪三角的任意一层。总之，这种求廉法具有极强的程序化和刻板化。

关于贾宪三角和开方法的关系，学术界还有争论。钱宝琮《增乘开方法的历史发展》说：贾宪立成释锁法所使用的数字表格“很可能就是他提出的指数为正整数的二项式定理系数表——‘开方作法本源’”，是有道理的。有的学者认为贾宪三角是为增乘开方法而提出的，说贾宪先创造增乘开方法，后创造贾宪三角，似不妥。增乘开方法没有使用贾宪三角的系数。元朱世杰将 8 次方的贾宪三角称为“古法七乘方图”，并与“梯法七乘方”（即增乘开方法）图合称为“今古开方会要之图”，表明朱世杰将增乘开方法看成“今法”，而贾宪三角是用于“古法”的，这就是立成释锁法。另外，明代人已经不懂增乘开方法，而使用传统开方法，凡重要的数学著作都要在卷首列出“开方作法本源”，也说明贾宪三角是用于立成释锁法的。

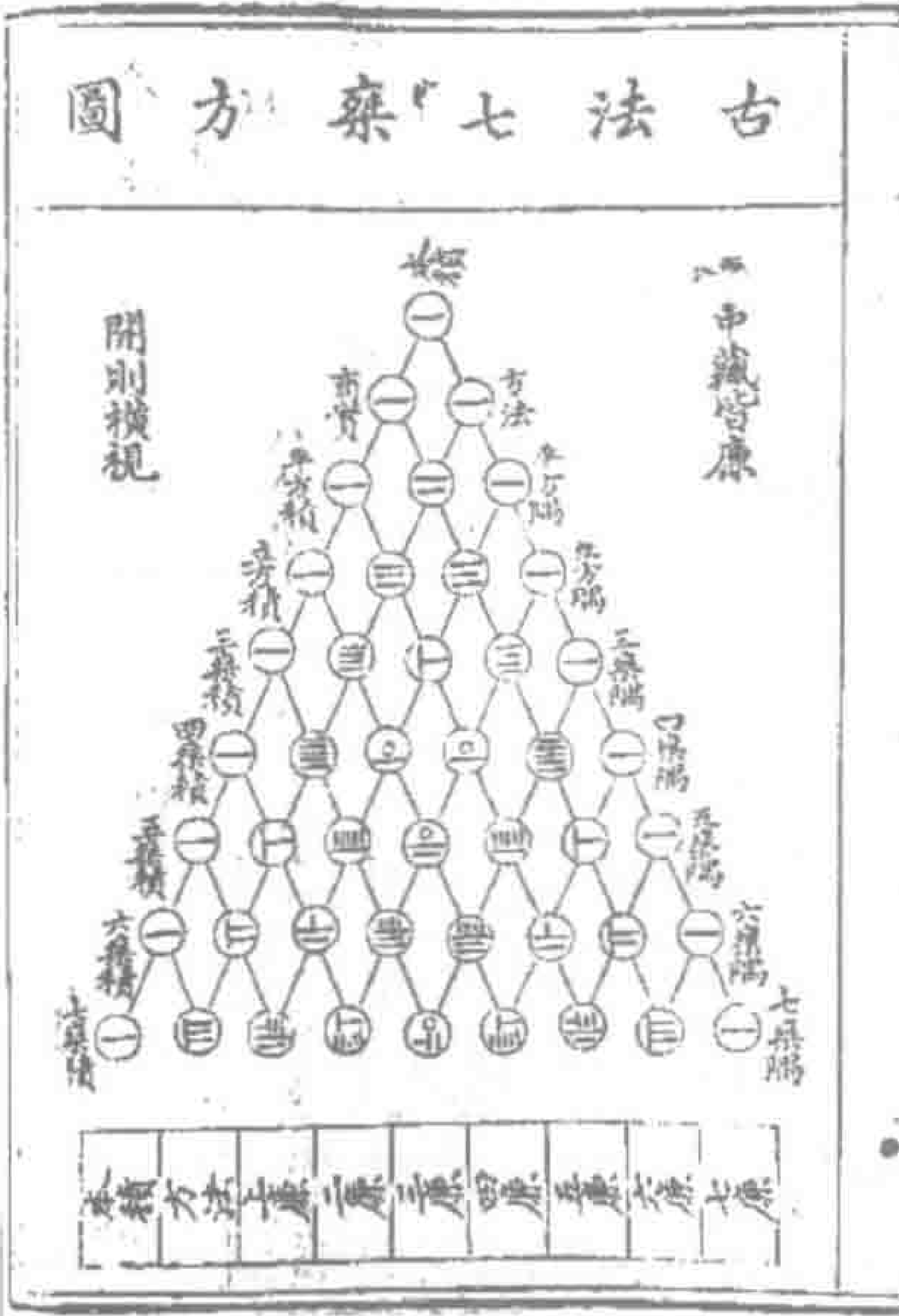


图 18-1-2　古法七乘方图（《四元玉鉴》卷首）

后来朱世杰将贾宪三角扩展到 9 层，并用两组平行的斜线将各廉联结起来，如图 18-1-2 所示，可见它还成为朱世杰解决高阶等差级数求和问题的工具。这在后面还要讲到。15 世纪阿拉伯数学家阿尔 · 卡西，16、17 世纪欧洲许多数学家都得到同样的三角形。西方称为帕斯卡（B. Pascal，1623 ~ 1662）三角。

三　增乘开方法

创造增乘开方法是宋元时期开方术的重大进展。

贾宪将求贾宪三角各廉的增乘方法推广到开方术中，创造了增乘开方法，增乘开方法是递增开某乘方法的省称。《宜稼堂丛书》本杨辉《详解九章算法 · 纂类》载贾宪的“增乘开平方

法”和“增乘方法”（即开立方法），《永乐大典》载贾宪的增乘开平方法及其图，和递增三乘开方法。增乘开方法在朱世杰《四元玉鉴》中又称为“梯法开方法”。今以贾宪的递增三乘开方法为例说明增乘开方法。贾宪给出的题目和方法是：

积一百三十三万六千三百三十六尺。问：为三乘方几何？

递增三乘开方法草曰：上商得数，下法增为立方，除实，即原乘意。置积为实。别置一算，名曰下法。于实末常超三位，约实。一乘超一位，三乘超三位。万下定实。上商得数，三十。乘下法，生下廉。三十。乘下廉，生上廉。九百。乘上廉，生立方。二万七千。命上商，除实。余五十二万六千三百三十六。作法商第二位得数。以上商乘下法，入下廉；共六十。乘下廉，入上廉；共二千七百。乘上廉，入方，共一十万八千。又乘下法入下廉，共九十。乘下廉，入上廉。共五千四百。又乘下法，入下廉。共一百二十。方一、上廉二、下廉三、下法四退。方一十万八千，上廉五千四百，下廉一百二十，下法定一。又于上商之次续商置得数。第二位四。以乘下法，入廉。一百二十四。乘下廉，入上廉。共五千八百九十六。乘上廉，并为立方。一十三万一千五百八十四。命上商，除实，尽，得三乘方一面之数。如三位立方，依第二位取用。

这是求 $x^4=1336336$ 的正根。根据其法草，布算如下：

商							
实	1	3	3	6	3	3	6
方							
上廉							
下廉							
下法							1

商							
实	1	3	3	6	3	3	6
方							
上廉							
下廉							
下法			1				

商						3	
实		5	2	6	3	3	6
方		2	7				
上廉			9				
下廉			3				
下法			1				

商						3	
实		5	2	6	3	3	6
方	1	0	8				
上廉		5	4				
下廉		1	2				
下法			1				

商						3	
实		5	2	6	3	3	6
方		1	0	8			
下廉				5	4		
上廉					1	2	
下法							1

商						3	4
实							
方		1	3	1	5	8	4
下廉				5	8	9	6
上廉					1	2	4
下法							1

它的关键是在求得根的某一位得数后，如果需要继续开方，便以商的该位得数自下而上递乘递加，每低一位而止，以求减根方程。它与使用贾宪三角的系数方异曲同工，而比后者的程序更加整齐，也更具程序化、机械化，只要做好第一步的布位定位，掌握退位步数，那么对开任何次方都相同，也更容易掌握。目前，中学数学教科书的综合除法与此相似。

贾宪的这个例题是中国古代数学的现存资料中第一个直接开方的三次以上的方程。这也是一项重大突破。我们知道，开平方可以以正方形的面积表示之，开立方可以以正方体的体积表示之，而开四次方则在现实生产生活中难以找到直观的原型。杨辉《详解九章算法》的“解题”说：“三度相乘，其状匾直。”然而，现存《详解九章算法》的内容中没有这个图。增乘开方法把中国开方术的研究推进到一个新的阶段。

四　益积术和减纵术

贾宪的增乘开方法只用于今天之开方，即求二项方程之正根。而且，自祖冲之《缀术》失传之后，到11世纪中叶，人们只能解正系数方程。重新突破这一限制的是北宋数学家刘益。他著《议古根源》，根据杨辉《田亩比类乘除捷法自序》说：

引用带纵开方正负损益之法，前古所未闻也。

杨辉《田亩比类乘除捷法》卷下引用了《议古根源》的22个题目，其第2问是：

直田积八百六十四步。只云阔少长十二步。问：长步几何？

这是求解二次方程

$$x^2 - 12x = 864 \qquad (18\text{-}1\text{-}1)$$

刘益提出了益积开方术和减从开方术（图18-1-3）及其细草。

24步	
减方除积540步²	6步 廉180步²
廉180步²	隅36步²

（左侧：长30步；6步）

图 18-1-3　减从开方术

益积开方术曰：置积为实，以不及十二步为负从。① 开平方除之，得长。

术文后的“草”其大意是，第二行布置积864，第四行布置长阔差12，第五行布置隅1。于第一行布置商30，以商30乘隅得30，布置于第三行，作为方法。以商30乘负从12，得360，添到积上，积为1224；又从积中减去商30乘方法30之积900，余积324。以2乘方法，得60，改名廉法，一退；负从一退；隅二退。又于实上商置6。以6乘隅，得6，置于廉的下面，名隅。以上商6乘负从12，得72，添到余积上，得396。以上商6乘廉法得360、乘隅法得36，以减余积，适尽。故得长为36。

用现代符号，设根的第一位得数30，求第二位得数x_1，则$x_1 = x - 30$，带入原方程，便得$(x_1 + 30)^2 - 12(x_1 + 30) = 864$。于是$x_1^2 - 12x_1 = 864 + (12 \times 30) - 30^2 = 324$

这种方法每商得一位得数，都要以商乘负从，添到积上，故曰“益积开方术”。

减从开方术曰：置积为实，以不及十二步为从，减方法，开平方除之。

术文后的“草”其大意是，按五行布算：商、积、方法、负从、隅算。布置上商30。以上商30乘隅算，得30，置于实之下，称为方法。以负从12减方法30，余18。以上商30乘18，得540，减实864，得余积324。再以上商30乘隅，得30，并入方法18，得48，退一位，为廉法。隅算退二位。又置上商6，乘隅算，得6。并入廉法，得54。以上商6乘廉法，得324，减实，适尽。于是长为36。

用现代符号，根的第一位得数30，求第二位得数x_1，则得$(x_1 + 30)^2 - 12(x_1 + 30) = 864$。即$x_1^2 + (2 \times 30 - 12)x_1 = 864 - 30 \times (30 - 12)$，于是$x_1^2 + 48x_1 = 324$

这种方法需要以负从减方法，故曰“减从开方术”。

刘益的重大贡献在于，在祖冲之《缀术》失传之后，他首次涉及开方式中有负数的问

① “负从”原文误作“负隅”，依严敦杰校正（严敦杰，中学数学课程中的中算史材料，人民教育出版社，1985年。）今按：术后之细草作“负从”。钱宝琮校作“负方”。

题。除了上述形如 $x^2-bx=A$ 的带“负从”的方程外，刘益还用益积术和减从术解决了形如 $-ax^2+bx=A$ 的方程，其中，a，b，A 皆为正数。系数 $-a$ 称为“益隅”。

从上面的细草可以看出，益积术要用到贾宪三角的系数2，不是增乘开方法。而减从术不再用系数2，与增乘开方法十分接近。

据杨辉《田亩比类乘除捷法》卷下，刘益书中还有一个带负系数的4次方程：

> 圆田一段，直径十三步。今从边截积三十二步，问：所截弦、矢各几步？
>
> 术曰：倍积，自乘，为实。四因积步，为上廉。四因径步，为下廉。五为负隅，开三乘方除之，得矢。……

设矢为 x，这是求解四次方程

$$-5x^4+52x^3+128x^2=4096$$

“草”中用增乘开方法求解了这一方程。不过根据杨辉所说的“今姑摘数问，详注图、草，以明后学。其余自可引而伸之，触类而长，不待尽述也”，这些“草”似不是刘益《议古根源》的原文，而是杨辉所补。因此，刘益对增乘开方法的了解程度，还是无法断定。

五　正负开方术

刘益之后100多年间的数学著作基本失传，开方术的发展状况不清楚。自1247年起到1303年半个多世纪，开方法是秦九韶、李冶、杨辉、朱世杰等的著作的重要内容。这些内容表明，以增乘开方法为主导的求高次方程正根的方法，已经发展到十分完备的境地。

（一）秦九韶的正负开方术及某些方程的造术

1. 秦九韶的正负开方术

《数书九章》的81个问题中，有21个问题共32个开方式。其中，二次方程（含二项方程）26个，三次方程1个，四次方程4个，十次方程1个，都是用增乘开方法求其正根。而且，除2个开平方的问题外，都列出筹算细草，因此，我们对秦九韶的开方法了解比较清楚。今以田域类“尖田求积”问（图18-1-4）为例说明之。



图18-1-4　尖田求积

> 问：有两尖田一段，其尖长不等。两大斜三十九步，两小斜二十五步，中广三十步。欲知其积几何。
>
> 术曰：以少广求之，翻法入之。置半广，自乘为半幂，与小斜幂相减、相乘为小率。以半幂与大斜幂相减、相乘为大率。以二率相减，余自乘，为实。并二率，倍之，为从上廉。以一为益隅。开翻法三乘方，得积。

设中广为 $2a$，大斜为 c_1，小斜为 c_2，则 $a^2(c_2^2-a^2)$ 为小率，$a^2(c_1^2-a^2)$ 为大率，秦九韶列出以尖田面积 x 为根的四次方程

$$-x^4+2[a^2(c_2^2-a^2)+a^2(c_1^2-a^2)]x^2-[a^2(c_1^2-a^2)-a^2(c_2^2-a^2)]=0$$

钱宝琮认为是通过根式的有理化得出的。将中广、大斜、小斜的数值代入，便列出开方式为

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0$$

秦九韶给出了“正负开三秦九韶乘方图”，即筹式细草。原草有 21 个筹式，我们归纳为 8 个，并将筹式数字改为阿拉伯数字，其序号①，②，……亦为笔者所加。

正负开三乘方图

术曰：商常为正，实常为负，从常为正，益常为负。

	①		②
商		商	
实	−40642560000	实	−40642560000
虚方	0	虚方	0
从上廉	763200	从上廉	763200
虚下廉	0	虚下廉	0
益隅	−1	益隅	−1

①

②上廉超一位，益隅超三位，商数进一位。上廉再超一位，益隅再超三位，商数再进一位。

	③		④
商	800	商	800
实	38205440000	实	38205440000
方	98560000	方	−826880000
上廉	123200	上廉	−1156800
下廉	−800	下廉	−1600
益隅	−1	益隅	−1

③上商八百为定。以商生隅，入益下廉。以商生下廉，消从上廉；以商生上廉，入方。以商生方，得正积。乃与实相消。以负实消正积，其积乃有余，为正实，谓之“换骨”。

④一变：以商生隅，入下廉。以商生下廉，入上廉内，相消。以正负上廉相消。以商生上廉，入方内，相消。以正负方相消。

	⑤		⑥
商	800	商	800
实	38205440000	实	38205440000
方	−826880000	方	−826880000
上廉	−3076800	上廉	−3076800
下廉	−2400	下廉	−3200
益隅	−1	益隅	−1

⑤二变：以商生隅，入下廉。以商生下廉，入上廉。

⑥三变：以商生隅，入下廉。

商	800	商	840
实	38205440000	实	00000000000
方	−826880000	方	−955136000
上廉	−3076800	上廉	−3206400
下廉	−3200	下廉	−3240
益隅	−1	益隅	−1

⑦四变：方一退，上廉二退，下廉三退，隅四退。商续置。

⑧以方约实，续商置四十，生隅，入下廉内。以商生下廉，入上廉内。以商生上廉，入方内。以续商四十命方法，除实，适尽。所得商数八百四十步为田积。

已上系开三乘方翻法图。后篇效此。

秦九韶说“后篇效此”，说明这是一个普遍方法。显然，它的基本程序和方法是增乘开方法，或者说是以增乘开方法为主导的。

秦九韶的正负开方术有几个问题值得注意。

第一，秦九韶规定“实常为负”。由于以 −1 乘整个开方式，不改变其解，因此这种规定不影响方法的一般性，但是，可以将随乘随加的运算进行到底，不像贾宪原来的增乘开方法那样，前面都是随乘随加，最后与实相消是用减法。

第二，秦九韶提出“以方约实”的估根方法。根据现有资料，这在中国数学史上是第一次。

第三，开方过程中，一般说来，其常数项的绝对值越来越小，甚或变成 0。但是，有时会出现两种特殊情形：

一是在开方过程中常数项由负变正，秦九韶称为“换骨”或“翻法”。在“尖田求积”问中求出根的第一位得数之后，常数项就由 −40642560000 变成 38205440000。这整个的开方过程秦九韶又称为“开翻法三乘方”。术语“翻法”亦见之于杨辉的《田亩比类乘除捷法》所引刘益《议古根源》以及李冶的《测圆海镜》。大约是刘益最先使用的。

二是在开方过程中，常数项的符号不变，仍然为负，但是有时其绝对值变得更大。秦九韶称之为“投胎”。例如，《数书九章·测望类》“古池推元”问：

问：有方中圆古池，堙圮止余一角。从外方隅斜至内圆边七尺六寸。欲就古迹修之，欲求圆、方方、斜各几何。

术曰：以少广求之，投胎术入之。斜自乘，倍之为实。倍斜为益方。以半为从隅。开投胎平方，得径。

依题意列出的方程是

$$0.5x^2 - 152x - 11552 = 0$$

求出根的第一位得数 300 之后，其减根方程为

$$0.5x_1^{\ 2} + 148x_1 - 12152 = 0$$

−12152 的绝对值比 −11552 大。

钱宝琮《增乘开方法的历史发展》指出：

“投胎”、“换骨”本来是神仙家的术语。秦九韶指出在某些条件下，减根后的

> 方程必须“投胎”；在某些条件下，减根后的方程必须“换骨”，然后求出所求的根数，目的在指导开方的人放心开下去，不要因为“实”数有不寻常的转变而缩手缩脚，不敢继续开方。

钱宝琮的话是有道理的。

第四，关于无理根的近似值，秦九韶的表示法有几种。一种是：若求得开方式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

（$a_n < 0$）的正根的整数部分 a 之后，其减根方程为

$$a_0{x_1}^n + a_1'{x_1}^{n-1} + a_2'{x_1}^{n-2} + \cdots + a'_{n-1}x_1 + a_n' = 0$$

则秦九韶用$\dfrac{-a'_n}{a_0 + a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_{n-1}}$表示 x_1 的近似值，因此

$$x \approx a + \frac{-a'_n}{a_0 + a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_{n-1}}$$

例如，上面提到的“古池推元”问的开方式开方不尽，在求得根的整数部分 366 之后，减根方程为

$$0.5{x_1}^2 + 214x_1 - 206 = 0$$

因此 $x \approx 366 + \dfrac{206}{0.5 + 214} = 366\dfrac{412}{429}$。

另一种是继承刘徽的开方不尽求“微数”的思想，继续开方，以十进小数表示无理根的近似值。钱谷类“囤积量容”问求方斛口方的方程是 $16x^2 + 192x - 1863.2 = 0$。求出根的整数部分 6 之后，继续开方，求得 $x \approx 6.35$ 寸。这是在刘徽、祖冲之之后首次继续开方“求微数”，使用十进小数表示无理根的近似值。

第五，秦九韶对一些特殊的方程赋予特别的名称。例如，将没有未知数的奇次幂的方程，称为“开玲珑某乘方”，对上述“尖田求积”所得出的四次方程，秦九韶就称为“开玲珑翻法三乘方”。而对形如 $a_0x^2 - a_2 = 0$ 的开方式，它相当于 $x^2 = \dfrac{a_2}{a_0}$。秦九韶称之为“开连枝平方”。秦九韶继承了《九章算术》的作法。若 $a_0 = \alpha^2$，$a_2 = \beta^2$，秦九韶称之为“开同体连枝平方”。原开方式可以化为 $\alpha^2x^2 - \beta^2 = 0$，开方得 $\alpha x = \beta$，$x = \dfrac{\beta}{\alpha}$。例如，测望类“临台测水”问，列出开方式 $24649x^2 - 41912676 = 0$。“开同体连枝平方”，得 $157x = 6474$。于是 $x = 41\dfrac{37}{157}$。

钱宝琮《增乘开方法的历史发展》详细分析了这种方法。当隅 a_0 不是完全平方数，即一般的连枝平方式，秦九韶以隅 a_0 遍乘开方式，化成同体格 ${a_0}^2x^2 - a_0a_2 = 0$，然后开同体连枝平方。田域类“漂田推积”问，列出开方式 $121x^2 - 43264 = 0$，本来就是同体连枝平方式。秦九韶却认为“开方不尽”，以 121 乘开方式，变成 $121^2x^2 - 43264 \times 121 = 0$，再用开同体连枝平方术，求出 $121x = 2288$。于是 $x = 18\dfrac{10}{11}$。

第六，建立开方式时遇到系数是无理数时，进行了有理化处理。例如，上述的“尖田求积”问，已知两大斜 c_1，两小斜 c_2，中广 $2a$，求其面积 A。设 A_1，A_2 分别是由两大斜、两小斜和中广形成的等腰三角形的面积，则 $A_1 = a\sqrt{{c_1}^2 - a^2}$，$A_2 = a\sqrt{{c_2}^2 - a^2}$，并且一般说

来是无理数。而 $A=A_1+A_2$。要求得以 A 为未知数的有理方程，必须将其平方，得

$$A^2=(A_1+A_2)^2=A_1{}^2+2A_1A_2+A_2{}^2$$

由于 $2A_1A_2$ 还是无理数，故 $A^2-(A_1{}^2+A_2{}^2)=2A_1A_2$。将两端平方，最终得到有理方程：

$$-A^4+2(A_1{}^2+A_2{}^2)A^2-(A_1{}^2-A_2{}^2)^2=0$$

2. 三斜求积

秦九韶《数书九章》卷五“三斜求积”问是一个已知三角形的三边求其面积的问题，给出了与海伦公式等价的公式。此问是：

问：沙田一段有三斜：其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里。里法三百步。欲知为田几何。

术曰：以少广求之。以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余半之，自乘于上。以小斜幂乘大斜幂，减上。余，四约之，为实。一为从隅，开平方，得积。

设三角形的三边分别为 a，b，c，则其面积 S 由开方式

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]} \tag{18-1-2}$$

求出。通过因式分解，公式（18-1-2）可以化成：

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\times\frac{a+b-c}{2}\times\frac{a-b+c}{2}\times\frac{b+c-a}{2}}$$

与古希腊的海伦公式暗合。公式（18-1-2）是怎么得出的，秦九韶没有说明，钱宝琮《秦九韶〈数书九章〉研究》认为是先由三角形的底与高，求出其面积，再通过有理化方法推导出来的。

3. 十次方程造术

秦九韶《数书九章》卷八“遥度圆城”［图 18-1-5（a）］问给出了 10 次方程，这个问题是：

问：有圆城不知周径，四门中开。北外三里有乔木，出南门便折东行九里，乃见木。欲知城周径各几何。圆用古法。

术曰：以勾股差率求之。一为从隅。五因北外里，为从七廉。置北里幂，八因，为从五廉。以北里幂为正率，以东行幂为负率；二率差，四因，乘北里为益从三廉。倍负率，乘五廉，为益上廉。以北里乘上廉，为实。开玲珑九乘方，得数。自乘，为径。以三因径，得周。

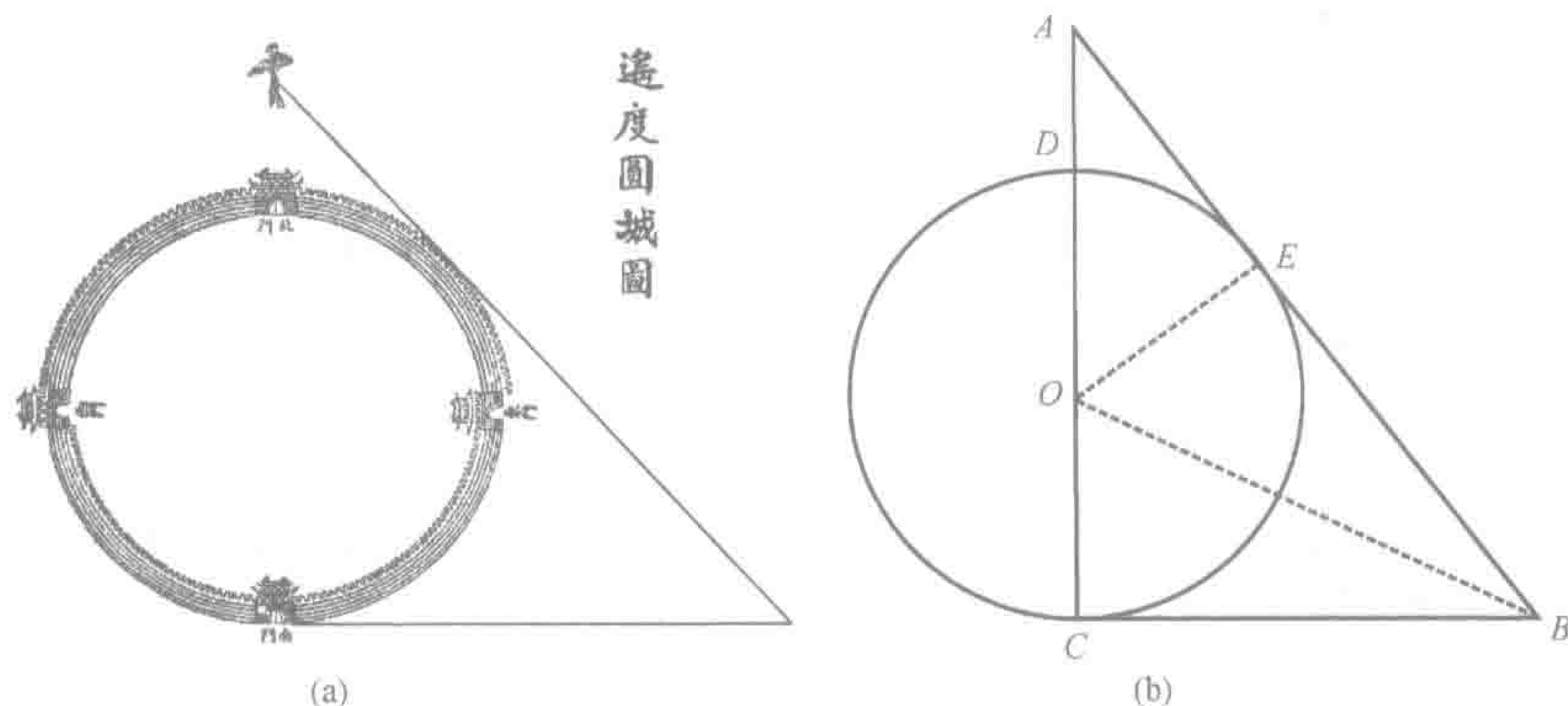


图 18-1-5　遥度圆城

如图 18-1-5（b）所示，设圆城之心为 O，南门为 C，北门为 D，北外之木为 A，东行见木处为 B，AB 与圆城切于 E。已知 AD，BC，分别记为 k，l。求城径，记为 x^2，则术文给出 10 次方程：

$$x^{10}+5kx^8+8k^2x^6-4(l^2-k^2)kx^4-16l^2k^2x^2-16l^2k^3=0 \tag{18-1-3}$$

这是《数书九章》中次数最高的方程。同类的问题，同时代的李冶《测圆海镜》卷四用三次方程求解。因此，自清中叶四库馆臣起，或指责秦九韶"未得其要"①，或作为周密指责秦九韶"性喜奢好大"的例证，而对秦九韶怎样列出这个方程则莫名其妙。

实际上，秦九韶在术文开首讲的"以勾股差率求之"给出了解开这个 10 次方程造术之谜的钥匙。② 什么是勾股差率呢？我们知道，《九章算术》勾股章在解决户高多于户广问时使用了已知弦与勾股差求勾、股的公式（5-3-7），赵爽、刘徽将其简化为公式（9-1-9）。如果在公式（9-1-9）中令 $c:(b-a)=p:q$，则它就变成

$$\begin{aligned} a&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2p^2-q^2}-q\right)\\ b&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2p^2-q^2}+q\right)\\ c&=p \end{aligned} \tag{18-1-4a}$$

或

$$a:b:c=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2p^2-q^2}-q\right):\frac{1}{2}\left(\sqrt{2p^2-q^2}+q\right):p \tag{18-1-4b}$$

这就是关于勾股差率的公式。如同公式（5-3-10）、公式（5-3-11）是对应于已知勾与股弦和的公式（5-3-6）的勾股数组的通解公式，公式（18-1-4a）、（18-1-4b）是对应于已知弦与勾股差求勾、股的公式（9-1-9）的通解公式③，两者是等价的。（18-1-3）的推导如下：

由勾股形 ABC 的面积，可以求出弦 $AB=\dfrac{l(x^2+2k)}{x^2}$，勾股差 $AC-BC=x^2+k-l$。因此弦率与勾股差率分别为 $p=l(x^2+2k)$，$q=x^2(x^2+k-l)$。将其代入公式（18-1-4a），得

$$\begin{aligned} b&=\frac{1}{2}\sqrt{2[l(x^2+2k)]^2-[x^2(x^2+k-l)]^2}+\frac{1}{2}x^2(x^2+k-l)\\ c&=l(x^2+2k) \end{aligned}$$

而 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$，于是

$$\frac{x^2+k}{\dfrac{l(x^2+2k)}{x^2}}=\frac{\dfrac{1}{2}\sqrt{2[l(x^2+2k)]^2-[x^2(x^2+k-l)]^2}+\dfrac{1}{2}x^2(x^2+k-l)}{l(x^2+2k)}$$

$$(x^2+2k)^2(x^2+k)(x^6+kx^4-4kl^2)=0 \tag{18-1-5}$$

---

① 清 · 四库馆臣，《数学九章》按语，见：秦九韶，数学九章，四库全书本，台湾商务印书馆影印文渊阁本，1986 年，第 797 册。

② 郭书春，学习《数书九章》札记二则，见：中国科学院自然科学史研究所数学史组，科技史文集，第 8 辑（数学史专辑），上海科学技术出版社，1982 年，第 123～127 页。

③ 郭书春，《九章算术》中的整数勾股形研究，见：自然科学史研究所数学史组，科技史文集，第 8 辑（数学史专辑），上海科学技术出版社，1982 年，第 54～66 页。

消去 x^2+k，使剩下的两个多项式相乘，便得到10次方程（18-1-3）。

由公式（18-1-5）可以看出，秦九韶本来亦可以导出3次方程。而现实生产生活中很难找到4次以上的方程的原型，他为了说明能够解任意高次的方程，便刻意提高方程的次数。首先假设圆城径为 x^2，而不是 x，这就将方程由3次提高到6次。其次，不消去因式 $(x^2+2k)^2$，又将方程由6次提高到10次。显然，为了提高方程的次数，秦九韶用心良苦，根本不是"喜奢好大"，更不是"未得其要"。

（二）李冶对开方术的贡献

大约与南方的秦九韶同时，北方的李冶也对开方术有贡献。他的《测圆海镜》、《益古演段》完整地流传到今天，然而其中没有开方细草。不过，数学史界都认为，李冶使用了增乘开方法。像秦九韶一样，李冶也处理了开方中的一些特殊问题。

1. 翻法

李冶没有像秦九韶那样规定"实常为负"，他的开方式，常数项既可为正，亦可为负。当然，在开方过程中有时也会出现常数项由正变负，或由负变正的情形。前已指出，这种情形秦九韶称为"换骨"，又称为"翻法"。李冶也称为"翻法"，有时称为"倒积"。例如，在《测圆海镜》卷四第5问，卷五第10问、第13问，卷六第9问等问的"草"中，常数项都变号，因此都明确注明"翻法在记"。清李锐在卷四第5问"翻法在记"下案："据此知开方除法当别有一书，今无考。"钱宝琮《增乘开方法的历史发展》认为："我们以为李冶的自注说明他另有开方演算的笔记稿本，从这一题的详草中可看出开方时用着'翻积法'，并不是'别有一书'。"

李冶的"翻法"不一定全是常数项变号，也包含一次项系数变号的情形。卷七第4问的开方式

$$-x^2+60x+7200=0$$

卷十一第17问的开方式

$$-4x^4-600x^3-22500x^2+11681280x+788486400=0$$

求出根的第一位得数100之后，常数项都不变号，而一次项系数由正变负，李冶都称之为"翻法"开方。

还有的方程在开方过程中既有常数项变号，也有一次项变号。例如，《益古演段》卷中第24问的开方式

$$-1.75x^2+108x-1449=0$$

在开得根的第一位得数4之后，得到减根方程

$$-1.75x^2-32x+71=0$$

常数项和一次项的符号都发生了变化，李冶称为"倒积倒从开平方"。

2. 益积开方

李冶也使用益积开方。《测圆海镜》卷七第1问的三条"草"都用"益积开平方"，第2问二条"法"及其"草"都用"益积开三乘方"，卷九下第4问的"草"用"益积开立方"。这些开方过程中的常数项都有一度增加的情形。秦九韶称之为"投胎"。

3. 连枝同体术

有时遇到无法开方的情形，李冶进行巧妙的变换后再开方。例如，《益古演段》卷中第

40 问，为求内池径，先利用天元术列出开方式：

$$-22.5x^2-648x+23002=0$$

李冶说：

合以平方开之。今不可开，先以隅法二十二步半乘实二万三千单二步，得五十一万七千五百四十五步正为实；元从六百四十八负依旧为从；一益隅；平方开之，得四百六十五步。以元隅二十二步半约之，得二十步三分之二，为内池径也。

这是说，原开方式无法开出准确的根，他相当于进行了变换 $y=22.5x$，原开方式变成

$$-y^2-648y+517545=0$$

求得 $y=465$。于是

$$x=\frac{y}{22.5}=\frac{465}{22.5}=20\frac{2}{3}$$

李冶说，此“乃连枝同体术也”。显然，李冶的连枝同体术与秦九韶的同体连枝术都进行 $y=kx$ 的变换，是相同的。然而秦九韶是应用于首项系数是完全平方数的情形，而李冶则不然。

（三）朱世杰对开方术的贡献

朱世杰的《算学启蒙》卷下“开方释锁”门的 34 个问题都需要用一元方程求解，而《四元玉鉴》因其二元术、三元术、四元术最后都消元成一元方程，因此它的 288 个问题全部都要用一元一次至十三次方程求解。《四元玉鉴》卷首列出梯法七乘方图和古法七乘方图，可见朱世杰既使用立成释锁法，又使用增乘开方法。《四元玉鉴》没有开方细草，而《算学启蒙》的“开方释锁”门的第 1、2 问给出了开方细草，确实说明他使用了两者。第 1 问求出第一位得数 6 之后，为求第二位得数，说“倍方法”，以求减根方程，显然是利用贾宪三角第三行的系数的传统开方法，而不是增乘开方法。第 2 问是求 $x^3=17576$ 的根。在求出第一位得数 20 之后，实余 9576。朱世杰说：

以隅法因上商二十，加入廉法。又廉法因上商二十，加入方法。又隅法因上商二十，加入廉法。方法得一万二千，廉法得六千。方法一退，廉法再退，隅法三退。续又上商六尺。以隅法因上商六尺，加入廉法。又廉法因上商六尺，加入方法，得一千九百五十六。乃命上商，除实，恰尽。合问。

显然是增乘开方法。

朱世杰也处理了开方过程中的一些特殊情形，使用了某些特殊的技巧。

1. 翻法

《算学启蒙》“开方释锁”门有第 13，15，20，21，22，27，29 等凡 7 个问题，其术文都说要“翻法”开方，可是其中一个开方式减根后的开方式各项都不变号，另 6 个问题是一次项或二次项系数变号，而常数项都不变号，没有一个是属于秦九韶的“换骨”类型的。《四元玉鉴》“端匹互隐”门第 1 问，“和分索隐”门第 8 问，“两仪合辙”门第 11 问等开方过程中都需要“倒积”，但是朱世杰都没有明确指出。

2. 连枝同体术

朱世杰在《四元玉鉴》的“端匹互隐”门的第 1 问，“和分索隐”门的全部 13 个问题，“三率究圆”门的第 2、4 问，“拨换截田”门的第 3 问，“锁套吞容”门的第 18 问和“杂范

类会”门的第3问等19个题目中使用“连枝同体术”。连枝同体术又称为“之分法”。它与李冶的“连枝同体术”有些类似。但也不完全相同。一般说来，朱世杰在求出根的整数部分之后才使用连枝同体术，与李冶求第一位得数时就使用此法是不同的。我们以《四元玉鉴》卷上“和分索隐”门第13问为例说明之。此问是：

今有直积，自乘，减和幂，余一万一千七百五十一步一百四十四分步之八十三。只云：较不及平四步一十二分步之七。问：长、平各几何？

术曰：立天元一为平，如积求之。得一百六十九万五千二百五十二为益实，三千九百六十为从方，一千七百二十九为从上廉，二千六百四十为益下廉，五百七十六为从隅，三乘方开之，得平。不尽，按之分法求之。再得一百四万二千八十四亿五千二百八十一万二千八百为益实，二千三百三十七亿三十六万一百九十二为从方，九千一百九十万二千五百二十八为从上廉，一万五千七百九十二为从下廉，一为正隅，三乘方开之，得三百八十四，与分母约之，合问。

设长方形的宽（即平）为 a，长为 b，这是已知 $(ab)^2-(a+b)^2=11751\frac{83}{144}$，及 $a-(b-a)=4\frac{7}{12}$，求其宽、长。立天元一 x 为宽，术文给出开方式：

$$576x^4-2640x^3+1729x^2+3960x-1695252=0$$

求得此开方式正根的整数部分8，不尽，其余式为

$$576x_1^{\ 4}+15792x_1^{\ 3}+159553x_1^{\ 2}+704392x_1-545300=0$$

便应用连枝同体术：最高次项系数为576，便以 576^3，576^2，576，1，$\frac{1}{576}$ 分别乘其常数项及1，2，3次和最高次项的系数，使最高次项的系数变成1。这相当于进行变换 $y=576x_1$。开方式变成

$$y^4+15792y^3+91902528y^2+233700360192y-104208452812800=0$$

开方求出 $y=384$。于是 $576x_1=384$，$x_1=\frac{384}{576}$。则原开方式的正根就是

$$x=8\frac{384}{576}=8\frac{2}{3}$$

通过连枝同体术绕过了开方不尽的暗礁，是非常巧妙的。

第二节　天　元　术

天元术是宋元时期发展起来的设未知数列方程的方法。

一　天元术的历史

关于天元术的发展史，留下的资料不可谓少，然而其间的许多情况仍然扑朔迷离，有些资料甚至互不关联。无论如何，它是从演段法发展而来的，在学术界是没有疑义的。

（一）关于天元术发展的资料

关于天元术发展史的一段经典文字是元祖颐的在《四元玉鉴后序》中写的。他说：

平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《钤经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕细草之，后人始知有天元也。

祖颐的描述应该是天元术的史前史。所提到的各位作者的生平均不详，著作均不存。平阳即今山西临汾，博陆即今河北蠡县，鹿泉即今河北获鹿，平水即今山西新绛，绛即今山西曲沃，这些地方都在太行山两侧。元裕与李冶的好友元好问（1190～1257）是不是同一个人，自清中叶以来学术界即有不同看法。元好问，字裕之，秀容（今山西省忻州）人。罗士琳认为元裕即元好问，故将祖颐涉及元裕的这句话改为"元裕之细草"。我们认为元裕不是元裕之。他们不仅一个是晋南，一个是晋北，籍贯不同，而且不考虑罗士琳的误改，则名字各异，更重要的是，元裕之与李冶同为"龙山三老"，活动在天元术成熟的时代，而元裕则是天元术的初创者。前已指出，《益古》即《益古集》，又称《益古算法》，已佚，因成为李冶使用天元术著《益古演段》的母本而部分保存在李冶该书中。《钤经》亦已佚，个别题目保存在李冶的《测圆海镜》中。《照胆》和《如积释锁》及其细草则没有留下任何只言片语。奇怪的是，祖颐在这里没有提到通晓天元术的大数学家李冶。

李冶的《测圆海镜》、《益古演段》不仅是流传至今的以天元术为主要方法的最早的数学著作，而且他的《敬斋古今黈》卷一还记述了天元术早期发展的某些宝贵资料。他说：

予至东平，得一算经，大概多明如积之术。以十九字志其上下层数。曰：仙、明、霄、汉、垒、层、高、上、天、人、地、下、低、减、落、逝、泉、暗、鬼。此盖以人为太极，而以天、地各自为元而陟降之。其说虽若肤浅，而其理颇为易晓。予遍观诸家如积图式，皆以天元在上，乘则升之，除则降之。独太原彭泽彦材法，立天元在下。凡今之印本《复轨》等书，俱下置天元者，悉踵习彦材法耳。彦材在数学中亦入域之贤也。而立法与古相反者，其意以为天本在上，动则不可复上。而必置于下，动则徐上，亦犹易卦乾在下，坤在上，二气相交而为太也。故以乘则降之，除则升之。求地元则反是。

如果说祖颐的文字给出了天元术发展史前各种著作及其作者的嬗递脉络的话，那么李冶的这段文字则大体描述了天元术在其发展初期的表示方法的演变概况。

从李冶的话可以看出，天元术是在道家或道教思想的影响下产生与发展的。天元术最早不是以一个字"元"表示未知数的，而是自上而下以仙、明、霄、汉等 9 个符号来表示未知数的正幂，以逝、泉、暗、鬼等 9 个符号来表示未知数的负幂。盖建民《道教科学思想发凡》认为这明显受到道教的影响，带有浓厚的道教色彩。有学者认为，这种表达方式暗示着道教数学在本质上的宇宙图式功能，是道教对宇宙结构的数学表达。[①] 由于整个中国传统数学没有产生高达十七八次的多项式，也没有这么高的次数的方程，这种看法有一定的道理。

后来人们简化天元术的表示，只用一个符号"天元"并借助于位值制表示未知数的正幂，用"地元"表示未知数的负幂。并且皆采取天元在上，地元在下的方式。

彭泽彦材也是对天元术有突出贡献的当时知名的数学家，他受《周易》八卦"乾在下，坤在上，二气相交而为太"[②] 思想的影响，颠倒天元和地元的位置，将正幂置于下，将负幂

---

① 郭书春，李冶的数学造诣与道家思想，（待发）这是汲取姜生教授的意见。

② 周 · 周易，见：[清] 阮元校，《十三经注疏》，中华书局影印，1980 年，第 46 页。

置于上。《周易》是道家思想的主要源泉之一。已经失传的《复轨》等著作采取彦材法。

再后来，人们取消了表示未知数的负幂的地元，只用“天元”，借助于位值制既可表示未知数的正幂，又可表示未知数的负幂，还可以表示常数项。开始仍采取正幂在上，负幂在下，沙克什的《河防通议》就是采用这种方式，应该源于13世纪初之前的金都水监本。这就是李冶在《测圆海镜》中所使用者。不久，人们又将其颠倒过来，采取正幂在下，负幂在上的方式，这就是李冶的《益古演段》、王恂和郭守敬的《授时历草》、朱世杰的《算学启蒙》和《四元玉鉴》等所采用者，应该是天元式的标准表示方式。

这里有几个问题值得注意。

首先，李冶本人和他谈到的洞渊，东平算经，彭泽彦材法，《复轨》等人或著作，在祖颐的文字中没有任何踪影。祖颐提到的《益古》、《钤经》，李冶在《益古演段》、《测圆海镜》中分别有引用。

其次，祖颐说元裕给刘如谐的《如积释锁》撰细草，“后人始知有天元”。换言之，在元裕之前的《益古》、《照胆》、《钤经》、《如积释锁》等著作中没有天元术。这涉及如何解读《测圆海镜》中关于《钤经》等著作的文字问题。

最后，李冶在天元术发展、完善过程中起了什么作用。李冶说，在人们还用“天元”、“地元”分别表示一个多项式的正幂和负幂时，彭泽彦材就将正幂在上，负幂在下颠倒成正幂在下，负幂在上。可是，李冶在《测圆海镜》中只使用“天元”，却仍然是正幂在上，负幂在下。这说明天元术发展的进程在各位数学家那里不是同步的。那么，是谁取消了“地元”？梅荣照说：“李冶对天元式表示法的主要贡献是：他在《测圆海镜细草》中取消了用地元表示负数次幂，只用一个天元，并采用正数次幂在上，常数与负数次幂在下的排列顺序。”应该说，由于天元术发展早期的全部著作皆已亡佚，而《测圆海镜》不是关于天元术的专门著作，只是以天元术为主要方法的著作，李冶在《测圆海镜》中首先取消地元，还是一种猜测。准确的说法是：《测圆海镜》是现存最早的只使用天元，不再使用地元表示未知数负幂的数学著作。《河防通议》中记载的天元术应该早于《测圆海镜》。

（二）刘益和蒋周的演段法

列方程的思想可追溯到汉代的《九章算术》。其勾股章“邑方出南北门”问列出了一个二次方程，只是用文字说明了方程的系数。刘徽注用率的理论和出入相补原理两种方法推导这个方程。按照杨辉的说法，演段就是“演算之片段”，片段也称为条段，因为常用一段一段的面积表示，故名。演段实际上是通过面积的运算得到方程的系数，也就是推导方程的几何方法。而面积的运算主要是借助于“出入相补原理”完成的。刘徽建立二次方程的出入相补方法实际上就是演段法。它由以邑方为广，邑方与出南北门为袤的长方形的面积等于以出北门为袤，折而西行为广的长方形面积的2倍推出二次方程，已有“如积相消”的萌芽。唐代王孝通能列出三次方程，但需要高度技巧，尚未掌握列方程的一般方法。北宋的土木工程和水利工程很多，提出了更多的方程。贾宪、刘益等基本上解决了求高次方程正根的问题，如何用一种规范的简便的方法列出方程，成为人们关注的问题。

1. 刘益的演段法

现存资料中最早而且明确提到演段法的是刘益的《议古根源》。

杨辉《田亩比类乘除捷法》中诸问的演段无疑是刘益的。刘益对演段法的运用相当熟

练。刘益认为，片段是推导方程的依据，各种片段都可以转化为直田（长方形），而直田面积公式是最简单的，因此，直田便成为面积问题的归宿。

以第一节所引之《议古根源》第2问的“减从术”的细草为例。其草是：

草曰：以五级资次布置商、积、方法、负从、隅算。置积为实。于实上商置长三十，以乘隅算，置三十于实数之下，名曰方法。以负从十二减三十，余一十八，命上商，除实五百四十，余积三百三十四。复以上商三十乘隅，得三十，并入方法，共四十八，退位为廉。其隅算再退。又于实上商置长六步，乘隅算，得六。并入廉法，共五十四。命上商六步，除实，尽。得长三十六步，合问。

设直田阔为 a，长为 b，那么阔不及长 $b-a=12$ 步，此直田面积是 $b(b-12)$，而已知其面积为864步，两者应该相等：$b(b-12)=864$。以 x 表示长，就得方程（18-1-1）。方程的导出也应用了“如积相消”，不过比《九章算术》那个题目还简单。

其草也体现了演段法，如图18-1-3所示，商得根的第一位得数 $x_1=30$。以负从 $b-a=12$ 减 x_1，即30，余 $x_1-(b-a)=18$。以上商30乘18，得 $[x_1-(b-a)]x_1=540$，减实 $A=864$，得余实 $A-[x_1-(b-a)]x_1=324$。再将上商 x_1 并入 $x_1-(b-a)$，得 $x_1+[x_1-(b-a)]=48$。又商置根的第二位得数 $x_2=6$，那么 $\{x_1+[x_1-(b-a)]+x_2\}x_2=324$，减余实，适尽。于是得到长 $b=36$。

刘益用演段法解决了许多更为复杂的问题，但还不懂得设未知数。

2. 蒋周的演段法

蒋周的《益古集》是祖颐关于天元术发展史中提到的第一部著作。李冶的《益古演段》中的“依条段求之”、“义曰”、“旧术”等部分应该是《益古集》原有的。例如，第三十三题（按《益古演段》顺序，下同）：

今有圆田一段，中心有直池水占之，外计地七千三百步。只云并内池长、阔，少田径五十五步，阔不及长三十五步，问：三事各多少？

依条段求之，四之积步，内减池较幂，却加入少径幂，为实。二之少径为从，二步常法。

义曰：四池，并所减底个较幂，恰是一个和自之。

旧术：下积步，四之，于头位；又以少径步自乘，加头位，内却减阔不及长幂，余折半，为实。用少径为从，一步常法。

设圆田径为 d，面积为 S_1，由《九章算术》的圆面积公式 $S_1=\frac{3}{4}d^2$；又设直池阔 a，长 b，面积为 $S_2=ab$；则由题设，少径 $m=d-(a+b)=55$，$b-a=35$，田积 $S=7300$。显然 $S_1-S_2=S$，或 $\frac{3}{4}d^2-S=ab$，$3d^2-4S=4ab$。另一方面由“义曰”：$4ab+(b-a)^2=(a+b)^2$，或 $4ab=(a+b)^2-(b-a)^2=(d-m)^2-(b-a)^2=d^2-2md+m^2-(b-a)^2$。所以 $3d^2-4S=d^2-2md+m^2-(b-a)^2$，$2d^2+2md=4S+m^2-(b-a)^2$。这正是“依条段求之”的结果。消去系数2，便得到以圆径 d 为未知数的二次方程：

$$d^2+md=\frac{1}{2}[4S+m^2-(b-a)^2]$$

在这里，蒋周通过 $4ab$ 将两个等值多项式联系了起来，与刘益一样，都是从刘徽开始的方法

的进一步发展。

3. 演段法的局限性

随着数学的发展，演段法也暴露出自己的局限性。首先，对于比较复杂的问题，寻求几何解释相当困难；其次，由于建立方程没有固定程序，不是把未知数用统一符号表示出来，再去寻找它和已知量的关系，而是在解题过程中寻找含有所求量的等式，这便增加了思维的复杂性；最后，当时高次方程的开方问题已基本解决，而演段法只用来列出二次方程，三次问题即使可以用体积表示出来，但高于三次的方程很难用面积、体积表示。

随着数学问题的日益复杂，越来越需要一种普遍的建立方程的方法。演段法是平面直线形的变换，未知数实际上是作为一个元素参与其变换。当人们试图用某个固定的术语表示未知数的时候，天元术便产生了。但是，它产生的确切年代难以断定。

(三)《测圆海镜》引用的《钤经》与洞渊的内容

石信道《钤经》与洞渊算书早已亡佚。《测圆海镜》引用了它们的某些片段。关于这些片段内容的界定涉及如何定位石信道、洞渊与天元术的关系。许多学者认为有关题目中的某些“草”分别是《钤经》与洞渊测圆门的，因此《钤经》与洞渊都通晓天元术。我们认为这个问题值得进一步探讨。关于这两部分内容的运算，李俨说之甚详。[①] 在这里，我们只是引出李冶《测圆海镜》的文字，并作简单的分析。

1. 石信道的《钤经》

《测圆海镜》卷七“明叀前”第2问提到石信道《钤经》。此题是：

或问：丙出南门直行一百三十五步而立，甲出东门直行一十六步见之。问荅同前。

法曰：以丙行步一百三十五再自之，得二百四十六万〇三百七十五，于上。又以甲行一十六乘丙行幂一万八千二百二十五，得二十九万一千六百；以乘上位，得七千一百七十四亿四千五百三十五万，为三乘方实。以二行步相乘，又倍之，得四千三百二十；以乘丙行步，再自之，数得一百六亿二千八百八十二万，为益从。第一廉空。以甲行乘丙行幂，得二十九万一千六百；又倍之，得五十八万三千二百于上；四之甲行幂一千〇二十四，以乘丙行步，得一十三万八千二百四十；减上位，余四十四万四千九百六十，为第二廉。二行步相乘，得二千一百六十为虚常法。得丙行步上勾弦差八十一。

草曰：识别：二数相并，得一百五十一。以减于皇极弦，余一百三十八，即虚勾、虚股并也。若以二数相减，余一百一十九，为高弦内减平弦，又为皇极弦内少个小差弦，又为大差弦内减个皇极弦也。立天元一为丙行大差数。置丙行步一百三十五，自乘，得18225，用天元除之，$\begin{array}{l}0\text{太}\\18225\end{array}$，为勾弦并也。上减天元，得$\begin{array}{l}-1\\0\text{太}\\18225\end{array}$，为二丙勾也。复用丙南行乘之，得$\begin{array}{l}-135\\0\text{太}\\2460375\end{array}$，为二积也。又以天元除

① 李俨，测圆海镜研究历程考，《学艺》，第11、12卷（1931～1932）。中算史论丛，第四集，第32～237页，科学出版社，1955年。李俨钱宝琮科学史全集，第八卷，辽宁教育出版社，1998年，第37～222页。

之，得 $\begin{array}{r} 0\text{元} \\ -135 \\ 0 \\ 2460375 \end{array}$ ，为丙勾外容圆半。泛寄。别置丙南行，用二甲勾乘之，得4320太，合用二丙勾除之，不受除，便以此为甲股。内寄二丙勾为分母。复用二甲勾三十二乘之，得43200太，为二个甲直积也。又置丙南行，内减天元，得 $\begin{array}{r} -1\text{元} \\ 135 \end{array}$ ，为黄方。以自乘，得 $\begin{array}{r} 1 \\ -270\text{元} \\ 18225 \end{array}$ ，为丙上勾弦差乘股弦差二段。以天元除之，得 $\begin{array}{r} 1\text{元} \\ -270 \\ 18225 \end{array}$ ，为两个丙小差也。乃用甲股乘之，得下式 $\begin{array}{r} 4320 \\ -1166400\text{太} \\ 68632000 \end{array}$ ，复用丙南行除之，得 $\begin{array}{r} 32\text{元} \\ -8640 \\ 583200 \end{array}$ 。又折半，得下式 $\begin{array}{r} 16\text{元} \\ -4320 \\ 291600 \end{array}$ ，为一个甲步股弦差也。内亦带前二丙勾分母。复置二个甲直积，内已寄此。甲股弦差分母便为甲步股外容圆半。寄左。乃再置先求到泛寄，用甲股弦差分母乘之，得 $\begin{array}{r} -2160\text{元} \\ 583200 \\ 0 \\ -10628820000 \\ 717445350000 \end{array}$ ，为同数。与左相消，得下式 $\begin{array}{r} -2160 \\ 444960 \\ 0 \\ -10628820000 \\ 717445350000 \end{array}$ 。开三乘方，得八十一步，即丙步上勾弦差也。

《钤经》载此法：以勾弦差率幂减丙行差幂，复以丙行乘之，为实。以差率幂为法，如法得径。此法只是以勾外求圆半，合以大差除倍积。而今皆以大差幂为分母也。依法求之，勾弦差八十一。自之，得六千五百六十一。以减于丙行幂一万八千二百二十五，余一万一千六百六十四。复以丙行一百三十五乘之，得一百五十七万四千六百四十，为实。以大差幂六千五百六十一为法，如法，得二百四十步，即城径也。

后面还有“又法”，略。如图17-1-2，这是已知 $b_{11}=135$，$a_{12}=16$，求圆径 d。其法给出了以 $c_{11}-a_{11}$ 为未知数 x 的四次方程：

$$-a_{12}b_{11}x^4+(2a_{12}b_{11}^2-4a_{12}^2b_{11})x^3-2a_{12}b_{11}^4x+a_{12}b_{11}^5=0$$

消去 $a_{12}b_{11}$，便成为

$$-x^4+2(b_{11}-2a_{12})x^3-2b_{11}^3x+b_{11}^4=0$$

其草给出了使用天元术推导方程的细草。

问题在于，如何理解李冶说的“《钤经》载此法”。李冶指出，《钤经》以公式

$$d=\frac{[b_{11}^2-(c_{11}-a_{11})^2]b_{11}}{(c_{11}-a_{11})^2}$$

求圆径。那么，《测圆海镜》该题的“法”的其他部分与“草”中，有没有《钤经》的内容呢？

有的学者“怀疑这整个方法是取自《钤经》的”，就是说，怀疑此问的“法”与“草”都是《钤经》的。其根据一是此“草”开头列出了几条“识别杂记”的命题，接着却立天元一为丙行勾弦差，此及其下面的运算与这几条命题毫不相干。二是在求得丙行勾弦差之后，可以直接代入勾外容圆半公式求圆径，此处没有这样做，却用《钤经》的方法。还认

为，“《钤经》在解决这个问题时，主要是用几何方法。只有当式中 $c_{11}-a_{11}$ 不能用几何方法计算的时候，才应用天元术”。

中国数学史界多同意这种看法，只不过有人将这里的“怀疑”换成肯定的口气。

我们认为这个问题还没有解决。按照祖颐在为朱世杰的《四元玉鉴》所作的《后序》中的说法，元裕给《如积释锁》作细草，是天元术之始。《钤经》在元裕之前，不会有明确的天元术。祖颐的记述应该得到朱世杰的首肯。朱世杰对天元术造诣极深，又是宋元时期水平最高的数学家，他首肯的东西，应该是可信的。换言之，《钤经》中会有方程的造术，但是不会有使用天元术的内容。李冶也没有说该法的“草”是引自《钤经》的。传本《测圆海镜》是清刻本，其中“《钤经》引此法”与“草”接排，是不是遵循原著，不得而知。但是，人们将“此法”理解成上面的“法”与“草”。实际上，在《测圆海镜》中，“法”或者是前人的，或者是李冶的，但“草”肯定是李冶的。“草”是李冶对洞渊九容“日夕玩绎”的结果，正因为有了“草”，才会使“向之病我者”，“爆然落去”。因此，此问中的“草”是李冶的，其前的“法”应该是《钤经》的，或者是《钤经》与洞渊测圆门共有的。

2. 洞渊的测圆问题

《测圆海镜》卷十一第18题引用了洞渊测圆门的片段。许多学者认为，洞渊已能用天元术解决比较复杂的问题了。为了探讨这个问题，我们先看看这个题目：

或问：出北门一十五步，折而东行二百八步有树，出西门八步，折而南行四百九十五步见之。问答同前。

法曰：先置南行步，内减一东二西并步，余二百七十一，为前泛率。次并一南二北，内减东行步，余三百一十七，为中泛率。次并东西步，以南行步乘之，于上位；又以西行乘南北，并得数，减上位，余一十万二千八百四十，为后泛率。乃以后泛率自乘，得一百五亿七千六百六万五千六百，为三乘方实。以前、中二泛相减，余四十六，以乘后泛数，为从。前、中二泛相乘，得八万五千九百〇七，加入二之后泛数，共得二十九万一千五百八十七，于上位；又倍东西并，以乘南北并，得二十二万三百二十，加上位，通得五十一万一千九百七为第一廉。二之南北并，加入二之东西并，得一千四百五十二，于上位；又以前、中二泛相减，余四十六，减上位，余一千四百六，为第二廉。一步常法，得半径。

草曰：立天元一为半城径，加入东行西行并得 $\begin{matrix}1\text{元}\\216\end{matrix}$，为大勾也。又置天元，加入南行北行并，得 $\begin{matrix}1\text{元}\\510\end{matrix}$，为大股也。置西行八步，以大股乘之得下式，$\begin{matrix}8\text{元}\\4080\end{matrix}$。合以大勾除之。不除，寄为母，便以此为股尖也。置南行四百九十五步，减天元，得 $\begin{matrix}-1\text{元}\\495\end{matrix}$。用分母大勾乘之。乘讫，得下式 $\begin{matrix}-1\\279\text{元}\\106920\end{matrix}$。内减了股尖，余 $\begin{matrix}-1\\271\text{元}\\102840\end{matrix}$，为小股也。内带大勾分母。置小股，合以大勾乘了，复以大股除之，为小勾。今为小股内已有大勾为母，更不须乘，只以小股 $\begin{matrix}-1\\271\text{元}\\102840\end{matrix}$ 便为小勾也。内带大股为母。小勾小股相乘，得数为一个小勾股相乘直积。内带大勾股相乘直积为分母也。乃以半

城径即天元也。除之，为一个弦较和也 $\begin{array}{r} 1 \\ -542 \\ -132239 \\ 55739280\text{太} \\ 10576065600 \end{array}$ 。此法本取勾外容圆，合以弦较和除二积，为勾外所容之圆。今用半天元圆径除一个积，则却得一个弦较和也。内依旧带大积分母也。寄左。然后再置小股 $\begin{array}{r} -1 \\ 271\text{元} \\ 102840 \end{array}$ ，合用大积乘之，缘内已带大勾分母。今只用大股 $\begin{array}{r} 1\text{元} \\ 510 \end{array}$ 乘之，得 $\begin{array}{r} -1 \\ -239 \\ 241050 \\ 448400\text{太} \end{array}$ ，为大积所乘小股，于上。再置小勾，合用大积乘之，缘内已带大股分母，合只用大勾 $\begin{array}{r} 1\text{元} \\ 216 \end{array}$ 乘之，得 $\begin{array}{r} -1 \\ 55 \\ 161376\text{元} \\ 22213440 \end{array}$ ，为大积所乘之小勾也。以此小勾减上小股，得 $\begin{array}{r} -294 \\ 79674 \\ 30234960\text{太} \end{array}$ ，即带分小较也。又二因小较，得此下式 $\begin{array}{r} -588 \\ 159348\text{元} \\ 60569920 \end{array}$ 为带分二较也。又以大勾股直积 $\begin{array}{r} 1 \\ 726 \\ 110160\text{太} \end{array}$ 乘二之天元半圆径，得 $\begin{array}{r} 2 \\ 1452 \\ 220320 \\ 0\text{太} \end{array}$ ，为一个带分弦较较也。弦较较乘弦较和为二直积。既以圆径除二直积，为弦较和，则是圆径为弦较较也。今又为半天元圆径除一积为弦较和，故倍天元半径作一个弦较较也。遂将此弦较较加入前二较，得 $\begin{array}{r} 2 \\ 864 \\ 379668\text{元} \\ 60469920 \end{array}$ ，亦为一个弦较和也。与寄左相消，得下式 $\begin{array}{r} -1 \\ -1406 \\ -511907 \\ -4730640 \\ 10576064600 \end{array}$ 。开三乘方，得一百二十步，即半城径也。合问。

又法：此问系是《洞渊》测圆门第一十三，前荅亦依洞渊细草，用勾外容圆术，以如于弦较和。然其数烦碎宛转费力。今别草一法，其廉、从与前不殊，而中间段络径捷明白。方之前术，极为省易，学者当自知也。立天元为半径，副之。上并，加东西行，得 $\begin{array}{r} 1\text{元} \\ 2160 \end{array}$ ，为通勾率。下并，加南北行，得 $\begin{array}{r} 1\text{元} \\ 510 \end{array}$ ，为通股率。乃置西行八步，以通股乘之，得下：$\begin{array}{r} 8\text{元} \\ 4080 \end{array}$ 。合通勾除，不除，寄为母。便以此为南小股也。又置南行四百九十五步，内减天元，得 $\begin{array}{r} -1\text{元} \\ 495 \end{array}$ 。用通勾乘之，得 $\begin{array}{r} -1 \\ 279\text{元} \\ 106920 \end{array}$ 。内减了南小股，余下式：$\begin{array}{r} -1 \\ 271\text{元} \\ 102840 \end{array}$ ，为股圆差也。内带通勾分母。[1]又置北行一十五步，

① "内带通勾分母"，清刻本作大字，依下文改作小字。

以通勾乘之，得$\begin{array}{c}15\text{元}\\3240\end{array}$。合通勾除，不除，寄为母，便以此为北小勾也。又置东行二百八步，内减天元，得$\begin{array}{c}-1\text{元}\\208\end{array}$。用通股乘之，得$\begin{array}{c}-1\\-302\text{元}\\106080\end{array}$。内减了北小勾，余$\begin{array}{c}-1\\-317\text{元}\\102840\end{array}$，为勾圆差也。内带通勾分母。乃以二差相乘，得下式：$\begin{array}{c}1\\46\\-291587\text{元}\\-4630640\\10576065600\end{array}$，为半段圆径幂也。内带通积为母①，寄左。然后以通勾通股相乘，得$\begin{array}{c}1\\726\text{元}\\110160\end{array}$。以天元幂乘之，得$\begin{array}{c}1\\726\\110160\\0\text{元}\end{array}$。又倍之，得下式：$\begin{array}{c}2\\1452\\220320\\0\text{元}\end{array}$，为同数。与左相消，所得廉、从一与前同。合问。

这是求圆城半径，设为x，如图 18-2-1。已知出西门$a'''=8$，出北门$b''=15$，折而东行$a_2+a''=208$，折而南行$b_1+b'''=495$，则$a'=x+a_2+a''+a'''=x+208+8=x+216$，$b'=x+b_1+b''+b'''=x+495+15=x+510$，$b'''=\dfrac{a'''b'}{a'}=\dfrac{8(x+510)}{x+216}$。接着，由勾外容圆公式，得到同等于$c_7+b_7-a_7$的两个天元式$\dfrac{x^3-542x^2-132239x+55739280+\dfrac{10576065600}{x}}{(x+510)\ (x+216)}$和$\dfrac{2x^3+864x^2+379668x+60469920}{(x+216)(x+510)}$。将上2式如积相消，得$x^3-542x^2-132239x+55739280+\dfrac{10576065600}{x}$。$=2x^3+864x^2+379668x+60469920$

整理成

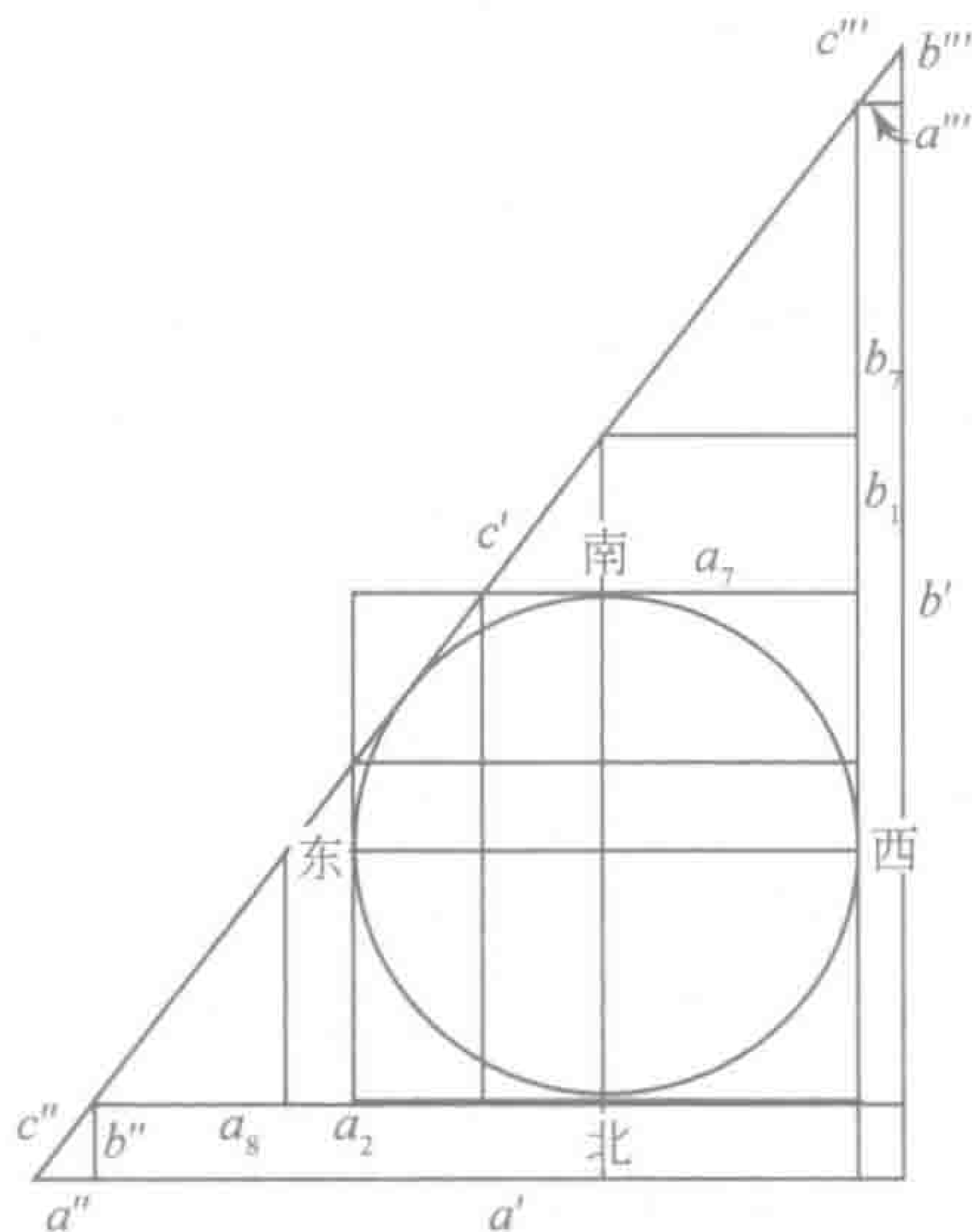


图 18-2-1　洞渊测圆图

① “内带通积为母”，清刻本作大字，依上文改作小字。

$$-x^4-1406x^3-511907x^2-4730640x+10576065600=0$$

清中叶四库馆臣首先注意到这个问题中提到洞渊测圆门，并说李冶“于此问又明其为洞渊测圆门第十三题”。清末刘岳云《算学丛话》进而发现《测圆海镜》卷十一第17、18二问属于同类，他说：“依《海镜》理，出西门北门不得有行步，而卷十一后二问（按：即第17、18问），出北门行十五步，出西门行八步。详书意，盖于本勾股形外展大其勾股，勾为三百四十三，股为六百二十三，其八与十五即距城之数，为小勾股率。书中引为洞渊测圆门第十三题，然则洞渊之书，以圆内圆外互求，而九容乃其一端耳。”李俨则认为：“李冶《测圆海镜》卷十一后二问和全书体例不同，疑并出于洞渊。”他将此二问的有关部分归于“洞渊的测圆术”。但是认为第18问的“又法”主要指下面的草，“为李冶所作”。后来学术界基本上沿袭李俨的说法。但有人引用第18问时，却有意无意不引“又法”二字，那么紧接“又法”的“此”自然是指“又法”前面的全部内容，即不仅“法”，而且“草”也是洞渊所做。

此问是洞渊测圆门第13问是没有疑问的。问题在于，洞渊的“此问”含有哪些内容？我们认为，这里的“此问”含有题设、答案和“法”三种内容，不应该含有“草”。我们知道，自《海岛算经》起，一直到北宋的《益古集》、《议古根源》等数学原著，都有“术”或“法”，而没有“细草”。为之作“细草”的是后人。没有证据显示洞渊测圆门与其他著作不同。因此，此问中的“法”自然是洞渊的，李冶指出其关键是“用勾外容圆术，以如于弦较和”。而“草”则不然。李冶说的“亦依洞渊细草”不是说这是洞渊的“细草”，而是说李冶依洞渊的“法”作的“细草”。将“法”之后的“草”说成是洞渊的，根据似不足。“又法”及其“草”自然是李冶所撰，李俨的看法是对的。其中应该表述的“实”、“第一廉”、“第二廉”、“常法”等则在下面的“草”展现，“又法”中没有赘述。

总之，从李冶的文字中看不出石信道与洞渊通晓天元术。

二　天元术的完善和应用

作为设未知数列方程的方法，天元术含有两项必须的内容，一是立天元一为某某，相当于现今之设未知数某某为 x。二是列出开方式，这就是根据问题的条件，先列出一个天元多项式，寄左；然后再列出一个与“寄左”者等价的天元多项式，作为“同数”；最后，两者如积相消，得到一个开方式，即现今之一元方程。

（一）天元式的表示法

天元式的表示分幂次高低的排列和“元”或“太”的使用等方面。

前已指出，在最初，如东平算经，天元术中的天元多项式用十九个汉字表示常数项和未知数的各幂次，正次幂在上，负次幂在下。后来简化成以“太”即“太极”表示常数项，天元在上，地元在下，分别通过与天元、地元的相对位置表示未知数的正次幂和负次幂，称为古法。彦材法则颠倒了天元、地元的位置。李冶或其前的某人取消了地元，只用一个汉字“太”标出常数项，或用“元”（即天元）标出未知数的一次项，其他各项的幂次完全由其与“太”或“元”的相对位置决定。起初仍采取未知数的正幂在上，负幂在下的方式，这就是《河防通议》、《测圆海镜》中使用的方法。后来李冶在《益古演段》中又借鉴彦材

法，采取高次幂在下，低次幂在上的方式，遂成为 13 世纪下半叶、14 世纪初的通用方式。其演变过程如图 18-2-2 所示。

x^9 仙						
x^8 明	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	x^2	x^{-2}	x^2	x^2	x^{-2}	x^{-2}
x 天	x 天	x^{-1} 地	x	x 元	x^{-1}	x^{-1}
A 人	A 太	A 太	A 太或	A	A 太或	A
x^{-1} 地	x^{-1} 地	x^1 天	x^{-1}	x^{-1}	x	x 元
⋮	x^{-2}	x^2	x^{-2}	x^{-2}	x^2	x^2
x^{-8} 暗	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x^{-9} 鬼						
东平算经	古法	彦材法	《测圆海镜》		《益古演段》	

图 18-2-2　天元术的表示法

例如，《测圆海镜》卷三第 5 问“草”中的天元式 $\begin{array}{c}144\\5184\text{元}\\2488320\end{array}$ 表示多项式 $144x^2+5184x+2488320$。《益古演段》第 1 问中的天元式 $\begin{array}{c}1600\text{太}\\80\\025\end{array}$ 表示多项式 $0.25x^2+80x+1600$。

有时在天元式中不标出“元”字或“太”字。例如，《益古演段》卷中第 39 问有一天元式是 $\begin{array}{c}3780\\228\\1\end{array}$ 表示多项式 $x^2+228x+3780$。《算学启蒙》中，几乎所有的天元式都不标出“太”或“元”字。如卷下“开方释锁门”第 31 问：

今有圆锥积三千七十二尺，只云：高为实，立方开之，得数不及下周六十一尺。问：下周及高各几何？

术曰：立天元一为开立方数：$\begin{array}{c}0\\1\end{array}$，再自乘为高也：$\begin{array}{c}0\\0\\0\\1\end{array}$。再列开立方数，加不及，为下周也：$\begin{array}{c}61\\1\end{array}$。自之，又高乘之，为三十六段积：$\begin{array}{c}0\\0\\0\\3721\\122\\1\end{array}$，寄左。列积，三十六乘之。与寄左相消，得开方式：$\begin{array}{c}-110592\\0\\0\\3721\\122\\1\end{array}$，四乘方开之，得三尺，为开立方之数。

前四个天元式都没有标出“太”或“元”，它们依次是 x，x^3，$x+61$，$3721x^3+122x^4+x^5$。

值得强调的是，天元式是指多项式或单项式，而不是指开方式。许多数学史著述将开方式称为天元式，甚至称为“天元开方式”，说“‘天元开方式’就是一元高次方程”，说现今代数学的一元高次方程 $a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 古代写为

$$\begin{matrix} a_n \\ a_{n-1}\text{元} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{matrix} \quad \text{或} \quad \begin{matrix} a_n\text{太} \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{matrix}$$

这是不恰当的。"天元开方式"是作者因误解而杜撰的，李冶、朱世杰没有这种说法。一般说来，在天元术中，经过如积相消，得出的开方式不再标以"太"或"元"。例如，《测圆海镜》卷三第5问之"草"的开方式即表示成 $\begin{matrix} 1 \\ -336 \\ 4184 \\ 2488320 \end{matrix}$。它表示三次方程 $x^3-336x^2+4184x+2488320=0$。有的学者在引用这个开方式时在"4184"后加了个"元"字，当然不妥。在《益古演段》第6问中 $\begin{matrix} 24057 \\ 0 \\ -825 \end{matrix}$ 表示二次方程 $-8.25x^2+24057=0$。

但是，清刻本《测圆海镜》中也有个别题目，在如积相消后得出的开方式子中仍标以"元"，如卷三第2问"法"之"草"中便有"相消得 $\begin{matrix} -1 \\ -80\text{元} \\ 76800 \end{matrix}$，以平方开之"。其中的筹式亦表示方程 $-x^2-80x+76800=0$。即使清刻本没有讹误，这也是板少数情形，而在《益古演段》及其之后，再没有这种表示。因此这不具有一般性。还有一种可能性，就是清刻本误加"元"字，在对天元式和开方式的表示方式认识不明确的情况下，这种讹误极易发生。正如20世纪许多作者在引用李冶、朱世杰的开方式时常在未知数的一次项旁加原书中没有的"元"字一样。无论如何，作为成熟的天元术而言，"如积相消"得出的开方式是不出现"元"字的，与天元式是有根本区别的。有人说"李冶的天元式，既可表示方程，又可表示多项式。从形式看，两者并无区别"，当然是不妥当的。

（二）天元式的运算

在使用天元术推导方程的过程中，必然要进行多项式的四则运算。从《测圆海镜》看，金、元时代的数学家比较熟练地掌握了这些运算。我们以《测圆海镜》卷三第5问为例：

> 或问乙出南门东行七十二步而止，甲出西门南行四百八十步，望乙，与城参相直，问荅同前。

这是已知 a_{11}，b_1，求直径 d。其草为：

> 草曰：立天元一为半城径，以减南行步，得 $\begin{matrix} -1\text{元} \\ 480 \end{matrix}$，为小股。又以天元加乙东行，得 $\begin{matrix} 1\text{元} \\ 72 \end{matrix}$，为小勾。又以天元加南行步，得 $\begin{matrix} 1\text{元} \\ 480 \end{matrix}$，为大股。乃置大股在地，以小勾乘之，得下式：$\begin{matrix} 1 \\ 552\text{元} \\ 34560 \end{matrix}$。合以小股除之，今不受除，便以为大勾。内寄小股分母。又置天元半径，以分母小股乘之，得 $\begin{matrix} -1 \\ 480\text{元} \end{matrix}$。以减大勾，得 $\begin{matrix} 2 \\ 72\text{元} \\ 33560 \end{matrix}$，为半个梯

底，于上。以乙东行七十二步为半个梯头，以乘上位，得 $\begin{array}{r}144\\5184\text{元}\\2488320\end{array}$，为半径幂。内寄小股分母。寄左。然后置天元幂，又以分母小股乘之，得 $\begin{array}{r}-1\\480\\0\text{元}\end{array}$，为同数。与寄左相消，得 $\begin{array}{r}1\\-336\\5184\\2488320\end{array}$，以立方开之，得一百二十步。倍之，即城径也。

从这个例子可以看出，天元式的运算方法与现在的多项式类似。天元式的加减，是同次幂的系数相加或相减。常数乘天元式是用常数乘天元式的各项系数。在《测圆海镜》中，以天元或天元幂乘天元式是将其中的“元”字（或“太”字）移下一层或数层；同样，以天元或天元幂除天元式是将其中的“元”字（或“太”字）移上一层或数层；在《益古演段》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》、《河防通议》等著作中则相反。梅荣照指出，当时人们还掌握了两个天元式相乘，就是用一个天元式的各项分别乘另一天元式的各项，然后合并同类项。多项式除多项式是不能进行的，李冶称之为“不受除”。若遇到以天元式为分母的情形，便采用寄分母的方法。而在求另一等价天元式时，以该分母乘之，除之，在如积相消时将其消去。

（三）摆脱几何思维的束缚

天元术的产生，标志着方程理论基本上摆脱了几何思维的束缚，有了独立于几何的倾向。以几何方法推导方程有很大的局限性。一方面，各种不同问题需要不同技巧，这便使列方程工作成为一件相当困难的事；另一方面，用几何方法列不出高于三次的方程，因为找不到几何解释。这种状况是与社会对方程的迫切需要不相适应的，也阻碍了方程理论向纵深发展。天元术是一种一般的、可用于解决各种问题的列方程方法。

由于摆脱了几何思维的束缚，用天元术列出的方程有许多进展。

第一，改变了传统的把“实”看做正数的观念，常数项可正可负，而不再拘泥于它的几何意义。《测圆海镜》、《益古演段》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》中的方程各项的符号均无限制，这是代数学的一个进步。

第二，大量问题使用天元术列出高于三次的方程。《测圆海镜》中有13个四次方程，1个六次方程。《算学启蒙》中有4个四次方程，1个五次方程。《四元玉鉴》中有73个四次方程（含由二元、三元、四元方程组化成的方程，下同），22个五次方程，15个六次方程，3个七次方程，5个八次方程，2个九次方程，2个十次方程，1个十一次方程，1个十二次方程，1个十四次方程。

第三，当时已懂得用一整式同乘分式方程的两边将其化为整式方程的方法。而当方程各项以天元的某次幂为公因子时，可以约去此公因子，以降低方程的次数。

第三节　四　元　术

一　四元术的历史发展

元朝统一中国前后的数十年间是中国数学发展的辉煌时期。其中，以太行山两侧为中心

的北方数学家的天元术和四元术的研究成就斐然。

四元术是二元、三元或四元的高次方程组的表示、建立与求解方法。天元术出现之后，二元术、三元术、四元术相继出现。祖颐《四元玉鉴后序》对此发展过程有简要的说明。祖颐在叙述了天元术的产生的历史之后说："平阳（今山西临汾）李德载因撰《两仪群英集臻》兼有地元，霍山（今山西临汾）邢先生颂不高第刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》末仅有人元二问。吾友燕山朱汉卿先生演数有年，探三才之赜，索《九章》之隐，按天地人物立成四元，以元气居中。"朱世杰《四元玉鉴》是关于天元术、四元术的内容最为丰富的著作。该书三卷分为24门共有288题，均以方程或高次方程组求解。其中，立天元者232题，立天地二元者36题，立天地人三元者13题，立天地人物四元者7题。尤为重要的是，该书卷首所列"四象细草假令之图"。该图包括"一气混元"、"两仪化元"、"三才运元"、"四象会元"四题，每题各有朱氏原草。据此可知二元、三元、四元高次方程组的表示法、建立方程组的步骤与四元消法的主要步骤，且可得知由天元式到四元式的演变过程。

四元术的方程组表示法是天元术的方程表示法的推广。将天、地、人、物分别记为 x、y、z、w，则方程各项的位置如图 18-3-1 所示。"太"的位置置方程的常数项。四个空格置图 18-3-1(a) 标识之外的交叉项，因题而异。例如，图 18-3-1(b) 表示方程

$$xy - x^2y - yz + xyz + x^2 - z^2 = 0$$

而图 18-3-1（c）表示方程

$$-xy^2 - y + xyz - x - z = 0$$

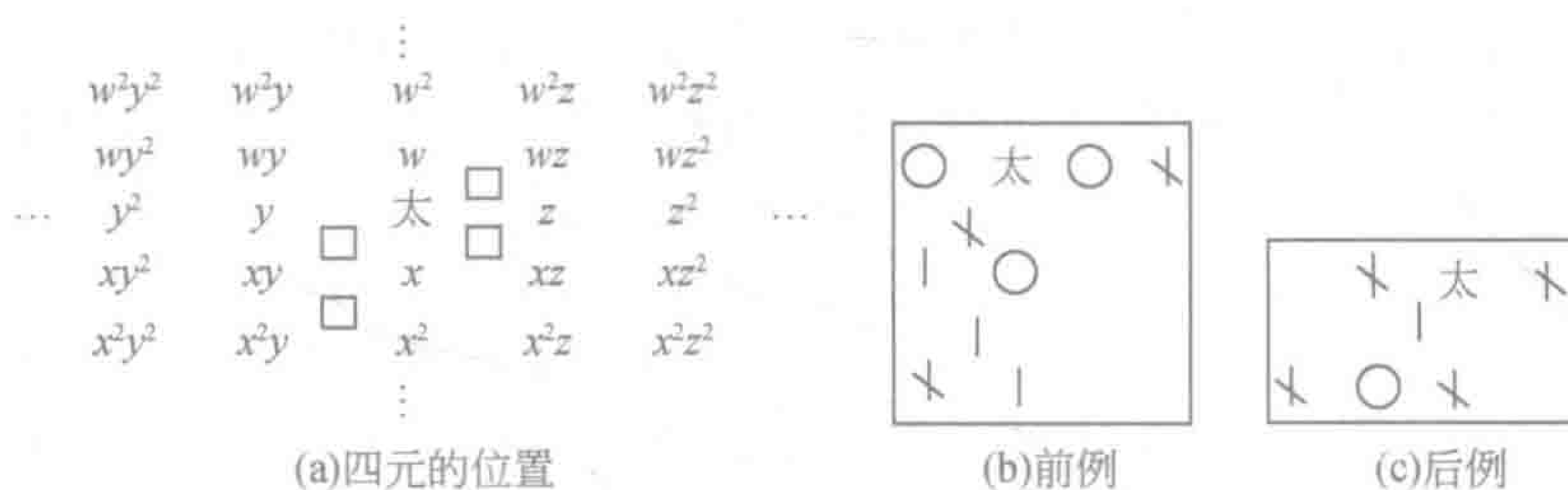


图 18-3-1　四元式的表示

"太"左下第一个空格中，前例置 $-yz$，后例置 xyz。依据已知条件及所求，设立未知元并逐一建立方程，即得方程组。二元、三元及四元方程组的建立，朱氏原草分别指示"天地配合求之"、"三才相配求得"、"四象和会求之"，意谓所列方程个数须与所设未知元个数相等。

二　四元消法

四元术的关键是四元消法。按照《四元玉鉴》卷首"四象细草假令之图"所载，四元消法大致分为"剔而消之"，"互隐通分相消"与"内外行相乘相消"等三步。就运算结果而言，第一步将三元或四元方程组消为二元高次方程组，称为前式、后式，第二步将二元高次方程组消为关于其中某一元的二元一次方程组，称为左式、右式，第三步将上述二元一次方程组消为一元高次方程。既得一元高次方程，则以正负开方术求其正根。"四象细草假令之图"关于第三步的运算过程有所说明，而于其他两步均略而不载。以故准确理解四元消

法成为研究的难点。一般认为，清代沈钦裴《四元细草》① 是这一工作典范。

依沈钦裴之见，第一步至第三步均为互乘对消的逐步消元法。“剔而消之”，“互隐通分相消”，“内外行相乘相消”分别指明每步运算的要点。在筹算中，两式互乘对消由“剔”、“互隐通分”、“相消”三次完成。兹以第二步即“互隐通分相消”为例说明之。

设二元组：

$$a_0y^2+a_1y+a_2=0 \qquad (18\text{-}3\text{-}1)$$

$$b_0y^2+b_1y+b_2=0 \qquad (18\text{-}3\text{-}2)$$

其中，a_i，b_i 是关于 x 的多项式，$i=0$，1，2。欲消为关于 y 的二元一次方程组，共有两种方式。其一，先消首项。其二，先消末项。先消首项，即由

$$a_0\times\text{式}(18\text{-}3\text{-}2)-b_0\times\text{式}(18\text{-}3\text{-}1)=0$$

得关于 y 的一次式。以 y 乘所得 y 的一次式与式（18-3-1）或式（18-3-2）配合，同法可得另一个关于 y 的一次式。至此，互隐通分相消一步结束。在筹算中，由 a_0y^2，b_0y^2 约去 y^2，求 a_0，b_0 即“剔”，求 $a_0(b_1y+b_2)$，$b_0(a_1y+a_2)$ 即“互隐通分”，求 $a_0(b_1y+b_2)-b_0(a_1y+a_2)$ 即“相消”。先消末项即由

$$a_2\times\text{式}(18\text{-}3\text{-}2)-b_2\times\text{式}(18\text{-}3\text{-}1)=0$$

所得约去 y，得关于 y 的一次式。以下的步骤与前述方式不异。在筹算中，由 $a_0y^2+a_1y$，$b_0y^2+b_1y$ 约去 y，求 a_0y+a_1，b_0y+b_1 即“剔”，求 a_2（b_0y+b_1），b_2（a_0y+a_1）即“互隐通分”，求 $a_2(b_0y+b_1)-b_2(a_0y+a_1)$ 即“相消”。沈钦裴的解释具有如下的特点。其一，在相消过程中，凡欲消去之项均不参加运算，是与筹算的“省算”的要求相符。其二，“剔而消之”，“互隐通分相消”的解释以朱世杰“内外行相乘相消”的原文为依据。约去左右两式的左行之地元即“剔”。“内二行相乘”，“外二行相乘”即“互隐通分”。乘积相减即“相消”。多行的情形与此类似。这一解释可谓理得一贯。

除上述三步运算之外，四元消法还有“人易天位”、“物易天位”等运算。三元组消去地元 y 之后作人易天位，即作变量代换 $x=y$，$z=x$。四元组消去天元 x 之后作物易天位，即作变量代换 $w=x$。这种代换并不改变方程组的解，只需求得 x 之后，再代换为 z 或 w 即可。作变量代换的具体原因，原著并未予以具体说明，似与筹算运算习惯有关。若所求之元迳设为天元则无需易位。

三　二　元　术

祖颐《四元玉鉴后序》所称之平阳李德载撰《两仪群英集臻》是目前所知最早的有关二元术的著作。因书已不传，故不得其详。《四元玉鉴》卷中之六或问歌彖门第九题、第十题均立天地二元求解，第十二题立天地人三元求解。此三题与书中其他二元、三元题目不相类属。罗士琳对此三题颇致疑问。所加按语称：“自直段求源以迄杂范类会凡二十门，悉立天元为术。独此问及下问突立天地两元，又第十二问突立天地人三元，体例较未画一。且此问如以天元……似较立两元为尤捷。”按本门十二题均以歌括表达题目内容，是与该书其他各门不同。中国传统数学著作中的歌括体裁的题目流传过程比较复杂，不能肯定为朱世杰原

① 清·沈钦裴，四元玉鉴细草，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第五册，河南教育出版社，1993 年。

作。若本门歌括采自他书，则此三题当是较早的二元术和三元术的实例。

在《四元玉鉴》中，二元术的题目共36题，除上述卷中之六或问歌象门的2题之外，尚有卷首“四象细草假令之图”所载1题，卷下之五两仪合辙12题，卷下之六左右逢元21题。尤其是卷首的1题即“两仪化元”，除题、答之外，尚给出演草以简略说明求解过程。此系全书36题之中唯一的一个演草，系了解二元术的原始资料。兹照录于下。

今有股幂减弦较较与股乘勾等，只云勾幂加弦较和与勾乘弦同。问：股几何？

草曰：立天元一为股，地元一为勾弦和。天地配合求之，得今式 $\begin{array}{|ccc|}\hline -2 & 〇 & \text{太} \\ -1 & 2 & 〇 \\ 〇 & 2 & 〇 \\ 〇 & 〇 & 1 \\ \hline\end{array}$，求到云式 $\begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 〇 & \text{太} \\ -1 & 2 & 〇 \\ 〇 & 〇 & 〇 \\ 〇 & 〇 & 1 \\ \hline\end{array}$。互隐通分消之。内二行得式 $\begin{array}{|c|}\hline \text{太} \\ 8 \\ 4 \\ \hline\end{array}$，外二行得 $\begin{array}{|c|}\hline \text{太} \\ 〇 \\ 2 \\ 1 \\ \hline\end{array}$。两位相消，得开方式 $\begin{array}{|c|}\hline -8 \\ -2 \\ 1 \\ \hline\end{array}$。平方开之，得股四步。合问。①

显然，以上的演草尚嫌简略。其如何得到诸式，如何相消，清代的数学家做了大量的研究。以下根据沈钦裴的《四元细草》作进一步说明。

设勾股形的三边分别为 a，b，c，本题的已知条件即

$$\begin{cases} b^2 - [c - (b - a)] = ba \\ a^2 + [c + (b - a)] = ac \end{cases}$$

求 b。

设 $b = x$，$c + a = y$，则

$$c - a = \frac{b^2}{c + a} = \frac{x^2}{y}$$

$$2a = (c + a) - (c - a) = y - \frac{x^2}{y}$$

$$2c = (c + a) + (c - a) = y + \frac{x^2}{y}$$

据已知条件得方程组

$$\begin{cases} -2y^2 - xy^2 + 2xy + 2x^2y + x^3 = 0 & \text{今式} \\ 2y^2 - xy^2 + 2xy + x^3 = 0 & \text{云式} \end{cases}$$

（今式）－（云式），约去 $2y$，得

$$-2y + x^2 = 0 \qquad \text{右式}$$

（今式）$-x$（右式），约去 y，得

$$-2y - xy + 4x + 2x^2 = 0 \qquad \text{左式}$$

右式与左式联立

① 元·朱世杰著，李兆华校证，四元玉鉴校证。科学出版社，2007年。本编凡引《四元玉鉴》文字，如不另加说明，均据此。

$$\begin{cases}2y-x^2=0, & \text{右式}\\(-2-x)y+(4x+2x^2)=0, & \text{左式}\end{cases}$$

至此，互隐通分相消一步完成。

在筹式中，右式与左式并列，2、$(4x+2x^2)$ 为内二行，$-x^2$、$(-2-x)$ 为外二行。由右式、左式消去 y。内二行相乘得

$$8x+4x^2 \qquad \text{内二行积}$$

外二行相乘得

$$2x^2+x^3 \qquad \text{外二行积}$$

（外二行积）－（内二行积），约去 x，得

$$x^2-2x-8=0$$

至此，内外行相乘相消一步完成。解此二次方程得 $x=4$，即 $b=4$。

由以上的说明可见，沈钦裴的解释与朱世杰的各式能一一相符。无论互隐通分相消还是内外行相乘相消，沈氏均视为互乘对消法。这一点在三元术中体现更为明显。

四　三　元　术

《四元玉鉴》共有三元者 13 题，除上述卷中之六或问歌象门第 12 题外，尚有卷首“四象细草假令之图”所载 1 题，卷下之七三才变通 11 题。尤其是卷首的 1 题即“三才运元”，是 13 题中唯一载有演算细草的题目，且消元之步骤比较完整，是了解四元消法的主要依据。兹照录如下：

今有股弦较除弦和和与直积等，只云勾弦较除弦较和与勾同。问：弦几何？

草曰：立天元一为勾，地元一为股，人元一为弦。三才相配求之，求得今式，求得云式，求得三元之式。以云式剔而消之，二式皆人易天位，前得，后得。互隐通分相消，左得，右得。内二行得，外二行得，内外相消，四约之，得开方式。三乘方开之，得弦五步。

以下根据沈钦裴《四元细草》作进一步的说明。

设勾股形的三边分别为 a，b，c，本题的已知条件即

$$\begin{cases}\dfrac{c+(b+a)}{c-b}=ab\\[2ex]\dfrac{c+(b-a)}{c-a}=a\\[2ex]a^2+b^2=c^2\end{cases}$$

求 c。设 $a=x$，$b=y$，$c=z$，则

$$c+(b+a)=z+y+x,\quad c-b=z-y,$$
$$c+(b-a)=z+y-x,\quad c-a=z-x$$

据已知条件得方程组

$$\begin{cases}-xy^2-y+xyz-x-z=0 & \text{今式}\\ -y+x-x^2-z+xz=0 & \text{云式}\\ y^2+x^2-z^2=0 & \text{三元之式}\end{cases}$$

“以勾乘三元之式消今式”：$x\times$三元之式 + 今式，得

$$-y+xyz-x+x^3-z-xz^2=0$$

亦即

$$(-1+xz)y+(-x+x^3-z-xz^2)=0 \qquad \text{消式}$$

“剔消式左半”，“地元除之”，“乘云式右半”，“寄左”。“剔云式左半”，“地元除之”，“乘消式右半”，“与左相消得”：即由消式、云式消去 y

$$(-1+xz)(x-x^2-z+xz)-(-1)(-x+x^3-z-xz^2)=0$$

亦即

$$-2x+x^2+x^3-xz+x^2z-x^3z-2xz^2+x^2z^2=0$$

约去 x，“人易天位”，即将上式中 z，x 分别代换为 x，y，得

$$(1-x)y^2+(1+x+x^2)y+(-2-x-2x^2)=0 \qquad \text{前式}$$

“剔三元之式左半”，“地元除之”，“乘云式右半”，“寄左”。“剔云式左半”，“地元除之”，“乘三元之式右半”，“与左相消得”：即由三元之式、云式消去 y^2

$$y(x-x^2-z+xz)-(-1)(x^2-z^2)=0$$

亦即

$$(x-x^2-z+xz)y+(x^2-z^2)=0 \qquad \text{消式}$$

“剔消式左半”，“地元除之”，“乘云式右半”，“寄左”。“剔云式左半”，“地元除之”，“乘消式右半”，“与左相消得”：即由消式、云式消去 y

$$(x-x^2-z+xz)(x-x^2-z+xz)-(-1)(x^2-z^2)=0$$

亦即

$$2x^2-2x^3+x^4-2xz+4x^2z-2x^3z-2xz^2+x^2z^2=0$$

约去 x，“人易天位”，即将上式中 z，x 分别代换为 x，y，得

$$y^3+(-2-2x)y^2+(2+4x+x^2)y+(-2x-2x^2)=0 \qquad \text{后式}$$

至此，剔而消之一步完成。三元方程组已经消为二元方程组，即关于 y 的三次方程组：

$$\begin{cases}(1-x)y^2+(1+x+x^2)y+(-2-x-2x^2)=0, & \text{前式}\\ y^3+(-2-2x)y^2+(2+4x+x^2)y+(-2x-2x^2)=0, & \text{后式}\end{cases}$$

前式乘以 y

$$(1-x)y^3+(1+x+x^2)y^2+(-2-x-2x^2)y=0$$

"剔前式左行"，"乘后式右三行"，"寄左"。"剔后式左行"，"乘前式右二行"，"与寄左相消得"：即由前式、后式消去 y^3

$$(1-x)[(-2-2x)y^2+(2+4x+x^2)y+(-2x-2x^2)]$$
$$-1\cdot[(1+x+x^2)y^2+(-2-x-2x^2)y]=0$$

亦即

$$(-3-x+x^2)y^2+(4+3x-x^2-x^3)y+(-2x+2x^3)=0 \qquad \text{消式}$$

"剔消式左行"，"乘前式右二行"，"寄左"。"剔前式左行"，"乘消式右二行"，"与寄左相消得"：即由消式、前式消去 y^2

$$(1-x)[(4+3x-x^2-x^3)y+(-2x+2x^3)]$$
$$-(-3-x+x^2)[(1+x+x^2)y+(-2-x-2x^2)]=0$$

亦即

$$(7+3x-x^2)y+(-6-7x-3x^2+x^3)=0 \qquad \text{左式}$$

左式乘以 y

$$(7+3x-x^2)y^2+(-6-7x-3x^2+x^3)y=0$$

"剔左式左行"，"乘前式右二行"，"寄左"。"剔前式左行"，"乘左式右行"，"与寄左相消得"：即由左式、前式消去 y^2

$$(7+3x-x^2)[(1+x+x^2)y+(-2-x-2x^2)]$$
$$-(1-x)[(-6-7x-3x^2+x^3)y]=0$$

亦即

$$(13+11x+5x^2-2x^3)y+(-14-13x-15x^2-5x^3+2x^4)=0 \qquad \text{右式}$$

至此，互隐通分相消一步完成。关于 y 的三次方程组已经消为关于 y 的一次方程组：

$$\begin{cases}(7+3x-x^2)y+(-6-7x-3x^2+x^3)=0 & \text{左式}\\ (13+11x+5x^2-2x^3)y+(-14-13x-15x^2-5x^3+2x^4)=0 & \text{右式}\end{cases}$$

在筹式中，左式与右式并列，$(-6-7x-3x^2+x^3)$，$(13+11x+5x^2-2x^3)$ 为内二行，$(7+3x-x^2)$，$(-14-13x-15x^2-5x^3+2x^4)$ 为外二行。由左式，右式消去 y。内二行得

$$(-6-7x-3x^2+x^3)(13+11x+5x^2-2x^3) \qquad \text{内二行积}$$
$$=-78-157x-146x^2-43x^3+10x^4+11x^5-2x^6$$

外二行得

$$(7+3x-x^2)(-14-13x-15x^2-5x^3+2x^4) \qquad \text{外二行积}$$
$$=-98-133x-130x^2-67x^3+14x^4+11x^5-2x^6$$

"内外相消，四约之，得开方式"，即（外二行积）－（内二行积），以 4 约之，得

$$x^4-6x^3+4x^2+6x-5=0$$

开得 $x=5$。据人易天位，即 $z=5$。

以上是沈钦裴《四元细草》三才运元题的说明。所有引文系沈草文字，筹式易为代数

式。由此可知，沈钦裴的解释与朱世杰的各式能一一相符。在沈氏的解释中，无论剔而消之，互隐通分相消还是内外行相乘相消，均为互乘对消法。两式互乘对消时，由“剔”、“互隐通分”、“相消”三次完成。互隐通分表现为两个分数作通分时求分子的计算。在朱世杰的原草中，“内二行得”，“外二行得”，“内外相消”，“得开方式”的消元过程即是两式互乘对消的过程。沈钦裴关于“剔而消之”，“互隐通分相消”的解释的依据即在于此。其所见高于罗、戴二氏亦在于此。

五 四 元 术

《四元玉鉴》中共收四元术题目 7 题：卷首“四象细草假令之图”有 1 题，卷下之八四象朝元 6 题。卷首第四题即“四象会元”载有演草，其他 6 题均无。四元消法的主要步骤已见于三才运元一题。故由四元消去一元使成为三元者，问题即告解决。依沈钦裴所见，由四元消为三元使用的“剔而消之”之法仍是互乘对消法。兹先照录卷首第四题于后，再据沈钦裴的解释说明四元消为三元的过程。

今有股乘五较与弦幂加勾乘弦等，只云勾除五和与股幂减勾弦较同。问：黄方带勾股弦共几何？

草曰：立天元一为勾，地元一为股，人元一为弦，物元一为开数。四象和会求之，求得今式

𝍡̸	太	𝍠
○	𝍠	○

，求得云式

○	𝍣	太	𝍣
𝍠̸	○	𝍡	𝍠
○	○	𝍠̸	○

，求得三元之式

𝍠	○	太	○	𝍠̸
○	○	○	○	○
○	○	𝍠	○	○

，求得物元之式

○	𝍠̸	○
𝍡	太	○
○	𝍡	○

。四式和会，消而剔之，皆物易天位，得前式

𝍡	𝍪𝍡̸	𝍪𝍧	太
○	𝍠̸	𝍩○	𝍡̸
○	○	○	𝍠̸

①，后式

𝍦̸	太
○	𝍡

，便为左式。以左式消前式

○	𝍡𝍰𝍣	太
𝍧		𝍢
○		𝍫𝍢̸

，便为右式。内二行得式

太
○
𝍩𝍥

，其外二行得式

𝍪○𝍬𝍧̸
𝍪𝍠̸
𝍪𝍧

，内外二行相消，三约，得开方式

𝍥𝍰𝍥̸
𝍦̸
𝍣

。平方开之，得一十四步。

以下据沈钦裴《四元细草》作进一步的说明。

设勾股形的三边分别为 a，b，c，“股乘五较”谓股乘以五较之和，即

$$b\{(b-a)+(c-a)+(c-b)+[c-(b-a)]+[(b+a)-c]\}=b(2c)=2bc$$

“勾除五和”谓五和之和除以勾，即

$$\frac{1}{a}\{(b+a)+(c+a)+(c+b)+[c+(b-a)]+[c+(b+a)]\}=\frac{1}{a}(2a+4b+4c)$$

① 沈钦裴《四元细草》通汇影印本之前式有传抄之误，而沈氏补草中之前式不误，据以补正。宛委本、何刻本 𝍪𝍧 误作 𝍪𝍡，当系传抄传刻之误，沈氏所校为是。罗草、戴草的前式均改动较多。从沈草。

“黄方”谓勾股形的内切圆直径，即 $b+a-c$。故本题已知条件即

$$\begin{cases}2bc=c^2+ac\\ \dfrac{1}{a}(2a+4b+4c)=b^2-(c-a)\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$$

求 $(b+a-c)+a+b+c$。

设 $a=x,b=y,c=z,(b+a-c)+a+b+c=w$，据已知条件及所设物元，得方程组

$$\begin{cases}-2y+x+z=0 & \text{今式}\\ -y^2x+4y+2x-x^2+4z+xz=0 & \text{云式}\\ y^2+x^2-z^2=0 & \text{三元之式}\\ 2y-w+2x=0 & \text{物元之式}\end{cases}$$

按沈氏细草，四元之中先消天元 x。“倍今式与物元之式相消”即 2 × 今式 − 物元之式，得

$$-6y+w+2z=0 \qquad \text{上位}$$

“剔云式与三元之式，相消得”，云式亦即

$$-x^2+(-y^2+2+z)x+(4y+4z)=0$$

三元之式亦即

$$x^2+(y^2-z^2)=0$$

两式消得

$$(-y^2+2+z)x+(y^2+4y+4z-z^2)=0$$

“又以物元之式消之得”，物元之式即

$$2x+(2y-w)=0$$

与上式消得

$$-2y^3+y^2w-2y^2-4y-2w-wz-8z+2z^2+2yz=0 \qquad \text{中位}$$

“剔三元之式与物元之式，相消得”，三元之式即

$$x^2+(y^2-z^2)=0$$

物元之式即

$$2x+(2y-w)=0$$

相消，得

$$(2y-w)x-2(y^2-z^2)=0$$

再以物元之式消之，得

$$8y^2-4yw+w^2-4z^2=0 \qquad \text{下位}$$

至此，天元 x 已经消去，由上位、中位、下位构成一个三元方程组，即

$$\begin{cases}2z+(-6y+w)=0 & \text{上位}\\ 2z^2+(2y-w-8)z+(-2y^3+y^2w-2y^2-4y-2w)=0 & \text{中位}\\ -4z^2+(8y^2-4yw+w^2)=0 & \text{下位}\end{cases}$$

按沈氏细草，三元之中先消去人元 z，余地元 y，物元 w。然后作物易天位，即将 w 代换为 x，得二元方程组

$$\begin{cases} 2y^3-22y^2-y^2x+28y+10yx-2x^2-x^2=0 & \text{前式} \\ -7y+2x=0 & \text{后式} \end{cases}$$

再得

$$\begin{cases} 8xy+294+3x-4x^2=0 & \text{右式} \\ -7y+2x=0 & \text{左式} \end{cases}$$

最后得方程

$$4x^2-7x-686=0$$

开得 $x=14$。据物易天位，即 $w=14$。

本题沈草较为简略，以上的说明不得不参考其二元和三元的细草。因所得各式均与沈草相同，亦可说明沈钦裴关于四元消法的深入理解。本题前式、后式相消须消末项，否则不得朱氏方程。

四元术确是中国传统数学的一项重要成就。由今视之，因受到筹算系统的限制，四元术的表示法向多元发展的可能性不大。互乘对消法导致增根与减根问题亦不可避免。《四元玉鉴》中的三元和四元问题均以勾股形设问亦有一定的局限性。勾股形三边任知其二，由勾股定理可得另一边。故此类问题理论上由二元术即可解决。

第十九章　垛积术、招差术

中国传统数学在宋元时期产生了一个新的分支，并得到了充分发展，这就是垛积术，也就是现今的高阶等差级数求和及其反求的算法。宋元时期手工业发达，生产大量的坛子、罐子、瓶子等，堆垛成如《九章算术》讨论过的多面体的形状。数学家们认识到，不能用《九章算术》的多面体的体积公式求其个数，便创造了垛积术。这是宋元时期发展起来的新的数学分支，也是宋元数学高潮的一个重要方面。在此基础上，又发展了招差术。

第一节　垛　积　术

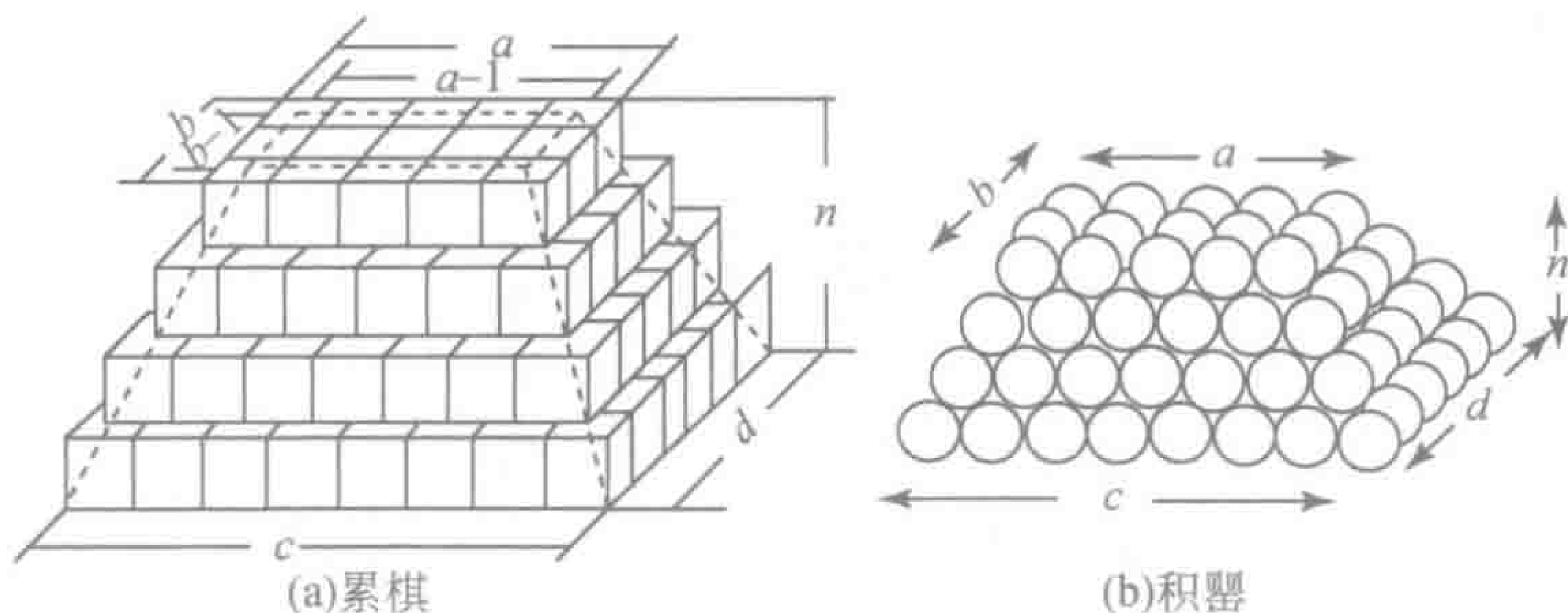
一　隙　积　术

垛积术最先称为隙积术。隙积术是一类二阶等差数列求和的算法。若一个数列，每相邻两项之差不相等，但其相邻两项差的差即二阶差均相等，则称为二阶等差数列；同样，若其二阶差不相等，而其三阶差均相等，则称为三阶等差数列；如此类推。二阶及其以上的等差数列称为高阶等差数列。

隙积术始见于北宋沈括《梦溪笔谈》卷十八。他发现："算术求积尺之法，如刍荫、刍童、方池、冥谷、堑堵、鳖臑、圆锥、阳马之类，物形备矣，独来未有隙积一术。"遂创造隙积术。他说：

> 隙积者，谓积之有隙者。如累棋、层坛及酒家积罂之类，虽似覆斗，四面皆杀，缘有刻缺及虚隙之处，用刍童法求之，常失于数少。予思而得之，用刍童法为上行，下行别列下广，以上广减之，余者以高乘之，六而一，并入上行。①

累棋是将棋累积成垛，层坛是四个侧面为阶梯形的平台，积罂是酒坛子垛。图 19-1-1(a) 是棱长为 1 的立方棊累积而成的一个垛。图 19-1-1(b) 是积罂示意图。累棋、层坛和积罂均形



(a)累棋　　(b)积罂

图 19-1-1　垛积示意图

① 胡道静，梦溪笔谈校证，上海古籍出版社，1987 年。

似刍童而有刻缺、虚隙。若以《九章算术》商功卷刍童术求积，则所得结果小于真值。设累棋、层坛或积罂的上广为 a，上袤为 b，下广为 c，下袤为 d，高为 n（在积罂的情形视个数为长度），沈括给出其体积或总数公式为

$$V=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a)$$

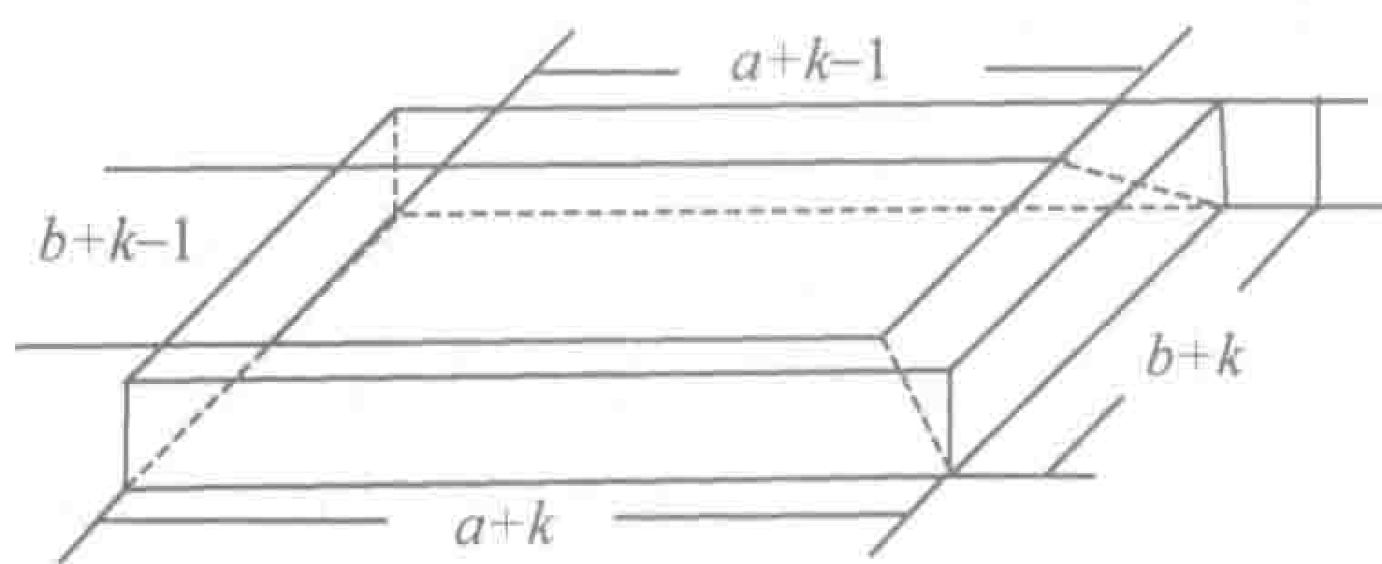


图 19-1-2　羡积示意图

沈括原文没有给出该式的推导过程，仅在夹注中指出："刍童求见实方之积，隙积求见合角不尽益出羡积也。" 据此，该式的推导过程可作如下的推测。如图 19-1-1(a) 所示，依刍童术得累棋所含实方之积为

$$V_1=\frac{n}{6}\{[2(b-1)+d](a-1)+[2d+(b-1)]c\}$$

如图 19-1-2 所示，累棋第 $(k+1)$ 层益出羡积等于长方体与所含小实方之积的差。长方体的体积为

$$(a+k)(b+k)\cdot 1$$

小实方之积为

$$\frac{1}{6}\{[2(b+k-1)+(b+k)](a+k-1)+[2(b+k)+(b+k-1)](a+k)\}$$

$$=(a+k)(b+k)-\frac{1}{2}(a+b)-k+\frac{1}{3}$$

于是第 $(k+1)$ 层的益出羡积为 $\frac{1}{2}(a+b)+k-\frac{1}{3}$，从而得到累棋的益出羡积

$$V_2=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}(a+b)+k-\frac{1}{3}\right]=\frac{n}{6}[3(a+b)+3(n-1)-2]$$

由 V_1，V_2，并注意到 $c=a+(n-1)$，$d=b+(n-1)$，得

$$V=V_1+V_2=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a)$$

由该式所得累棋体积值与立方棋总数相等，故该式亦即累棋求和公式。若立方棋视为所积之罂，则得积罂求和公式

$$s=ab+(a+1)(b+1)+\cdots+cd=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a)$$

二　垛　积　术

垛积术是高阶等差数列的项数与和数互求的算法，即由层数求某一垛积的总和，或由其总和求其层数。隙积术之后，不仅垛积的种类增加，并且与当时业已成熟的天元术和贾宪三角形联系起来，使得垛积术的内容大为丰富，为垛积求和通法的创立奠定基础。

（一）杨辉的垛积术

南宋杨辉《详解九章算法》商功卷将垛积求和问题附于多面体体积问题之后，称为

"比类"。其中，方垛在方亭之后。杨辉在方亭的"比类"中说：

方垛上方四个，下方九个，高六个。问：计几何？

术曰：上下方各自乘，上下方相乘——本法。上方减下方，余半之。原积添此[①]，相并，以高乘，三而一。

设方垛下方为 a，上方为 b，高 h，积为 s，则

$$s=a^2+(a+1)^2+\cdots+b^2=\frac{n}{3}(a^2+b^2+ab+\frac{a-b}{2})$$

果子垛在方锥之后。杨辉在方锥的"比类"中说：

果子一垛，下方一十四个。问：计几何？

术曰：下方加一，乘下方，为平积。又加半，为高。以乘之[②]，为高积。如三而一。

设果子垛下方为 n，积为 s，则

$$s=1^1+2^2+\cdots+n^2=\frac{n}{3}(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

三角垛在鳖臑之后。杨辉在鳖臑的"比类"中说：

三角垛下广一面一十二个，上尖。问：计几何？

术曰：下广，加一乘之，平积。下广加二乘之，立高方积，如六而一。本法。

设三角垛下方为 n，积为 s，则

$$s=1+3+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$$

另一果子垛在刍童之后。杨辉在刍童的"比类"中说：

果子一垛，上长四个，广二个。下长八个，广六个。高五个。问：计几何？

法曰：倍上长，并下长，以上广乘之，得三十二。别倍下长，并上长，以下广乘之，得一百二十。二位相并，一百五十二。此刍童治积本法。以上长减下长，余四，亦并之。——果子乃是圆物，与方积不同，故增入此段。——以高乘之，七百八十。如六而一。亦刍童本法。

设此果子垛下广为 a，长为 b，上广为 c，长为 d，高 n，方垛积为 s，则

$$s=ab+(a+1)(b+1)+\cdots+cd=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2b+d)c]+\frac{n}{6}(c-a)$$

上述前三垛为杨辉新增，第四垛与沈括的结果相同。前三垛可视为第四垛的特殊情形。杨辉原著仅载上述结果，并未指出其来源或推导过程。既然诸垛求和法附于形状相应的体积求法之后，则其结果可能借助体积概念导出。近年的研究指出，杨辉可能由"果垛验合"的方法导出以上的结果。[③] 杨辉自序称，"叠垒积者，以形测之"，"凡题法解白不明者，别图而验之"。据此亦可知，沈括隙积术及杨辉垛积术之名称虽有不同，而均源自实物按规则的垛积，则无不同。

① "原积"，《宜稼堂丛书》本讹作"圆积"，今依意校正。

② "之"，《宜稼堂丛书》本讹作"下方"，今依意校正。

③ 傅大为，中算史"垛积术"源流新论，见：傅大为，异时空里的知识追逐，东大图书公司，1992 年，第 75 页。刘钝，大哉言数，辽宁教育出版社，1993 年，第 385 页。

(二) 朱世杰的垛积术

元朱世杰《四元玉鉴》(1303) 以贾宪三角形为基础，予以垛积术全面的讨论。在《四元玉鉴》卷中茭草形段、如像招数及卷下果垛叠藏等三门中论及更多的垛积。茭草形段门在使用天元术列方程时应用了一系列三角垛的求积公式。

第1题是茭草落一形垛（略去答案，下同）：

今有茭草六百八十束，欲令落一形埵之。问：底子几何？

术曰：立天元一为落一底子，如积求之。得四千八十为益实，二为从方，三为从廉，一为正隅，立方开之。

这是已知茭草落一形垛之积680，利用茭草落一形垛的求积公式：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2}r(r+1)=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

列出三次方程，求出茭草落一形垛的底子15。显然，茭草落一形垛就是杨辉的三角垛。

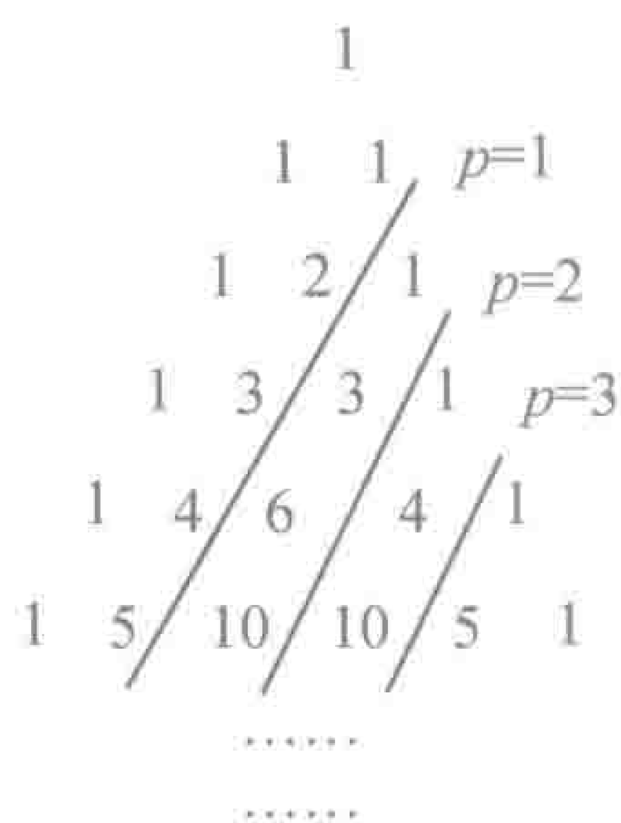


图 19-1-3　三角垛表

第2题是撒星形垛：

今有茭草一千八百二十束，欲令撒星形埵之。问：底子几何？

术曰：立天元一为撒星底子，如积求之。得四万三千六百八十为益实，六为从方，一十一为从上廉，六为从下廉，一为正隅，三乘方开之。

这是已知撒星形垛之积1820，利用撒星形垛的求积公式：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

列出四次方程，求出撒星形垛的底子13。撒星形垛又称为三角落一形垛。

第4题是撒星更落一形垛

今有茭草八千五百六十八束，欲令撒星更落一形埵之。问：底子几何？

术曰：立天元一为撒星更落一底子，如积求之。得一百二万八千一百六十为益实，二十四为从方，五十为从上廉，三十五为从二廉，一十为从三廉，一为正隅，四乘方开之。

这是已知撒星更落一形垛之积8568，利用撒星更落一形垛的求积公式：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{4!}r(r+1)(r+2)(r+3)=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

列出五次方程，求出撒星更落一形垛的底子14。撒星更落一形垛又称为三角撒星形垛。

《四元玉鉴》卷下果垛叠藏门第6题是三角撒星更落一形垛：

今有三角撒星更落一形果子，积九百二十四个。问：底子几何？

术曰：立天元一为三角撒星更落一底子，如积求之。得六十六万五千二百八十为益实，一百二十为从方，二百七十四为从上廉，二百二十五为从二廉，八十五为从三廉，一十五为从四廉，一为从隅，五乘方开之。

这是已知三角撒星更落一形垛之积924，利用三角撒星更落一形垛的求积公式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5!}r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

列出六次方程，求出三角撒星更落一形垛的底子7。

总之，朱世杰在这里使用了三角垛的系列公式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)\quad(19\text{-}1\text{-}1)$$

当$p=1, 2, 3, \cdots$时分别称为茭草垛、茭草落一形垛（三角垛）、撒星形垛（三角落一形垛），等等。后来李善兰等将它们分别称为一乘三角垛、二乘三角垛、三乘三角垛等。

《四元玉鉴》果垛叠藏门第13题用到四角垛：

> 今有四角垛果子一所，令甲、乙、丙分之。甲分五百九十个，乙分四百四十六个，丙分二百四个。从下给甲，次中与乙，次上与丙。问：各分层数几何？
>
> 术曰：立天元一为共高层数。如积求之，得七千四百四十为益实，一为从方，三为从廉，二为从隅。立方开之，得共高层数。

这是已知四角垛之积$590+446+204=1240$，利用四角垛求和公式

$$\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{1}{3!}n(n+1)(2n+1)$$

列出三次方程，求出四角垛共高15层。

《四元玉鉴》果垛叠藏门第3题是四角落一形垛问题：

> 今有四角落一形果子，积五百四十个。问：底子几何？
>
> 术曰：立天元一为四角落一底子，如积求之。得六千四百八十为益实，二为从方，五为从上廉，四为从下廉，一为正隅，三乘方开之。

这是已知四角落一形垛之积540，利用四角落一形垛的求积公式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(2r+1)=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(2n+1)$$

列出四次方程，求出底子每面8个。

总之，朱世杰使用了四角垛系列公式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-2)(2r+p-2)$$
$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(2n+p-1)\quad(19\text{-}1\text{-}2)$$

当$p=2, 3$时分别称为四角垛、四角落一形垛。

如果三角垛的各项再乘以该项的项数，即以$\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)r$为通项的垛积，称为岚峰形垛。《四元玉鉴》卷中茭草形段门第3题是岚峰形垛问题：

> 今有茭草三千三百六十七束，欲令岚峰形堆之。问：底子几何？
>
> 术曰：立天元一为岚峰底子，如积求之。得八万八百八为益实，二为从方，九为从上廉，十为从下廉，三为从隅，三乘方开之。

这是已知岚峰形垛之积3367，利用岚峰形垛的求积公式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)\cdot r=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

列出四次方程，求出底子每面12。

《四元玉鉴》卷下果垛叠藏门第4题是三角岚峰形垛问题：

今有三角岚峰形果子，积六百三十个。问：底子几何？

术曰：立天元一为三角岚峰底子，如积求之。得七万五千六百为益实，六为从方，三十五为从上廉，五十为从二廉，二十五为从三廉，四为从隅，四乘方开之。

这是已知三角岚峰形垛之积630个，利用三角岚峰形垛的求积公式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)\cdot r=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)$$

列出五次方程，求出底子每面6。三角岚峰形垛在卷中茭草形垛门中称为岚峰更落一形垛。

因此，朱世杰使用了岚峰形垛的前 n 项和的公式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)\cdot r$$
$$=\frac{1}{(p+2)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)[(p+1)n+1] \qquad (19\text{-}1\text{-}3)$$

当 $p=1, 2, 3\cdots$ 时，分别是四角垛、岚峰形垛、三角岚峰形垛或岚峰更落一形垛，等等。

此外朱世杰尚使用了属于下列类型的垛积求和公式：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-2)(2r+p-2)\cdot r$$
$$=\frac{1}{(p+2)!}n(n+1)(n+2)\cdots[n+(p-1)][2(p+1)n^2$$
$$+(p^2+2)n+(p-2)] \qquad (19\text{-}1\text{-}4)$$

当 $p=3$ 时称为四角岚峰垛，见《四元玉鉴》果垛叠藏门第5题

上述公式（19-1-1）即《四元玉鉴》卷首所载“古法七乘方图”的性质。如图19-1-3所示，第 p 斜行前 n 个数的和等于第 $p+1$ 斜行第 n 个数。该性质以算式表出即公式（19-1-1）。第 p 斜行的第 r 个数是 $\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$，第 $p+1$ 斜行的第 r 个数是 $\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p)$，由此易得公式（19-1-1）。此外，《四元玉鉴》还涉及下列各种垛积：

$$\sum_{r=1}^{n}r[a+(r-1)b]=\frac{1}{3!}n(n+1)[2bn+(3a-2b)]$$

$$\sum_{r=1}^{n}r[a+(n-r)b]=\frac{1}{3!}n(n+1)[bn+(3a-b)]$$

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)[a+(r-1)b]=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)[3bn+(4a-3b)]$$

$$\sum_{r=1}^{n}r^2[a+(n-r)b]=\frac{1}{3!}n(n+1)\frac{bn^2+(4a-b)n+2a}{2}$$

在上列各垛中，公式（19-1-3），公式（19-1-4）分别是公式（19-1-1），公式（19-1-2）的“变垛”，即公式（19-1-1），公式（19-1-2）的通项分别乘以项数 r 作为公式（19-1-3），公式

(19-1-4) 的通项。在上列各式中，公式（19-1-1）具有基本的意义①，其他各式均可以公式（19-1-1）为基础导出，而所用的推导方法很可能是《四元玉鉴》中的招差术。

第二节　招　差　术

招差术是推导多项式的差分表达式的算法。此法系推导高阶等差数列求和公式及建立插值多项式的一般方法。元《授时历》（1280）用以建立三次插值多项式，《四元玉鉴》（1303）则用以推导高阶等差数列求和公式。

一　《授时历》的招差术

《授时历》"创法五端"之中，太阳盈缩、月行迟疾的计算即用招差术进行计算。兹以太阳在黄道运行的盈缩为例说明之。若一周天按 365.25 度计算，则每象限为 91.31 度。《授时历》测得冬至前后的象限与夏至前后象限各以 88.91 日和 93.71 日通过。按太阳每日平行 1 度，前者的盈积与后者的缩积各为 2.40 度。计算冬至前后的积差公式为

$$f(x)=513.32x-2.46x^2-0.0031x^3 \tag{19-2-1}$$

其中，$0\leqslant x\leqslant 88.91$。$x$ 的一次项、二次项、三次项的系数（均取正值）分别称为定差、平差、立差。

《授时历》将 88.91 日分为 6 段，每段 $t=14.82$ 日。测得太阳在 t，$2t$，…，$6t$ 各点的实行度，减去相应的平行度，得积差 $f(kt)$，$k=1$，2，…，6。各以其积日除积差得日平差 $\frac{f(kt)}{kt}$。求日平差的一差、二差。据《明史》历志三所载，上述结果列为表 19-2-1。

表 19-2-1　《授时历》积日、积差表

段数	积日	积差	日平差	一差	二差
1	14.82	7058.0	476.25	-38.45	-1.38
2	29.64	12976.4	437.80	-39.83	-1.38
3	44.46	17693.7	397.97	-41.21	-1.38
4	59.28	21148.7	356.76	-42.59	-1.38
5	74.10	23280.0	314.17	-43.97	
6	88.92	24026.2	270.20		

① 因第 $p+1$ 斜行的第 n 个数等于同行前 n 个数的和减去前 $n-1$ 个数的和，故式（19-1-1）即 $\sum^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)=\sum^{n}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p)-\sum^{n-1}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p)$

或

$$\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)=\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p)-\frac{1}{(p+1)!}(r-1)r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$

此即

$$C_{r+p-1}^{p}=C_{r+p}^{p+1}-C_{r+p-1}^{p+1}$$

亦即

$$C_{r+p-1}^{p}+C_{r+p-1}^{p+1}=C_{r+p}^{p+1}$$

令 $r+p=m$，$p=k$，则 $C_{m-1}^{k}+C_{m-1}^{k+1}=C_{m}^{k+1}$。此即今所称之贾宪三角形的基本性质。

清梅文鼎《平立定三差详说》称："载考《历草》，并以盈缩日数离为六段，各以段日除其段之积度，得数，乃相减为一差，一差又相减为二差，则其数齐同，乃缘此以生定差及平差、立差。"以下据此推导积差公式。若将积差视为太阳在各段日所行路程，则日平差为该段以日为单位的平均速度。因二差各项相等，则一差及日平差的通项公式均可确定。记第1段日平差 $476.25=\alpha$，一差 $-38.45=-\beta$，二差 $-1.38=-\gamma$。因各段日的二差是一个常数列，共 $(n-2)$ 项，故其和为 $-(n-2)\gamma$。一差是一个等差数列，共 $(n-1)$ 项，其通项为 $-\beta-(k-2)\gamma$，其和为 $-(n-1)\beta-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\gamma$。日平差是一个二阶等差数列，共 n 项，其通项为

$$\frac{f(kt)}{kt}=\alpha-(k-1)\beta-\frac{1}{2}(k-1)(k-2)\gamma=(\alpha+\beta-\gamma)-(\beta-\frac{3}{2}\gamma)k-\frac{\gamma}{2}k^2 \qquad (19\text{-}2\text{-}2)$$

令 $kt=x$，$0<x\leqslant 88.91$，则 $k=\frac{x}{t}$。于是

$$f(x)=(\alpha+\beta-\gamma)x-\frac{\beta-\frac{3}{2}\gamma}{t}x^2-\frac{\frac{\gamma}{2}}{t^2}x^3=ax-bx^2-cx^3 \qquad (19\text{-}2\text{-}3)$$

又，初日即冬至时刻积差为零，亦即 $f(0)=0$。将 α，β，γ，t 的数值代入公式（19-2-3），即得积差公式（19-2-1），$0\leqslant x\leqslant 88.91$。

对照《明史》历志三，α 为泛平积，$\beta-\gamma$ 为泛平积差，$\frac{\gamma}{2}$为泛立积差。

$$定差=泛平积+泛平积差=\alpha+\beta-\gamma$$

$$平差=\frac{泛平积差-泛立积差}{段日}=\frac{\beta-\frac{3}{2}\gamma}{t}$$

$$立差=\frac{泛立积差}{段日\times段日}=\frac{\frac{\gamma}{2}}{t^2}$$

此与公式（19-2-3）一一相合。

既得公式（19-2-3），则可得逐日的积差及其一差、二差、三差。因初日的积差为零，初日的一差 δ，二差 ε，三差 ζ，分别为

$$\delta=a-b-c=510.8569$$
$$\varepsilon=-2b-6c=-4.9386$$
$$\zeta=-6c=-0.0186$$

《授时历》据此四个数值列为表格依次加减求得逐日积差。参见表19-2-2。

表 19-2-2　《授时历》逐日积差表

积日	积差	一差	二差	三差
0	0	510.8569	-4.9386	-0.0186
1	510.8569	505.9183	-4.9572	…
2	1016.7752	500.9611	…	…
3	1517.7363	…	…	
…	…	…	…	
89	…			

上述表格算法的依据即三次插值公式

$$f(x)=510.8569x-4.9386\frac{x(x-1)}{2!}-0.0186\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \quad (19\text{-}2\text{-}4)$$

此式不见记载。《明史·历志三》称510.8569，4.9386，0.0186分别为加分，平立合差，加分立差。公式（19-2-2）是求得式（19-2-1）的关键。式（19-2-2）是一个二阶等差数列通项的差分表达式。该式与二次的牛顿向前插值公式形式相同。其各阶差分由表（19-2-1）给出。

二　《四元玉鉴》的招差术

《四元玉鉴》卷中第十门“如像招数”系统地讨论高阶等差数列求和问题，并以贾宪三角形为基础将招差术一般化。

“如像招数”门共五题，依次讨论等差数列、二阶等差数列及三阶等差数列的求和，并进一步讨论以其和式为通项的二次求和。据第五题自注知所用求和法即招差术，兹以为例说明于后。此题是：

> 今有官司依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺。每人日支钱二百五十文。已招二万三千四百人，支钱二万三千四百六十二贯。问：招来几日？
>
> 术曰：立天元一为三角落一底子，如积求之。得九万二千七百三十六为益实，六百六十为从方，一百八十一为从上廉，二十二为从下廉，一为正隅，三乘方开之，得三角落一底子一十二个。加三即日数。钱求日术曰：立天元一为三角撒星底子，如积求之。得五百六十一万八百四十为益实，一万八千三百六十二为从方，六千三百九十为从上廉，一千七十五为从二廉，九十为从三廉，三为正隅，四乘方开之，得三角撒星底子一十二个。加三即日数。或问：还原依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，得数为兵。今招一十五方。每人日支钱二百五十文。问：招兵及支钱各几何？答曰：兵二万三千四百人，钱二万三千四百六十二贯。术曰：求得上差二十七，二差三十七，三差二十四，四差六。求兵者：今招为上积。又今招减一为茭草底子，积为二积。又今招减二为三角底子，积为三积。又今招减三为三角落一［底子］，积为下积。以各差乘各积，四位并之，即招兵数也。求支钱者：以今招为茭草［底子］，积为上积。又今招减一为三角底子，积为二积。又今招减二为三角落一［底子］，积为三积。又今招减三为三角撒星［底子］，积为下积。以各差乘各积，四位并之。所得，又以每日支钱乘之，即得支钱之数也。

该题“或问”由两部分构成。第一部分是：按照3^3，4^3，5^3，…$(r+2)^3$，…招兵，共招15日。问招兵总数。第二部分是：按上述数列招兵，共招15日，每人每日支钱250文。问支钱总数。

设招兵n日。依照术文，先求得上差27，二差37，三差24，下差6。又求上积n，二积$\sum^{n-1}r$，三积$\sum^{n-2}\frac{1}{2!}r(r+1)$，下积$\sum^{n-3}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)$。招兵总数等于“以各差乘各积，四位并之”，即

$$f(n)=\sum^{n}(r+2)^3=27n+37\sum^{n-1}r+24\sum^{n-2}\frac{1}{2!}r(r+1)+6\sum^{n-3}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2) \quad (19\text{-}2\text{-}5)$$

亦即

$$f(n)=\sum^{n}(r+2)^{3}=27n+37\times\frac{1}{2!}(n-1)n$$
$$+24\times\frac{1}{3!}(n-2)(n-1)n+6\times\frac{1}{4!}(n-3)(n-2)(n-1)n$$

将 $n=15$ 代入，得 $f(n)=23400$(人)，即 15 日招兵总数。

求支钱总数须以第 r 日招兵 $f(r)$ 乘以每人每日支钱数 250 文为通项求和

$$F(n)=\sum^{n}250f(r)=250\sum^{n}\Big[27r+37\times\frac{1}{2!}(r-1)r+24\times\frac{1}{3!}(r-2)(r-1)r+$$
$$6\times\frac{1}{4!}(r-3)(r-2)(r-1)r\Big]=250\Big[27\sum^{n}r+37\sum^{n-1}\frac{1}{2!}r(r+1)$$
$$+24\sum^{n-2}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)+6\sum^{n-3}\frac{1}{4!}r(r+1)(r+2)(r+3)\Big]$$
$$=250\times\Big[27\times\frac{1}{2!}n(n+1)+37\times\frac{1}{3!}(n-1)n(n+1)+24\times\frac{1}{4!}(n-2)(n-1)n(n+1)$$
$$+6\times\frac{1}{5!}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\Big]$$

将 $n=15$ 代入，得 $F(n)=23462$（贯），即 15 日支钱总数。

公式（19-2-5）是求解本题的关键。该式不仅给出垛积 $\sum^{n}(r+2)^{3}$ 的结果，而且显示垛积求和的一般方法。质言之，该式结构显示，给定的垛积可依次分解为诸乘三角垛的和，诸乘三角垛的系数亦即诸差由所给的垛积决定。以公式（19-2-5）为例。立方招兵可依下列算式分解。

$$\begin{array}{lllllllll}
 & 27 & 64 & 125 & 216 & 343 & 512 & \cdots & (n+2)^{3}\\
-) & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & \cdots & 27\\
\hline
 & 0 & 37 & 98 & 189 & 316 & 485 & \cdots & (n+2)^{3}-27\\
-) & & 37 & 37\times2 & 37\times3 & 37\times4 & 37\times5 & \cdots & 37\times(n-1)\\
\hline
 & & 0 & 24 & 78 & 168 & 300 & \cdots & (n+2)^{3}-27-37\times(n-1)\\
-) & & & 24 & 24\times3 & 24\times6 & 24\times10 & \cdots & 24\times\frac{1}{2!}(n-2)(n-1)\\
\hline
 & & & 0 & 6 & 24 & 60 & \cdots & (n+2)^{3}-27-37\times(n-1)-24\times\frac{1}{2!}(n-2)(n-1)\\
-) & & & & 6 & 6\times4 & 6\times10 & \cdots & 6\times\frac{1}{3!}(n-3)(n-2)(n-1)\\
\hline
 & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n+2)^{3}-27-37\times(n-1)-24\times\frac{1}{2!}(n-2)(n-1)\\
 & & & & & & & & -6\times\frac{1}{3!}(n-3)(n-2)(n-1)=0
\end{array}$$

由此可得

$$f(n)=\sum^{n}(r+2)^3=27(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{\text{共}n\text{项}})+37[\underbrace{1+2+3+\cdots+(n-1)}_{\text{共}(n-1)\text{项}}]$$

$$+24[\underbrace{1+3+6+\cdots+\frac{1}{2!}(n-2)(n-1)}_{\text{共}(n-2)\text{项}}]+6[\underbrace{1+4+10+\cdots+\frac{1}{3!}(n-3)(n-2)(n-1)}_{\text{共}(n-3)\text{项}}]$$

亦即

$$f(n)=27n+37\sum^{n-1}r+24\sum^{n-2}\frac{1}{2!}r(r+1)+6\sum^{n-3}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)$$

此即公式（19-2-5）。

同法可得该门其余各题求和公式。例如，第一题求差夫总数

$$f(n)=\sum^{n}[64+7(r-1)]=64n+7\times\frac{1}{2!}(n-1)n$$

第四题平方招兵总数

$$f(n)=\sum^{n}(r+4)^2=25n+11\cdot\frac{1}{2!}(n-1)n+2\cdot\frac{1}{3!}(n-2)(n-1)n \quad (19\text{-}2\text{-}6)$$

由公式（19-2-5）所示的方法并结合不完全归纳法即可求得朱世杰四角垛、岚峰垛及四角岚峰垛求和公式。

高阶等差数列的通项常可表示为多项式。以多项式为通项的数列是一个高阶等差数列。多项式的次数即高阶等差数列的阶数。用代数知识可以证明，任一多项式常可表为诸乘三角垛的和（$p=0,1,2,\cdots$），各三角垛的系数即诸差唯一确定。若所给多项式为一整值多项式则各三角垛的系数必为整数。故朱世杰的求和法果有一般性。

将给定的垛积依次分解为诸乘三角垛，而后再求其和，此一方法的建立当与面积和体积的分割求积法及三角垛求和法之运用有关。本门名为“如像招数”，或谓本门之算法与几何图形有关。杨辉《详解九章算法》（1261）、戴煦《四元玉鉴细草》（1844）及张煜《读玉鉴随笔》（1905）等均有类似的解释。具体图示此处从略。

由上述累减算式最后一行得

$$(n+2)^3=27+37(n-1)+24\times\frac{1}{2!}(n-2)(n-1)+6\times\frac{1}{3!}(n-3)(n-2)(n-1) \quad (19\text{-}2\text{-}7)$$

因而，上述累减算式实即建立式（19-2-7）的方法。由式（19-2-7）得

$$f(n)=\sum^{n}(r+2)^3$$
$$=27n+37\times\frac{1}{2!}(n-1)n+24\times\frac{1}{3!}(n-2)(n-1)n+6\times\frac{1}{4!}(n-3)(n-2)(n-1)n$$

此即式（19-2-5）。可见，式（19-2-7）是建立式（19-2-5）的关键。式（19-2-7）是一个三阶等差数列通项的差分表达式。该式与三次的牛顿向前插值公式的形式相同。其各阶差分由上述的累减算式给出。

朱世杰招差术的创立当与前人同类工作有关。朱氏以诸乘三角垛给出的垛积求和公式均可以逐项相减与逆推求和之法导出。兹以该门第四题平方招兵求和为例说明之。该题依 5^2，6^2，7^2，…，$(r+4)^2$，…招兵，共招 15 日。求招兵总数。先求诸差列。

上差列	25	36	49	64	81	…
二差列	11	13	15	17	…	
下差列	2	2	2	…		

然后求其和。下差列是一个常数列，共有（$n-2$）项。其和为$2(n-2)$。二差列是一个等差数列，共有（$n-1$）项，其通项为$11+2(r-2)$，其和为

$$\sum^{n-1}[11+2(r-2)] = 11(n-1)+2\times\frac{1}{2!}(n-2)(n-1)$$

上差列是一个二阶等差数列，共有n项，其通项为$25+11(r-1)+2\times\frac{1}{2!}(r-2)(r-1)$。由此易得式（19-2-6）

$$\sum^{n}\left[25+11(r-1)+2\times\frac{1}{2!}(r-2)(r-1)\right]=25n+11\times\frac{1}{2!}(n-1)n+2\times\frac{1}{3!}(n-2)(n-1)n$$

上述算法与《授时历》计算太阳盈缩积的算法相同。本题依平方招兵的数列是一个二阶等差数列，而《授时历》的“日平差”与每日加分亦为二阶等差数列。若将每日招兵数即上差列视为日平差，则每日招兵数的通项相当于日平差的通项。类似地，若将每日招兵数视为每日加分，则招兵总数即相当于积差。借助平方数的垛积将二阶等差数列求和问题予以简化与概括，又将沈括隙积术的分割方法改为依诸乘三角垛分割，则二阶等差数列求和公式即可建立。如引入立方数的垛积，则三阶等差数列求和公式亦可建立。《授时历》之颁行在《四元玉鉴》序成之前二十余年。《四元玉鉴》卷中之九第十九题需要沈括会圆术。故以数学背景而论，朱世杰的招差术与前人的工作基础不无联系。

第二十章　大衍总数术与纵横图

第一节　大衍总数术

一　大衍总数术的由来

“大衍总数术”是秦九韶在《数书九章》卷一“大衍”类问题中提出的求解一次同余方程组的方法。大衍数系指《易传》中揲蓍法演卦之数。《周易·系辞上》有“大衍之数五十，其用四十有九”的说法，后人对这句话有很多不同的理解。“大衍”中的“大”指大数，“衍”即是“演”。“大衍”就是用大数以演卦。①《易经》中的筮法确实是大衍法的来源之一。秦九韶说：“圣有大衍，微寓于易。奇余取策，群数皆捐。衍而究之，探隐知原。”很明显，秦九韶认为《易经》中蕴含着大衍法的奥秘。为了弄清这一问题，我们先对《周易·系辞》中的筮法作一简单介绍。

占筮者摆好50根蓍草，实际只用49根。从这49根中抽出1根另放，然后把剩下的48根任意分为两堆。从每堆中逐次减去4根蓍草，直到每堆的余数不大于4为止。把两堆的余数加上1（即开始单放的1根），其和设为A。显然，A等于5或9。49减去A，会出现两种情况，一是余44，二是余40，这是第一次差。然后把这44根或40根蓍草，按上法操作，可得第二次差为40，36或32。最后把第二次差按上法操作，得到第三次差为36，32，28或24。用第三次差除以4，商得9，8，7或6，此四数分别称为老阳、少阴、少阳、老阴。经过以上三次演算，便能得到一爻，即是三变成爻。一卦有六爻，所以十八变方成一卦。

十分明显，从每堆蓍草中逐次减去4根的做法相当于一次同余方程中的以4为模，古人称之为“四四数之”。对每一堆蓍草，数的结果都会出现确定的余数。在频繁的占筮活动中，人们必然会注意到这种“某某数之，余某”的问题，这便是同余方程理论之渊源。更为重要的是，筮家占筮并非都是四四数之，如汉代扬雄的《太玄》中便是三三数之。此外还有六六数之、八八数之、九九数之等。模的不同会导致余数的不同，这种现象启发人们去考虑一次同余方程组。数学史上有名的《孙子算经》中的“物不知数”问题，可能就是从这类占筮问题发展起来的。

“物不知数”问题的同余方程组数字简单，可用试猜的方法解决。但若数字较大或同余方程较多，仅靠试猜便不能奏效。另外，题的模数若非两两互素，则更加难办。力求解决这些问题，正是秦九韶发明“大衍总数术”的动因。

“大衍总数术”的另一个来源是制定历法时推算上元积年的需要。古人治历首先注重历元，一定要以甲子那天恰好是夜半朔旦冬至作为起算的开始。于历元之外，古人还要求日月

① 张其成主编，易学大辞典，华夏出版社，1992年，第373页。

合璧、五星连珠定为上元①，作为一部历法的一个理想的起算点。从上元到编订某部历法那年（所求年）所积累的岁（年）数，就是上元积年。理论上，日月五星各有自己的运动周期和假定的起点，这些起点的时刻距离某年十一月朔前面的甲子夜半各有一个时间差数。以各个周期和相应的差数来推算上元积年，是一个整数论上的一次同余方程问题。② 例如，设 a 为一回归年的日数，b 为一朔望月的日数，R_1 为所求年的冬至时刻到前面一个甲子的夜半的全部日数，R_2 为所求年冬至离十一月平朔的时间间隔，则上元积年 N 满足一次同余方程组 $aN \equiv R_1 \pmod{60} \equiv R_2 \pmod{b}$。

西汉末年刘歆制定《三统历》时首次推算上元积年。《乾象历》以后，各历家都列上元以来积年为历法的第一条，直到元代郭守敬的《授时历》才废止了上元积年的推算。各历家推算上元积年的具体方法我们并不清楚，秦九韶认为他们不自觉地应用了“大衍总数术”或与之相同的方法，说：“历家虽用，用而不知。小试经世，姑推所为。”于是他深入研究了这个问题，提出“大衍总数术”，给出一次同余方程组的完整解法。

二　大衍总数术

《孙子算经》中的“物不知数”问题实际上应用了现代数论中的下述定理（一般被称为“孙子定理”）③：

设 m_1，m_2，…，m_k 是 k 个两两互素的正整数，$m = \prod_{i=1}^{k} m_i = m_i M_i$，$i=1$，2，…，$k$，则同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv R_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv R_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots \\ x \equiv R_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

的解是

$$x \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i M'_i R_i \pmod{m},$$

其中，$M_i M'_i \equiv 1 \pmod{m_i}$，$i=1$，2，…，$k$。

考察《数书九章》中“大衍”类九个问题的算草，知秦九韶解题过程与此定理蕴含的求解步骤大致相当，我们可以将孙子定理中的符号与《数书九章》中的术语对应起来。

孙子定理中的符号	m_i	m	M_i	M'_i	$M_i M'_i$	$M_i M'_i R_i$	$\sum_{i=1}^{k} M_i M'_i R_i$	x
《数书九章》中的术语	定数	衍母	衍数	乘率	用数	各总	总数	所求率数

① 古代历家都要强求更远的一元，假定其时的日分月分甲子食分乃至日月五星行度都在同时，才用为推算的总起点，称为上元。

② 陈遵妫，中国天文学史，上海人民出版社，2006 年，第 999，1000 页。

③ 闵嗣鹤、严士健，初等数论，第 2 版，人民教育出版社，1982 年，第 62 页。

《数书九章》“大衍”类的九个问题中，只有最后一题的模数是两两互素的，其余八题的模数都不满足这个条件。秦九韶将不两两互素的诸模数称为问数，他在解题时首先就将问数化为定数，即将不两两互素的模数化为两两互素，然后再用与孙子定理相当的方法求解。

初等数论中还有如下的结论：

设 m 是正整数 A_1，A_2，…，A_k 的最小公倍数，即 $m=[A_1, A_2, \cdots, A_k]$，那么一定可以找到一组正整数 m_1，m_2，…，m_k，满足：

（i）$m_i | A_i$，$i=1, 2, \cdots, k$；

（ii）m_1，m_2，…，m_k 两两互素，即 $(m_i, m_j)=1$，$i, j=1, 2, \cdots, k$，$i \neq j$；

（iii）$m=\prod_{i=1}^{k} m_i$。

并且，如果同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv R_1 \pmod{A_1} \\ x \equiv R_2 \pmod{A_2} \\ \cdots\cdots \\ x \equiv R_k \pmod{A_k} \end{cases}$$

有解①，则它的解与同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv R_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv R_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots \\ x \equiv R_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

的解相同。②

依此结论，我们可以验证秦九韶的解题方法大致正确。问数须满足的三个条件在秦氏著作中虽然没有明确记载，但如果按照“大衍总数术”的术文正确计算的话，所得的数均能满足这三个条件。

“大衍总数术”出现在《数书九章》卷一“大衍”类问题中，现将全文照录于下：

大衍总数术曰：置诸问数类名有四。一曰元数谓尾位见单零者，本门揲蓍、酒息、斛粜、砌砖、失米之类是也。二曰收数谓尾位见分厘者，假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日为一会而求积日之类。三曰通数谓诸数各有分子母者，本门问一会积年是也。四曰复数谓尾位见十或百及千以上者，本门筑堤并急足之类是也。

元数者，先以两两连环求等，约奇弗约偶。或约得五而彼有十，乃约偶而弗约奇。或元数俱偶，约毕可存一位见偶。或皆约而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍而后乃与姑置者求等约之。或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰复数，以复数格入之。

收数者，乃命尾位分厘作单零，以进所问之数，定位讫，用元数格入之。或如意立数为母，收进分厘，以从所问，用通数格入之。

通数者，置问数，通分内子，互乘之，皆曰通数。求总等，不约一位，约众位，得各元法数，用元数格入之。或诸母数繁，就分从省通之者，皆不用元，各母

① 有解的充要条件是 $(A_i, A_j) | (R_i - R_j)$。$i, j=1, 2, \cdots, k$；$i \neq j$。

② 潘承洞、潘承彪，初等数论，北京大学出版社，1992 年，第 175，176 页。

仍求总等，存一位，约众位，亦各得元法数，亦用元数格入之。

复数者，问数尾位见十以上者。以诸数求总等，存一位，约众位，始得元数。两两连环求等，约奇弗约偶、复乘偶，或约偶弗[①]约奇、复乘奇，皆续等下用之。[②]或彼此可约而犹有类数存者，又相减以求续等，以续等约彼则必复乘此，乃得定数。所有元数、收数、通数三格，皆有复乘求定之理，悉可入之。

求定数，勿使两位见偶，勿使见一太多。见一多，则借用繁；不欲借，则任得一。以定相乘为衍母，以各定约衍母，各得衍数。或列各定为母于右行，各立天元一为子于左行，以母互乘子，亦得衍数。

诸衍数，各满定母去之，不满曰奇。以奇与定，用大衍求一入之，以求乘率。或奇得一者，便为乘率。

大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数与左上一相生，入左下。然后乃以右行上下以少除多，递互除之，所得商数随即递互累乘，归左行上下，须使右上末后奇一而止。乃验左上所得，以为乘率。或奇数已见单一者，便为乘率。

置各乘率，对乘衍数，得泛用。并泛，课衍母，多一者为正用。或泛多衍母倍数者，验元数，奇偶同类者，损其半倍，或三处同类，以三约衍母，于三处损之。各为正用数。或定母得一而衍数同衍母者，为无用数。当验元数同类者，而正用至多处借之。以元数两位求等，以等约衍母为借数，以借数损有以益其无，为正用。或数处无者，如意立数为母，约衍母，所得以如意子乘之，均借补之。或欲从省勿借，任之为空可也。然后其余各乘正用，为各总。并总，满衍母去之，不满为所求率数。[③]

“大衍总数术”实际上包括三个部分：一是给出诸问数的定义，并给出将不两两互素的问数化为两两互素的定数的方法；二是求乘率的方法，即“大衍求一术”；三是用数的借补并给出求率数的方法。自清末以来许多推演秦九韶方法的著作[④]及 20 世纪的数学史著述大都将“大衍求一术”说成是秦九韶的一次同余方程组解法，显然是不恰当的。秦九韶求解一次同余方程组的方法是“大衍总数术”，“大衍求一术”只是其中的一部分，尽管是相当重要的一部分。[⑤] 下面分别阐述这三部分内容。

（一）求定数

1. 诸问数的定义及化约

秦九韶将问数分为四类：元数、收数、通数和复数。元数系指个位数字非零的整数，“蓍卦发微”、“推库额钱”、“分粜推原”、“余米推数”及“推计土功”五题的问数属于此类。收数系指小数，通数系指分数，由于分数、小数可以互化，所以收数、通数二类实为一类，“古历会积”一题的问数属于此类。复数系指个位数字为零的整数。“程行计地”、“程

---

① 诸本皆作“或”，四库馆臣校正为“弗”，今从。

② 四库馆臣以为此六字可省而删去，实误，今补回。

③ 此后略去“阴阳象数图”。

④ 清末推演秦九韶求解一次同余方程组方法的著作几乎全部冠以“求一术”之名，如张敦仁的《求一算术》、时曰醇的《求一术指》、黄宗宪的《求一术通解》等。

⑤ 郭书春，尊重原始文献、避免以讹传讹，自然科学史研究，2007，26（3）：438～448。

行相及”和“积尺寻源”三题的问数属于此类。

问数有收数的情形，有两种化法。一种是“如意立数为母”，即选取适当的数作为分母，将小数化为分数，也即将收数化为通数，再用通数化法去处理。另一种是恰当地扩大倍数，将小数化为整数，即将收数化为元数，再用元数化法去处理。即当 $N\equiv r_i(\bmod m_i)$，m_i 为小数时，由于 $N=k_im_i+r_i$，我们用 10^n（n 是 m_i 中小数部分的最大位数①）乘以该式两端，该式化为 $10^nN=k_i10^nm_i+10^nr_i$，即 $10^nN\equiv 10^nr_i(\bmod 10^nm_i)$，此时 10^nm_i 为整数，我们就可用元数化法去处理 $N'=10^nN\equiv 10^nr_i(\bmod 10^nm_i)$ 了，但这样得到的是 N'，而不是原问题的解，注意到 $N=\frac{N'}{10^n}$，才得到原问题的解。

问数有通数的情形，指导思想就是将分数化为整数，即将通数化为元数，再用元数化法去处理。也即当 $N\equiv r_i(\bmod m_i)$，m_i 为分数时，由于 $N=k_im_i+r_i$，我们用 λ 乘该式的两端，将该式化为 $\lambda N=k_i\lambda m_i+\lambda r_i$，此即 $\lambda N\equiv\lambda r_i(\bmod \lambda m_i)$，此时 λm_i 为整数，我们就可用元数化法去处理 $N'=\lambda N\equiv\lambda r_i(\bmod\lambda m_i)$ 了，但这样得到的 N' 不是原问题的解，$N=\frac{N'}{\lambda}$ 才是原问题的解。依秦氏术文，λ 的选择有两种方法。一种是“置问数，通分内子，互乘之”，这是说将带分数化为假分数，然后用分子遍乘其他分数的分母，即用所有分母的乘积去乘各分数。此时 λ 即为所有分母的乘积。另一种是“或诸母数繁，就分从省通之者，皆不用元”，这是说有时候分数的分母很大，将诸分母连乘会使运算复杂，此时均不再用原来的分母作乘法，而“就分从省通之”。以今之观点看来，这是说求诸分母的最小公倍数，此时 λ 即此数。不论怎样选取 λ，将分数化为整数后，对这些整数再“求总等，不约（存）一位，约众位”，这样约后得到的诸数秦氏称为“元法数”，可用元数化法处理。需要注意的是，这里的“元法数”并不是原问数本身，所以将“元法数”用元数化法处理成为两两互素（无等）的数时，计算并没有结束，因为这些化约后得到的数只能算是准定数②，它们并不是原问数的定数，还应将先前约去总等的诸数再乘以总等，然后以元数化法再次化约，这样得到的才是原问数的定数。也可以将总等只与一个准定数相乘，省去遍乘并再次化约之繁，而得定数，但前提是这样操作后所得诸数要两两无等。秦九韶就是因为忽略了这必须的再次化约或相乘，才导致有的问题将问数化定数时出错。

收数和通数最终都要先化为元数，再用元数求等化约的办法去求定数。诸元数的基本算法是先“两两连环求等”，即求问数 A_i 与 A_j（i，$j=1$，2，…，k，$i\neq j$）的最大公约数 $(A_i,A_j)=d_{ij}$，然后用 d_{ij} 再去约 A_i 或 A_j，其原则是“约奇弗约偶”。

2. 对“约奇弗约偶”的不同理解

由于秦九韶对“奇”、“偶”的意义和算法本身语焉不详，学术界一直有争论。归纳起来，这些解释大抵可分为三类。

第一类解释仅说明“约奇弗约偶”是一种原则，并未给出实质性的分析。有三种说法可归入此类。

---

① 事实上，r_i 也可为小数。当 r_i 与 m_j（i 不必等于 j）都有小数时，n 当是诸 r_i，m_j 中小数部分的最大位数。

② 依莫绍揆使用的称谓。莫绍揆，秦九韶大衍求一术的新研究，见：吴文俊主编，秦九韶与《数书九章》，北京师范大学出版社，1987 年，第 180～202 页。

李俨在《大衍求一术的过去和未来》中说：“至于说约奇弗约偶，是欲约后无等。”①

钱宝琮在《秦九韶〈数书九章〉研究》中说：“一般说，奇数是单数，偶数是双数。但这里所谓‘奇’、‘偶’是指两个不同的元数。”在《求一术源流考》一文中说：“约奇勿约偶，谓两数求得公因数后，只以公因数除其一数，不遍除也。其意与不约一位约众位同。”②

李文林、袁向东又将此引申，认为“‘约奇勿约偶’给出了化约的原则，即每求出两数的公因子之后，用它去约简两数中的一个，另一个保持不变。到底约哪一个？一般是有条件的，就是要使约简后的数与未约简的数互素”。③

第二类解释是将奇、偶认为是奇数、偶数。至于是将定数还是将等数视为奇数、偶数，约奇、约偶怎样约法，又有具体的不同。有七种说法可归入此类。

这类解释始于四库馆臣，其在元数格按语中指出：“约奇弗约偶，专为等数为偶者言之；若等数为奇者，则约偶弗约奇；而等数为五与十者，又有或约奇或约偶者矣。”④

梅荣照发展了这种观点，认为“‘奇’就是含有单数个‘等’的‘元数’，‘偶’就是含有双数个‘等’的‘元数’。当‘等’为双数时，就用‘等’去约‘奇’，‘偶’不约；当‘等’为单数时，就用‘等’去约‘偶’，‘奇’不约。这样，约后两数均为一单一双，互素的可能就比较大”。⑤

钱克仁的解释与梅荣照的解释大致相同。他说：“设 $A=ad$，$B=bd$，d 是 A，B 的‘等’。a 为单数（双数）时，A 称为‘奇’（‘偶’）。b 为单数（双数）时，B 称为‘奇’（‘偶’）。d 本身或为奇，或为偶。……两个问数进行约化时，等数为偶数（双数）时，‘约奇弗约偶’；等数为奇数（单数）时，‘约偶弗约奇’。总的原则是使两个问数求等相约后，没有公因数。”⑥

王翼勋在《秦九韶、时曰醇、黄宗宪的求定数方法》一文中讨论“奇”、“偶”的含义时认为：“奇、偶一般作为单、双解。秦九韶的‘两两连环求等，约奇弗约偶’中的‘奇’、‘偶’是除以‘等数’后所得商数的单、双称为‘奇’、‘偶’。”⑦ 后来，在《清代学者对“大衍总数术”的探讨》一文中又明确为：“奇偶一般作单双解。两数求等相约时，也根据除以等数后所得商数的单双，称两数为奇或为偶。两待约数可分一奇一偶时，优先约奇；遇有困难，再改约偶。”⑧

沈康身在解释秦九韶求定数的方法时认为：“甲、乙两数的最大公约数如果是偶数，就约简这两个数中经约简后的商是奇数的那个数，其余一个保留不变。最大公约数如果是奇数，就约简这两个数中经约简后的商是偶数的那个数。”⑨

---

① 李俨，大衍求一术的过去和未来，见：李俨钱宝琮科学史全集，第六卷，辽宁教育出版社，1998年，第123页。

② 钱宝琮，求一术源流考，见：李俨钱宝琮科学史全集，第一卷，辽宁教育出版社，1998年，第33页。

③ 李文林、袁向东，中国古代不定分析若干问题探讨，见：中国科学院自然科学史研究所数学史组，科技史文集，第8辑，上海科学技术出版社，1982年，第116页。

④ 南宋·秦九韶，数学九章，《四库全书》文渊阁本，台湾商务印书馆，1986年，第797册，第328页。

⑤ 梅荣照，秦九韶是如何得出求定数方法的，自然科学史研究，1987，6（4）：294。

⑥ 钱克仁，秦九韶大衍求一术中的求定数问题，见：杜石然主编，第三届国际中国科学史讨论会论文集，科学出版社，1990年，第53页。

⑦ 王翼勋，秦九韶、时曰醇、黄宗宪的求定数方法，自然科学史研究，1987，6（4）：308。

⑧ 王翼勋，清代学者对“大衍总数术”的探讨，见：梅荣照主编，明清数学史论文集，江苏教育出版社，1990年，第320～321页。

⑨ 沈康身，中算导论，上海教育出版社，1986年，第53页。

王守义认为，“奇”、“偶”是指元数的单、双，“约奇弗约偶”是指用两个元数的等数去约奇元数而不约偶元数。①

此类中上述六种说法大致是相同的，都是由等数的单、双决定元数的奇、偶，用单等约偶元，用双等约奇元。这样的解释有两点不足：一是根据等数的单、双决定元数的奇、偶会造成混乱。例如，4 和 6 两个数，他们的等数为 2，由于 $4=2\times2$，$6=2\times3$，这样就要将 4 称为偶数，将 6 称为奇数，而事实上 4 和 6 均是偶数。另一方面，用单等约偶元，用双等约奇元，这其实是将“约奇弗约偶”与“约偶弗约奇”作为并列的原则来对待，而考察秦氏术文和诸题演草，显见其将“约奇弗约偶”作为主要原则，在这样化约后两数不能互素时，方用“约偶弗约奇”的办法。

王渝生的说法与这六种不同，他认为：“秦九韶的‘约奇弗约偶’不必考虑等数的单双，‘奇’、‘偶’也并非是对元数的称谓。……‘约奇弗约偶’即是‘约得奇弗约得偶’，‘奇’、‘偶’是对约得数的称谓。”②

第三类解释认为在化约时元数的地位与作用不同，将奇、偶释为奇位与偶位，虽然表述不尽相同，但大意均是如此。有五种说法可归入此类。

李继闵认为元数两两连环求等时，“A_1，A_2，…，A_n 要两两相见，不重不漏，需要规定一定的排列顺序。从大衍九问的演草可见，秦九韶把它分为 $(n-1)$ 变来进行。一变：以 A_n 依次与 A_{n-1}，A_{n-2}，…，A_1 求等相约。二变：以 A_{n-1} 依次与 A_{n-2}，A_{n-3}，…，A_1 求等相约；……，k 变：以 A_{n-k+1} 依次与 A_{n-k}，A_{n-k-1}，…，A_1 求等相约；……。$n-1$ 变：A_2 与 A_1 求等相约。在每一变中，各元数 A_i 的地位不尽相同。例如，在 k 变中，A_{n-k+1} 要与多个（$n-k$ 个）元数配对相约，而其他元数仅只与 A_{n-k+1} 配合相约一次；为了表示这种区别，秦九韶将 k 变中的元数 A_{n-k+1} 称之为‘偶’，而把其余的元数 A_{n-k}，A_{n-k-1}，…，A_1 皆称之为‘奇’。所谓‘约奇弗约偶’，是说在 k 变中，一般是用等数去约处于‘奇’位的元数 A_j（$j<n-k+1$），而不约处于‘偶位’的元数 A_{n-k+1}。”③ 在另一篇论文中，李继闵又详细阐发了他的观点，称“元数 A_1，A_2，…，A_n 的排列顺序是任意的”，“诸元数两两互约要不重不漏，需要规定一定的组合顺序”，“通览秦氏原文，‘两两连环求等，约奇弗约偶’，是说在每一变中，两元数求等相约，一般是以等数去约‘奇’位上的元数，而不约‘偶’位上的元数”。④

莫绍揆在《秦九韶大衍求一术的新研究》一文中将诸元数 a_i 化为定数时，参考求诸 a_i 最小公倍数的方法，认为将诸 a_i 按其足码大小而定先后，则方法可以说是“两两连环求等，约后不约前”。具体讲就是“对每对 a_i，a_j 均求其等数 (a_i, a_j)，用这等数约 a_j（当 $j>i$ 时）而不约 a_i（约后不约前），而且必须按下列次序求等：a_1 依次与 a_2，a_3，…，a_n 求等（一变）；其次，a_2 依次与 a_3，a_4，…，a_n 求等（二变）；再次，a_3 依次与 a_4，a_5，…，a_n 求等（三变）；最后 a_{n-1} 与 a_n 求等（$n-1$ 变）。这种次序规定应包括在‘两两连环求等’

---

① 王守义，数书九章新释，安徽科学技术出版社，1992 年，第 10 页。

② 王渝生，秦九韶求“定数”方法的成就和缺陷，自然科学史研究，1987，6（4）：301。

③ 李继闵，关于“大衍总数术”中求定数算法的探讨，见：吴文俊主编，秦九韶与《数书九章》，北京师范大学出版社，1987 年，第 222 页。

④ 李继闵，秦九韶求定数算法“约‘奇’弗约‘偶’”辨析，见：吴文俊主编，中国数学史论文集（四），山东教育出版社，1996 年，第 58～59 页。

这句话之内作为其固有内容，直到第 $n-1$ 变做完以后，诸 a_i 便变成所求的准定数 b_i 了”。[①] 这个方法中按足码的大小而定诸 a_i 的先后，并且约后不约前，实质上考虑的也是诸元数的位置（或者说是地位），虽然没有“奇位”、“偶位”的说法，但是却分别将“奇”、“偶”赋予了“后位”、“前位”的意义。

李兆华在《秦九韶求定数法探讨》一文中明确提出：“元数两两连环求等时，先取一个依次与其他每个相配。我们把取的一个称为‘偶’，而将与之相配的一个称为‘奇’，这样可与书中的术草相符。如果奇与偶有最大公约数 d，以 d 约奇不约偶即所谓约奇弗约偶，类似地可以解释约偶弗约奇。”[②]

沈康身对“先以两两连环求等，约奇弗约偶”这句术文又有与前不同的解释：“我们理解奇为其余，偶为隅，那么后者是说：以 d_1 约其余的 m_i[③]，例如$\frac{m_{n-1}}{d_1}$，而不约取定在一旁（隅）的 m_n。”[④]

孔国平认为：“秦九韶把元数分为奇偶，目的是确定化约的顺序。在《数书九章》中，秦九韶或假定最下一数为偶，上面各数为奇；或假定最上一数为偶，下面各数为奇，概无例外。”[⑤] 这种将元数由上至下排序的做法，是人为地将奇、偶赋予了位置的意义。

此外，陈信传等所著的《〈数书九章〉今译及研究》一书中讨论“约奇弗约偶”是采用了莫绍揆和李继闵的意见。[⑥] 曲安京主编的《中国古代科学技术史纲 · 数学卷》一书中在讲述“大衍总数术”算法时采纳了李继闵的观点。[⑦]

关于“位”的这类解释有三点不足。第一，将“奇”、“偶”解释成“奇位”、“偶位”，实质上是变相更改了术文，即将“约奇弗约偶”改为了“约者为奇弗约者为偶”，这种更改恐怕较“约得奇弗约得偶”去秦氏原意愈远。第二，从后面所举的例子中能够看出，诸元数的地位是等同的，并非“不尽相同”。不论是“两两连环求等”还是“求总等，存一位，约众位”，从哪个元数开始做起并不决定得到的最终结果，也就是说最终的计算结果不会因为计算步骤的不同而不同。第三，这种解释仅仅是给出了对术文的一种理解，不具普遍性和可操作性。对于不同的题目和同一题目中不同的元数，“奇位”、“偶位”是没有规律可言的，这样就使得术文失去了一般性而不能成为一个通法。

3. “奇”、“偶”指等数的个数

参考前人涉及第二类解释的研究，并在逐题细致验算的基础上，我们认为，“约奇弗约偶”中的“奇”、“偶”系指等数的个数的单、双，而非指元数的单、双。“约奇弗约偶”就是在两个元数化约时，约含有奇数个等数的元数而不约含有偶数个等数的元数，化约时并不考虑元数本身的单双和等数本身的单双。这种认识来源于《周易 · 系辞上》中记载的大

---

① 莫绍揆，秦九韶大衍求一术的新研究，见：吴文俊主编，秦九韶与《数书九章》，北京师范大学出版社，1987年，第181页。

② 李兆华，秦九韶求定数法探讨，陕西师大学报，1988，16（3）：79。

③ 诸 m_i 为元数，$(m_i, m_n) = d_1$，$i=1, 2, \cdots, n-1$.

④ 吴文俊主编，中国数学史大系 · 第五卷，北京师范大学出版社，2000年，第342页。

⑤ 孔国平，大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，北京师范学院学报（自然科学版），1998，9（2）：22。

⑥ 陈信传、张文材、周冠文研译，《数书九章》今译及研究，贵州教育出版社，1992年，第14，45页。

⑦ 曲安京主编，中国古代科学技术史纲 · 数学卷，辽宁教育出版社，2000年，第263页。

衍筮法。不论推重“挂扐法”还是采用“过揲法”，历代易学家对筮法的解释有一个共同之处，那就是均以奇数为阳，偶数为阴，而阴、阳的确定需要考虑“揲之以四”这个“4”的个数，含有一个4的数为“奇”，含有两个4的数为“偶”。13=5+4+4为三奇，属老阳；17=9+4+4为二奇一偶，属少阴；21=9+8+4为二偶一奇，属少阳；25=9+8+8为三偶，属老阴。或者，将蓍草总数49分别减去13，17，21，25，余数分别为36，32，28，24，分别为4的9，8，7，6倍，故分别属老阳，少阴，少阳，老阴。可见，筮法中的“阴阳”是由“奇偶”决定的，而这里的“奇偶”是指4的个数。秦九韶通易学、懂筮法，在用“蓍卦发微”一题阐释“大衍总数术”时，在术文中是以3的倍数确定爻的阴阳老少，在草文中求等时，对（2，4）约2不约4，即是对“约奇弗约偶”的解释。因而，秦氏以“奇偶”指两个元数的等数的个数是顺理成章的。

“约奇弗约偶”就是说用d_{ij}去约含有奇数个d_{ij}的问数，而不约含有偶数个d_{ij}的问数。特别地，按照这个原则约后，如果得到的两数不互素，就要改用“约偶弗约奇”的原则去约，目的是使约后的两数互素。秦氏所说的“或约得五而彼有十，乃约偶而弗约奇”，指的就是这种情形。例如，$(25,20)=(5\times5,5\times4)=5$，如果“约奇弗约偶”，则有$(5,20)\neq1$，此时就得“约偶弗约奇”，约成$(25,4)=1$。类似地，$(6,9)$，$(28,49)$，$(18,81)$等均属“约奇弗约偶，或约得五而彼有十”之类，故须“乃约偶而弗约奇”。当不论采用“约奇弗约偶”还是“约偶弗约奇”的原则进行化约后，得到的两数不互素，那就先将约后的数搁置在一边，用没约的那个数与其余各数遍约之后，再与搁置的数再次求等、化约。有时候两两连环求等后得到的诸数中不止一对不互素，那就将原来的问数视为复数，用复数求等化约的办法去求定数。

复数的算法是先将诸数求总等，即求所有问数的最大公约数，然后保留一数不约，用总等去约其余各数，将所得各数和不约的一数视为元数，用元数求等化约方法——两两连环求等来求定数。如果化约后有些数对仍不互素，也即秦氏所说的有续等的情况，就需要用“复乘求定之理”——约奇弗约偶后，要用等数乘不约的数；或者约偶弗约奇后，再用等数乘不约的数。这只在有续等的情况下使用。这样相约、相乘之后，如果仍不能两两互素，则用“更相减损术”再求续等，以续等约一数，乘另外一数，直至诸数两两互素，成为定数。由于收数、通数均可化为元数来处理，元数两两连环求等过程中可能会出现续等，所以秦氏说：“所有元数、通数、收数三格，皆有复乘求定之理，悉可入之。”

求得的定数中不能有两个偶数，因为这样还不能达到约后无等，不能保证两两互素。而且，求得的定数中也不能有太多的1，因为定数中的1太多，在计算所求率数时就要多次考虑借用数，使计算繁杂。如果计算所求率数时不使用借用数，则不必考虑定数中的1是否太多。[①]

（二）求乘率——大衍求一术

诸定数m_i（$i=1,2,\cdots,k$）的乘积$m=\prod_{i=1}^{k}m_i$为衍母，用各定数约衍母得各衍数

---

① 事实上，求得的定数m_i与原问数A_i只要满足$\prod_{i=1}^{k}m_i=[A_1,A_2,\cdots,A_k]$，$m_i$（$i=1,2,\cdots,k$）中的1越多，则对应的乘率为0的越多，以今之观点看来，则计算量越小。

$M_i = \frac{m}{m_i}$（$i=1, 2, \cdots, k$）。当 $M_i > m_i$ 时，用 m_i 累减 M_i，余数 g_i 被秦氏称为奇数，则有 $M_i = k_i m_i + g_i$，且 $0 \leqslant g_i < m_i$。于是有 $M_i M'_i = k_i M'_i m_i + g_i M'_i$，即有 $M_i M'_i \equiv g_i M'_i \pmod{m_i}$，那么 $M_i M'_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ 就与 $g_i M'_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ 等价，解同余方程 $g_i M'_i \equiv 1 \pmod{m_i}$，可得乘率 M'_i，此即秦氏所说“以奇与定，用大衍求一入之，以求乘率”的理论依据。

秦氏给出求乘率的方法即“大衍求一术”。其计算过程可用字母表示如下。设 g，m 是正整数，$g<m$，将 g，m 辗转相除，并计算 p_n，有

$$\begin{aligned}
m &= g q_1 + r_1, & p_1 &= q_1 \times 1 \\
g &= r_1 q_2 + r_2, & p_2 &= q_2 p_1 + 1 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, & p_3 &= q_3 p_2 + p_1 \\
r_2 &= r_3 q_4 + r_4, & p_4 &= q_4 p_3 + p_2 \\
&\cdots & &\cdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, & p_n &= q_n p_{n-1} + p_{n-2}
\end{aligned}$$

由此可得①

$$(-1)^k r_k = p_k g - t_k m, \quad k = 1,2,\cdots,n。 \tag{20-1-1}$$

其中，$p_0 = 1$，$p_1 = q_1$，$p_k = q_k p_{k-1} + p_{k-2}$；

$t_0 = 0$，$t_1 = 1$，$t_k = q_k t_{k-1} + t_{k-2}$，$k = 2, 3, \cdots, n$。

“大衍求一术”说：“须使右上末后奇一而止，乃验左上所得，以为乘率。”考察公式（20-1-1），k 为偶数时，余数可能为 1。由此，有 $1 = p_k g - t_k m$，此即 $p_k g \equiv 1 \pmod{m}$，$p_k = M'$ 就是 $gM' \equiv 1 \pmod{m}$ 的解，秦氏取 p_k 为乘率是正确的。

依照秦氏术文并结合他的算草，我们可以将奇数和定数的辗转相除和求乘率的过程简单表示如下：

$p_n = q_n p_{n-1} + p_{n-2}$	q_n，$r_n = 1$
$p_{n-2} = q_{n-2} p_{n-3} + p_{n-4}$	q_{n-2}，r_{n-2}
……	……
$p_4 = q_4 p_3 + p_2$	q_4，r_4
$p_2 = q_2 p_1 + 1$	q_2，r_2
天元 1	奇数 g
	定数 m
$p_1 = q_1 \times 1$	q_1，r_1
$p_3 = q_3 p_2 + p_1$	q_3，r_3
……	……
$p_{n-3} = q_{n-3} p_{n-4} + p_{n-5}$	q_{n-3}，r_{n-3}
$p_{n-1} = q_{n-1} p_{n-2} + p_{n-3}$	q_{n-1}，r_{n-1}

① 闵嗣鹤、严士健，初等数论，第 2 版，高等教育出版社，1982 年，第 9 页。

（三）用数的借补与求率数

1. “奇偶同类”析

在“大衍总数术”的术文中，关于“类”、“类数”的叙述共出现过五次：

①或皆约而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍，而后乃与姑置者求等约之。

②或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰复数，以复数格入之。

③或彼此可约，而犹有类数存者，又相减以求续等。

④或泛多衍母倍数者，验元数奇偶同类者，损其半倍。

⑤当验元数同类者，而正用至多处借之。

其中，①、②、③是元数化为定数的过程，④、⑤是用数借补的过程。关于“类”和“类数”，学术界有不同看法。钱宝琮《秦九韶〈数书九章〉研究》指出：“类数”是有公约数的数。钱克仁《秦九韶大衍求一术中的求定数问题》认为：“犹有类数”，即还有公因数。“尽类”是说消尽公因数了。“皆不可尽类”是说诸数不是两两互素的。梅荣照《秦九韶是如何得出求定数方法的》说：“尽类”是两“元数”无“等”。“诸数皆不可尽类”就是所有“元数”都有“等”。王渝生《秦九韶求“定数”方法的成就和缺陷》将“类”释为公因数。李兆华《秦九韶求定数法探讨》说：“元数俱偶”与总数术求乘率术文中的“元数同类”，“奇偶同类”的意义相同，都是诸元数有公因数。……既然有公因数的诸元数称为“同类”，那么“类数”当是因数。李继闵《关于“大衍总数术”中求定数算法的探讨》认为，“尽类”，即无公因数；“皆不尽类”是说诸数有公因数，亦即总等 $d=(A_1, A_2, \cdots, A_n)\neq 1$。李倍始（Ulrich Libbrecht）*Chinese Mathematics in the Thirteenth Century: The Shu-shu Chiu-chang of Ch'in Chiu-shao* 一书中也对“奇偶同类”做出了解释。他认为“同类”是指两数属于同一类，即可被相同的因子除尽；而“奇偶”是指各素数。“奇偶同类”即是将含有相同素因子的数划分为一类。由上可见，对于“类”和“类数”的解释已有五端：一是以“类”为公因（约）数；二是以“类数”为因数；三是以“类数”为公因数；四是以“类”为“等”；五是认为“类”就是一个分类。

我们认为，“奇偶同类”的意义清楚了以后，“犹有类数存”、“不可尽类”的意义也就自然明了了。如果将“类”认为是“分类”的话，“同类”就当解释为“同属一类”。“奇偶”在此处的意义似不应与“大衍总数术”它处“奇偶”的意义有异，即“奇偶”系指等数个数的单双。“奇偶同类”是对元数而言，是将有等数的元数分类，即将含有奇数个等数的元数分为一类，将含有偶数个等数的元数分为一类。“元数同类”是指“元数奇偶同类”，意义与“奇偶同类”完全相同。照此理解，如果将定数分类的话，则所有的定数必然最多只分为两类：一类是奇数、一类是偶数，而且奇数一类中所有的奇定数互素，偶数一类中只有一个偶定数，此偶定数与所有的奇定数也互素。还有一种情形是所有的定数都是互素的奇数，那么这些定数自然成为一类。此时就不存在偶数类了，而我们也可以认为偶数类中数字个数为0。“犹有类数存”是对两个数而言，这两个数既不是元数、也不是定数，是将元数化约后还未得到定数时的情形，不妨依莫绍揆的主张而称其为准定数。“犹有类数存”是指两个准定数不能划归一类，即它们还不互素，也即还有公因数。“不可尽类”是对所有的准定数而言，说明这些准定数不能划归一类，即它们的等数不是1，也即还有公因数。

从“大衍总数术”最后一段术文中可以看出，“奇偶同类”是进行用数借补的一个前提

条件。术文最后一段实际上可以分为两个层次。一方面，当定数均不为1时，即均有用数的情况下，秦氏将泛用化为正用。另一方面，当有定数为1时，秦氏定义相应的衍数、奇数、乘率、用数为“无”，视为0。对于无用数的情形，秦氏给出三种处理方式。

2. 用数的借补

秦九韶在“大衍总数术”最后一段术文中，对于各种不同的情形给出了相应的用数借补的方法。他将乘率 M'_i 与衍数 M_i 的乘积 $s_i = M'_iM_i$ 称为泛用，将诸泛用相加减去衍母，比衍母多1的泛用称为正用，即 $\sum_{i=1}^{k} s_i = m + 1$ 时，称 s_i 为正用数；当泛用数是衍母多倍，即 $\sum_{i=1}^{k} s_i = tm + 1$，$t$ 是大于1的正整数时，就要将 s_i 化为正用数。将泛用化为正用的办法是考察所有的元数，对于有等数的元数按照它们含有等数的个数的奇偶性将其分类，即将含有奇数个等数的元数分为一类，将含有偶数个等数的元数分为一类，这就是秦氏所讲的“奇偶同类”的意义。这样划分后，每类中元数的个数不小于2。当一类中有2个元数时，如 A_i，A_j 为同类，则用$s_i - \frac{m}{2}$和 $s_j - \frac{m}{2}$代替 s_i 和 s_j 而作为正用数。当一类有 h（$h > 2$）个元数时，如 A_{i1}，A_{i2}，…，A_{ih}为同类，则用 $s_{i1} - \frac{m}{h}$，$s_{i2} - \frac{m}{h}$，…，$s_{ih} - \frac{m}{h}$作为正用数代替 s_{i1}，s_{i2}，…，s_{ih}。这是对一般情况，即无定数为1的情况下化泛用为正用的方法。①

当定数 m_i 为1时，衍数 $M_i = \frac{m}{m_i} = m$，与衍母相等，秦氏认为这种情况是无衍数，这样得到的奇数 $g_i = 0$，则同余方程 $g_iM'_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ 即为 $0 \cdot M'_i \equiv 1 \pmod{1}$，求不到确定的乘率 M'_i，秦氏认为这样乘率为“无”，因而 $s_i = M_iM'_i$ 亦不确定，因而秦氏说“或定母得一，而衍数同衍母者，为无用数”。对于衍数、奇数、乘率、用数为“无”的情形，在题目的算草中，秦氏均记为0。对于这种情况，秦氏的解决办法是从其他的正用数中借出一些，补给“无用数”的而作为正用数，这就是用数的借补。

对于同类的元数，用它们的等数去约衍母，作为借用数，从有正用数处减去并补给无用数处，分别作为新的正用数，也就是秦氏指出的“以借数损有以益其无”。例如，同类的两个元数 A_i 和 A_j，若 A_i 的定数为1，则用数 $s_i = 0$，就用$\frac{m}{(A_i, A_j)}$作为借用数，以 $s_j - \frac{m}{(A_i, A_j)}$和$\frac{m}{(A_i, A_j)}$代替 s_j 和 s_i 作为新的正用数。

对于有多个无用数的情况，不是必须以$\frac{m}{(A_i, A_j)}$为借用数，秦氏说“如意立数为母”，“以如意子乘之”，表明可适当选取$\frac{m}{(A_i, A_j)}$的分数倍作为借用数，只要保证“损有以益其无”时损去的借用数之和与益入无用数处的借用数之和相等，这就是秦氏说的“均借补之”。

对于无用数的情形还有一种处理方法，就是秦氏指出的“或欲从省勿借，任之为空可也”。当用数为0时，相应的各总也为0，计算总数时就会比较容易些，这就达到了“从省”

① 这个方法不具有普遍性。

的目的。

以今之数学观点看来，用数的借补这一步骤似乎没有必要，因为它不会影响所求率数的最终结果。但是，经过验算可以发现，使用借补用数这一步骤后得到的总数，一般都会比不进行借补直接得到的总数要小，这就说明秦九韶进行用数借补的目的是简化计算。

3. 求率数

求得乘率及用数之后，由“大衍总数术”最后两句术文，即可得到各总及总数，进而可以计算出所求率数。

（四）大衍总数术应用举例

1. 求定数举例

我们以《数书九章》“大衍”类题目中求等数的草文比较详尽的“推计土功”和“积尺寻源”两题为例，说明求定数的方法及对“奇偶”解释的正确性。

（1）推计土功。

问：筑堤起四县夫，分给里步皆同，齐阔二丈。里法三百六十步，步法五尺八寸。人夫以物力差定。甲县物力一十三万八千六百贯，乙县物力一十四万六千三百贯，丙县物力一十九万二千五百贯，丁县物力一十八万四千八百贯。每力七百七十贯，科一名，春程人功平方六十尺，先到县先给。今甲乙二县俱毕。丙县余五十一丈，丁县余一十八丈，不及一日，全功。欲知堤长及四县夫所筑各几何？

术曰：置各县力，以程功乘，为实；以力率乘堤齐阔，为法；除之，得各县日筑复数有分者通之，互乘之，得通数。求总等，不约一位约众位，曰元数。连环求等，约奇得定母。陆续求衍数、奇数、乘率、用数。以丙、丁县不及数乘本用，并为总数。以定母相乘为衍母，满母去总数，得各县分给里步积尺数。以县数因之为堤长，各以里法步法约之为里步。

草曰：置甲县力一十三万八千六百贯、乙县力一十四万六千三百贯、丙县力一十九万二千五百贯、丁县力一十八万四千八百贯，以程功六十尺遍乘之，皆以贯默约之，甲得八百三十一万六千尺、乙得八百七十七万八千尺、丙得一千一百五十五万尺、丁得一千一百八万八千尺，各为实。次以力率七百七十贯乘堤齐阔二十尺，亦以贯默约之，得一万五千四百尺，为法。遍除诸各实，甲得五十四丈、乙得五十七丈、丙得七十五丈、丁得七十二丈，各为四县众夫每日筑长率。按大衍术，命曰复数，列右行。（图略）以复数求总等，得三寸，以约三位多者，不约其少者。甲得五十四、乙得一十九、丙得二十五、丁得二十四，仍为元数。次以两两连环求等，各约之。（图略）先以丁丙求等，又以丁乙求等，皆得一，不约。次以丁甲求等，得六，只约甲五十四，得九，不约丁。次以丙与乙求等，又以丙与甲九求等，皆得一，不约。后以乙与甲九求等，得一，不约。复验，甲九与丁二十四犹可再约，又求等得三，以约丁二十四，得八，复甲为二十七。（下略）

若设各县筑堤长为x，则本题相当于求解同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv 0 \pmod{54} \\ x\equiv 0 \pmod{57} \\ x\equiv 51 \pmod{75} \\ x\equiv 18 \pmod{72} \end{cases}$$

记甲 =54，乙 =57，丙 =75，丁 =72，为问数。求总等：（甲，乙，丙，丁） = （54，57，75，72） =3。

由于甲 =54 =3 ×18，乙 =57 =3 ×19，丙 =75 =3 ×25，丁 =72 =3 ×24，可见甲含有等数的个数最少，“不约一位，约众位”，即“约三位多者，不约其少者”，故不约甲，而约乙、丙、丁三数，得甲 =54，乙 =19，丙 =25，丁 =24，为诸元数。将它们两两连环求等。

一变：丁与诸数遍约。

（丁，丙）=（24，25） =1，不约。

（丁，乙）=（24，19） =1，不约。

（丁，甲）=（24，54） = （6 ×4，6 ×9） =6，约奇弗约偶，将甲约为9。

一变后，甲 =9，乙 =19，丙 =25，丁 =24，甲、丁仍有等。

二变：丙与诸数遍约。

（丙，乙）=（25，19） =1，不约。

（丙，甲）=（25，9） =1，不约。

三变：乙与诸数遍约。

（乙，甲）=（19，9） =1，不约。

三变以后，甲 =9，乙 =19，丙 =25，丁 =24。

（甲，丁） = （9，24） = （3 ×3，3 ×8） =3，约偶弗约奇，复乘奇，则约丁得 8，变甲为 9 ×3 =27，且有（甲，丁） = （27，8） =1。

此时甲 =27，乙 =19，丙 =25，丁 =8，成为定数，依序记为 m_i（i =1，2，3，4）。

（2）积尺寻源（略去答案，并将原筹式数字改为阿拉伯数字）。

问：欲砌基一段，见管大、小方砖、六门、城砖四色。令匠取便，或平或侧，只用一色砖砌，须要适足。匠以砖量地计料，称：“用大方料，广多六寸、深少六寸；用小方，广多二寸、深少三寸；用城砖，长，广多三寸、深少一寸；以阔，深少一寸、广多三寸；以厚，广多五分、深多一寸；用六门砖，长，广多三寸、深多一寸；以阔，广多三寸、深多一寸；以厚，广多一寸、深多一寸；皆不匼匝，未免修破砖料裨补。”其四色砖，大方，方一尺三寸；小方，方一尺一寸；城砖，长一尺二寸、阔六寸、厚二寸五分；六门，长一尺、阔五寸、厚二寸。欲知基深、广几何？

术曰：以大衍求之。置砖方、长、阔、厚为元数，以小者为单起一。先求总等，存一位约众位列位多者，随意立号，乃为元数。连环求等，约为定母。以定相乘，为衍母。各定约衍母，得衍数。满定去之，得奇。奇、定大衍，得乘率。以乘衍数，得用数。次置广、深多少数，多者乘用，少者减元数，余以乘用，并为总。满衍母去之，不满得广、深。

草曰：置四砖方、长、阔、厚，系八数。城砖厚有分为小者，皆通之为单。大方得一百三十分；小方得一百一十分；城砖长得一百二十分，阔得六十分，厚得二十五分；六门砖长得一百分，阔得五十分，厚得二十分。

	尺寸分	
金	130	大方
石	120	城砖长
丝	110	小方
竹	100	六门长
匏	60	城砖阔
土	50	六门阔
革	25	城砖厚
木	20	六门厚
	问数	

锥行置之右列。位稍多，砖名相互，今假八音为号。位先以最少者，自木二十与革二十五求等，得五，乃反约木二十为四；木四与土五十求等，得二，以约五十为二十五；木四与匏六十求等，得四，约六十为一十五；木四与百求等，得四，约一百为二十五；木四与丝一百一十求等，得二，约一百一十为五十五；木四与石一百二十求等，得四，反约木四为一；以木一与金一百三十求等，得一，不约。为木与诸数求等，约讫，为一变，得数具图如后。

130	金
120	石
55	丝
25	竹
15	匏
25①	土
25	革
1	木

次以革二十五与土二十五求等，得二十五，约土二十五为一；② 以革二十五与匏一十五求等，得五，约匏一十五为三；以革二十五与竹二十五求等，得二十五，约竹二十五为一；又以革二十五与丝五十五求等，得五，约丝五十五得一十一；以革二十五与石一百二十求等，得五，约一百二十为二十四；以革二十五与金一百三十求等，得五，约金一百三十得二十六。革与诸数遍约讫，为二变，具图如后。

① “25”，原讹作“50”，今校正。

② “土二十五”，原文讹作“土五十”，“约土二十五为一”，原文讹作“约五十为二”，今校正。

26	金
24	石
11	丝
1	竹
3	匏
1①	土
25	革
1	木

乃以土一②与匏三、竹一、丝一十一求等，皆得一，不约；以土二与石二十四求等，得二，反约土二得一；③ 又以土一与金二十六求等，得一，不约。土与诸数约讫，为三变，具图如后。

26	金
24	石
11	丝
1	竹
3	匏
1	土
25	革
1	木

乃以匏三与竹一、丝一十一求等，皆得一；又以匏三与石二十四求等，得三，约石二十四为八；又匏三与金二十六求等，得一。匏与诸数约讫，以为四变。次以竹一与丝一十一、与石八、与金二十六求等，皆得一。竹与诸数约讫，为五变。次以丝一十一与石八、金二十六求等，皆得一，为六变。后以石八④与金二十六求等，得二，约金二十六为一十三。至此，七变连环求等约俱毕，得数为定母，列图如后。(下略)

金	13
石	8
丝	11
竹	1
匏	3
土	1
革	25
木	1
	定母

① “1”，原讹作“2”，今校正。
② “土一”，原本讹作“土二”，今校正。
③ 这个步骤是由以土数为二的错误导致的。实际上因土数为一，故此步骤没有必要。
④ 本段三处“石八”，原文讹作“石二十四”，今校正。

若用 x 和 y 分别表示地基的广和深，本题相当于求解如下的两个同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv 60 \pmod{130} \\ x\equiv 20 \pmod{110} \\ x\equiv 30 \pmod{120} \\ x\equiv 30 \pmod{60} \\ x\equiv 5 \pmod{25} \\ x\equiv 30 \pmod{100} \\ x\equiv 30 \pmod{50} \\ x\equiv 10 \pmod{20} \end{cases},\quad \begin{cases} y\equiv 70 \pmod{130} \\ y\equiv 80 \pmod{110} \\ y\equiv 110 \pmod{120} \\ y\equiv 50 \pmod{60} \\ y\equiv 10 \pmod{25} \\ y\equiv 10 \pmod{100} \\ y\equiv 10 \pmod{50} \\ y\equiv 10 \pmod{20} \end{cases}$$

我们只讨论把元数化为定数的过程。

依照草文，将诸元数按由大到小的顺序并以八音为号排列，有金 = 130，石 = 120，丝 = 110，竹 = 100，匏 = 60，土 = 50，革 = 25，木 = 20，然后求等数，化约，求定数。

一变：木与诸数遍约。

(木，革) = (20，25) = (5×4，5×5) = 5，约奇弗约偶，约得五而彼有十，故约偶弗约奇，将木约为 4。

(木，土) = (4，50) = (2×2，2×25) = 2，约奇弗约偶，将土约为 25。

(木，匏) = (4，60) = (4×1，4×15) = 4，勿使见一太多，将匏约为 15。

(木，竹) = (4，100) = (4×1，4×25) = 4，勿使见一太多，将竹约为 25。

(木，丝) = (4，110) = (2×2，2×55) = 2，约奇弗约偶，将丝约为 55。

(木，石) = (4，120) = (4×1，4×30) = 4，约奇弗约偶，将木约为 1。

(木，金) = (1，130)　= 1。

一变讫，金 = 130，石 = 120，丝 = 55，竹 = 25，匏 = 15，土 = 25，革 = 25，木 = 1。

二变：革与诸数遍约。

(革，土) = (25，25) = 25，将土约为 1。

(革，匏) = (25，15) =　(5×5，5×3) = 5，将匏约为 3。

(革，竹) = (25，25) = 25，将竹约为 1。

(革，丝) = (25，55) =　(5×5，5×11) = 5，将丝约为 11。

(革，石) = (25，120) = (5×5，5×24) = 5，约奇弗约偶，约得五而彼有十，故约偶弗约奇，将石约为 24。

(革，金) = (25，130) = (5×5，5×26) = 5，约奇弗约偶，约得五而彼有十，故约偶弗约奇，将金约为 26。

二变讫，金 = 26，石 = 24，丝 = 11，竹 = 1，匏 = 3，土 = 1，革 = 25，木 = 1。

三变：土与诸数遍约。求等，皆得一，皆不约。

四变：匏与诸数遍约。

(匏，竹) = (3，1) = 1。

(匏，丝) = (3，11) = 1。

(匏，石) = (3，24) = (3×1，3×8) = 3，勿使见一太多，将石约为 8。

(匏，金) = (3，26) = 1。

四变讫，金 =26，石 =8，丝 =11，竹 =1，匏 =3，土 =1，革 =25，木 =1。

五变：竹与诸数遍约。求等，皆得一，皆不约。

六变：丝与诸数遍约。求等，皆得一，皆不约。

七变：石与诸数遍约。

（石，金）=（8，26）=（2×4，2×13）=2，约奇弗约偶，将金约为 13。

七变讫，金 =13，石 =8，丝 =11，竹 =1，匏 =3，土 =1，革 =25，木 =1，诸数两两无等，成为定数，依序记为 m_i（$i=1, 2, \cdots, 8$）。

上面我们按照原题的草文的步骤将诸问数两两连环求等化为了定数，下面我们按照术文，“先求总等，存一位，约众位”，得诸元数，再连环求等，化为定数。

八数的总等为 5，存金数，约众数，得到金 =130，石 =24，丝 =22，竹 =20，匏 =12，土 =10，革 =5，木 =4 为诸元数，两两连环求等。

一变：木与诸数遍约。

（木，革）=（4，5）=1，不约。

（木，土）=（4，10）=（2×2，2×5）=2，约奇弗约偶，约土为 5。

（木，匏）=（4，12）=（4×1，4×3）=4，勿使见一太多，约匏为 3。

（木，竹）=（4，20）=（4×1，4×5）=4，勿使见一太多，约竹为 5。

（木，丝）=（4，22）=（2×2，2×11）=2，约奇弗约偶，约丝为 11。

（木，石）=（4，24）=（4×1，4×6）=4，约奇弗约偶，约木为 1。

（木，金）=（1，130）=1。

一变讫，金 =130，石 =24，丝 =11，竹 =5，匏 =3，土 =5，革 =5，木 =1。

二变：革与诸数遍约。

（革，土）=（5，5）=5，约土为 1。

（革，匏）=（5，3）=1。

（革，竹）=（5，5）=5，约竹为 1。

（革，丝）=（5，11）=1。

（革，石）=（5，24）=1。

（革，金）=（5，130）=（5×1，5×26）=5，勿使见一太多，约金为 26。

二变讫，金 =26，石 =24，丝 =11，竹 =1，匏 =3，土 =1，革 =5，木 =1。

三变：匏与诸数遍约。

（匏，竹）=（3，5）=1。

（匏，丝）=（3，11）=1。

（匏，石）=（3，24）=（3×1，3×8）=3，勿使见一太多，约石为 8。

（匏，金）=（3，26）=1。

三变讫，金 =26，石 =8，丝 =11，竹 =1，匏 =3，土 =1，革 =5，木 =1。

四变：丝与诸数遍约，皆无等。

五变：石与诸数遍约。

（石，金）=（8，26）=（2×4，2×13）=2，约奇弗约偶，约金为 13。

五变讫，金 =13，石 =8，丝 =11，竹 =1，匏 =3，土 =1，革 =5，木 =1。

虽然此时得到的诸数已两两互素，但它们并非定数。这是由于在步骤开始时“先求总

等，存一位，约众位”，故连环求等的诸数并非题目中的诸问数，所以此时须用总等遍乘被约的众位，所存的一位不应再乘总等，然后再继续进行求等、化约的计算。

此时八数为金 =13，石 =40，丝 =55，竹 =5，匏 =15，土 =5，革 =25，木 =5。

六变：以石与诸数遍约。

(石，金) = (40，13) =1。

(石，丝) = (40，55) = (5×8，5×11) =5，约奇弗约偶，约丝为 11。

(石，竹) = (40，5) = (5×8，5×1) =5，约奇弗约偶，约竹为 1。

(石，匏) = (40，15) = (5×8，5×3) =5，约奇弗约偶，约匏为 3。

(石，土) = (40，5) = (5×8，5×1) =5，约奇弗约偶，约土为 1。

(石，革) = (40，25) = (5×8，5×5) =5，约奇弗约偶，约得五而彼有十，故约偶弗约奇，约石为 8。

(石，木) = (8，5) =1。

六变讫，金 =13，石 =8，丝 =11，竹 =1，匏 =3，土 =1，革 =25，木 =5。

七变：以革与诸数遍约，只与木有等。

(革，木) = (25，5) = (5×5，5×1) =5，为使无续等，约木为 1。

七变讫，金 =13，石 =8，丝 =11，竹 =1，匏 =3，土 =1，革 =25，木 =1，与依草文演算得到的结果相同。

在“六变”求等化约时，若先以革与诸数遍约，则有如下结果。

(革，木) = (25，5) = (5×5，5×1) =5，为使无续等，约木为 1。

(革，土) = (25，5) = (5×5，5×1) =5，为使无续等，约土为 1。

(革，匏) = (25，15) = (5×5，5×3) =5，为使无续等，约匏为 3。

(革，竹) = (25，5) = (5×5，5×1) =5，为使无续等，约竹为 1。

(革，丝) = (25，55) = (5×5，5×11) =5，为使无续等，约丝为 11。

(革，石) = (25，40) = (5×5，5×8) =5，约奇弗约偶，约得五而彼有十，故约偶弗约奇，约石为 8。

(革，金) = (25，13) =1。

这样化约后，金 =13，石 =8，丝 =11，竹 =1，匏 =3，土 =1，革 =25，木 =1。这个结果也与依草文演算后得到的结果相同。

如果我们按照题目的叙述，不人为地将八个数按照从大到小的顺序排列，则将诸问数按照“求总等，存一位，约众位，两两连环求等”的方法化约得到的定数仍与依草文演算得到的定数相同。这就表明诸问数的位置、排列顺序以及求等化约的先后次序不会影响到计算结果的正确性，因而将奇偶赋予位置、次序的意义的理由是不充分的。

2. 求乘率举例

我们仍以“推计土功”题为例，说明求乘率的方法。将前面求到的诸定数相乘，得 $m = \prod_{i=1}^{4} m_i = 27 \times 19 \times 25 \times 8 = 102600$，为衍母。$M_1 = \frac{m}{m_1} = 3800$，$M_2 = \frac{m}{m_2} = 5400$，$M_3 = \frac{m}{m_3} = 4104$，$M_4 = \frac{m}{m_4} = 12825$ 为诸衍数。

$$M_1=3800=140\times27+20=140m_1+g_1,$$
$$M_2=5400=284\times19+4=284m_2+g_2,$$
$$M_3=4104=164\times25+4=164m_3+g_3,$$
$$M_4=12825=1603\times8+1=1603m_4+g_4,$$

故 $g_1=20$，$g_2=4$，$g_3=4$，$g_4=1$ 为诸奇数。

求乘率须求解同余方程

$$3800M_1'\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 27),$$
$$5400M_2'\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 19),$$
$$4104M_3'\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 25),$$
$$12825M_4'\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 8)。$$

即转化为求解同余方程

$$20M_1'\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 27),$$
$$4M_2'\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 19),$$
$$4M_3'\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 25),$$
$$1M_4'\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 8)。$$

用大衍求一术分别求乘率：

$p_4=23$	$q_4=5$，$r_4=1$
$p_2=3$	$q_2=2$，$r_2=6$
天元 1	$g=20$
	$m=27$
$p_1=1$	$q_1=1$，$r_1=7$
$p_3=4$	$q_3=1$，$r_3=1$

$p_2=5$	$q_2=1$，$r_2=1$
天元 1	$g=4$
	$m=19$
$p_1=4$	$q_1=4$，$r_1=3$

$p_2=19$	$q_2=3$，$r_2=1$
天元 1	$g=4$
	$m=25$
$p_1=6$	$q_1=6$，$r_1=1$

得到 $M'_1=23$，$M'_2=5$，$M'_3=19$。因为 $g_4=1$，所以不必算而知 $M'_4=1$。

3. 用数借补举例

我们再以“积尺寻源”题为例，说明用数借补的方法。求得定数后，“积尺寻源”题的草文如下（图略）：

> 右定母列右行，以相乘，得八万五千八百为衍母。以各定母约衍母，各得衍数，其竹、木、土定得一者，为无。金定一十三，得衍数六千六百；石定八，得衍数一万七百二十五；丝定一十一，得衍数七千八百；竹定一，无衍数；匏定三，得衍数二万八千六百；土定一，无衍数；革定二十五，得衍数三千四百三十二；木定一，无衍数。各满定母去之，得奇数。金得奇九，石得奇五，丝得奇一，匏得奇一，革得奇七。其丝、匏得奇数一者，便以一为乘率。其金、石、革三处奇数，皆与本定母用大衍求一入之，各得乘率，列右行。金得三，石得五，丝得一，匏得一，革得一十八，各为乘率。对乘寄左行衍数，各得为用数。

由草可知，诸定数相乘得衍母 $m=\prod_{i=1}^{8}m_i=85800$。以定数各约衍母，得各衍数为 $M_1=6600$，$M_2=10725$，$M_3=7800$，$M_4=85800$，$M_5=28600$，$M_6=85800$，$M_7=3432$，$M_8=85800$。于是奇数、乘率、用数、各总可求，诸数如表 20-1-1 所示。

表 20-1-1　“积尺寻源”题求解所用数据表

元数 A_i	定数 m_i	衍数 M_i	衍母 m	奇数 g_i	乘率 M'_i	用数 $M_iM'_i$	余数 R_i	各总 $M_iM'_iR_i$	总数 $\sum_{i=1}^{8} M_iM'_iR_i$
130	13	6600	85800	9	3	19800	60	1188000	$4119630 = 48m + 1230$
120	8	10725		5	5	53625	30	1608750	
110	11	7800		1	1	7800	20	156000	
100	1	0		0	0	0	30	0	
60	3	28600		1	1	28600	30	858000	
50	1	0		0	0	0	30	0	
25	25	3432		7	18	61776	5	308880	
20	1	0		0	0	0	10	0	

依“大衍总数术”术文，此时须借补用数。

由于竹、土、木无用数，所以须借用数。秦九韶在演草中给出的过程如下（图略）：

凡诸用数同类者，数必多，可互借以补无者。先验革元数二十五，与木元数二十为同类。求等，得五，以等五约衍母八万五千八百，得一万七千一百六十，乃于革用数内减出以补木位，为木用，余四万四千六百一十六，为革用。次验竹元数一百，与土五十为同类。以求等，得五十，以等五十约衍母八万五千八百，得一千七百一十六，亦于革用数内各借与竹、土为用数。革止余四万一千一百八十四为用。得诸定用数。

因为（革，木）=（25，20）=5，即革与木同类，所以从革用数中借出$\frac{m}{5}$给木作用数。此即$s'_7 = s_7 - \frac{m}{5} = 44616$为革的新用数，$s'_8 = s_8 + \frac{m}{5} = 17160$为木的新用数。又因为（竹，土）=（100，50）=50，即竹与土同类，所以从革用数中各借出$\frac{m}{50}$给竹、土作用数。此即$s'_4 = \frac{m}{50} = 1716$，$s'_6 = \frac{m}{50} = 1716$，$s''_7 = s'_7 - \frac{m}{50} - \frac{m}{50} = 41184$分别为竹、土、革的新用数。于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8} s'_iR_i &= 1188000 + 1608750 + 156000 + s'_4R_4 + 85800 + s'_6R_6 + s''_7R_7 + s'_8R_8 \\ &= 1188000 + 1608750 + 156000 + 51480 + 85800 + 51480 + 205920 + 171600 \\ &= 3519030 \\ &= 41m + 1230\end{aligned}$$

这样处理后得到的结果虽然是正确的，但是秦氏的作法却与术文不合，所以李锐批评他“其数虽合，于率不通”。

依照我们的分析，由于（金，丝，土）=（130，110，50）=（10×13，10×11，10×5）=10，即金、丝、土三数为同类，故应从金、丝用数中分别借出$\frac{m}{10}$给土作用数。[①] 也即$s'_1 =$

① 实际上，取$s'_1 = s_1 - \frac{m}{10}$，$s'_3 = s_3 - \frac{m}{10}$，$s'_6 = s_6 + \frac{2}{10}m$，并不影响最后结果，但由于$s_3 - \frac{m}{10} < 0$，与秦氏借用数之意不合。

$s_1-\frac{m}{10}=11220$ 为金的新用数，$s'_6=\frac{m}{10}=8580$ 为土的新用数。

又由于（竹，匏，木）=（100，60，20）=（20×5，20×3，20×1）=20，即竹、匏、木三数为同类，故应从匏用数中各借出$\frac{m}{20}$给竹和木作用数。也即 $s'_4=\frac{m}{20}=4290$ 为竹的新用数，$s'_8=\frac{m}{20}=4290$ 为木的新用数，$s'_5=s_5-\frac{m}{20}-\frac{m}{20}=20020$ 为匏的新用数。于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8}s'_iR_i &= s'_1R_1+s_2R_2+s_3R_3+s'_4R_4+s'_5R_5+s'_6R_6+s_7R_7+s'_8R_8\\ &=673200+1608750+156000+128700+600600+257400+308880+42900\\ &=3776430\\ &=44m+1230\end{aligned}$$

得出正确结果。

本题另一问亦用类似的方法进行用数的借补，得到总数 9098510 = 106m + 3710，也得到正确的所求率数。如果不借补用数的话，本题两问的总数分别为 4119630 和 9956510。可见，借补用数后得到的总数要比不进行借补得到的总数要小。从理论上讲，用数的借补不是必须的，但从实际中看，用数的借补的确可以使计算简单一些。

第二节 纵 横 图

南宋杨辉将“九宫数”称为纵横图，在各名为最早。①

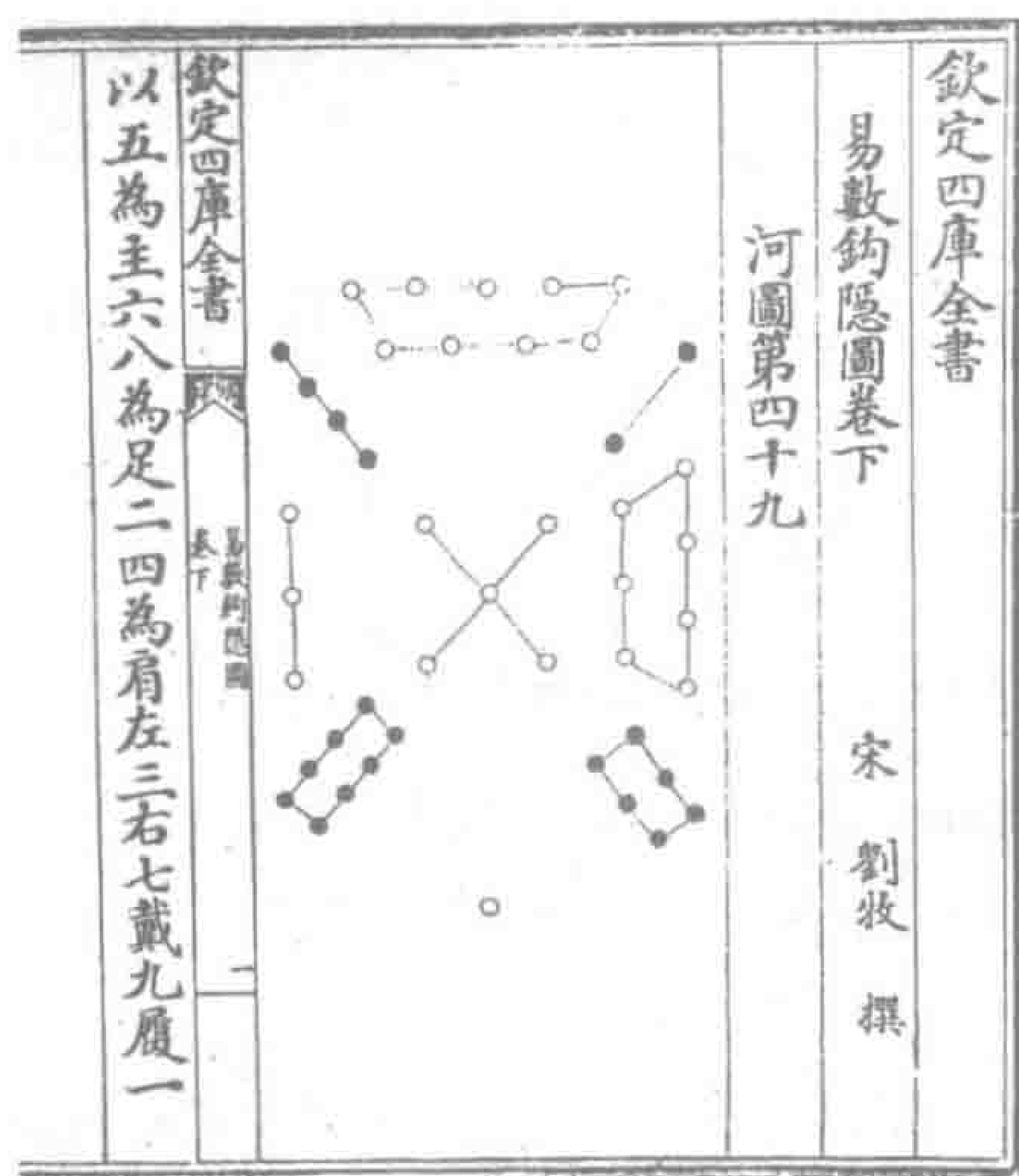


图 20-2-1 刘牧河图

一 河图、洛书与纵横图

就目前所知，“河图”之名最早见于《尚书·顾命》，其中说“大玉、夷玉、天球、河图，在东序”。② 后来《论语·子罕》③、《周易·系辞上》、《墨子·非攻下》④ 也都谈到河图。“洛书”最早与河图同见于《周易·系辞上》：“河出图，洛出书，圣人则之。”后来《管子·小匡》⑤、《淮南子·俶真训》⑥、《礼记·礼运》等也都有关于“河出图，洛出书”的记载。两汉、魏晋、南北朝直至隋唐时代，学者们对河图、洛书有诸多的猜测，但他们都没有说明，更没有具体记载河图、洛书究竟是什

① 李俨，中算家的纵横图研究，见：李俨，中算史论丛，第一集，中国科学院出版，1954 年，第 175 页。
② 周·尚书，十三经注疏，中华书局，1980 年。
③ 宋·朱熹，四书章句集注·论语集注，卷五，子罕第九，见：《四库全书》，第 197 册，第 46 页。
④ 清·孙诒让，墨子闲诂，卷五，非攻下第十九，新编诸子集成本，中华书局，2001 年，第 151，152 页。
⑤ 黎凤翔，管子校注，卷第八，小匡第二十，新编诸子集成本，中华书局，2004 年，第 426 页。
⑥ 何宁，淮南子集释，卷二，俶真训，新编诸子集成本，中华书局，1998 年，第 156，157 页。

么。直到宋代，人们才将河图、洛书与纵横图联系起来。

在现存文献中，第一次将河图、洛书视为九数、十数黑白点图式的人是刘牧，他将天地生成之数称为洛书。[①] 刘牧的河图与洛书分别如图 20-2-1 和图 20-2-2 所示。与刘牧同时代的阮逸反对刘牧的说法，于是就托名北魏关朗而伪造了一个《关朗易传》，说："河图之文，七前六后，八左九右。洛书之文，九前一后，三左七右，四前左、二前右，八后左、六后右。"蔡元定在起稿《易学启蒙》时根据阮逸的《关朗易传》画定了河图、洛书的图式。[②] 朱熹在《易学启蒙》和《周易本义》中采用了蔡元定的河洛图式，并将它们载于二书的卷首，见图 20-2-3。[③] 将黑白点洛书用数字表示，就是最早的三阶纵横图。

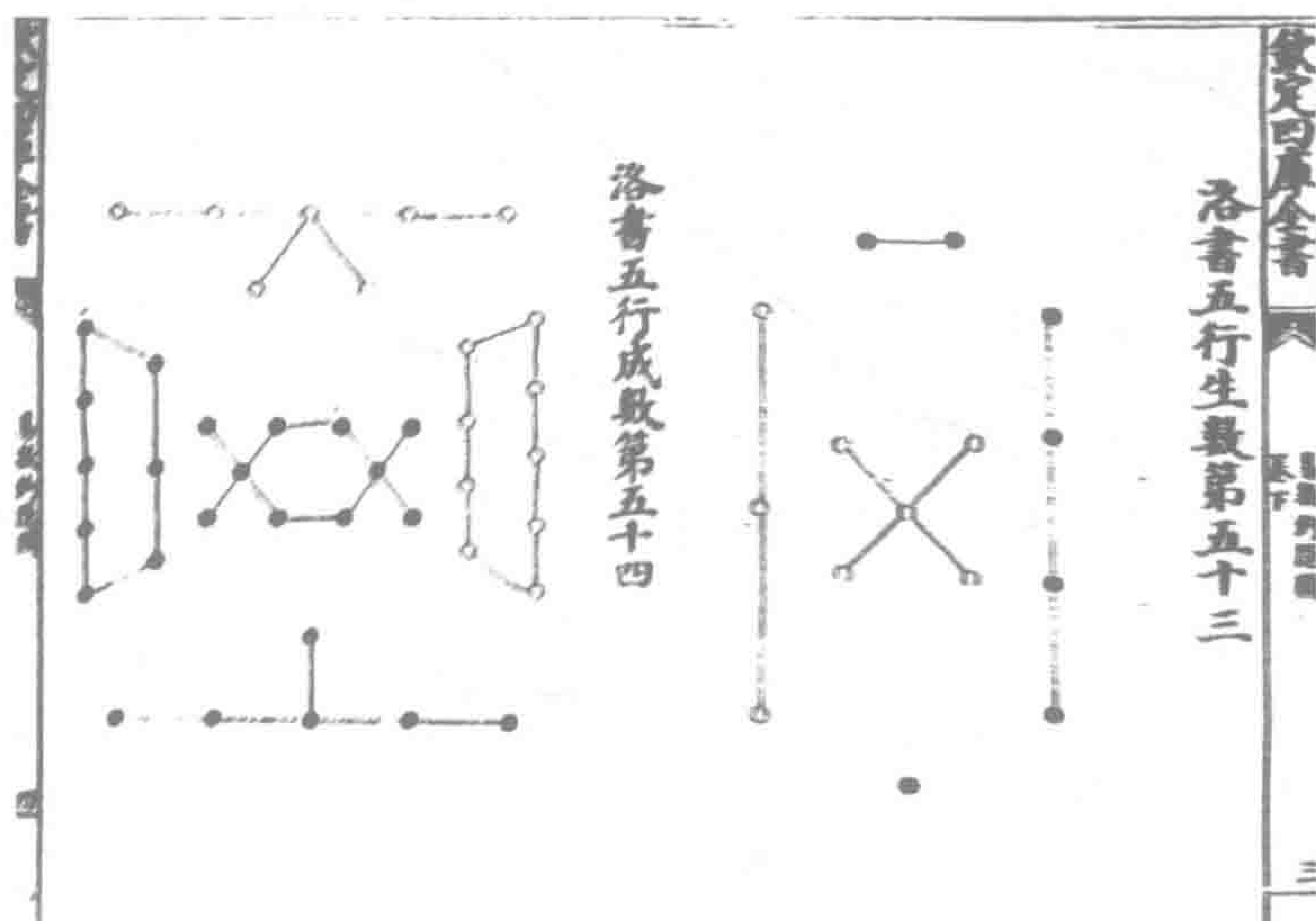


图 20-2-2　刘牧洛书

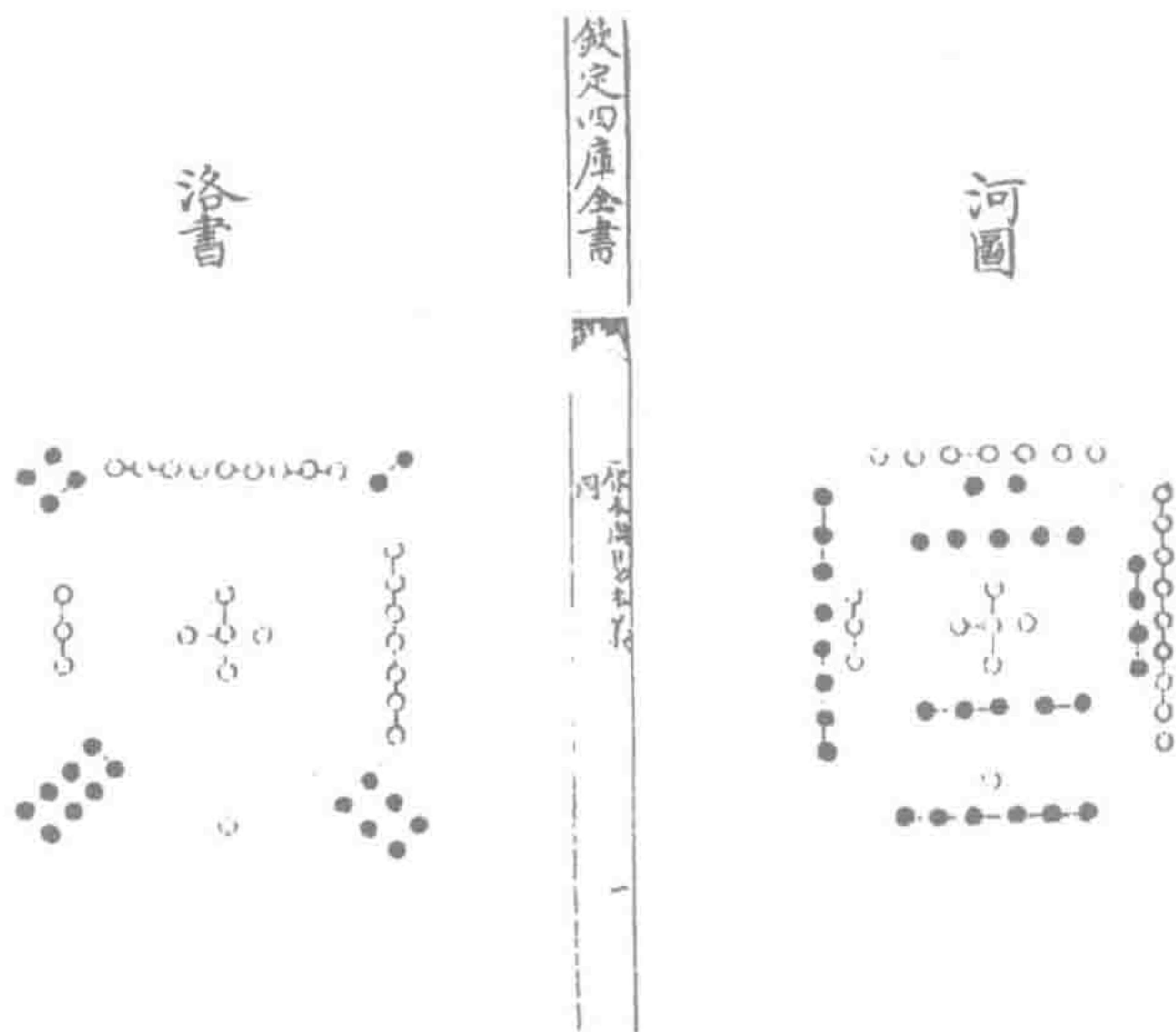


图 20-2-3　朱熹河图与洛书

① 宋·刘牧，易数钩隐图·序，上海涵芬楼影印正统道藏本，第 71 册，洞真部·灵图类·云上，1923 年。

② 宋·朱熹，易学启蒙·本图书第一，见：清·李光地，周易折中，卷十九，《四库全书》第 38 册，第 470 页。

③ 宋·朱熹，周易本义·图，《四库全书》，第 12 册，第 627 页。

二　杨辉等的纵横图

杨辉、刘碧涧、丘虚谷等在《续古摘奇算法》的上卷记录了大量的纵横图表明，这些图形的构造是有规律可循的。

书中首先给出三阶纵横图的构造方法：“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出。”如图 20-2-4 所示。

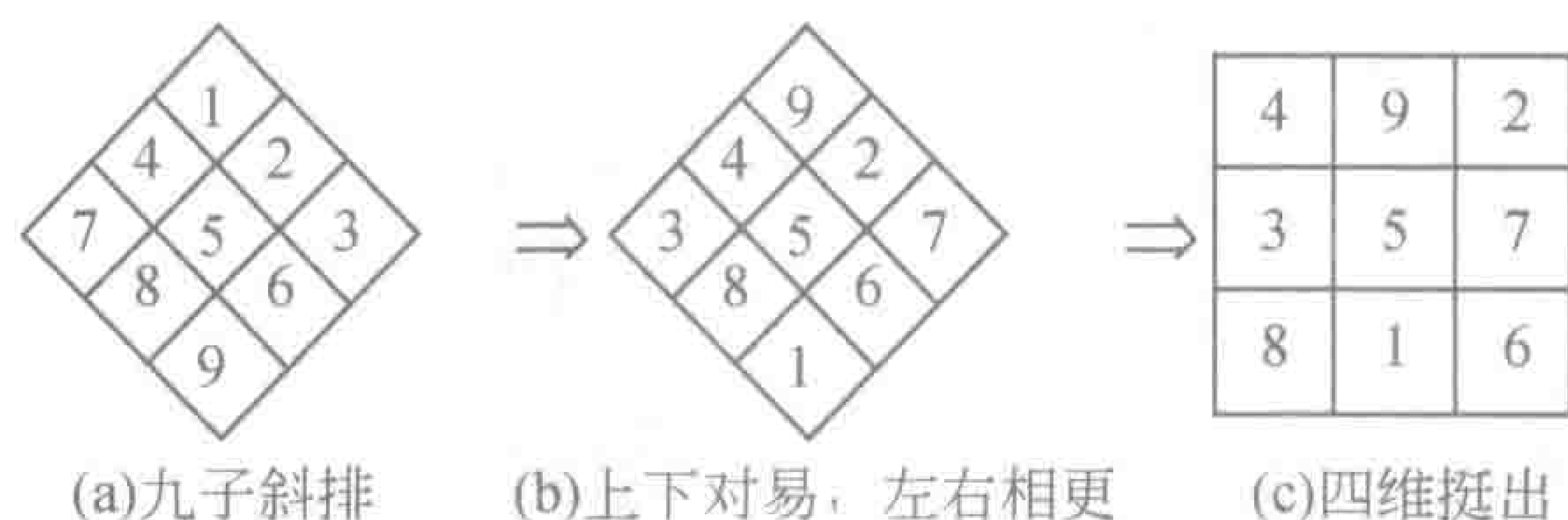


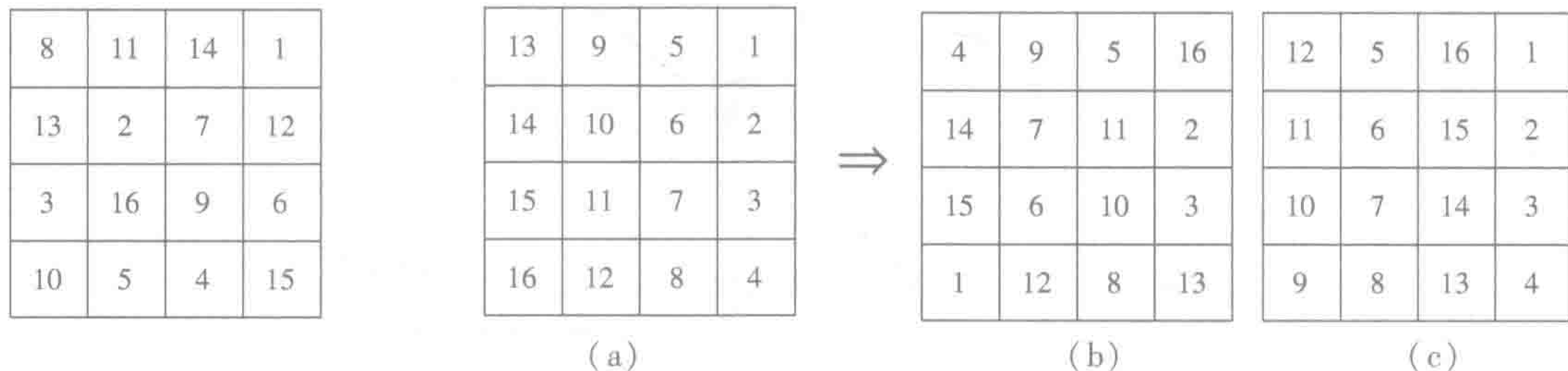
图 20-2-4　三阶纵横图造法

三阶纵横图是唯一的，但四阶纵横图却有多种。杨辉“易换术”曰：“以十六子依次第作四行排列，先以外四角对换……后以内四角对换。”这便是构造四阶纵横图的一种方法（图 20-2-5）。在“总术”中，杨辉给出构造四阶纵横图的一般方法。第一步是“求积”，即求出每行或每列的数字之和应为多少，杨辉把前 16 个自然数当做一个等差数列，用求和公式（10-4-1）求得 $S=136$，进而求得每行之数 34。第二步是求等，即设法使每行、每列的数字之和等于 34。“求等术曰：以子数分两行

一　二　三　四　五　六　七　八

十六　十五　十四　十三　十二　十一　十　九[①]

而二子皆等(十七)，又分为四行，而横行先等三十四，乃不易之术。却以此编排直行之数，使皆如元求一行之积三十四而止。”依此术，杨辉构造数字方阵如图 20-2-6（c），然后再“编排直行之数”。杨辉说：“绳墨既定，则不患数之不及也。”意思是掌握了规律，就不难做出纵横图，如图 20-2-7 所示。



8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

(a)

⇒

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

(b)

12	5	16	1
11	6	15	2
10	7	14	3
9	8	13	4

(c)

图 20-2-5　四阶纵横图　　　　图 20-2-6

四阶以上纵横图，杨辉只画出图形而未留下作法。但他所画的五阶至十阶纵横图全都准确无误，可见他已掌握了高阶纵横图的构成规律。对于 n 阶纵横图，他总结出求幻方和及幻和的公式。“并上下数，以高数乘之，折半”得幻方和，杨辉称为“共积”或“总积”。其中，上数为 1，下数与高为 n^2，所以该公式可表为 $\frac{1}{2}n^2\ (n^2+1)$。把幻方和“以行数除之”，得幻和，即 $\frac{1}{2}n\ (n^2+1)$，杨辉称为“纵横”。

① 第二行，原本讹作“九　十　十一　十二　十三　十四　十五　十六”，郭书春校正。

杨辉的五五图（图20-2-7）即五阶纵横图，每行、每列及每条对角线上的数字和均为65。它可能是用镶边法构成的，用这种方法可以由小到大获得任意阶纵横图。

五五图核心的三阶纵横图乃由数字7，8，9，12，13，14，17，18，19构成。按照十六字诀方法易于构造出以这些数字组成的纵横图，其幻和为39。我们把自然数1～25中其他16个数排成和为26的八个数对

1	2	3	4	5	6	10	11
25	24	23	22	21	20	16	15

上行称为小数，下行称为大数。由于五阶纵横图的幻和为65，在三阶纵横图外镶一边，如果左上角取1，则右下角为25；如果右上角取21，则左下角为5。因左列已有1和5两个小数，其余三数必为大数，否则此列幻和小于65；而右列已有21和25两个大数，其余三数必为小数，否则此列的幻和大于65。类似地考虑上行和下行，便可得到一个镶边纵横图。

若在五阶纵横图外镶一边，可得七阶纵横图；再镶一边，可得九阶纵横图。类似地，可用镶边法由四阶纵横图依次得到六阶、八阶和十阶纵横图。这种镶边不是唯一的，所以杨辉的五阶、六阶、七阶和八阶纵横图分别有两例。他把第二例称为阴图，可见第一例为阳，阴、阳二图是众多纵横图的代表。下面依次介绍各阶纵横图。

五五图的阴图（图20-2-8）并非传统意义的纵横图，因为其各行各列的和不唯一，而是有两个（105，107）。但只要将各数减去8，便可得到幻和为65的纵横图了。此例说明，并非所有n行n列的数表都是纵横图，但某些有规律的数表可通过简单变换而成为纵横图（有幻和）。显然，杨辉是在得到五阶纵横图（图20-2-9）后将各数加8而得此“阴图”的，所以说它蕴含五阶纵横图。

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

图20-2-7　五五图

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	19	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

图20-2-8　五五阴图

4	19	25	15	2
20	10	5	18	12
3	17	13	9	23
14	8	21	16	6
24	11	1	7	22

图20-2-9　五阶纵横图

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

图20-2-10　六六图

4	13	36	27	29	2
22	31	18	9	11	20
3	21	23	32	25	7
30	12	5	14	16	34
17	26	19	28	6	15
35	8	10	1	24	33

图20-2-11　六六图阴图

杨辉的“六六图”（图20-2-10）及其“阴图”（图20-2-11）为六阶纵横图，“纵横一百一十一，共积六百六十六”。

杨辉的“衍数图”（图24-2-12）及其“阴图”（图24-2-13）为七阶纵横图，“纵横一

百七十五，共积一千二百二十五”。此图的命名源于《周易 · 系辞》：“大衍之数五十，其用四十有九。”而七阶纵横图恰有四十九数。

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

图 20-2-12　衍数图

4	43	40	49	16	21	2
44	8	33	9	36	15	30
38	19	26	11	27	22	32
3	13	5	25	45	37	47
18	28	23	39	24	31	12
20	35	14	41	17	42	6
48	29	34	1	10	7	46

图 20-2-13　衍数图阴图

杨辉的“易数图”（图 20-2-14）及其“阴图”（图 20-2-15）为八阶纵横图，“纵横二百六十，共积二千八十”。“易数”一词同样取自《周易》，因为《周易》中有八八六十四卦，故称六十四为“易数”。

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

图 20-2-14　易数图

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

图 20-2-15　易数图阴图

杨辉的“九九图”（图 20-2-16）为九阶纵横图，“纵横三百六十九，共积三千三百二十一”。“百子图”（图 20-2-17）为十阶纵横图，“纵横五百五，共积五千五十”。

值得注意的是，杨辉之前，纵横图都是方形的。但杨辉在百子图之后，给出各种形状的纵横图，从而开辟了纵横图研究的新领域。聚五图（图 20-2-18）“二十一子作二十五子用”，每五子的和为 65，实际是五阶纵横图。聚六图（图 20-2-19）“六子回环各一百一十一”。聚八图（图 20-2-20）“二十四子作三十二子用”，每个圆圈上的数字和为 100。攒九图（图 20-2-21）“斜直周围各一百四十七”，即每条直径（外圆）上的数字和为 147。实际上，攒九图的每个同心圆的数字和都相等，为 138。八阵图（图 20-2-22）“八八六十四子，总积二千八十，以八子为一队，纵横二百六十”。连环图（图 20-2-23）“七十二子总积二千六百二十八，以八子为一队，纵横各二百九十二”。这些图形把数学的内在美与图形的直观美融为一体，其构造之妙令人称奇。尽管图形丰富多彩，形状各异，但都是对称的。多样

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

图 20-2-16　九九图

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

图 20-2-17　百子图

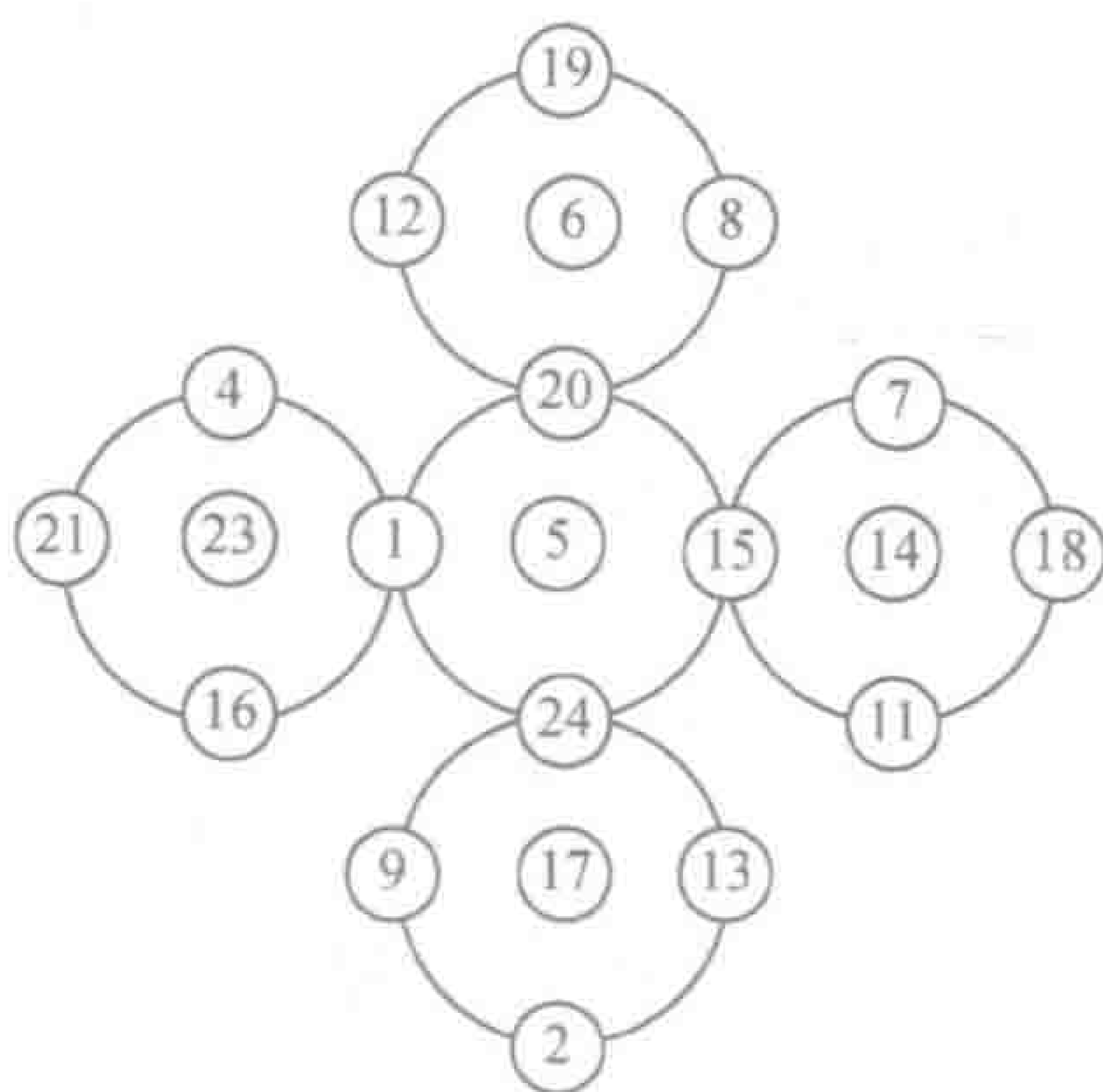


图 20-2-18　聚五图

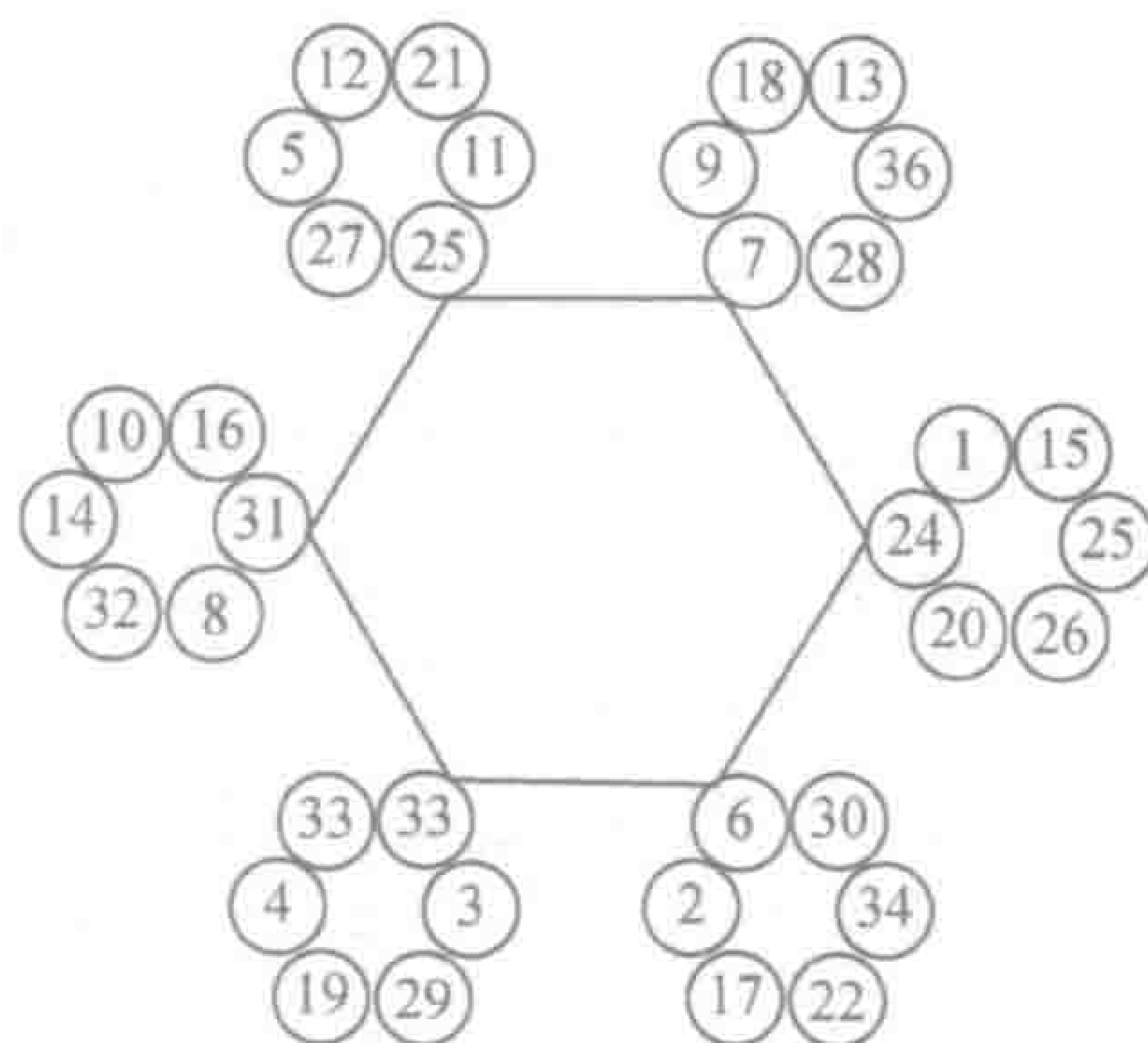


图 20-2-19　聚六图

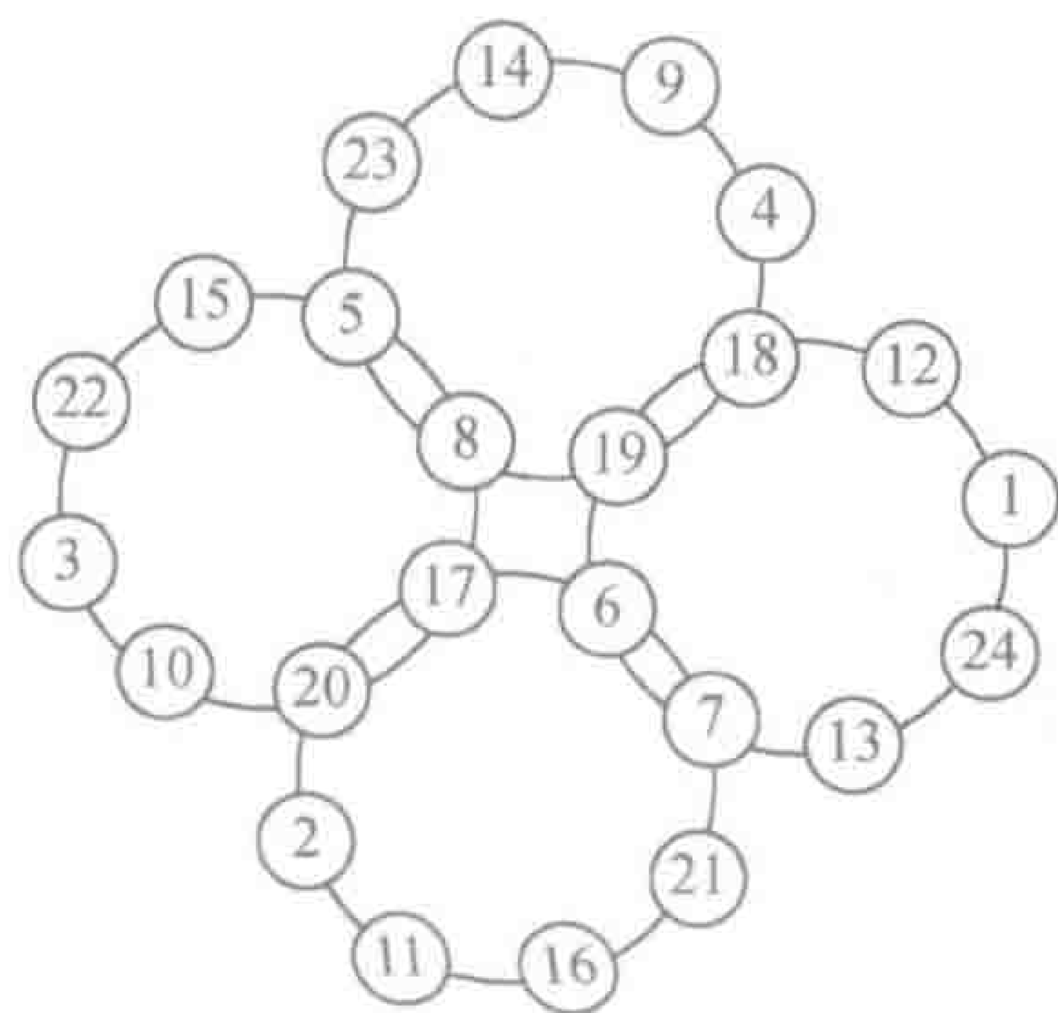


图 20-2-20　聚八图

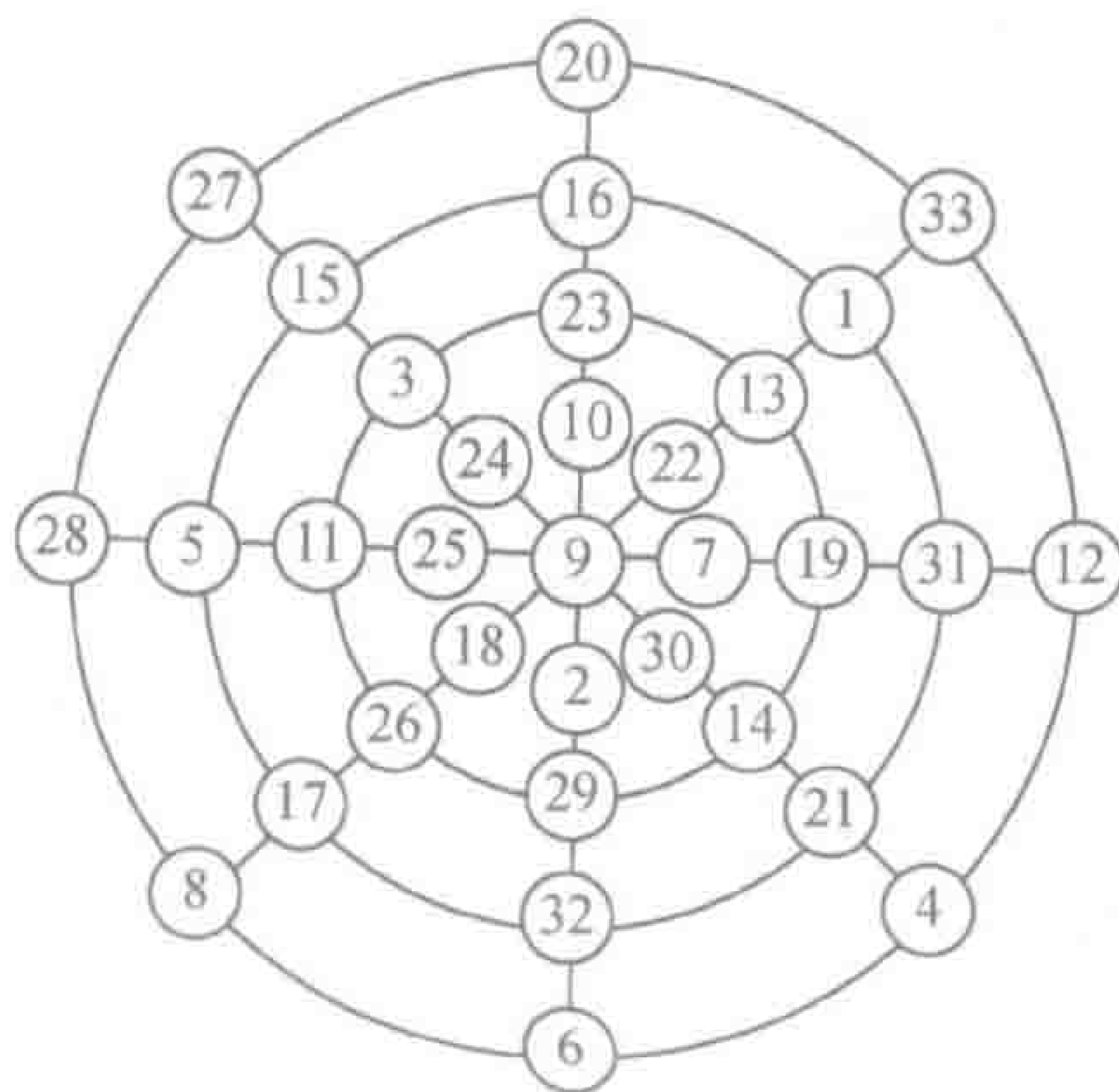


图 20-2-21　攒九图

图 20-2-22　八阵图　　图 20-2-23　连环图

性与对称性的结合，给人一种直观的美感，而这种美感寓于数学的内在美。一组组纵横交错的不同数字，其和都相等，这种巧妙的排列体现了数字的内在规律，是一种守恒美、和谐美。杨辉深刻认识到自己工作的价值，他在给出连环图后说："多寡相资，邻壁相兼，以九队化一十三队，此见运用之道。"这里的"道"即道家之"道"，含有规律的意思。非方形的纵横图可统称为奇异型纵横图，这类图形对国内外有很大影响。

三　丁易东的纵横图

大约与杨辉等探索纵横图构造的同时，易学家丁易东对河图、洛书在易学、数学等领域中的作用进行了阐发。丁氏易学属象数一派，其治《易》不仅重象，而且言数。其象多是对前人工作的整合，而其数则多为自己的发明。丁氏关于纵横图的工作汇集在其自著的《大衍索隐》一书中。该书共三卷，其中第二卷名为《翼衍》，通过自己创造的一些纵横图来说明河图、洛书与大衍数的关系①，其图是对河图、洛书的变化和衍生。丁易东更加着力于拓展洛书的纵横图。

1. 洛书四十五数衍四十九用图

这个图显然是由洛书衍生出来的。丁氏给出如下的解释：

> 洛书九位以五衍之，亦止得四十有五，谓之四十九，何哉？曰：洛书虚十而不用，故十无所附。而所谓一十、二十、三十、四十者，特虚包于数中而已。故九与十一之间即十也，十九与二十一之间即二十也，二十九与三十一之间即三十也，三十九与四十一之间即四十也。四位之十隐然于其间，则其为数自然四十九矣。
>
> 曰：四十九之后安知其不虚包五十乎？曰：所谓虚包者，盖前有数引，后有数从。今四十九之外无五十一，则安能包五十哉？此其所以止于四十九也。

丁易东对图 20-2-24 的"虚包"给出了形象的解释，就是"洛书四十五数衍四十九位图上"，见图 20-2-25。

① 宋 · 丁易东，大衍索隐 · 翼衍，《四库全书》，第 806 册。本编凡引此书，均据此。

2. 洛书四十五数衍四十九位图上

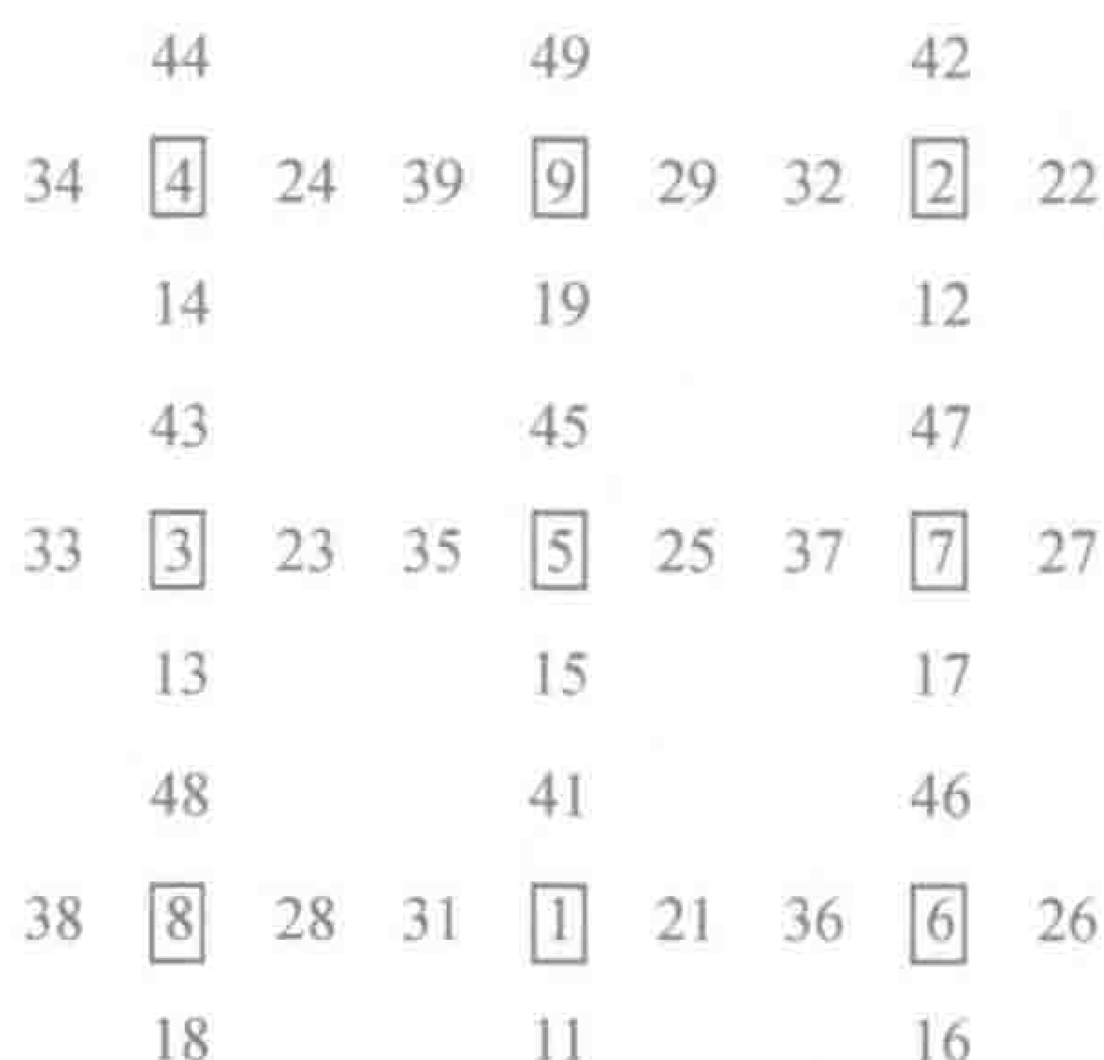


图 20-2-24　洛书四十五数衍四十九用图

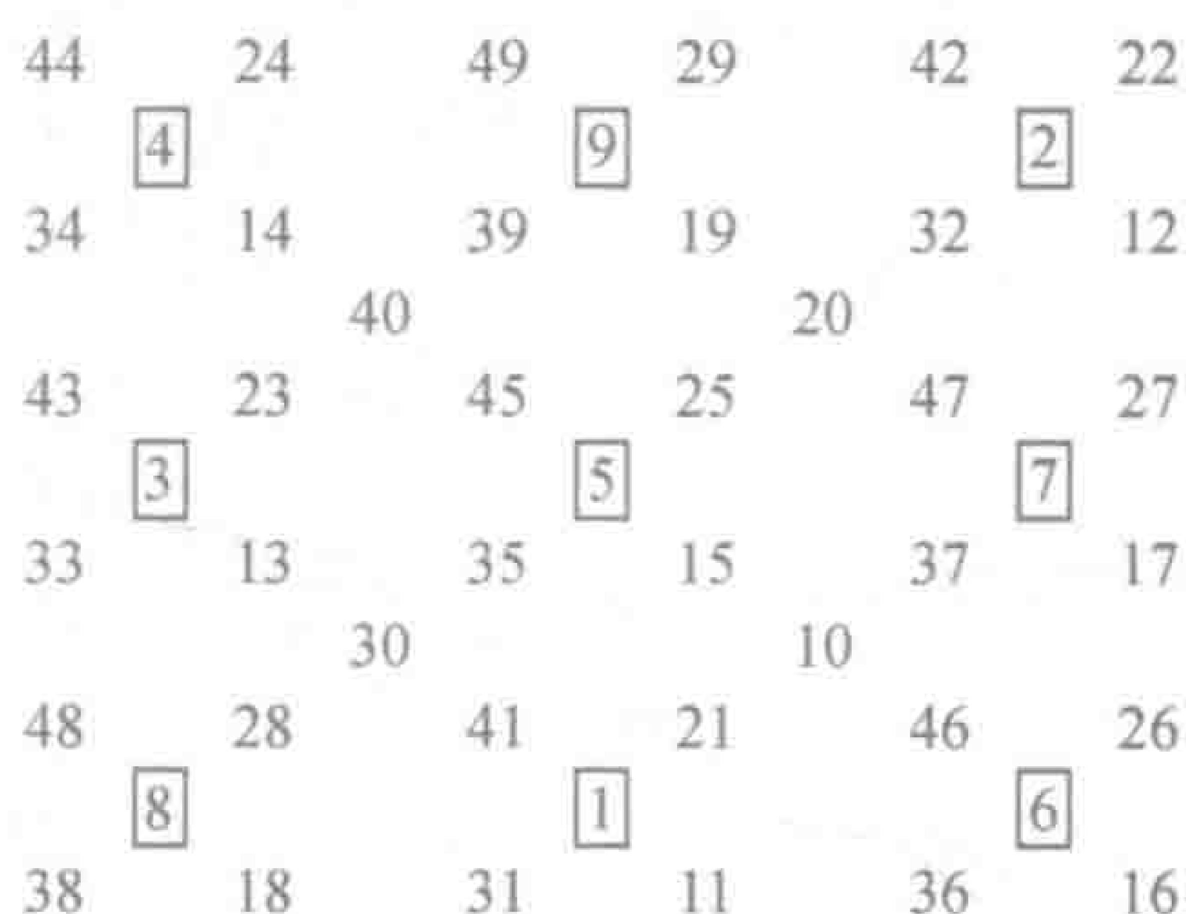


图 20-2-25　洛书四十五数衍四十九位图上

3. 洛书四十五数衍四十九位图下

这个图（图 20-2-26）每条直线上的十三个数字之和均为 310，但是洛书图之外每层上的八个数字之和不相等，每条直线上关于中心数对称的两数之和也不相等（“周围对待数未相等”）。这个图“止以四十九数旁环旧图而布”，所以“不免参差”。我们观察到，洛书图之外每条直线上的数字绝大多数都相差 8，每层上又都有八个数字，所以丁氏很可能是列出洛书图式后，将 10 至 49 这四十个数字依序作八个一组的划分，然后依次将得到的五组划分布列在洛书图之外的五层上，每层上的八个数字按洛书的生出次序排布。

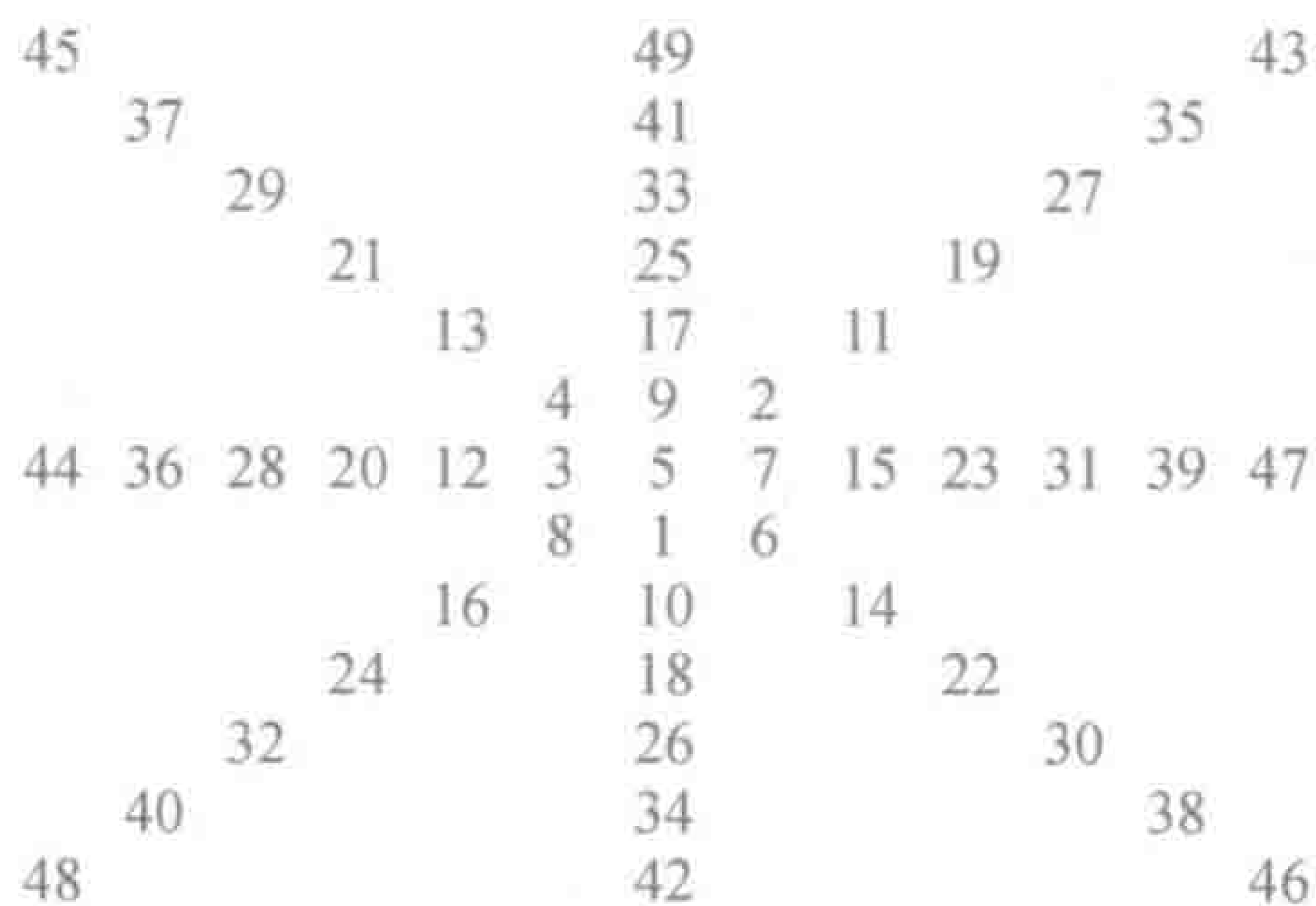


图 20-2-26　洛书四十五数衍四十九位图下

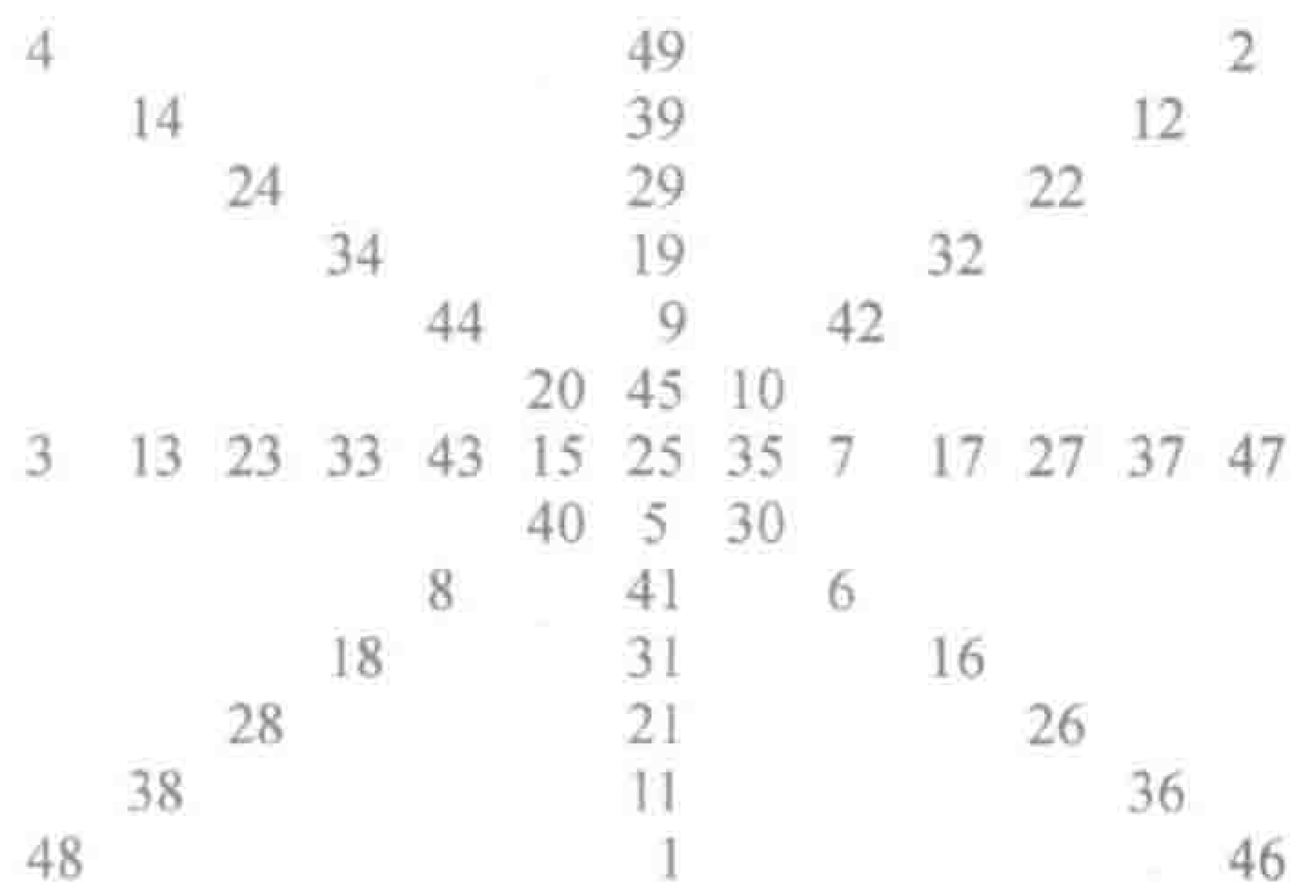


图 20-2-27　洛书四十九位得大衍五十数图

4. 洛书四十九位得大衍五十数图

由于觉得“洛书四十五数衍四十九位图下”“参差”，丁易东又对其进行了改进，得到了“洛书四十九位得大衍五十数图”，见图 20-2-27。

此图每条直线上的十三个数字之和是 325，每条直线上关于中心数 25 对称的两数之和均为 50，中心数之外每层的八数之和是 200。

丁氏讲述了该图的构造：

> 中宫之位以五为一，故一为五，二为十，三为十五，四为二十，五为二十五，六为三十，七为三十五，八为四十，九为四十五，各随洛书戴履、左右、肩足之位布之。

这句话表明，此图中间的 3×3 方阵是将洛书九宫数字各扩大 5 倍后仍按洛书九宫顺序排布而得到的。

经过观察我们发现，“各随洛书戴履、左右、肩足之位布之”的不仅是这中间的九数。实际上，中间的 3×3 方阵之外的五层，每层上的八个数字也依“戴九履一、左三右七、二四为肩、六八为足”的规律排布，只是“八宫之数或自内而外，或自外而内”。丁氏解释说：“一于自内、一于自外，则数或不齐，必如是而后数可等也。此亦洛书以一对九、以三对七之余意耳。一、二、三、四，先于五者也，故由外而内，所以敛而归五也；六、七、八、九，后于五者也，故由内而外，盖由五散之也。”对于洛书纵横之数面面皆等，此图直线上数字之和与每层上数字之和不等，丁氏亦给出解释：“洛书三三而比，故可以合。此图周围止八而纵横之位则十三焉，故不可强同也。若以其对待者论之，则固皆五十矣；以其周围者论之，固皆二百矣；以其纵横者论之，固皆三百二十五矣。”

5. 大衍数四十九用得五十数变图上（图 20-2-28）

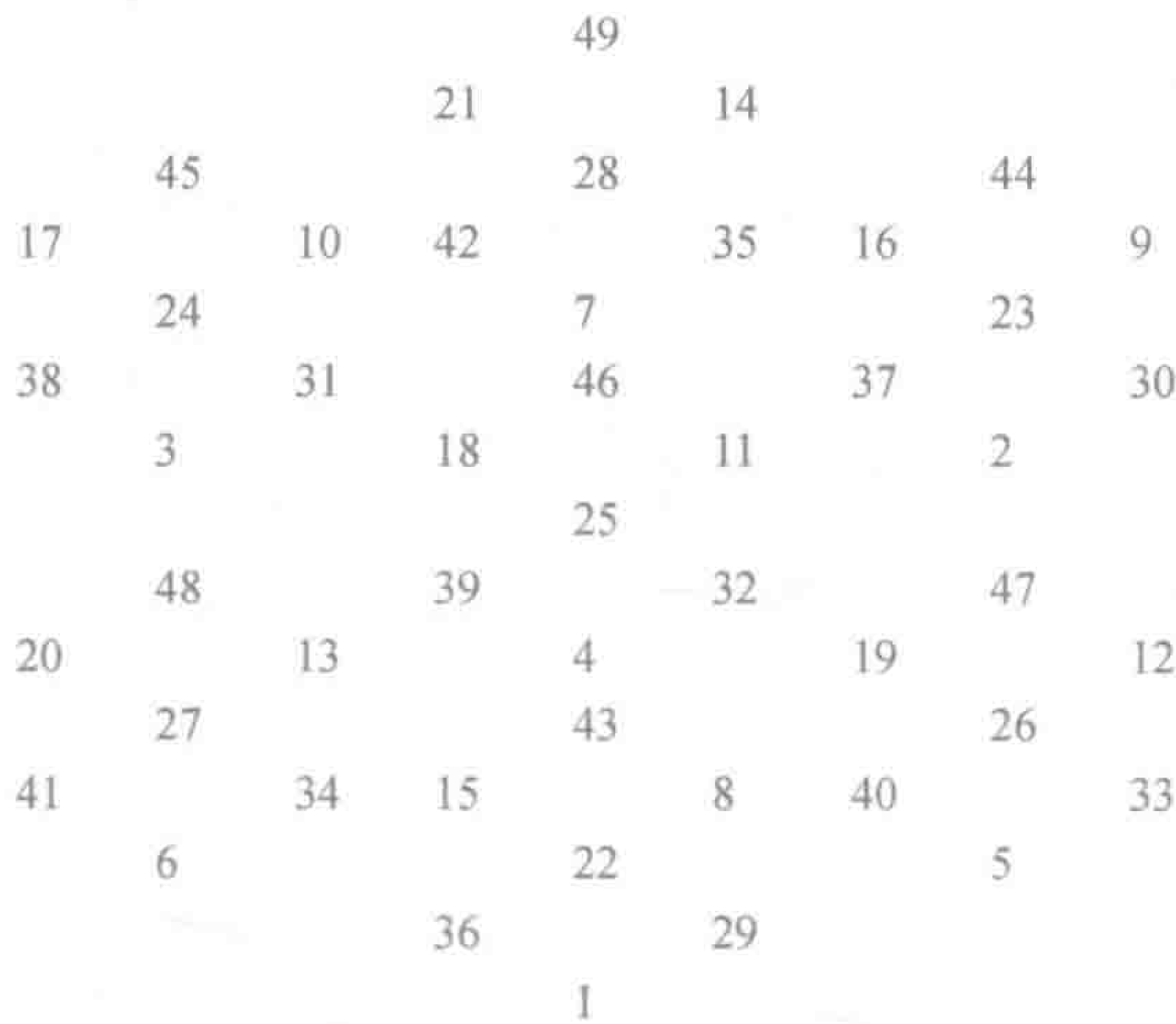


图 20-2-28 大衍数四十九用得五十数变图上

6. 大衍四十九用得五十数变图下（图 20-2-29）

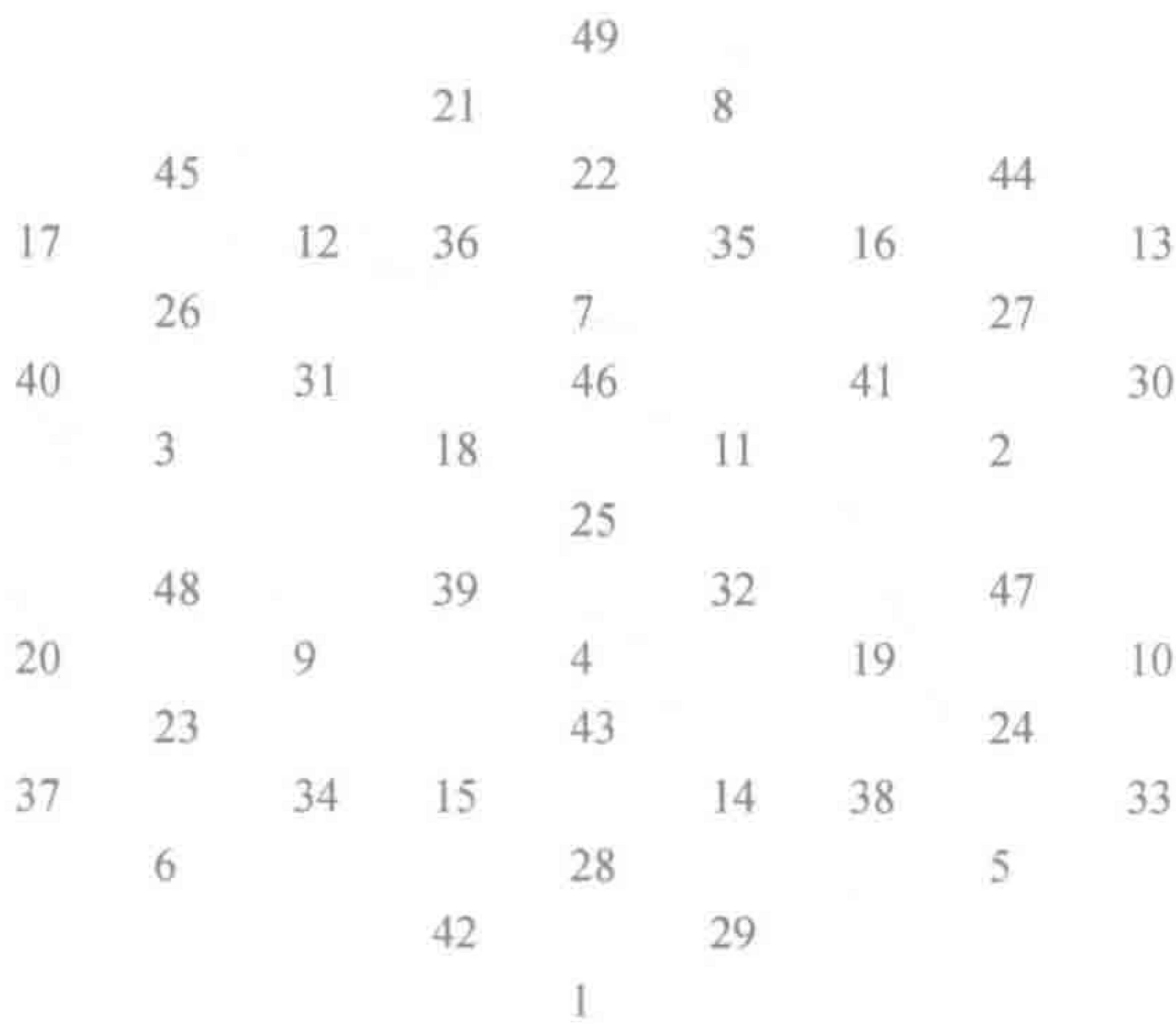


图 20-2-29 大衍四十九用得五十数变图下

丁易东对此二图的构造仅给出简单的解释，说上图“七变俱以顺布”，下图“七变一顺一逆”。同时又说：“大衍之数四十九，七七之数也。六包一为七，而七七之数皆以六包七。”

7. 洛数九数乘为八十一图

此图与杨辉记录的“九九图”（图 20-2-16）相同。丁易东说此图“每宫为九，凡九九八十一位，一依洛书次序而布，纵横各得三百六十九，对位皆得八十二”。这表明此图可以视为九个小九宫，每个小九宫的纵、横、斜向数字之和又构成了一个大九宫（见图 20-2-30）。故丁氏说：“一宫纵横 111，中位 37；二宫纵横 114，中位 38；三宫纵横 117，中位 39；四宫纵横 120，中位 40；五宫纵横 123，中位 41；[①] 六宫纵横 126，中位 42；七宫纵横 129，中位 43；八宫纵横 132，中位 44；九宫纵横 135，中位 45。每三宫纵横 1107。”

120	135	114
117	123	129
132	111	126

图 20-2-30　大九宫

我们将图 20-2-18 看做一个九宫图，每宫中又有九位数字，这个图的构造可以下式表示，第 k 宫第 n 位数字为 $9\times(n-1)+k$（其中，n 为洛书中九宫数字）。这就是对“每宫为九，凡九九八十一位，一依洛书而布”的解释。

8. 九宫八卦综成七十二数合洛书图（图 20-2-31）

4 40 15 51 四 22 58 33 69	9 45 10 46 九 27 63 28 64	2 38 17 53 二 20 56 35 71
3 39 16 52 三 21 57 34 70	5 41 14 50 五 23 59 32 68	7 43 12 48 七 25 61 30 66
8 44 11 47 八 26 62 29 65	1 37 18 54 一 19 55 36 72	6 42 13 49 六 24 60 31 67

图 20-2-31　九宫八卦综成七十二数合洛书图

丁氏说此图“以先天八卦合九宫之位而布之，凡八九七十二。纵横皆得八百七十六，九宫之数各得二百九十二。……每宫之数皆自左而右、自上而下合先天圆图之序，总九宫之数则戴履、左右、肩足之象无一不本于洛书”。即是将 1 至 72 这七十二个数字依次序八个一组，共分为九组，每组中的数字在九宫中依洛书排布方式而正序、反序相间排列，在每宫中组的次序依先天图排布。丁氏此图易学含义非常明显。

丁易东的纵横图本是用来解《易》的，故不同于数学纵横图（今之幻方）。可是我们发现，“洛数九数乘为八十一图”以今之观点看来即是一个 9 阶幻方，再考虑到洛书这个最古老的 3 阶幻方，它们或许可以为幻方的中国独立起源提供一点证据。

① 原文脱“五宫纵横 123，中位 41”句，今补。

第二十一章　唐中叶至元的中外数学交流

唐中叶之后，特别是宋辽金元时期，中国与中亚伊斯兰地区经济、政治、文化等方面的友好往来和战事不断，数学的交流也比以往任何时候都丰富多彩。相反，宋辽金元与朝鲜、日本的交流相对来说要少一些。某些重要的宋元数学著作对朝、日的影响在元亡之后更为突出，这在第五编再谈。

第一节　中外数学交流概况

一　9世纪之后伊斯兰地区的数学发展概况

横亘北非到中亚的伊斯兰地区位于欧洲、中国、印度这三个人类历史上主要文明的交汇处，与这三个文明的经济、政治、文化往来密切，数学是其中重要部分。为了说明中国与伊斯兰地区的数学交流，需要首先介绍一下9世纪之后伊斯兰地区数学发展的概况。

7世纪初，穆罕默德创立伊斯兰教。从回历纪元元年（公元622）起，几十年内，穆罕默德及其继承者不仅统一了阿拉伯半岛，而且扩展到中亚，印度半岛的西北部，北非，甚至跨海远达西班牙，先后建立了以军事力量为后盾，政教合一的以阿里发为最高统治者的封建政权奥米亚王朝（公元661~750）和阿拔斯王朝（公元750~1055）。前者建都于大马士革，中国史书称为“白衣大食”；后者建都于巴格达，中国史书称为“黑衣大食”。1055年，土耳其人攻入巴格达，建立塞尔柱王朝。阿里发仅保留教权。13世纪初，成吉思汗率蒙古军队西征。1229年，成吉思汗第三子窝阔台（1186~1241）即汗位。1237年蒙古大军西征俄罗斯等国，抵达欧洲中部。直到1242年初窝阔台去世的消息传到欧洲，开始撤军。13世纪中叶，成吉思汗的孙子旭烈兀率领蒙古军队进攻阿拉伯地区，1258年攻陷巴格达，建立伊儿汗国。14世纪和15世纪，蒙古人又建立帖木儿帝国，定都撒马尔罕。蒙古人征服了伊斯兰国家，然而他们自己也皈依了伊斯兰教。因此，伊斯兰教仍然是这一地区的主要宗教。同样，阿拉伯文是这一地区通用的官方文字。当时出现的绝大多数数学著作都是用阿拉伯文撰写的。

从8世纪起，巴格达是当时世界上著名的商业、文化中心之一，也是数学研究中心之一，直到1258年蒙古军队占领并摧毁它为止。帖木儿帝国时代，撒马尔罕成为数学中心。9至15世纪，伊斯兰地区先后出现了许多杰出的数学家。例如阿尔·花拉子米（al-Khowārizmī，公元780~850），他是阿拔斯朝哈里发马蒙的司书官，著有《算术》和《代数学》（al－jabr w'al－muqabalah，约公元830年），al－jabr w'al－muqabalah的本意是相消和移项，西文algebra（代数）就源于al－jabr。后来又有阿尔·巴塔尼（al－battân，858~929），阿波维法（Abû'l－Wefa，公元940~998），奥玛尔·海牙姆（Omar－Khayyam，1044~1123）等。旭烈兀攻占巴格达之后，在蔑拉哈山麓建立天文台，著名的天文学家、数

学家纳速拉丁（Nasīr ed-din al-Tûsi，1201～1274）在这里工作，他主持制订了《伊儿罕历》。15世纪，帖木儿的孙子兀鲁伯在撒马尔罕建立天文台，编制了著名的《兀鲁伯星表》。著名科学家阿尔·卡西（al－Kāshī，？～1429）是撒马尔罕天文台的主持人之一。

这一时期的伊斯兰文化从东罗马接受了古希腊的文化遗产，数学也受到古希腊的深刻影响。从9世纪中叶起，古希腊欧几里得、阿基米德、阿波罗尼等的著名数学著作，托罗密（Ptolemy）的著名天文学著作被译成阿拉伯文，有的如《几何原本》还不止一个译本。10世纪，古希腊晚期的著名数学家丢番图（Diophantus）的著作也译成了阿拉伯文。许多数学家对这些著作进行了注释和研究。

伊斯兰国家的数学也受到印度数学的影响。早在8世纪末，印度数学家、天文学家婆罗门笈多（Brahmagupta，约7世纪）的著作 *Brahma—siddhānta* 便被译成阿拉伯文。此后，印度数学不断传入阿拉伯地区，推动了当地数学的发展。

中国大约从汉代起，与中亚和阿拉伯地区就开始了往来。在伊斯兰国家数学的发展中，中国数学的作用也是不可忽视的。一方面，传入阿拉伯地区的印度数学知识中，有许多源于中国，如十进位值制记数法，分数四则运算法则，今有术（三率法），百鸡问题等。另一方面，中国与伊斯兰国家还有直接交往，这在下面将要谈到。

9～15世纪，伊斯兰国家数学在世界数学史上占有重要地位，与中国宋元一道是当时世界上数学最发达的两个地区。

二　宋元时期中国与伊斯兰国家的数学交流

在以女真族为主体的金与北宋联合灭辽的前一年，公元1124年，辽宗室耶律大石率领一部分契丹人西迁，在今新疆西部和中亚地区建立了与土耳其人的塞尔柱王朝相邻的国家，史称西辽（1124～1211）。他们自称为喀喇契丹（Kara Khatai），也就是“黑契丹”。西辽虽仅存在80余年，但对东西文化传播起了重大作用。中国的一些重要发明，如印刷术、火药等便是通过西辽传入伊斯兰国家，火药被他们称作“契丹火花”。[①]

在成吉思汗西征时，他的随军参谋耶律楚材在中亚停留了六七年，约1226年返回中国内地。耶律楚材是一位多才多艺的学者，他在中亚停留期间注意学习伊斯兰科学，掌握了伊斯兰系统的历法并将其带回中国。他根据在中亚所见天象与在中国北部所见的时间差异，参考伊斯兰历法作《西征庚午元历》。《元史·历志》云，此历“以西域、中原地里殊远，创为里差，以增损之；虽东西万里，不复差忒”。研究历法是需要各种计算的，其中必然包括一些伊斯兰数学的内容。

蒙古军队的远征客观上加强了中外科学交流。既有一些中国的学者随军到达中亚和欧洲，而在远征后，又有一些精通科学的人不断从中亚来到中国，有的服务于蒙古王廷和元朝，其中最著名的是爱薛和札马鲁丁。

爱薛（1227～1308）是西域拂林（属东罗马）人，他“于西域诸国语、星历、医药无

---

① 杜石然，试论宋元时期中国和伊斯兰国家间的数学交流，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年。

不研习”，曾“受知定宗，荐其贤，召侍左右”。[①] 后来，他一直在上都（今内蒙古正蓝旗）和大都（今北京）从事医药工作，有时监管星历。

札马鲁丁是伊斯兰历算家，1250~1251年间来到中国。著名数学家与天文学家纳速拉丁正处于活跃时期，他于1248年把欧几里得《几何原本》译成阿拉伯文，札马鲁丁带到中国的一批阿拉伯文图书中便包括此书。他使纳速拉丁的名字与声誉为成吉思汗的孙子蒙哥所知。蒙哥于1251年即汗位，他从札马鲁丁那里学习了《几何原本》的一些内容并“曾解答欧几里得的若干图”[②]，这说明《几何原本》在元代已传入中国。

1253年，蒙哥派遣其弟旭烈兀征讨信奉伊斯兰教的西域各国。据《史集》第三卷云，蒙哥非常想得到纳速拉丁，在旭烈兀出发时叮嘱说：“当邪教徒诸堡被征服时，把纳速拉丁送到这里来吧。”其目的可能是让纳速拉丁在中国建立天文台。

旭烈兀大军进入波斯东北的呼罗珊，确实得到了纳速拉丁。在征服当地哈里发时，纳速拉丁发挥了很大作用。在西进报达（巴格达）的征途中，他一直是旭烈兀的随行参谋。但是，旭烈兀并没有把纳速拉丁送到蒙哥处，而是留在自己身边。1259年，西域战事结束，旭烈兀派随行的汉族将领郭侃回中国向蒙哥报捷，正赶上蒙哥死于钓鱼山。旭烈兀让纳速拉丁在刚建立的伊尔汗国定居，并立即择地建天文台。据《史集》载：旭烈兀“有旨让极其伟大的、幸福的毛拉、人类的导师、贤明者之王、近年可尊敬的活动家火者纳昔剌丁·徒昔在认为合适的地方建起一座观察星象的建筑物。他选择了蔑剌合城，建造了一座壮丽的天文台”。它是“在旭烈兀登上汗位后七年”（1262）建成的。纳昔剌丁·徒昔即纳速拉丁，该天文台便是著名的马拉加天文台。台内有各种优良的天文仪器和大量图书，是当时世界上最好的天文台之一。

随着蒙古军队的西征，一些汉族的历算家、星占学家和僧人来到了中亚，宋元时期的中国数学开始传入这个地区。李俨《中国数学大纲》上册引Beidavi称，纳速拉丁在天文台里聚集了许多天文学家，也包括中国学者。这些学者中有一位叫傅穆斋（Fu - muen - gi），通称“先生”，但不清楚其身世和贡献。纳速拉丁从他那里知道了中国纪年及计算方法，在主编《伊尔汗天文表》（Ilkhanic astronomical table）时受到中国的一些影响。伊尔汗帝国的各朝代，都和中原内地保持着联系，同时有一些汉族学者在伊尔汗帝国的朝廷中工作。因此，15世纪阿尔·卡西算书中可以看到许多中国宋元数学的影响，便是很自然的了。《兀鲁伯星表》中，有一编是专门论述中国历法的，其中不乏数学内容。早来中国的札马鲁丁，由于蒙哥忙于向四川等地进军，建天文台之事自然被搁置。《元史·百官志六》云，蒙哥之弟忽必烈“在潜邸时，有旨征回回为星学者，札马鲁丁等以其艺进，未有官署”。札马鲁丁在忽必烈手下，从事回回天文学研究。1260年，忽必烈即皇帝位，是为元世祖。第二年，札马鲁丁奉忽必烈之命筹集粮食。

在这之后的一些年不见有札马鲁丁的记载，他可能是受忽必烈派遣去马拉加天文台学习。回国后造“西域仪象”七件，至元四年（1267）完成。至元八年忽必烈命在上都承应阙建回回司天台，以札马鲁丁为提点（台长），七件天文仪器便安装在此天文台上。

除札马鲁丁外，在回回司天台工作的阿拉伯科学家还有可马拉丁、塔木丁、瞻思丁等。

---

① 元·程钜夫：雪楼集，卷五“拂林忠宪王神道碑”。

② 波斯·拉施特主编，余大钧译，史集，第三卷，商务印书馆，1986年。本编凡引此书，均据此。

其中，可马拉丁是仅次于札马鲁丁的人物，他于至元初年任司天少监，负责给安西王造回回历。

第二节　中国数学的外传

一　中国数学对伊斯兰国家的影响

（一）盈不足术和契丹算法

盈不足术是中国传统数学的重要分支，《九章算术》第七章专门论述盈不足术及其应用。约在9世纪便传入中亚地区。在阿尔·纳吉姆（Abû'l－Faradsh al－Nadim）所著《算法之书》（Kitâb al－Fihrist，公元987）中谈到一位名叫阿·色丹尼的数学家，说他"曾为花拉子米所著《代数学》和《盈不足算书》作注"。据此推测，盈不足术在花拉子米时代（9世纪）已传到巴格达。这是盈不足术见于阿拉伯文献的最早记载，可惜这部算书没有流传下来。

10世纪时，寇斯塔·伊本·鲁伽（Qostâ ibn Lûqâ ai－Baálbcbî）写了一本算书《盈不足术证明》（Maqāla li－Qostā b. Lūqā fi'l－burhān lalā átrial hisab el－chataáin），其中"hisab el-chataāin"是中世纪伊斯兰国家对盈不足术的称呼。在该书中，作者试图用两种方法证明盈不足公式的正确性。一是几何方法，分"二者皆盈"、"二者皆不足"和"一盈一不足"三种情况证明；二是算术方法。该书辗转抄写，流传至今。

另外，10世纪的阿尔·法兹（Sinan ibn alFath）、12世纪的阿尔·哈萨尔（al－Hassar）和13世纪的阿尔般那（Albanna）等也曾论述过盈不足术①，其中后两位属于"西阿拉伯数学系统"。盈不足术便是沿着这条重要的文化走廊，在12世纪和13世纪之交传入欧洲的。意大利数学家斐波那契（Leonardo Fibonacci）所著《计算之书》（Liber abaci，1202）的第十三章即盈不足术（De regulis elchatayn），他在书中指明这一方法来自阿拉伯。斐波那契曾到埃及、叙利亚等地游学，这使他有机会学习伊斯兰国家的数学，成为系统地把东方数学介绍到欧洲的第一人。后来，欧洲数学家帕乔利（Pacioli，1445～1509）和塔塔利亚（Tartaglia，1506～1557）的著作中都提到盈不足术。盈不足术的名称除斐波那契所用的elchatayn外，还有al－Khataayn，elcataym等，它们显然是同一个词的不同音译。

在中世纪的伊斯兰国家中，普遍地用hisab al-Khataayn这个术语来称呼盈不足术。直到1427年阿尔·卡西所著《算术之钥》中，卷五第二章的名字还是"以hisab al-Khataayn来求解未知数"。其中，hisab一词，按阿拉伯文是"算法"的意思。根据钱宝琮的考证，al-Khataayn由"契丹"（Khatai或Khitai）一词的音译转化而成，因为语根Khata和契丹的音十分相近。② 1125年，辽国贵族耶律大石率部西迁，在中亚建国，史称西辽。西辽统治者是契丹族人，当时的历史学家也把中国人称为"契丹"。因此，伊斯兰算法中的"al-Khataayn"就是契丹算法的意思。对盈不足术冠以此名，说明该术来自中国。

---

① D. E. Smith. *History of Mathematics*. Vol. Ⅱ. New York：Dover，1951. p. 437.

② 钱宝琮，《九章算术》盈不足术流传欧洲考，见：《科学》杂志第十二卷（1927）六期。

在中世纪阿拉伯国家中，除 hisab al-Khataayn 这一名称外，盈不足术也被称为天秤术。[1]这可能是因为在计算中用到的图形很像天秤的盘子。计算时把第一次假设记于右上，第二次假设记于左上，下方则记其盈或不足。然后用线把四数交叉连接起来，如图 21-2-1 所示，其中连线与乘号相似，表示四数交叉相乘。这种记法是用来表示公式

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

的计算步骤。

阿尔般那所著《算法简论》一书中便介绍了这种"天秤术"，以后的一些欧洲数学著作也沿用这种称呼。

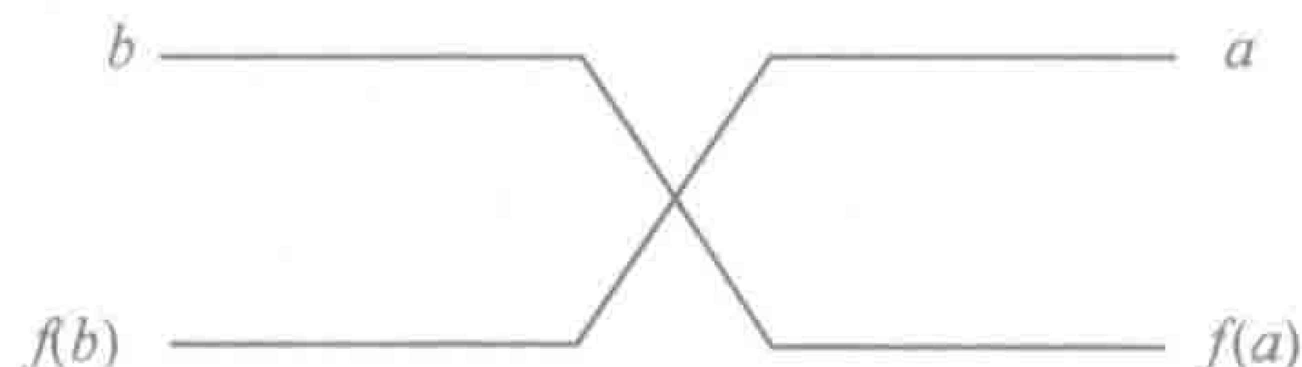


图 21-2-1　天秤术



图 21-2-2　维乘

"天秤术"的图式和中国古代盈不足术的"维乘"算法完全相同。宋杨辉在《详解九章算术》中则明确列出了四数交叉相乘的图式，如图 21-2-2 所示。

明朝万历四十一年（1613），李之藻等根据克拉维斯（Clavius，1537～1612）所著《实用算术》（Epitome arithmeticae），编译成《同文算指》一书。这是我国第一部系统介绍西方笔算的书。原书第二十三章"双设法"，被李之藻译成"迭借互征"[2]（《同文算指》卷四）。他在书中写到，迭借互征"与旧法盈朒类似"，但"旧法未知借推之妙，只知立盈与不足或两盈两不足"。当时，《九章算术》传本稀少，李之藻大概没有见过。他所说的"旧法"是程大位《算法统宗》中的"盈朒"，其中对盈不足术的讨论不够充分，所以他认为中法不如西法。这就是说，盈不足术西传之后，经阿拉伯国家到欧洲，又从欧洲传回中国。虽然"乡音未改"，人们已是"相见不相识"了。

（二）开方法

李约瑟指出："中国从贾宪开始所用的求高次方根的方法，似乎曾影响了卡希。"[3] 这里所说的卡希，就是阿尔·卡西，从他的《算术之钥》中，可以看到中国宋元数学的影响。

在《算术之钥》第一卷第五章"开方法"中，阿尔·卡西除介绍了开平方、开立方法外，还介绍了开任意次方的方法。该法与贾宪所用的增乘开方法有很多相同之处：

（1）被开方数置于最上方，各次幂的系数依次向下，越向下次数越高。

（2）商得一位根数之后的减根变换，都是自下而上随乘随加，直至递次减低一层而止。

---

① 以下关于盈不足术的论述，依据杜石然《试论宋元时期中国和伊斯兰国家的数学交流》。

② 明·李之藻，同文算指，卷四，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第二册，河南教育出版社，1993 年。

③ ［英］李约瑟，中国科学技术史．数学，科学出版社，1978 年，第 324 页。

然后，各次幂系数作有规则的退位。

（3）如此反复，直到求得最后一位根数。

（4）开方不尽时，对不尽根近似值的计算方法完全相同，都使用了公式

$$\sqrt[n]{a^n + r} = a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

值得注意的是，该书中有一个二项式定理系数表，如图21-2-3所示。它与11世纪在中国出现的贾宪三角形是一致的。阿尔·卡西给出了两种造表方法：一种是以肩上两数之和作为后行之一数，另一种方法则与杨辉书中所引贾宪“增乘方法求廉草”全同。阿尔·卡西的工作在贾宪之后，考虑到当时确有若干中国历算专家随蒙古军队来到阿拉伯地区，他很可能受到中国影响。当然，也不排除他独立得到这一成果的可能性。在科学史上，不乏同一真理被不同民族发现的事例。这一问题有待进一步考证。

9							
36	8						
84	28	7					
126	56	21	6				
126	70	35	15	5			
84	56	35	20	10	4		
36	28	21	15	10	6	3	
9	8	7	6	5	4	3	2

图21-2-3　阿尔·卡西的二项式定理系数表

（三）不定方程

约5世纪成书的《张丘建算经》中有一个“百鸡问题”，相当于求解不定方程组，《数术记遗》（6世纪）中也有类似问题。后来，百鸡问题以几乎完全相同的形式出现在印度数学家马哈维拉（Mahāvīra，9世纪）和婆什迦罗（Bhāskara，12世纪）的著作中。9世纪，在阿拉伯数学家艾布·卡米勒（Abū Kāmil）的著作中，也出现了一些“百鸡问题”①，例如

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + \frac{y}{20} + z = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 100 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + 2z = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + \frac{y}{20} + \frac{z}{3} = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z + u + v = 100 \\ 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \frac{u}{4} + v = 100 \end{cases}$$

等等。

在欧洲，13世纪初斐波那契所著《计算之书》② 中也有“百鸡问题”，只是问题被改成“三十钱买三十只禽”。有资料表明，斐波那契曾接触过艾布·卡米勒的著作，百鸡问题可能是通过这种途径传入欧洲的。另外，斐波那契的书中还有“物不知数”问题，数据与《孙子算经》全同。

（四）小数

阿尔·卡西的著作中采用了十进制小数，如《圆书》中的圆周长便精确到16位小数，记如

① 杜石然，再论中国和阿拉伯国家间的数学交流，自然科学史研究，1984，3（4）：第302~303页。

② ［意］斐波那契，计算之书，纪志刚等译．科学出版社，2008年。

整数部分	小数部分
6	2831853071795865

他的小数记法比欧洲早，但晚于中国的宋元数学，有可能受到宋元数学的影响。

二　中国数学对朝鲜和日本的影响

朝鲜高丽时期除了继续使用早已传入的《缀经》、《三开》、《九章》和《六章》等数学著作外，又引入《谢家》。《谢家》即《谢察微算经》，此书被认为是五代时期的著作。①

1298 年，后来的高丽忠宣王（1308～1313 年在位）还是王子时作为人质来到大都（今北京），正值朱世杰完成《算学启蒙》之时。他命崔诚之入太史院学《授时历》，有可能接触《算学启蒙》，因为太史院是科学家聚集之所，掌握最新科研成果。崔诚之学成回国后，将历法传给姜保。姜保传写置青云观中，后据此编成《授时历捷法立成》，于 1343 年在朝鲜刊刻出版，书末附"算法"六条，包括"留头乘法"、"飞归除法"、"因法"、"加法"、"半法"和"飞归除法歌"。李迪注意到其中的"留头乘法"首先见于《算学启蒙》，"飞归除法歌"与《算学启蒙》的"九归除法"几乎相同，而这些歌诀不见于中国现传《授时历》。可见《算学启蒙》在元代就传到了朝鲜。② 18 世纪的朝鲜数学家也有《算学启蒙》"元朝东来"的说法。③

镰仓幕府时代（1192～1332），日本也有《算经十书》。其中，与中国相同的六种：《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《周髀算经》和《缀术》。其他四种为：《六章》、《三开》、《重差》和《九司》。

第三节　伊斯兰国家数学的传入

一　数学著作的传入

上都天文台收藏着一批阿拉伯天文数学著作，是供台长及工作人员参考用的，没有被翻译成中文。这批书早已亡佚，但留下一份珍贵的目录。据元《秘书监志》"回回书籍"条载：至元十年（1273），北司天台"见合用经书一百九十五部"，计 13 种。以下几种是有关数学的：

（1）兀忽列的四擘算法段数十五部；

（2）罕里速窟允解算法段目三部；

（3）撒唯那罕答昔牙诸般算法段目并仪式十七部；

（4）麦者思的造司天仪式十五部；

---

① 李迪、冯立昇，《谢察微算经》试探，数学史研究文集．第三辑，内蒙古大学出版社，九章出版社，1992 年，第 58～65 页。

② 吴文俊主编，李迪卷主编，中国数学史大系 · 西夏金元明卷，北京师范大学出版社，1999 年，第 517～519 页。

③ 黄胤锡，《颐斋乱稿》卷十四，见：［韩］国学振兴研究事业推进委员会编，韩国学资料丛书三，［韩］精神文化研究院，1995 年，第 86 页。

（5）速兀里可兀乞必星纂四部；

（6）呵些必牙诸般算法八部。[1]

对第一种“兀忽列的四擘算法段数十五部”，严敦杰认为“兀忽列的”就是欧几里得，因此这是《几何原本》十五卷。[2] 李迪《中国数学通史·宋元卷》的看法与严敦杰基本相同，认为按阿拉伯语读音，欧几里得应为“欧几里得司”，与“兀忽列的四”的发音一致，“擘算法”即原本。钱宝琮认为“兀忽列的四擘”是 al-Khowarizmi 的音译，即这是花拉子米的数学著作。也有人认为“兀忽列的”是 ulūmi riyāzi（数理之学）的音译，而“四擘”可能有开平方、开立方的意义。[3]

对第二种，杜石然说有人将“罕里速窟”还原为波斯语 hunar-i-sūf，即智慧的学问，但作者及内容都不得而知。

对第三种，马坚认为：“‘撒唯那罕答昔牙’是 Safina Handasiya 的对音，译云几何学。”[4] 但不知是谁的著作。

第四种即托勒密（Ptolemy）的《大集》。大集的阿拉伯语为 al-Magest，“麦者思的”便是 Magest 的音译。这说明托勒密《大集》的阿拉伯文译本于元代传入中国。

第五种为《星象问答》。“速兀里可兀乞必”是 Suwali Kawakibi 的对音，译作星象问答。“星纂”是汉译名，说明这是一部星书。但不知其作者和具体内容。

第六种，“呵些必牙”是 Hisabiya 的对音，译为算学，“诸般算法”是汉译名。我们不清楚此书的具体内容，但 Hisabiya 与花拉子米的著作《还原与对消的科学》(al - Kitap al - mukhta Sarfi Hisap al - Jabrwa al - muqabala，今译《代数学》)[5]书名的部分相近，所以说花拉子米的代数学有可能在 13 世纪传入中国。

以上分析说明，某些古希腊和当时阿拉伯的数学著作于元初传入中国。但这些著作收藏于天文台，又是阿拉伯文本，所以影响不大。后来，随着天文台被毁，台里的书也就消失了。

二　阿拉伯数码与纵横图

1957 年春，考古人员在西安市郊的元代安西王府发掘出五块铁板，每块铁板上都刻画着由阿拉伯数码构成的六阶纵横图，如图 21-3-1 所示，排列形式一样。图 21-3-2 是其现代阿拉伯数字的释文，这是阿拉伯数码传入我国的最早物证。据元《秘书监志》记载，至元十五年（1278）札马鲁丁曾为安西王府推算历法，同时还有三位回回司天台的官员在王府作“见习随侍”。这些纵横图可能是他们从阿拉伯地区带来的。

---

① 元·王士点、商企翁，《元秘书监志》卷七，1273 年。

② 严敦杰，欧几里得《几何原本》元代输入中国说，《东方杂志》第 39 卷，第 13 号，1943 年。

③ 杜石然，试论宋元时期中国和伊斯兰国家间的数学交流，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966 年，第 262～263 页。

④ 马坚，元秘书监志“回回书籍”释义，光明日报，1955 年 7 月 7 日第三版。

⑤ ［阿拉伯］阿尔·花拉子米，算法与代数学，伊里哈木·玉素甫、武修文编译，科学出版社，2008 年。

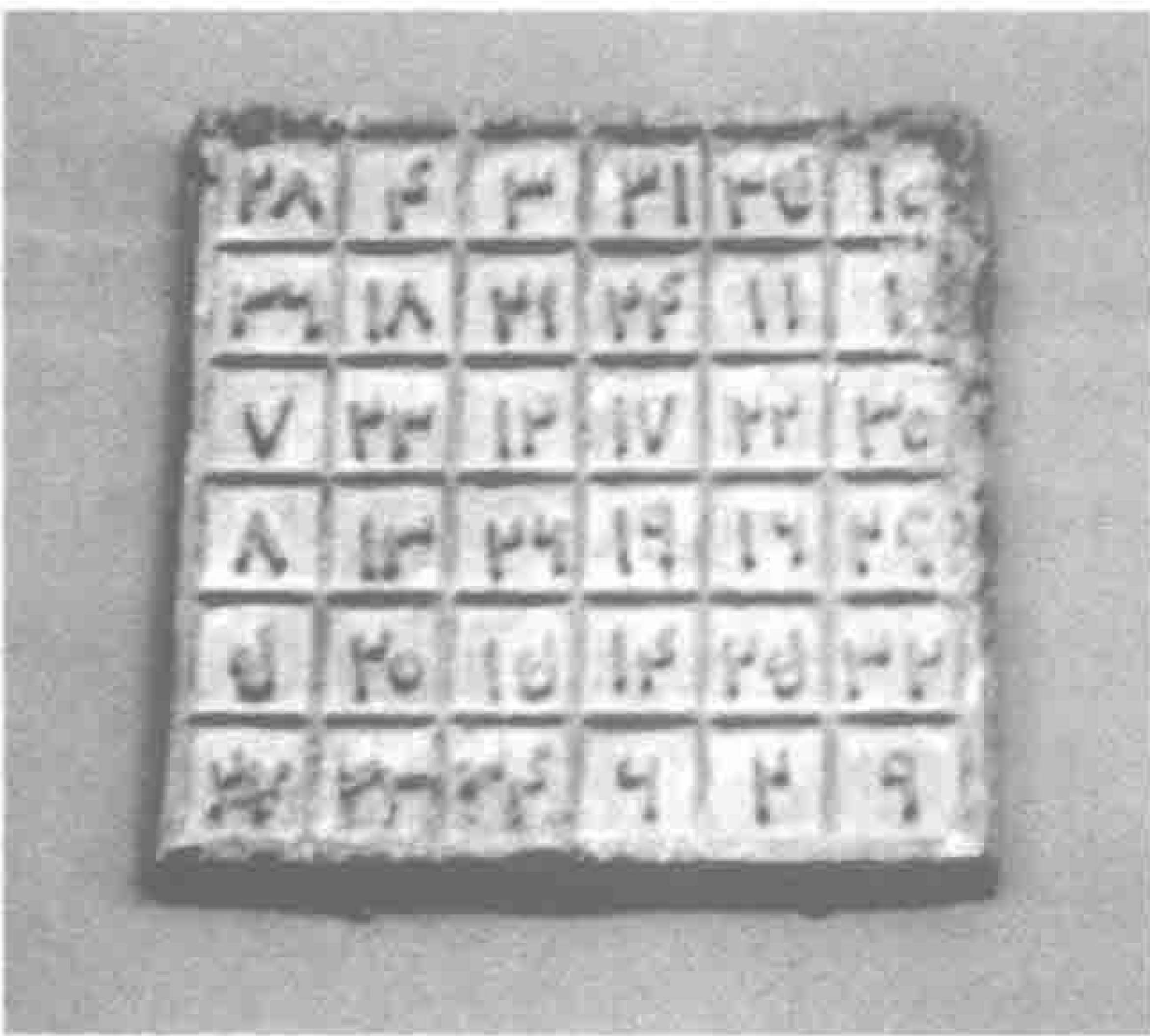


图 21-3-1　阿拉伯铁板幻方

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

图 21-3-2　铁板幻方释文

这五个相同的纵横图，都是由 1 到 36 构成的，每行每列及对角线上的 6 个数之和都是 111。这些纵横图包含完整的阿拉伯数码，其形式与当时阿拉伯文献所记相近(图 21-3-3)。

从表中可以看出，阿拉伯数码在 400 年间变化不大。但这些数码传入欧洲后，却发生了很大变化。与阿尔 · 卡西同时代的欧洲人所用的阿拉伯数码已与现代差不多了。

李俨对上述六阶纵横图进行研究后指出，它是由基础四四图（图 20-2-8）发展而来的。①

现代阿拉伯数码	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
铁板幻方数码	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠
阿尔·毕鲁尼所用数码(11世纪)	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠
纳速拉丁所用数码(13世纪)	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠
阿尔·卡西所用数码(15世纪初)	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

图 21-3-3　阿拉伯数码表

四四图不仅纵横斜各 34，而且其余正方四、对方四、中方一、角方一、长方二，各数的和也是 34（图 21-3-4）。

由四四图进为六六图，因

$$\frac{6^2-4^2}{2}=\frac{36-16}{2}=10$$

就在原四四图的每格加 10，构成六阶纵横图中间的四四图。该图由 11 ~ 26 组成，所余数字可分上下两行：

上行	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
下行	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27

显然，每列上下二数的和均为 37。

先将最后两列的数字提出，配在斜角上。右端上下为 10 和 9，而总数要 111，因 111 -（10 +9） =92，只要选 3 个 30 左右的数就差不多了。试选 29，30，32 三数，再配上 1，恰

① 李俨，阿拉伯输入的纵横图，见：李俨钱宝琮科学史全集，第十卷，辽宁教育出版社，1998 年，第389 ~ 395 页。

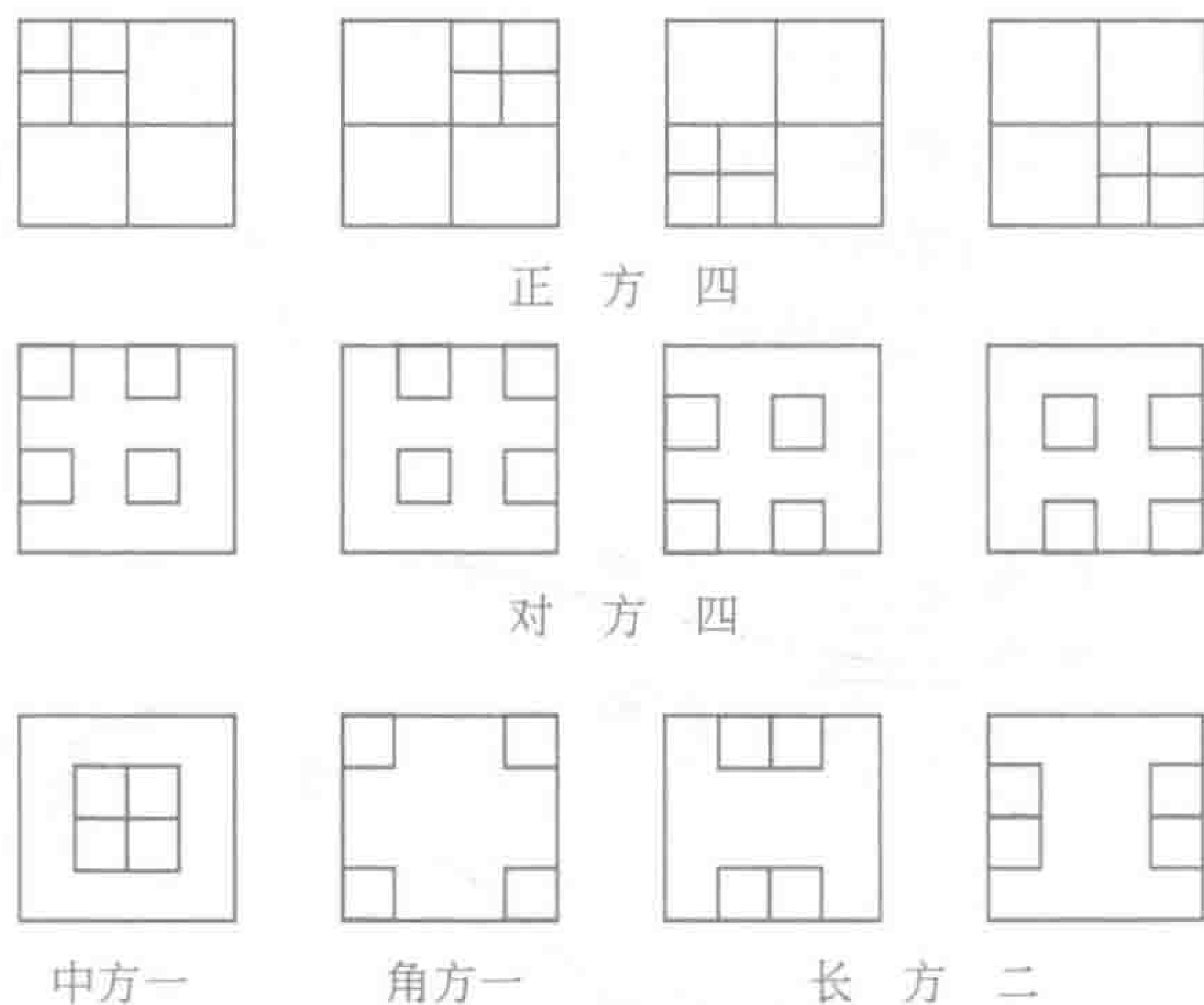


图 21-3-4　四四图的分解

为 92。左端的空格内，依次配上与右数之和为 37 的数。然后考虑上下两端，上端的 28 和 10 分别在上下两行，而总数要 111，因 111 －（28＋10）＝73，其余四数须上下各二。试选下行的 31，35 和上行的 4，3，恰为 73。下端的空格内，依次配上与上数之和为 37 的数，便得六六图。

同理可得八八图、百子图等偶数阶纵横图。由六六纵横图进为八八纵横图，因

$$\frac{8^2-6^2}{2}=\frac{64-36}{2}=14$$

就在原六六图各格，每格加 14，配在中间。由八八纵横图进为百子图（即十十纵横图），因

$$\frac{10^2-8^2}{2}=\frac{100-64}{2}=18$$

就在原八八图各格，每格加 18，配在中间。余类推。

1969 年，上海陆家嘴地区进行人防施工时，从明代陆深墓中出土了一批文物。后来，上海博物馆对文物进行清理，发现了一枚可佩戴的玉挂，鉴定为元代文物。该玉挂为长方形，长 3.6 厘米，通高 3.5 厘米，厚 0.75 厘米，如图 21-3-5 所示。上有两耳可系绳佩挂，正面为一圆凸面，阴刻阿拉伯文字的清真言“万物非主，唯有真宰，穆罕默德为其使者”。反面方框四行十六格，每格内填一阿拉伯数码，构成四阶纵横图。① 数字形体属 13 世纪的阿拉伯文。这是继元代安西王府出土铁质幻方（纵横图）后的又一重要发现。这个四阶纵横图的每行每列及每条对角线上的数字之和均为 34。不仅如此，图 21-3-6 所示符号相同的四数之和都是 34。由于它具有一定神秘性，所以不少伊斯兰信徒佩戴它，用来护身、避邪。

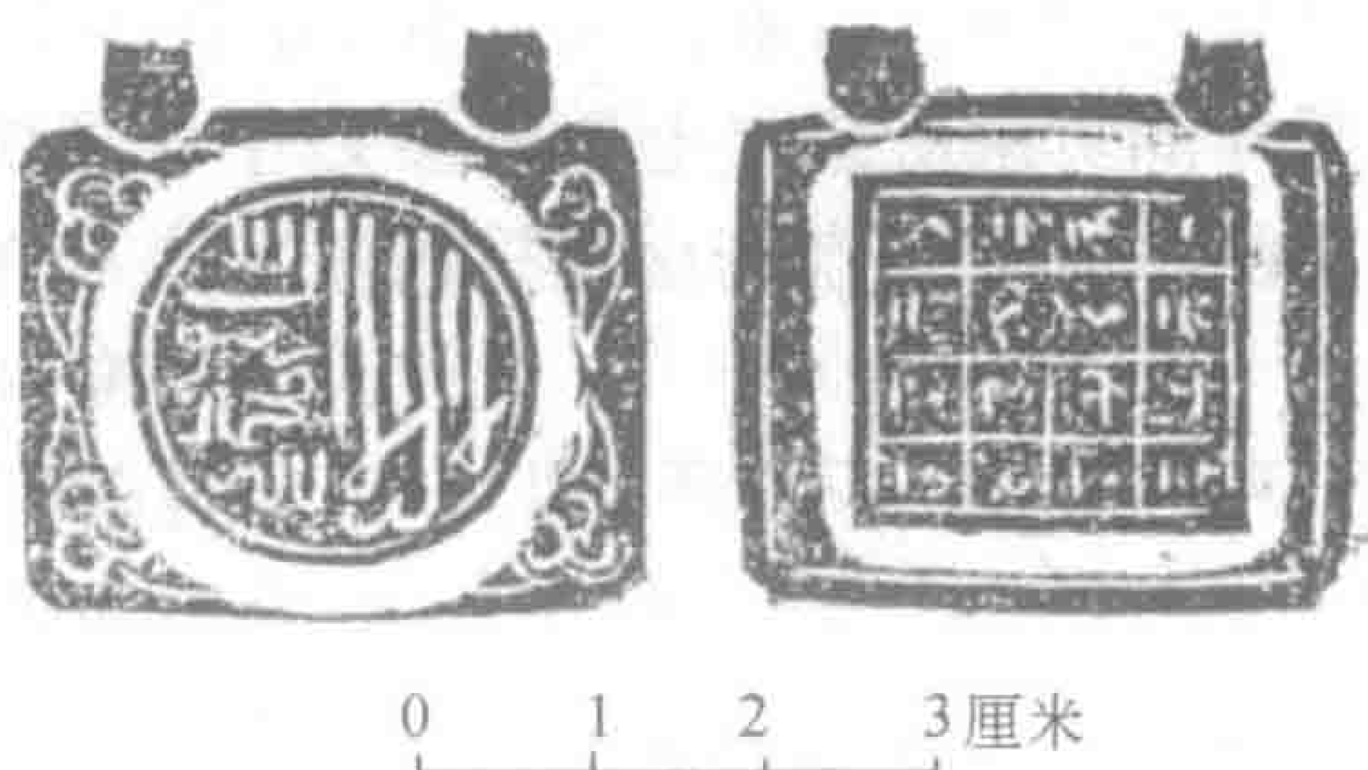


图 21-3-5　玉挂

我们比较一下上海及西安出土的两个纵横图中的数码，就会发现它们的形状相近

① 上海博物馆，上海浦东明陆氏墓记述，考古，1985，（6）：543。

（图 21-3-7上为西安出土，下为上海出土），是同一时期的文物。这说明阿拉伯数码在元代传入了我国的不同地区。玉挂及铁板上的第五个数码形状有异，后者似乎是前者的速写。

根据上述资料，可知宋元时期阿拉伯和中国的文化交流十分发达。纵横图的构成规律已被当时的中、阿数学家所掌握，宋代杨辉的《续古摘奇算法》中有形式多样的纵横图。至于彼此间的影响，有待进一步研究。

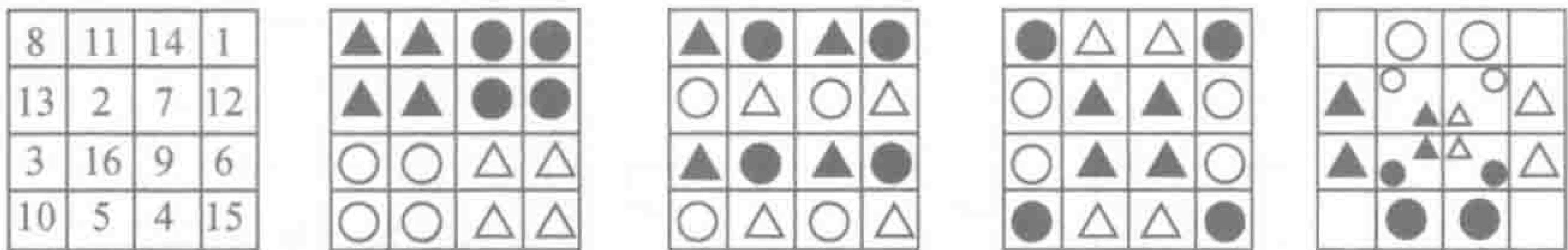


图 21-3-6　玉挂上的纵横图



图 21-3-7　上海与西安幻方数字的比较

三　土盘算法及格子算

印度人最初在沙土上进行计算，印度算法传入中亚以后，被称为土盘算法或沙盘算法。阿拉伯国家的数学工作者们用铁钎或竹木棍在沙土盘上进行计算，这种算法流传很广，在宋元时期随回历传入中国。回回司天台内的天文学家札马鲁丁、可马拉丁等无疑都是使用土盘算法，和他们一起工作的中国天文学家岳铉、靳德进等可能都会。所以说，土盘算法至迟在元初传入中国。后来，人们不一定在沙土上计算了，但土盘算法的名称一直沿用到明代。明永乐年间贝琳所编《七政推步》中谈到明初翻译回历的情况时曾说："去土盘译为汉算。"这里的"土盘"泛指由阿拉伯国家传入的算法。

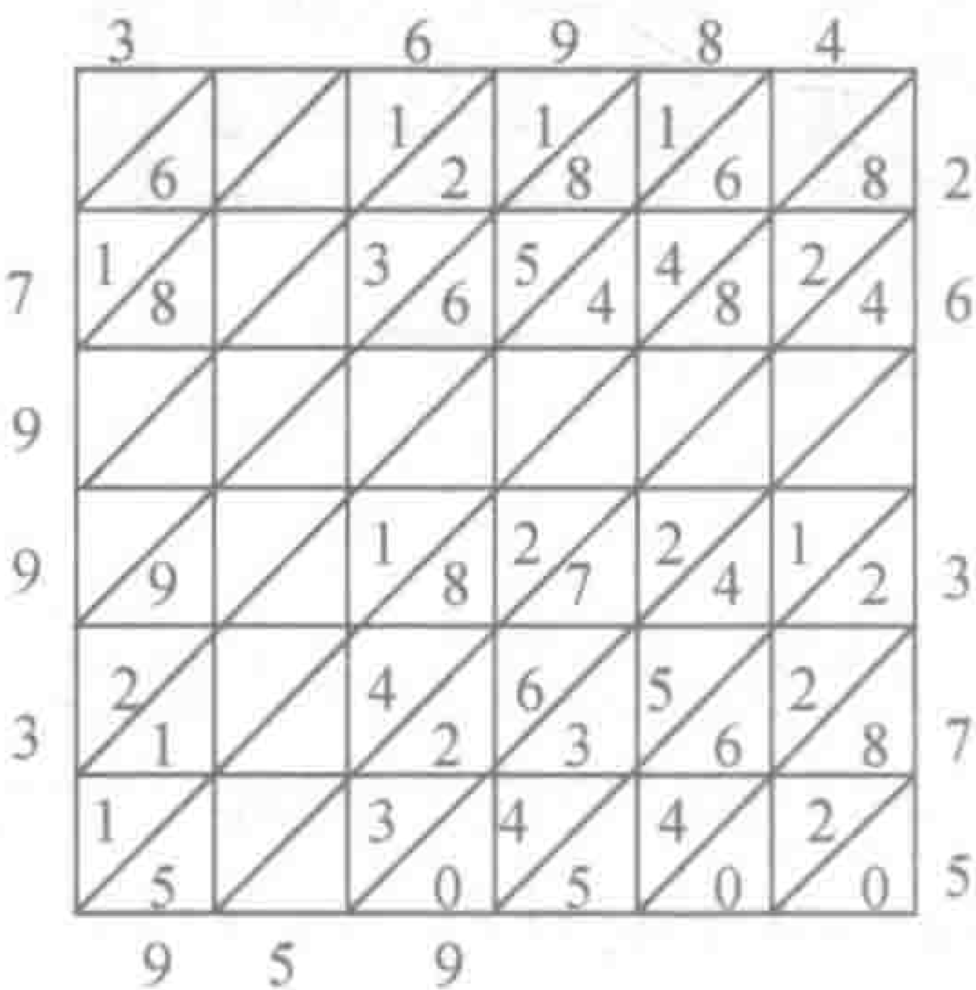


图 21-3-8　格子算

阿拉伯国家通行的"格子算"可能也在元代传入我国，因为吴敬所写《九章算法比类大全》已有完整的算法。这实际是一种笔算乘法。中国传统数学用筹而不用笔，笔算的传入具有特殊意义。吴敬把这种算法称为"写算"，在程大位《算法统宗》中则称其为"铺地锦"。具体算法是：先画一些方格，格的多少由数字的位数决定；然后按同一方向画上每个方格的对角线。计算时，先将被乘数写于方格顶上，乘数写于方格右侧。然后用右面的每个数字和上面的每个数字相乘，并把乘积的十位数写于相应的对角线上方，个位数写于对角线下方。最后按对角线斜行相加，便得结果。例如，306984 × 260375 = 79930959000 便写成图 21-3-8 的样子。这种计算程序和格式，与阿尔 · 卡西《算术之钥》所介绍的方法完全相同。只是在阿拉伯国家用阿拉伯数字，传入中国后便改用中文数字了。

第五编　传统数学主流的转变与珠算的发展

——元中叶至明末数学

第二十二章　元中叶至明末数学概论

从元中叶到明末的200余年间，中国数学经历了一个特殊的历史阶段。

1303年，朱世杰的《四元玉鉴》出版，代表着宋元数学达到了顶峰，同时也标志着中国数学史上一个时代的结束。此后不久，中国数学的研究方向发生了重大转变，宋元时期数学理论迅速发展的趋势开始明显地减缓了。同时，社会对数学的需求和明代手工业、商业经济的发展培养了数学家的实用数学兴趣，大部分数学家的兴趣不在理论研究上，而在为百姓提供实用的数学知识和方法上，他们对宋元时期的一些重要研究成果了解甚少，甚至根本不懂。因此，宋元数学高峰时期的著作和成果有不少在明代处于“失传”状态。

尽管如此，明代数学并不是像通常认为的那样处于停滞的状态，而是较为活跃。元代中叶到明末的中国数学以大众化与实用化为主导，数学歌诀和难题杂法等较为流行，珠算取代了筹算，新数学著作较前代增加了许多。

至明末，随着西方数学大批传入中国，数学的发展方向再次发生了转变，中国数学进入了另一个时代。

本章简要介绍和讨论元中叶到明末数学发展的社会、经济、文化、科技背景以及明代数学家对宋元数学成果与思想方法的了解程度、继承情况和明代数学的主流。

第一节　明代数学的社会背景

中国传统数学经过了宋代和元代前期的迅速发展之后，从元代中叶开始转变发展方向和价值取向，这与当时社会发展的状况关系密切。

由蒙古族建立的元朝，到了14世纪中期，内外矛盾较多，民族对立一直比较突出，元末的红巾军起义推翻了还不到百年的元朝政权。朱元璋于1368年建立明朝，定都南京。他死后不久，燕王朱棣推翻建文帝，自己做了皇帝（即永乐帝），20年后将首都迁往北京。明初，洪武帝和永乐帝加强了朝廷的政治统治与制度建设，促进生产，鼓励农耕垦荒，规定北方开垦“永不起科”。明代前几十年社会生产发展较快。明朝的北部边防一直比较紧张，明初曾多次对蒙古用兵，在北部边疆建立了几十个防卫重地，特别是重修了长城。正统十四年（1449）发生的“土木堡之役”以及随后的皇室内部的争斗厮杀，极大地削弱了朝廷和国家的实力。明代中后期，朝廷竭力恢复国力，进行了一系列改革，建立了全国的户口和田地制度，实行里甲制，登记人口与土地。同时进行了税赋改革，在各地改革的基础上实行了全国的“一条鞭”法，把各种赋税合并为一条，按田亩征银。改工匠轮班服役为代役租制，即手工业匠户不再到指定地点服役，只交纳货币赋税就可以了。这些措施对于恢复和促进经济发展起到了积极的作用。16世纪中期，明朝廷最终与蒙古阿拉坦汗建立了良好的关系，北部边疆才较为安定。但东南沿海地区，则倭患不断。1592年，日本丰臣秀吉侵略朝鲜，作为朝鲜的宗主国，明朝派兵，前后与日本人打了六七年仗，国力消耗很大。明末内外交困，东北的满族后金政权是最大的威胁，在中原地区则有农民起义，明朝既要防御后

金女真人的外患，又要解决内部的农民起义，加上财力衰微，党争激烈，困难重重。1644 年，李自成推翻了明朝，但是满清获得了最终的成果，建立了满清朝廷。

农业是明代经济的主动脉，农业技术有了新的改进，“一岁数收”得到了发展。一些国外的农作物品种，如番薯、玉蜀黍、烟草等被引入中国，同时经济作物的种植也越来越多了。明代的手工业得到了空前的发展。农业与家庭手工业结合的传统生产方式开始发生变化，手工工厂和城市手工业快速增长。纺织、采矿、冶炼、制瓷、造纸、印刷、造船等手工业发展很快，一些重要的行业中心闻名全国。

农业和手工业的快速发展，促进了商业经济活动发展，不仅使北京、南京、扬州、苏州、杭州、广州、西安、成都等历史较久的商业大都会的商品经济更加繁荣，而且有的小城镇的商品活动也十分活跃，一些地区商贾云集，一批著名的大型商业活动集团颇有影响，如徽商、川陕商、苏商、京畿商、粤商等。到了明代后期，出售的产品五花八门，应有尽有。虽然以农为本的经济模式没有变，但是人们对商业的认识和观念发生了重大的变化，经商渐成风尚，明代中期的数学家王文素和后期的程大位都曾是经商之人。在一些地区，特别是苏杭等地，产生了资本主义的萌芽，有了专门从事小型手工业生产的打工者。

明代的对外交流也较多。永乐帝派郑和七次下西洋，改进了造船技术和航海技术，远航到非洲，加强了对外部世界的了解，也促进了外国对中国的了解。随郑和下西洋的马欢著《瀛涯胜览》、费信著《星槎胜览》等著作及航海日志，介绍沿途风土人情、国家政治、地理、奇闻异俗，对于中国人了解外国的情况发挥了积极的作用。但是，中国人没有像稍后的欧洲人那样，利用远航了解到的信息，开拓市场，发展经济。郑和下西洋的主要目的是宣扬国威，扩大影响，而不是经济活动。到了成化年间（1465～1487），因种种原因，出洋外航完全终止。相反，欧洲人则借着航海技术积极向亚洲扩张，16 世纪后期传教士来到中国。耶稣会传教士利用他们所掌握的科技知识逐步打开在中国传教之大门。明末，由于当时行用的《大统历》年久差大，改历之议纷起，传教士借助徐光启（1562～1633）等历法改革派人士成了中国引进西方历法的主力，同时也成了翻译介绍西学之主力。

明代前期尊崇程朱理学。明初即采用了元延祐年间规定的科举程式，以程、朱等人注解的《四书五经》为考试命题蓝本。成祖永乐帝命胡广等编修了《五经大全》121 卷，《四书大全》30 卷，《性理大全》70 卷。这些著作成了明代官方规定的科举与学习用书，是整个明代科举人员所关心的主要学术。明中后期占主导地位的则是陆王心学。梁启超在评价明代学术时写道：“明朝以八股取士，一般士子，除了永乐皇帝钦定的《性理大全》外，几乎一书不读。学术界本身，本来就像贫血症的人，衰弱得可怜。王阳明是一位豪杰之士，他的学术像打药针一般，令人兴奋，所以能做五百年道学结束，吐很大光芒。”“所以到明中叶，姚江（王阳明）学派，奄袭全国。”[①]明末出现了一批重视实学的知识分子。

永乐初编纂《永乐大典》，是明代文化学术事业发展上一件极为重要的事情。《永乐大典》收书 7000 余种，绝大多数著作都是整本分类录入，对后世产生了极大影响。《永乐大典》虽经几百年散失，目前所剩无几，但是其影响和意义仍然不可低估。明代在文学艺术方面的成就十分巨大，古代四大文学名著中有三部即施耐庵（约 1296～1370）的《水浒

① 梁启超，《中国近三百年学术史》，天津古籍出版社，2003 年，第 3 页。

传》、罗贯中（约1330～1400）的《三国志通俗演义》、吴承恩（1500～1582）的《西游记》是明代的作品，是我国文学发展史上最著名的作品。

明代在科学技术方面，前期进步较少，甚至宋元时期在天文历法、数学等方面的一些成果也一时失传，但在后期医药技术发展较快，有一些十分重要的著作。李时珍（1518～1593）《本草纲目》、徐光启（1562～1633）《农政全书》、徐宏祖（1587～1641）《徐霞客游记》、宋应星（1587～?）《天工开物》等著作都是中国科技史上的名著，成果丰硕，影响深远。明初修建北京紫禁城是明代科技史上必须提及的重大事件。

第二节　古算著作与成果在明代的失传

约从14世纪中叶开始，中国数学的发展方向开始发生转变，数学主流也发生了重大转变，走向了与宋元时代不完全相同的发展道路。整体而言，14世纪中期以后的200多年间，与数学紧密相关的天文学也比前代落后。明末接触到《几何原本》等西方数学著作的徐光启意识到西方数学比中国先进，并且指出："算数之学特废于近百年间尔。"[①] 算学之废主要表现在两个方面：一是汉唐宋元数学著作失传，一是无人通晓宋元的数学成果。

一　《永乐大典·算》与明初朝廷收藏的数学著作

为了说明明代古算书的"失传"情况，有必要先清楚明初收藏算书的情况。

明代初期，特别是永乐二十年（1422）以前，朝廷所收藏的数学著作还算丰富。明初，有两件大事为了解当时数学典籍流传的情况提供了线索，这就是编写《永乐大典》和朝廷图书馆由南京向北京的迁移。《永乐大典》是明永乐帝命人编辑的一套大型类书。起初，由解缙（1369～1415）等用了1年左右的时间编成《文献大成》，后又由姚广孝（1335～1418）与解缙等重编，于永乐六年（1408）完成，赐名《永乐大典》。《永乐大典》凡例并目录共60卷，正文共22877卷，计11095册，但后来渐次散佚，特别是经过1900年八国联军侵华战争，破坏散失殆尽，目前世界各地所存仅占原书的百分之三点多。[②]

《永乐大典》的编写体例是将各书分条按韵编排在一起，数学著作在"算"字韵下，自卷16329至卷16364，共36卷，其目录保存了下来，列表22-2-1。[③]

在上述各卷中，现存的部分主要有卷16443和卷16444。[④] 据严敦杰考证，《诸家算法及序记》中的《诸家算法》当是钞自《永乐大典》卷16361，且为全璧。[⑤] 这样，《永乐大典》算书尚有三卷（图22-2-1，图22-2-2），据李迪《中国数学通史·明清卷》统计，共涉及15

---

① 明·徐光启，同文算指序。见：明·李之藻，《同文算指》，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第四册，河南教育出版社，1993年。

② 胡道静，《中国古代的类书》，中华书局，1982年，第28页。

③ 此目录现藏北京图书馆，原文影印收入靖玉树编勘，《中国历代算学集成》（中），山东人民出版社，1993年，第1640～1641页。

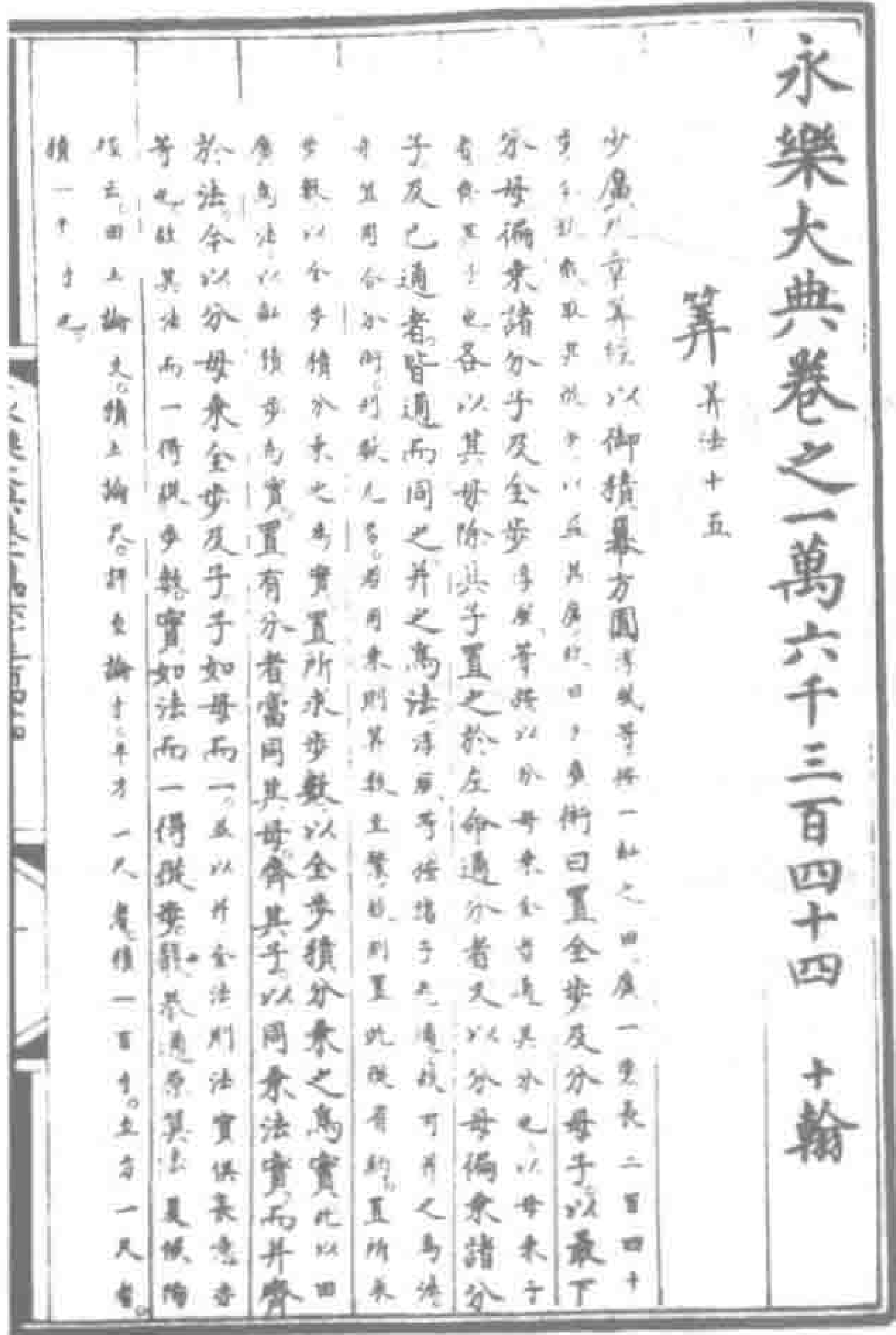
④ 《永乐大典算法》，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第1册，河南教育出版社，1993年，第1423页。

⑤ 严敦杰，跋重新发现之《永乐大典》算书，自然科学史研究，1987，6（1）：1～19。

部著作 309 条记录。[1] 清开四库馆时，《永乐大典》算书尚存，戴震等从中辑出宋元及以前算书多种，详见第二十九章。

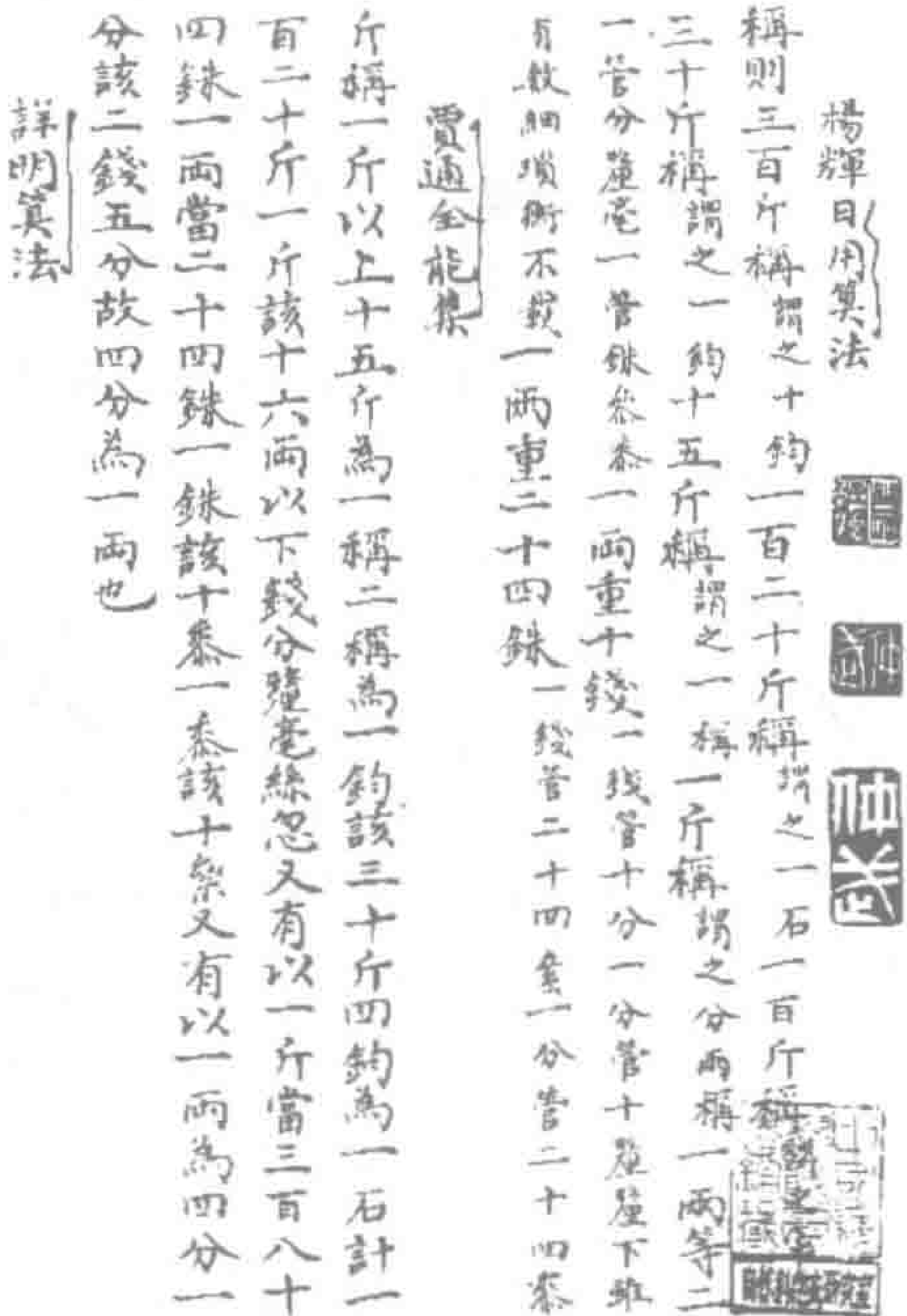
表 22-2-1　《永乐大典 · 算》目录

卷	目录	卷	目录	卷	目录	卷	目录
16329	算　事韵	16338	方田	16347	少广	16356	勾股
16330	目录、起源	16339	方田	16348	商功	16357	勾股
16331	乘法	16340	粟米	16349	商功	16358	音义
16332	因法	16341	衰分	16350	委粟	16359	九章纂类
16333	除法	16342	衰分	16351	均输	16360	端疋
16334	归法	16343	异乘同除	16352	均输	16361	斤秤
16335	加法、减法	16344	少广	16353	均输	16362	杂法
16336	九章总录	16345	少广	16354	盈不足	16363	杂法
16337	方田	16346	少广	16355	勾股	16364	杂法，算


永樂大典卷之一萬六千三百四十四　十翰

筭　筭法十五

图 22-2-1　《永乐大典》算书书影


楊輝日用算法

稱則三百斤稱謂之十鈞一百二十斤稱謂之一石一百斤稱

三十斤稱謂之一鈞十五斤稱謂之一稱一斤稱謂之分兩稱一兩等二

一管分釐毫一管銖絫黍一兩重十錢一錢管十分一分管十釐釐下雖

有數細微術不載一兩重二十四銖一錢管二十四絫一分管二十四黍

賈通鈐能集

斤稱一斤以上十五斤為一稱二稱為一鈞該三十斤四鈞為一石計一

百二十斤一斤該十六兩以下錢分釐毫絲忽又有以一斤當三百八十

四銖一兩當二十四銖一銖該十黍一黍該十絫又有以一兩為四分一

分該二錢五分故四分為一兩也

詳明算法

图 22-2-2　《诸家算法》书影

---

[1] 李迪，《中国数学通史 · 明清卷》，江苏教育出版社，2004 年。本编凡引此书，均据此。

又阮元也“于《永乐大典》中抄得杨辉《摘奇》及杂抄算书等约百余番”①。李俨《〈永乐大典〉算书》认为，鲍廷博《知不足斋丛书》本所收《透帘细草》一卷、杨辉《续古摘奇算法》一卷和《丁巨算法》一卷，可能就是据阮元所抄录者整理而成。从现存《永乐大典》残卷可见，其中所引用算书还有：杨辉《详解九章算法》及《纂类》、杨辉《日用算法》、安止斋何平子《详明算法》、严恭《通原算法》、佚名《锦囊启源》、贾亨《算法全能集》等。

《永乐大典》收录上述数学著作，不仅对于了解当时收藏数学著作的情况极有价值，更为重要的是，它起到了保存数学著作的作用。

《永乐大典》收录的数学著作可能比这些还要多一些，杨士奇所编《文渊阁书目》（1421）可以作为印证。《文渊阁书目》四卷，记载永乐十九年（1421）由南京转移到北京的图书，其中所记算法类图书比目前所知《永乐大典》所录算书略多，严敦杰《跋重新发现之〈永乐大典〉算书》载其目为：《测圆海镜》一部五册，阙。《详明算法》，一部一册，阙。又，一部一册，阙。《九章算经》，一部四册，阙。《通原算法》，一部二册，完全。《五曹算经》，一部一册，阙。《五经算术》，一部一册，阙。《孙子算经》，一部一册，阙。《夏侯阳算经》，一部一册，阙。《算学源流》，一部一册，阙。《杨辉九章》，一部一册，阙。《数学九章》，一部三册，完全。《周髀算经》，一部一册，阙。《算经补缺》，一部一册，阙。《抄录算法》，一部一册，阙。《算法全能集》，一部一册，阙。《通变算宝》，一部一册，阙。《摘奇算法》，一部一册，阙。《捷用算法》，一部一册，阙。《算法透帘》，一部一册，阙。又，一部一册，阙。《海岛算经》，一部一册，阙。《算法百颗珠》，一部一册，阙。《益古衍段》，一部三册，阙。这些著作，除去重复的，共22部。明初，朝廷在南京收藏有上述数学著作，并成为编纂《永乐大典》的底本当是没有问题的。其中，未见有关于朱世杰著作的记载，看来当时就没有收藏。整体而言，在永乐十九年（1421）以前，明廷收藏的数学著作尚不算少，但很快情况就发生了变化，散佚相当严重。

二　古算书的失传

明初朝廷收藏的算书，不久就开始散佚。《文渊阁书目》所收藏的22种算书，大多数标明“阙”，只有两种书标明“完全”。这说明南京的图书在迁往北京的过程中就开始散佚，数学著作流失不少，大部分在北京没有收藏，而南京开出的清单中有这些书，所以《文渊阁书目》中才会记录为有目无书。晚明万历年间汇刻古书的《秘册汇函》和《津逮丛书》中所收的古算书，只有《周髀算经》和《数术记遗》两种。由此可见，明代自永乐迁都北京之后，官府中所掌握的数学古籍一直相当少，有些流传至今的宋元算书，在明代的官府中并没有收藏。

官府收藏并不对数学家开放。皇家的藏书在深宫秘苑中，一般的官员都读不到，更不要说平民数学家了。只有在朝廷里从事图书工作的人才能有机会读到。就现有资料看，参加编写《永乐大典》的刘仕隆是获得这种机会的幸运数学家。其他数学家很难有这样的良机。明代私家藏书中，古算书也极为稀少。在民间，古算书如凤毛麟角，一书难求。考察当时几

① 续畴人传．杨辉传。

位数学家对古算书的掌握情况，有助于理解这一点。吴敬是15世纪的一位活动在文化发达的江浙地区的著名数学家。为获得一部《九章算术》，他费尽心机，历尽周折，花了很长时间，最后自认为找到一部“写本”《九章算术》。[①] 但是，分析他的著作中引用《九章》的情况可知，他获得的其实是杨辉的《详解九章算法》，而非原本《九章算术》。[②] 目前所知，明代流传的《九章算术》只有《永乐大典》本和半部宋刻本（前五卷）。实际上，直到清初，要找到该书仍是不易之事。明末的数学家如程大位和徐光启（1562～1633）等虽知道该书的基本内容，但没有见过原书，清初的著名数学家梅文鼎也只阅过其中的方田一章。[③] 中国历史上赫赫有名的数学名著尚且如此，其他书就可想而知了。比吴敬晚几十年的王文素在其《算学宝鉴》[④]（1524）中广征博引，参考了大量元末和明代的算书，对更早的著作引用极少，只有杨辉的著作，其他都是从杨辉的著作中转引的。这表明他所了解的古算书也十分有限。16世纪中前期的顾应祥和唐顺之，因为做官，有许多机会在各地收集算书，但他们读到的古算书同样很少。顾氏收有《周髀算经》和《四元玉鉴》，唐氏有一部抄本《测圆海镜》，如此而已。16世纪后期的程大位从事数学研究几十年[⑤]，因为经商，他曾遍游吴楚各地，广收算书。凡算书，只字片纸，他都视为珍宝，不惜重金求购，但他所收集到的宋元及其以前的算书也很少。在他的《算法统宗》[⑥]（1592）末附有“算经源流”，记录古今算学书目51种，其中除十部算经外，另有宋元及其以前的算书22种，其中只有一种和前述《文渊阁书目》所记算书相同。但是除杨辉的部分书外，其他的书他本人亲自见过的极少，多数是二手资料。[⑦] 同时，“算经源流”中根本就没有提到秦九韶的《数书九章》和朱世杰的著作。李冶的书虽然被提到了，但是所记信息却是错误的。

明代自《永乐大典》之后的200多年，无论官府和民间都没有印刷出版古算书的记录，这也是明代古算书不传的原因之一。

总之，宋元及其以前的古算书在明代流传很少，明代的数学家难得能有机会读到古算书。我们现在能读到的宋元数学著作和古代的十部算经等，在明代都是数学家们很难得见的，表现出一种“失传”的状态。

三　数学成果的失传

宋元几项有代表性的成果，如增乘开方法、天元术、四元术、大衍总数术、招差术、垛

---

① 明 · 吴敬，九章算法比类大全，郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第二册，河南教育出版社，1993年。本编凡引此书，均据此。参考张久春，《九章比类算法大全》与“九章”的渊源的，自然科学史研究，2003，22（1）：第54～59页。

② 郭书春，从面积问题看《算学宝鉴》在中国传统数学中的地位，汉学研究（台北），18（2）：第197～221页，2000。张久春，《九章算法比类大全》与“九章”的源渊，自然科学史研究，2003，22（1）：54～59。

③ 沈康身主编，《中国数学史大系》第二卷，北京师范大学出版社，1998年，第51页。

④ 明 · 王文素，算学宝鉴，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第二册，河南教育出版社，1993年，第337～971页。本编凡引《算学宝鉴》，均据此。

⑤ 郭世荣，《〈算法统宗〉导读》，湖北教育出版社，2000年。

⑥ 明 · 程大位，算法统宗，《中国科学技术典籍通汇 · 数学卷》，第二册，河南教育出版社，1993年，第1217～1421页。本编凡引《算法统宗》，均据此。

⑦ 郭世荣，《算法统宗 · 算经源流》及其学术价值，中国科技史料，1996，17（2），第21～27页。

积术等，在明代或无人知晓，或不被人所理解，基本上处于失传的状况。兹各述如下：

增乘开方法：在元末有个别著作涉及增乘开方法，其后直到16世纪末的数学书中所用的开高次方的方法都与贾宪的立成释锁法相同或类似，基本上没有达到刘益和贾宪的水平，更没有人用到秦九韶的正负开方术。吴敬、王文素和程大位等人的著作中都引用了贾宪的“开方作法本原图”，但只有王文素把它应用于开方中。不过，他的开方法实际上是贾宪的“立成释锁”法，而非增乘法。在《算学宝鉴》卷49“圆田截弦矢”一节中引用了杨辉《田亩比类乘除捷法》中所述刘益用增乘开方解方程 $-5x^4+52x^3+128x=4096$ 的例子，王文素加说明曰：“解曰：此术固善，但可求其一级者，若问二级以上，不用是法。”表明他不能理解增乘开方法。顾应祥的著作中大量涉及开方问题，所用方法与王文素的方法相同。总之，明代已无人提及增乘开方法了。

大衍总数术：明代严恭、吴敬、王文素、周述学、徐心鲁、程大位等人的书中都出现过一次同余方程组的问题，但除了王文素外，都只给出题目和求解公式，没有讨论算法原理。严恭给出了几个稍微不同的题目，但所给出的解题方法只适用于他所列出的题目类型，不是一般的方法。王文素讨论较多，并给出了自己的解法，称为“以少减多”法和“以多减少”法。二法本质上是一种试错法。他称秦九韶的方法为“满数法”，可是他已不能完全理解这种方法了。他曾怀疑过秦九韶法，在《算学宝鉴》卷22写道：“尝疑此法……思之既久，忽得拙法，未知是否?”他强调“凡数相犯可约者，不可同题。如题有三，不可用六、九；有四，不可用八之类”。即同余方程组的模数必须两两互素，而秦九韶的大衍术的要点正在于处理模数非互素的情形。

天元术与四元术：自元末沙克什在《河防通议》中使用天元术之后，到清梅瑴成借助西算的借根方法读懂天元术为止，三百年间找不到有人能完全理解天元术的线索。四元术就更不用说了。明代吴敬和程大位在一两个算题中提到了“天源”这个词，显系“天元”之误。王文素的书中用到了“天元”这个词，有“天元差数”、“平方天元”、“立方天元”、“三乘方天元”等术语，但考其所用，他所说的“天元”已不是天元术的本来面目了。顾应祥和唐顺之二人读到《测圆海镜》和《四元玉鉴》这两本与天元术、四元术相关的著作，但他们不知道天元为何物，无从下手，顾应祥写了两本研究《测圆海镜》的书，但他反复研究也不能理解天元术，只得将它删去。他在《测圆海镜分类释术序》中说：

> 每条下细草，虽经立天元一反复合之，而无下手之术，使后学之士茫然而无门路可入。辄不自揆，每章去其细草，立一算术。①

他在《测圆算术叙》中说：

> 每条细草止以天元一互算，而漫无下手之处。②

实际上，在14世纪前期，天元术对于数学家也是很难的数学内容。李俨《十三、十四世纪中国民间数学》中注意到，在记录1264～1324年之间时事的《事林广记》中写道：

> 夫算法者，伏羲始画八卦，周公叙述九章，至于玄元益古，如积细草，其旨渊

---

① 明·顾应祥，测圆海镜分类释术·序，《测圆海镜分类释术》，明嘉靖庚戌（1550）年刊本，浙江图书馆藏本。

② 明·顾应祥，测圆算术叙，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第二册，河南教育出版社，1993年，第1109～1140页。本编凡引《测圆算术》，均据此。

奥，难可寻绎，初学者无所措手。①

这里的“玄元益古，如积细草”与天元术密切相关，如果不懂这些，是很难理解天元术的。

垛积术与招差术：明代虽有不少书提到了垛积的运算，但不出杨辉所论的范围。而朱世杰给出的几个系列的垛积公式是具有一般性的。对于这两项工作，明代没有人提到。

同时，与数学紧密联系的天文学也远不如元代发达，天文仪器陈旧，历法推算常出错误，天象预报屡屡不验，大统历未能得到及时修订，改历建议得不到支持，主张修历者甚至被压制。② 在这样的背景下，在某些方面出现错误和倒退是不足为奇的。

第三节 明代数学主流的转变

中国传统数学经过宋元时代的大发展之后，从14世纪中叶开始其主流方向发生了重大转变。如果说在宋元数学中占主导地位的是“理论性”研究工作，那么，明代数学的重点却是在数学的应用与大众化方面，或者说，明代数学以其“技术化”为主要特征。一般认为，自14世纪中叶之后直到17世纪初西方数学东传为止，中国传统数学处于一种停滞或者衰落状态。其主要表现是：宋元时代的一批重要成果和重要方法没有被继承下来，而明代的数学本身又与前代相比创造性较少。这种看法只反映了14世纪中期以来传统数学发展的一个侧面。浏览一下明代数学著作和数学家的一般情况，就会发现，明代数学并没有停滞，而是相当活跃。

那么，为什么明代数学活跃，但不如前代发达呢？这不仅是一个长久困扰中算史家的问题，而且是明代科学史研究中的一个难题。这与中国科学史的整体情况一致，正是李约瑟致力研究的重大问题的组成部分。毫无疑问，可以从多个角度去研究这个问题。从数学内部的转化过程和机制方面入手无疑是一个重要角度。为此，就必须搞清楚宋元数学中有哪些东西被明代数学继承了下来，又有哪些东西被遗弃了。要做到这一点，就必须考察宋元数学和明代数学的传统特征。换言之，我们必须分析宋元数学和明代数学的主流各是什么。所谓数学主流，是指在一个时期内大多数数学家所关心和致力于研究的主要问题和主要方向以及他们解决这些问题时所采用的主要方法和手段，还有数学研究成果的主要表现方式、数学思想等。

大体而言，南宋数学家杨辉的著作对明代数学主流的确定和发展起了决定性的作用，而其他宋元数学家的著作不但没有对明代数学的发展产生重大影响，还几乎全被遗忘。

一 明代数学著作概况

（一）宋元数学传统与主流的回顾

在宋代以前，中国传统数学无疑是以《九章算术》数学传统为中心的。从《九章算术》开始到十部算经的编辑，一直是理论与应用并重的，但表现出了浓重的社会性。宋元数学所表现出来的传统和主流，与唐代中后期明显不同，其重心发生了重大的变化。自11世纪的

---

① 元 · 事林广记，辛集上，算法类。

② 郭世荣，明代数学与天文学知识的失传问题，法国汉学，第六辑，中华书局，2002年，第320～335页。

刘益、贾宪开始，数学理论的发展成了中算研究的主流，从北宋的刘益、贾宪、蒋周等到南宋的秦九韶，以至金元期间以李冶、朱世杰为代表的活跃于北方的数学家群体，所关心的主要问题都是极具理论意义的，因而导致了一系列成果的问世。开方和高次方程的数值解法、算术三角形的建立、线性方程的矩阵解法、大衍术、天元术与四元术、垛积术与招差术等，都是理论性很强的成果。

宋元数学家与前代数学家的研究方法也有明显的不同。由于演段术和天元符号的引入，代数方法更为进步了。数论方法也在李冶和秦九韶的著作中有了一定的体现。李冶"圆城图式"模型的建立和朱世杰对勾股形"五和五较"模型的应用，体现了数学家从理论上探讨问题的方法与特色。可以说，宋元数学家的研究思想对前代而言发生了重要的变化。在数学成果的表现形式上，其系统性、推理性明显得到了加强。

另一方面，在把理论研究作为重点的同时，宋元数学家对数学的实用传统并没有放弃，而是加强了这方面的研究。在主要的宋元著作中，应用性成果仍然占有重要的地位。现传秦九韶、李冶、朱世杰等人的以理论研究为代表的数学著作，都没有脱离数学的实用性传统。南宋数学家杨辉更以把数学向大众化、普及化和社会化方向发展为己任。他的著作是宋元数学中另一种传统的代表。他的研究与工作的重点在于为一般数学爱好者提供教材，努力推动和提高数学教育的水平，寻找简易直观的数学表现形式和灵活多变的数学计算方法。

因此，宋元数学传统的主流包括两个主要的组成部分。一是理论研究，二是实用研究。相比较而言：第一种传统是主流，或称之为大传统；第二种传统占有次要地位，或称之为小传统。二者都是从《九章算术》的传统中发展而来的。我们说宋元数学处于传统中算研究的高峰时期，正是因为在宋元数学中传统数学的这两种传统都得到了很好的继承。

（二）明代数学著作的分类

就数学著述情况而言，明代并不是沉寂的。程大位的《算法统宗》"算经源流"中收录他所知道的14世纪中期以后的数学著作24种，到《几何原本》被译为汉文之前，明代的数学著作约有70余种。郭世荣《〈算法统宗·算经源流〉及其学术价值》认为，程大位在编写《算法统宗》的"算经源流"时提出一种给数学著作分类的标准，他把按方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程和勾股这一九章体例编写的著作称为"有九章"或"分九章"，否则就是"无九章"。如果一部数学著作具备了基本概念和基础算法的说明，就是"有乘除"，否则就是"无乘除"。程大位《算法统宗序》评估前人的著作说："质有昏明，见有偏全。或有九章而无乘除，或有乘除而无定位，各照隅隙，鲜窥衢道。"依他的观点，一部著作既分九章又有乘除，才是好的数学著作。例如，吴敬的著作就属于此类。依今日观点看，他这个判别标准未必好，但是可以帮助我们对元中叶之后的数学著作进行分类讨论。14世纪中叶以后直到明末的数学著作大体可以分为四类[①]：

第一类是实用数学著作。这类著作很多，如丁巨的《丁巨算法》（公元1355）、贾亨的《算法全能集》、不详作者的《透帘细草》、安止斋何平之的《详明算法》、佚名《锦囊启

---

① 郭世荣：The Influence of Yang Hui' s Works on the Mathematical Mainstream in the Ming Dynasty, in ***Historical Perspectives on East Asian Science, Technology and Medicine*** (ed. by Alan K. L. Chan, Gregory K. Clancey & Hui-Chieh Loy), World Scientific, Singapore, 2001, pp. 358～367.

源》、严恭的《通源算法》（公元 1372）以及夏源泽的《指明算法》（公元 1439）等，都是 14 世纪到 15 世纪前期的作品，现在已经失传的《启蒙算法》、《算学通衍》、《捷奇易明算法》、《捷用算法》、《推用算法》、《精明算法》、《指明算集》等书应该也属于这一类。这些书以讨论度、量、衡、亩、大小数记法、斤两互换等内容为基础内容，同时也汇编了大量算题，一般都是关于面积、体积、垛积、就物抽分、利息计算及商业交易中遇到的各类日用问题的计算等内容，算法主要有各种乘除法和异乘同除之类，有时还包括一些杂法。但多数为相互传抄，在数学上很少有创新和重要见解。它们的主要读者对象是普通数学爱好者以及在商业与农业生产过程和行政管理中需要使用数学知识的人。

第二类是“九章”类著作。主要有刘仕隆的《九章通明算法》（公元 1424）、吴敬的《九章算法比类大全》（公元 1450）、许荣的《九章详注算法》（公元 1478）、余进的《九章详通算法》（公元 1483）、王文素的《算学宝鉴》（公元 1524）、张爵的《九章正明算法》（公元 1538）和程大位的《算法统宗》（公元 1592）等书。这类著作的特点是：其主干部分按九章的体例编排，大多数在前面有关于基本概念和基础算法的说明与介绍，还包括歌诀和学习方法等，同时也包括了前一类书的内容。

第三类是珠算著作。这类书主要出现在 16 世纪，如徐心鲁的《盘珠算法》（公元 1573）、柯尚迁的《数学通轨》（公元 1578）、余楷的《一鸿算法》（公元 1584）、程大位的《算法统宗》（公元 1592）、《算法纂要》（公元 1598）、黄龙吟的《算法指南》（公元 1604），等等。明代前期是筹算与珠算同时并用的时代，而后期则是珠算普及和流行的时代，到 16 世纪后期几乎所有的数学著作都离不开珠算，珠算算法日益发达。

第四类是专题研究著作。例如，顾应祥的《勾股算术》（公元 1533）专门研究勾股问题，《测圆海镜分类释术》（公元 1550）专门研究《测圆海镜》中勾股容圆问题，顾应祥的《弧矢算术》（公元 1552）专论弧矢形的弧、矢、弦、背、积相求问题。唐顺之的几篇短文也都是各论一个问题。朱载堉的《算学新说》（公元 1584 年成书，1603 年出版）和《嘉量算经》致力于用数学方法解决乐律问题。周述学的《神道大编历宗算会》（公元 1558）基本上也属于这一类。

以上只是一种大致的分类。实际上，前三类著作都具有实用的特点，第四类具有理论研究的特点。如果以与筹算、珠算的关系而论，前三类具有实用特点的著作又可分为以筹算为主的著作（元中后期和明初）、以筹珠并用的著作（明中叶）和以珠算为主的著作（明后期）三类。本编在下面将按这种分类论述数学著作。当然，第四类具有理论研究特点的某些著作，如朱载堉的《算学新说》等，也是以珠算为主要计算工具的。

二　明代数学的主流及杨辉的影响

上述情况反映了明代数学发展的一些特点。首先，数学家们所关心的是贴近现实生活、与日常事务紧密相关、受大众百姓欢迎的问题，因而数学著作以实用为主，把日用算术作为重点内容。其次，在表现形式上，歌诀化是明代数学的一大特点。到了明代中叶以后几乎所有的算法都配有相应的歌诀，以歌诀形式编写数学题目和说明计算公式成为时尚。再次，在算具方面，明代珠算发达，最终取代了传统的筹算。最后，虽然有一些理论性研究工作，例如第四类中的部分著作，但是从整体上说数量较少，缺乏高质量成果，且没有得到持续发

展。总之，明代的数学传统与宋元数学传统有很大的不同。如果说宋元数学传统由理论研究与应用研究两部分组成，那么明代只继承了其应用研究的传统，而在理论研究方面较薄弱。因而，在宋元时代的数学工作中，只有杨辉的工作在明代影响较大，在明代数学作品中有特别多的体现，因为他的著作较为偏重于实用，而秦九韶、李冶、朱世杰等人的工作则几乎没有被明代的数学家所继承。

明代的数学研究方向发生了重大转变，其价值取向与宋元数学有明显的不同。明代数学以实用和大众化为特征，数学家的兴趣主要在于为社会提供实用的数学内容，因而数学著作涉及的主要内容是与现实生活密切相关的问题、方法和数学工具，因为要使更多的人能够利用数学解决问题，所以一般非数学家所喜闻乐见的歌诀在数学著作中占有相当多的篇幅和相当重要的地位。同时，数学理论研究却不能与宋元时期相比。

我国自古就有实用算术的传统，唐代中期以后得到进一步加强，实用算书越来越多①，杨辉可以算是传统实用算术研究的集大成者。明代数学家对于杨辉的著作给予了最大的重视，远远超过宋元其他数学著作。我们认为，明代数学的主流主要是继承了以杨辉的著作为代表的实用算术特点。

杨辉对明代数学主流的影响表现在多个方面。首先是明代以九章体例编写而成的数学著作。因为是以九章顺序编排的，很容易让人想到是受《九章算术》的影响，但实际并不是这样。明代真正见到《九章算术》原书的可能只有刘仕隆一位数学家，他在编写《永乐大典》时无疑见过该书，其他数学家则根本无法见到《九章算术》原著。他们所谓的《九章算术》基本上都是指杨辉的《详解九章算法》，甚至是吴敬的《九章算法比类大全》。因此，明代以九章形式编排的数学著作，所参考引用九章的内容差不多全是来自杨辉的著作。其次是实用算术方面和珠算方面的著作，这些著作的体例大同小异，差不多都是采用《杨辉算法》的体例与编排方式。珠算方面的著作只是把计算工具改成了算盘，其他基本上全依《杨辉算法》。在数学内容方面，杨辉的著作被广泛引用，而相比之下，宋元时代的其他著作如《数书九章》、《测圆海镜》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》等书则除了一些特殊情况外很少被人引用，只有《算学启蒙》的题目和一些歌诀在明代的数学著作中有一些体现，但和杨辉的著作相比，其全面性、普遍性和直接性要差很多。古人注书，如赵爽、刘徽，一般都是分段注释前人的文字，他们的成果体现在注释之中。贾宪则采用附设新题，提出或概括出新的方法的方式，把同类的问题放在原作某些问题之后，杨辉继承发展了这种方法，并称其为“比类”。“比类”的方法被明代的数学家广泛采用，吴敬在其著作的名称中就加入“比类”二字。王文素也采取比类、新增等多种方式附设新题。这样做法本意都是不打乱原著的体例与格式，把自己的新设题目附在后面。

在具体内容方面，从明代的数学著作中也处处可以见到杨辉的东西，可以说杨辉无处不在。杨辉重点论述的各种算法，如因乘、乘法、损乘、九归除、归除、商除、求一乘除法、异乘同除、定身除、身外加、就物抽分等算法，在明代几乎是每一部数学著作必备的内容，这些内容在有些著作中被置于基础知识的重要位置，绝不可没有。杨辉用大量篇幅研究各种面积体积的计算方法，它们也是明代数学著作中必备的内容，在不少著作中所用的图形都与杨辉所用一模一样。明代数学著作中还有一项常见的内容，这就是各种杂法，如河图洛书

① 梅荣照，唐中期到元末的实用算术，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年，第10～35页。

算、金蝉脱壳、剪管术、纵横图等，都是来源于杨辉的著作。

在数学思想上，杨辉强调计算方法的灵活多变，重视因题而变法的思想，使用口诀或歌诀辅助记忆的思想，都在后来的数学著作中有明确的体现。强调灵活多变，促进人们寻找和发展不同的快捷算法，强调熟练记忆，又成为歌诀化的发展动力，进而为珠算的全面普及提供了方便。

明代数学的发展方向是由社会的、政治的、经济的、文化的和数学内部多种因素共同决定的。从数学自身的特征来看，明代数学传统的转变是最重要的因素。正是由于数学大传统由理论性向技术化方向的转化而使得明代数学家越来越重视研究成果的大众化，重视他们的著作能被更多的非数学家所理解和认同。因而也使技术化的成果越来越流行，算盘的普及、歌诀的流行、对简易算法的追求等，都与此有密切的关系。在这样的认识基础上，再看杨辉被推崇重视，也就不足为奇了。

第二十三章　元中叶至明末的主要数学家和数学著作

从元中叶到明末究竟有多少种数学著作？这期间又有多少种以往的算书流传在世？这是很难准确回答的问题。从元代中期开始，新的数学著作开始大量出现，其数量比前代增加了许多。据李俨《明代算学书志》、《十三十四世纪中国民间数学》[①] 和李迪《中国数学通史·明清卷》统计，大体而言，从元末到明末之间新撰写的数学著作有80种左右。从14世纪中期到17世纪初期，留下姓名的数学家有几十位。关于这些数学家的生平传记资料极少，能够反映他们个人情况的有效史料十分难得，有的数学家甚至只留下了名字。目前，仅仅可以从一些著述中获得少数人相当有限的资料或只鳞片爪的信息。

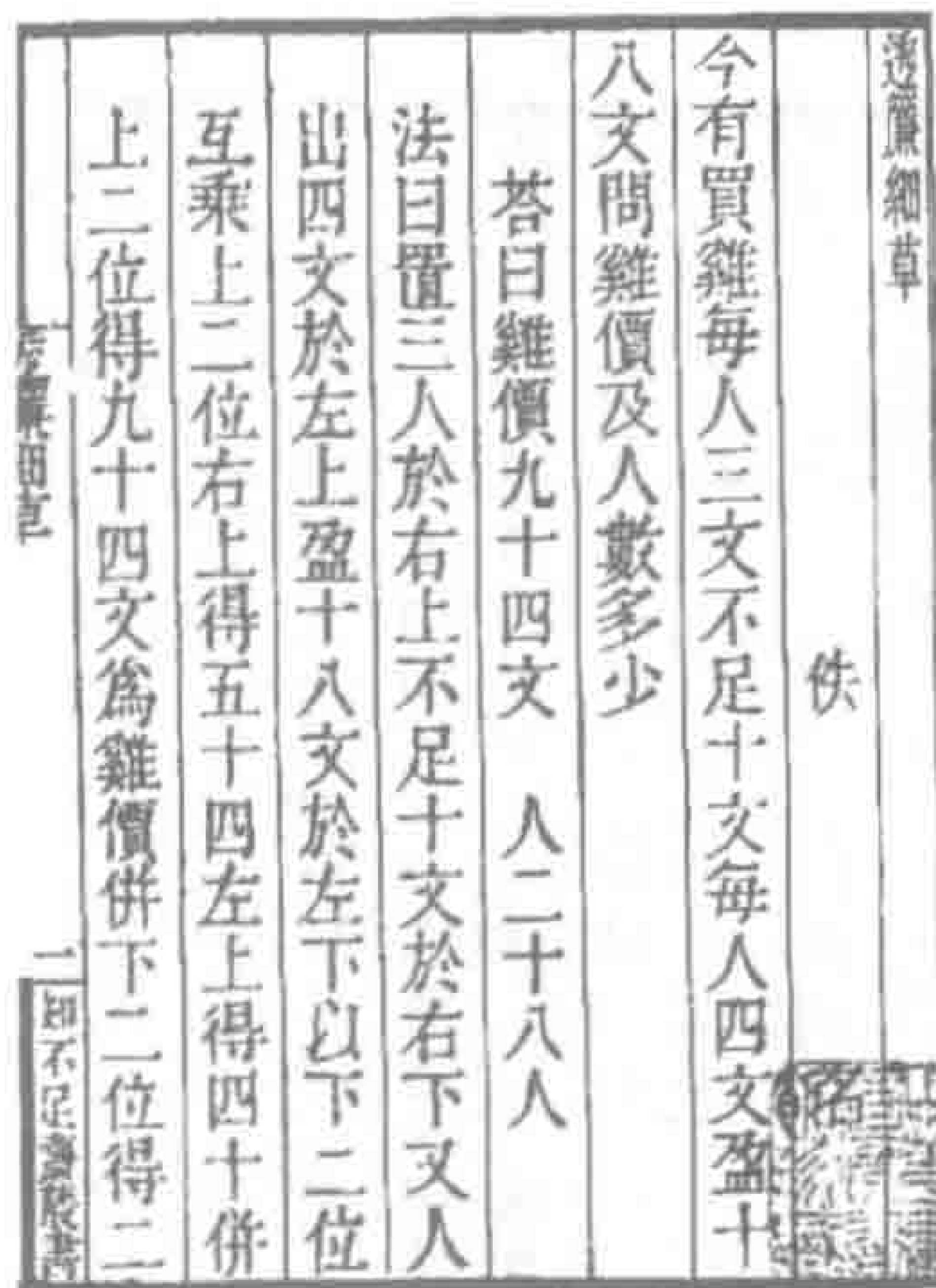
兹根据资料情况，介绍这一时期的主要数学著作和数学家的情况。

第一节　元中后期的数学家和数学著作

一　《透帘细草》

《透帘细草》，作者与时间均不详，一般认为是元代中后期的著作。《永乐大典》在摘录该书时，都把它的内容放在《丁巨算法》之前，有时，同一题目先列该书解法，再列《丁巨算法》的内容，说明该书的成书年代在《丁巨算法》（公元1355）之前。

据李俨《十三十四世纪中国民间数学》考察，现传《透帘细草》共存有71题。其中，存于《永乐大典》卷16343和卷16344中17题。收入《知不足斋丛书》（公元1814）本《透帘细草》（图23-1-1）中54题。收入清莫绳孙藏《诸家算法》中13题，即出自《永乐大典》卷16361者，与《知不足斋丛书》本的后13题相同。《透帘细草》原书的内容较为丰富，现存的71个题目涉及的算法有盈不足、方程、开方、衰分、各种体积公式、垛积公式、就物抽分、异乘同除、今有术、斤两换算等。每个题目均分为题目、“答曰”和“法曰”三部分，有时还有“草曰”。从题目内容和解答情况看，与传统的《九章算术》和《算学启蒙》相类似。


透簾細草

佚

今有買雞每人三文不足十文每人四文盈十八文問雞價及人數多少

荅曰雞價九十四文　人二十八人

法曰置三人於右上不足十文於右下又人出四文於左上盈十八文於左下以下二位互乘上二位右上得五十四左上得四十併上二位得九十四文為雞價併下二位得二

透簾細草

知不足齋叢書

图23-1-1　知不足斋本《透帘细草》书影

① 李俨，十三十四世纪中国民间数学，科学出版社，1957年。李俨钱宝琮科学史全集，第二卷，第403～490页。本编凡引此书，均据后者。

例如：

> 元雇车一辆，议行道一千里，载重一千二百斤，与钞七十五两。今添重三百六十斤，行一千三百里，问：与钞多少？

同类题目在《九章算术》、《算学启蒙》、《丁巨算法》等书中都有。整体而言，《透帘细草》的水平相对于元代中期的其他数学著作来说，水平是较高的。可惜的是，现传只有该书的一部分。

二　丁巨及其《丁巨算法》

（一）丁巨

丁巨，生卒生平不详，活跃于14世纪中叶，于元至正十五年（1355）自序《丁巨算法》。宋元时代程朱理学盛行，科举耗费了许多人的时光。丁巨不热心于科举，在当时属于另类知识分子。《丁巨算法自序》说："士类以科举故，未暇笃实。独余幼贱，不伍时流，经籍之余，事法物度轨，则间尝用心。"看来丁巨出身平微，不重视功名，但学习儒家学问，研究经籍，是一位普通知识分子。他对算术有浓厚兴趣，收集了不少算书，研究数学，自称："于算术上自《九章》，下至小法，数十百家，摘取要略，述《算法》八卷。"[①]他是一位热心于算术研究的数学家。

丁巨对当时数学发展状况的评估不是很高："（数学）由唐及宋，皆有专门。自后，时尚浮辞，动言大纲，不计名物，其有通者，不过胥史。"丁巨说此话时，上距朱世杰的《四元玉鉴》问世已有50余年，高水平的数学成果不多，数学发展方向已经转变，从整体上看数学处于开始衰落的状态，他的看法有一定道理。但是丁巨认为自宋以后数学没有重要成果，与事实不相符，他似乎不了解本朝数学家李冶和朱世杰的工作。从《丁巨算法》来看，丁巨的数学水平在14世纪中后期是比较高的，但是他不能和宋元时代的数学名家相比。像丁巨这样不追求功名的数学家在当时是"不伍时流"的，受当时价值取向的影响，他自称"伊游于艺，玩物丧志"。

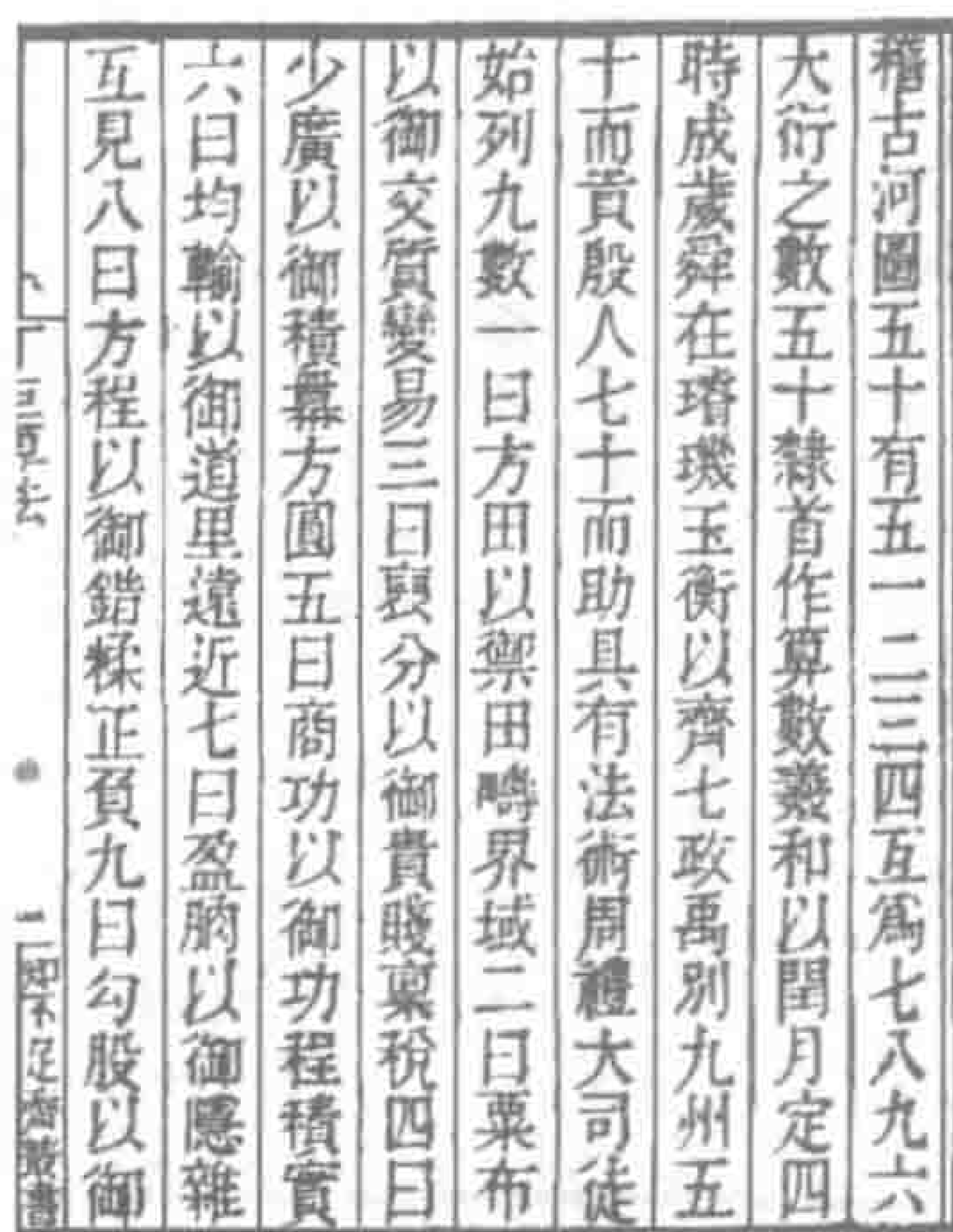

稽古河圖五十有五一二三四五爲七八九六
大衍之數五十隸首作算數羲和以閏月定四
時成歲舜在璿璣玉衡以齊七政禹别九州五
十而貢殷人七十而助具有法術周禮大司徒
始列九數一曰方田以禦田疇界域二曰粟布
以御交質變易三曰衰分以御貴賤稟稅四曰
少廣以御積冪方圓五曰商功以御功程積實
六曰均輸以御道里遠近七曰盈朒以御隱雜
互見八曰方程以御錯糅正負九曰勾股以御
丁巨算法　　一　知不足齋叢書

图 23-1-2　知不足斋本《丁巨算法》书影

（二）《丁巨算法》

《丁巨算法》，原书8卷，早已失传，《永乐大典》曾收录，今亦残缺不全，目前仅存90题，其中收入清《知不足斋丛书》（图23-1-2）中者有62题，现存于《永乐大典》卷16343和卷16344中者有28题。又《诸家算法及序记》中也有28题，与《知不足斋丛书》本后28题相同。另有自序也流行至今。

《丁巨算法》现传90题的内容包括：度、量、衡、

---

① 元 · 丁巨，丁巨算法。影印收入《中国科学技术典籍通汇 · 数学卷》，第1册，河南教育出版社，1993年，第1301～1314页。本编凡引《丁巨算法》，如不说明，均据此。

斤秤、加减乘除、归除、仓窖、粟布、异乘同除、垛积、就物抽分、盈不足、方程、少广等，其中开方法用传统的开方术而非增乘开方法。实际上，书中的内容应该更加丰富。他在介绍全书的内容时写道：

其曰田亩，虽不啻百里当百二十一里，百亩当百四十六亩之步，亦方田之属。粟布交质变易。差分法衰分。仓窖堆垛法少广。修筑营运，以见商功。双头交易，抽分答价，以见均输。折变相和，异乘同除，以知隐杂。诸分之通为方程，可以通期闰。海岛望算为勾股，可以通广轮。凡纲：乘以聚之，除以散之。通乘除已，斯可为法。乘之积为加，除之散为减。加减为乘除之变，故以乘除加减四法为之首。为数始于一，终于十，积于一二，成于九九。大为十百、十千、十万、百万、千万、万万、亿、兆、京、垓、秭、穰、沟、涧、正、载、极。小则分、厘、毫、丝、忽、微、纤、沙、尘、埃、渺、漠、幽、虚、空、清、净、无为、尽。一十百千万，互为消长，由是而天高地厚，日月往来，律吕声音，阴阳幽显，因此测彼，精入鬼神。伊游于艺，玩物丧志。

这说明原书不是按九章的顺序编排的，而是按问题分类编写的，例如以“仓窖堆垛”之类的问题来体现少广的内容，等等。同时又不可避免地以算法为纲纪，例如把度量衡、田亩、斤秤、大小数等内容和加减乘除等算法列在首位，等等。

下面举例说明其以算法为中心的特点：

今有子粒折收轻赍，每石正价三两五钱，分例耗谷三升五合。今欲先起解钞一百定①，内除带解租二锭一两一钱四分八厘三毫五丝。问：该正、耗分例各若干？

荅曰：钞一百锭，子粒正耗分例谷一千三百九十九石六斗七升一合九勺。钞九十七锭四十八两八钱五分一厘六毫五丝，正谷一千三百五十二石三斗四升，折钞九十四锭三十三两一钱九分，分例耗谷四十七石三斗三升一合九勺，该钞三锭一十五两六钱六分一厘六毫五丝，租地钞二锭一两一钱四分八厘三毫五丝。

此重法也。去租、破锭、归除、减乘，皆有之，故曰重也。置一百锭，先除二锭一两一钱四分八厘三毫五丝，余九十七锭四十八两八钱五分一厘六毫五丝，折锭得四千八百九十八两八钱五分一厘六毫五丝，以三归五除之。呼逢三进一十，除一五如五；呼三一三十一，除三五一十五；呼撞归九十三，除五九四十五；呼撞归九十三，除五九四十五；呼三二六十二，除五六三十；呼三二六十二，逢三进一十，除五七三十五；呼逢三进一十，除一五如五；呼撞归九十三，除五九四十五。总得谷一千三百九十九石六斗七升一合九勺，自首退位减三五，得正谷一千三百五十二石三斗四升，反减总数得耗谷四十七石三斗三升一合九勺，各以价乘之，合问。

题意为有银 100 锭（每锭 50 两），其中留出钞 2 锭 1 两 1 钱 4 分 8 厘 3 毫 5 丝用于租地，其余用于买谷。谷价每石 3 两 5 钱，每石谷又带耗 3 升 5 合，求正谷、耗及其价钱各多少。因为此题计算涉及去租、破锭、归除、减乘等内容，所以是“重法也”。其中：“去租”：即从总钱中减去租地钱，得买谷钞 97 锭 48 两 8 钱 5 分 1 厘 6 毫 5 丝。“破锭”：即把买谷钞中之锭折算为两：得 4898 两 8 钱 5 分 1 厘 6 毫 5 丝。“归除”：即买谷钱总数除以谷每石价 3 两 5 钱，得买谷数量，用归除法计算，即是“三归五除”，得总谷 1399 石 6 斗 7 升

① 《知不足斋丛书》本讹作“定”，郭世荣校正为锭。

1 合 9 勺。“减乘”：即从总谷中减去耗谷数，因每石耗谷三升五合，即总谷 1399. 6719 石除以 1. 035，所以“自首退位减三五”，得正谷 1352. 34 石。此外，题中给出了撞归算法细草。书中还有“豁除”、“减免”等算例。前者计算 $N \div (1+\delta)$ $(\delta<1)$，算法是自首位“减”δ。后者计算 $N \times (1-\delta)$ $(\delta<1)$，算法是自尾“减”δ。

三　贾亨的《算法全能集》

《算法全能集》（图 23-1-3）上下二卷，署“长沙贾亨季通类编”，《永乐大典》卷 16343 引录时作“贾通《全能集》”，《全能集》当是原书名的略写。目前所见到的记述都是“贾亨，字季通”，大概均源自阮元《畴人传》卷 28：“贾亨，字季通，长沙人也。著《算法全能集》二卷。”[①] 那里给出的参考文献是《算法全能集》。笔者目前见到的刊本《算法全能集》中均无序跋和能说明作者名与字的文字，因此，作者的名与字还是个待考的问题。


算法全能集　長沙賈亨季通類編
總目
總說五項
錢　粮　端匹　斤秤　田畝
常用法二十項
因法　加法　乘法　減法（即定身除）
歸法　歸除　求一　商除
異乘同除（千斤百里附）　就物抽分　差分
和合差分　端匹　斤秤　堆垛
盤量倉窖　丈量田畝　修築　約分

图 23-1-3　《算法全能集》书影

该书在明清两代均有刊本。内容包括“总说五项”和“常用法二十项”。其中，“总说五项”内容很少，计有钱、粮、端匹、斤秤、田亩，是关于度、量、衡、田制单位和大小数名称的说明。“常用法二十项”是全书的主要内容，前 10 项属上卷，后 10 项构成下卷，内容包括：因法、加法、乘法、减法（即定身除）、归法、归除、求一、商除、异乘同除（千斤百里附）、就物抽分、差分、和合差分、端匹、斤秤、堆垛、盘量仓窖、丈量田亩、修筑、约分、开平方。全书是以“法”为纲编排的。

该书所有内容均在前人的著作中出现过，内容也较为简略，创新不多，不过也有一些值得注意之处。首先，重视歌诀。每一算法下均先列出歌诀，接着才是题目和解答，偶有说明列于歌诀后。此外，书中还有九九、九归、撞归、截斤为两等歌诀。其次，强调算法。[②] 不仅全书是以算法为中心编排的，而且在例题的编排上也体现了以算法为中心的特点，例如，常用法的前五项中的例题一般都是先给出一个已知条件，另一个已知条件在答案中用“假令某某”的形式给出。下面是“减法”的第一个例题：

今有钞六十七两九钱八分，籴米，问：每米一石该钞几何？

答曰：假令籴到米

（除一）一十一石，每石该钞六两一钱八分。

（除三）一十三石，每石该钞五两二钱二分九厘二毫三丝七微七尘。

（除五）一十五石，每石该钞四两五钱三分二厘。

（除七）一十七石，每石该钞三两九钱九分八厘八毫二丝三忽五微三尘。

---

① 清 · 阮元主编，畴人传。本编凡引《畴人传》，均据此。

② 李迪，中国数学通史 · 宋元卷，江苏教育出版社，1999 年。本编凡引此书，均据此。

（除九）一十九石，每石该钞三两五钱七分七厘九毫。

法曰：置都钞在地，以籴到石数定身除之，合问。

这里，作者强调的是算法：都钞六十七两九钱八分÷籴到石数=所求数，所以当"都钞"给定时，只要根据不同的"籴到石数"套用算法就可以了。这就像现代编写计算机算法程序一样，编定算法程序后，根据问题从外部输入数据进行计算即可。

最后，对一些具体算法的研究。一是对撞归法的说明，二是明确了"起一还原法"，三是对求一和商除等算法的认识。比如对"求一法"，贾亨说道：

> 但此法未免重複下算，终不若今人用此归除法为捷径。论之二法，名虽不同，究对所用以分之，其实则一。既有归除，本不用此求一。然古有是法，又不容不载，以广算者之知耳。

对"商除法"贾亨说道：

> 其法较别。且如九归，但能分为九分。定身除止能分一十百千万。令归除又只能分二三十以上有零之数。今商除一法，却该三法之所分，欲求其径捷，终不若前三法之疾。本不载此商除，以惑算者之心，然此法另有所用处，又不容不载于其间也。

这里，为了给读者提供多样性的知识才把求一法写进书里。同时也从整体上统一认识九归、减法（定身除）、归除和商除等算法，认为商除法既是普适的又是较繁的。

《算法全能集》使用筹算，但其口诀为珠算的普及提供了帮助，是14世纪商业数学发展的产物，对其后的《详明算法》有相当大的影响。

四　《详明算法》

《详明算法》二卷（图23-1-4），有明洪武癸丑（公元1373）庐陵李氏明经堂刊本和朝鲜活字本等刊印本传世。该书前有安止斋序文，但没有撰写时间，明周述学《历宗算会·算会圣贤姓氏》记："何平子编《详明算法》。"① 明程大位《算法统宗·算经源流》说："元儒安止斋何平子作，有乘除而无九章，不备。"因为传本中未署作者，只序言中有安止斋署名，所以有认为该书是安止斋、何平子二人完成者，有认为何平子号安止斋者，也有认为与何平子不相关者，目前难以定论。

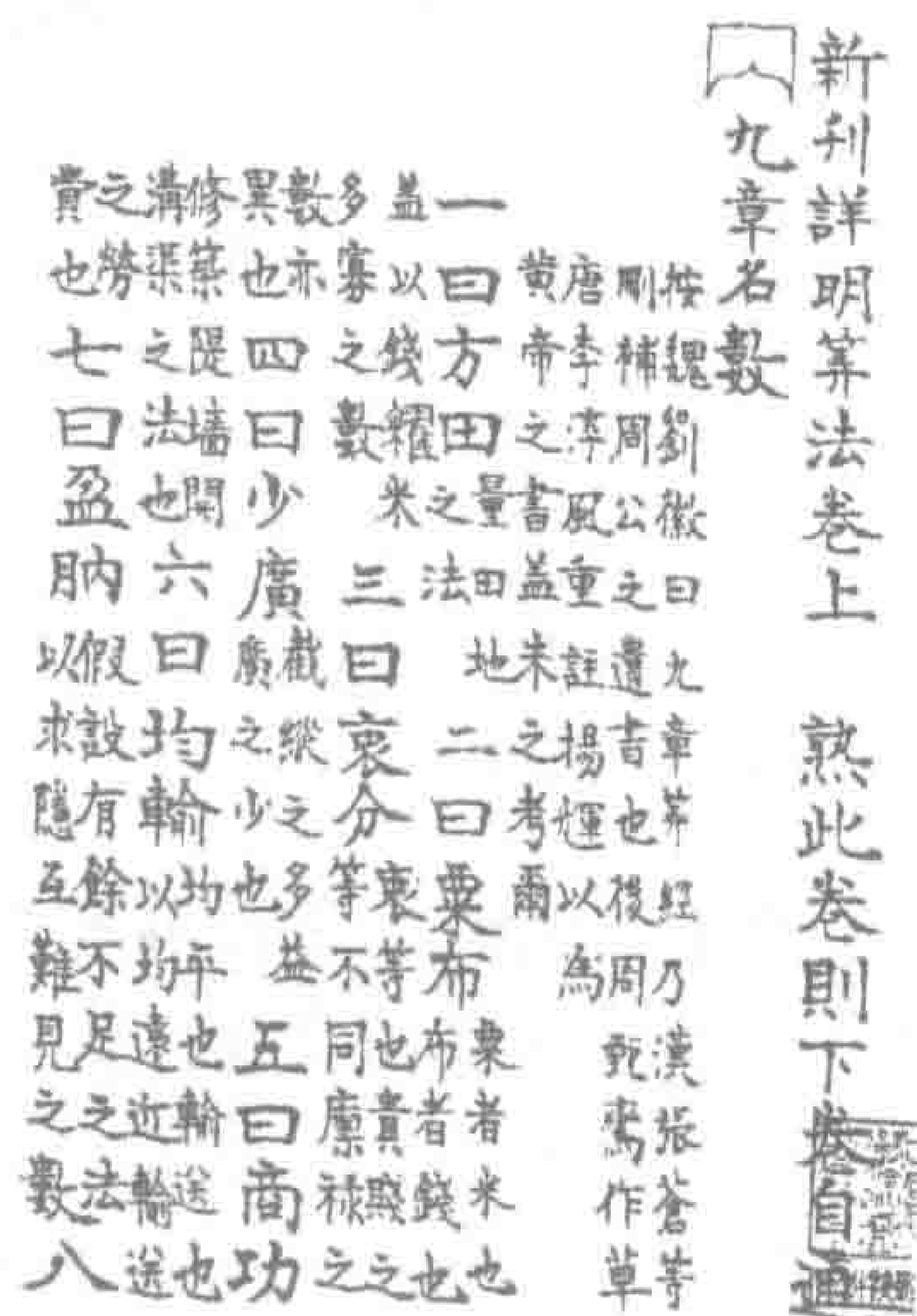


图23-1-4　《详明算法》书影

《详明算法》的目录为：卷上：九章名数、小大名数、九九合数、斗斛丈尺、斤秤田亩、口诀、乘除见总、因法、加法、乘法、归法、减法（即定身除）、归除、求一、商除、约分。卷下：异乘同除、就物抽分、差分、和合差分、端匹、斤秤、堆垛、盘量仓窖、丈量田亩、田亩纽粮、

① 明·周述学，历宗算会卷15。《续修四库全书》，上海古籍出版社，1995年。本编凡引《历宗算会》，均据此。

修筑。

《详明算法》与《算法全能集》关系极为密切，其前六项，即从“九章名数”到“乘除见总”的各项，与《算法全能集》的“总说五项”相当，是预备知识，但较后者多一些内容，增加了“口诀”和“乘除见总”两项。其中，“口诀”的内容（如关于“撞归起一”的说明等）在《算法全能集》中是分散在主体部分中的，而“乘除见总”则是新的内容，主要讲乘除算法结果的定位问题。

《详明算法》主体部分（“因法”以下的部分）的内容基本上与《算法全能集》相同，只是在项目的编排顺序上略有不同。二者比较，《详明算法》多了“田亩纽粮”一项，而少了“开平方”一项。二者的相同点表现在两个方面。据李俨《十三十四世纪中国民间数学》考察，第一，《详明算法》中 19 个项目的歌诀有 14 个与《算法全能集》完全相同或只有少数几个字不同而已。而“田亩纽粮”是新增的，所以无歌诀。显然，《详明算法》抄录或改写了《算法全能集》中的歌诀。第二，经过仔细对比，可以发现，《详明算法》中的 114 个题目除“田亩纽粮”中 2 题外，其余 112 题全部摘自《算法全能集》。这使我们断定：《详明算法》基本上可以看做是《算法全能集》的修订本。所有《算法全能集》的特点，《详明算法》全都具备。

此外，《详明算法》还有另外一些与《算法全能集》不同的特点。第一，“九九合数”即九九乘法口诀，在《算法全能集》中列入“因法”之下，在《详明算法》中则单列于预备知识中。二者的 45 句口诀相同，但顺序却不同。前者的顺序是从“一一如一、一二如二……一九如九”，再到“二二如四”……直到“九九八十一”结束。后者从“一一如一，一二如二，二二如四……”开始，到“九九八十一”结束。第二，在题目的“法”下增加了“布算”，列出了筹算图式和演算说明。第三，在图式中使用了表示零的符号“〇”。如“今有绢四十四万〇七百九十一疋”（“异乘同除”第3题）和“麦八石〇八升…”（“差分”第3题），等等。《详明算法》在明清两代及国外影响很大。

第二节　明初的数学家和数学著作

一　严恭及其《通原算法》

（一）严恭

严恭，姑苏（今江苏苏州）人，元末明初的数学家。关于他的生平，仅在朝列大夫潮州府赵瑀的《通原算法序》[①] 中有一点资料：

> 姑苏严君，名恭，幼读之［按：指十部算经］以明其理。长试吏术，其绪余乃及于数学，而益致其精。一日袖书一卷示予，名曰《通原算法》。自言兵乱失故传，此特其默集者尔。欲锓诸梓，以广其术，属予引其端。予惟周礼六艺之教，终之九数。人生八岁入小学，则诵其文，比其长也，习其法以济诸用，故孔子为委吏

① 《诸家算法及序记》，抄本。中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第 1 册，河南教育出版社，1993 年，第 1431 ~ 1455 页。

曰会计当而已。无严君颖悟之资，何由一本万殊之理，达之于通原之法，其视天下事物，若金谷之出纳，田土之度量，户口之增减，大而山堆土积，小而毫分缕析，如庖丁解牛，迎节中窍，恢恢乎有余刃，而无全牛矣。方今分教设科，一循古制，数之所系，尤为不轻，俾通原之法，得行于时，岂曰小补之哉。

这篇序言写于洪武壬子（1372），可见严恭自幼开始学习十部算经，长大后进入仕途，把数学知识应用到处理行政事务中，并且在做官之余，精研数学，达到"益致其精"的程度，对数学有自己的心得体会。他在元朝时收集了一些数学书籍，在元末兵乱散失了，于是在明初"默集"而编写了《通原算法》，以补数学著作散失之缺。

据李俨《明代算学书志》，沈朝宣撰《嘉靖仁和县志》卷九人物记载过一位严恭："严恭，字德容，仁和人，永乐甲辰（1424）进士。"永乐甲辰上距元亡明立已 56 年。如果他是《通原算法》的作者，考虑到他在元代有丰富的数学藏书，明洪武初年已做官，即使年轻，也应有 30 岁左右了，到永乐甲辰他应该已是八九十岁的老人了。或者此为另外一人，因为此严恭为仁和（今杭州）人，与赵瑀所说姑苏人有明显差异。

（二）《通原算法》

《通原算法》，严恭撰，有明洪武壬子（1372）赵瑀序，《文渊阁书目》记此书二册，《秘阁书目》也称其为二册。李俨《明代算学书志》云："中国科学院图书馆藏有《通原算法》不分卷。"据李俨《十三十四世纪中国民间数学》考察，《通原算法》现存于《诸家算法》中 29 题，存于《永乐大典》中 35 题，共有遗文 64 题，内容涉及乘除、斤秤、互换、比重、体积、等差数列、利息计算、鸡兔同笼、物不知数、异乘同除、开方等。其中，开平方和开立方各九题，所用开方法为古代方法而非增乘开方法。书中还对一次同余方程组问题进行了一些讨论。

二　刘仕隆及其《九章通明算法》

（一）刘仕隆

刘仕隆，15 世纪初数学家，生平事迹不详。目前能找到的相关资料，只有张爵《九章正明算法》（1539）和程大位《算法统宗》（1592）中有一小段极为简短且内容相同的记载。《九章正明算法》结语中写道：

夫难题先于永乐四年，临江刘仕隆□□□法，访入内阁，预修《大典》，□□□□，退公之暇，编成难题，附于《九章通明》之后，并钱塘吴信民《九章比类》内与诸家算法中，诗词、歌括、口号，总集名曰'难题'。①

《算法统宗》卷 13"难题附杂法序"中基本抄录了上述记述。据此可知，刘仕隆参加了《永乐大典》的编辑工作，其中的算书部分可能就是由他负责编辑的。《永乐大典》收录了一批汉唐至明初的数学著作，其中有一些在后来成了孤本，对保存数学知识起到了重要的作用，这是特别值得指出的事实。

---

① 李兆华，残本《九章正明算法》录要，中国科技史料，2001，22（1），75。

刘仕隆是明初一位重要的数学家。从张爵和程大位的记述看，刘仕隆本是一位民间数学家，当时朝廷缺少能够胜任数学工作的编辑，他因为具有数学才能而被“访入内阁”，从事编辑《永乐大典》的工作。张爵说刘仕隆是“难题”的始作俑者，事实却不是这样。所谓“难题”，就是以诗词歌诀形式编成的题目。这类题在刘仕隆以前就已存在，据南宋荣棨之言，这种编题方式在南北宋之交就已流行，他说：“奈何自靖康以来……或隐问答以欺众，或添歌象以衒己。乖万世益人之心，为一时射利之具，以至真术淹废，伪本滋兴，学者泥于见闻，伥伥然入于迷望，可胜计邪？”① 元代朱世杰的《四元玉鉴》之“或问歌象门”中也编入了 12 个这样的题目。但是有一点是肯定的，即在刘仕隆之后，这类问题在数学著作中变得十分流行了。“杂法”也不自刘仕隆始，但是他十分重视，这成了以后“杂法”流行的先兆。

刘仕隆因编辑《永乐大典》而有机会读到明初朝廷收藏的大批古算书，可能是明代见到古算书最多的数学家，而且在编辑之余也研究数学。这样，他本可以在数学上成就一番大事业，但是，他的著作却没有很好地反映这些著作中的成果，他选择了撰写一部实用算书的思路，这或许是因为在朝廷中为官，公事繁重，没有太多的时间钻研数学。他的著作更重视“难题杂法”，重视歌诀，并且成为后人效仿的对象，对明代数学的发展方向有很大影响。

（二）《九章通明算法》

《九章通明算法》，原书现已失传。对此书，程大位《算法统宗 · 算经源流》云：“永乐二十二年临江刘仕隆作九章而无乘除等法，后作难题三十三款。”由是可知，原书完成于 1424 年，是按传统九章的体例和顺序编排的，包括方田、粟米……勾股等内容，但是没有“乘除等法”，即没有讲述算法的预备内容（如《九章比类算法大全》中的卷首和《算法统宗》的卷一和卷二），而且书前没有度量衡等预备知识。该书后附有 33 个“难题”，即用歌诀编写成的算题。最近，新发现的张爵著《九章正明算法》残本，记载了《九章通明算法》中的 33 个“难题”的题名和后 29 题的原题，是关于该书的重要史料。《九章通明算法》的“难题”开明代歌诀化算题之风气，对明代数学有相当大的影响。

该书中自然也应该包括一些“杂法”，这是刘仕隆在编辑《永乐大典》时就已开始研究的数学内容，不可能不写入他的著作中。《九章通明算法》的准备工作应该在永乐四年（1406）开始编纂《永乐大典》时就已动手，起初可能只是将一些杂法编辑在一起，以后积累逐渐增多，直到彻底完成了编辑《永乐大典》的任务之后才整理成书。《永乐大典》的收尾很晚，直到永乐十八年。在此期间，他可能没有时间整理自己的著作。

《九章通明算法》在后来产生了一定的影响，1483 年余进著《九章详通算法》一书。程大位《算法统宗 · 算经源流》记：“《九章详通算法》，成化癸卯鄱阳余进作，采取《详明》、《通明》法。”程大位在《算法统宗》中引用了该书的一些内容，例如，卷十“双套盈不足”条下有程氏说明：“刘氏《通明》、吴氏《比类》始增双套者，用分母子者，皆存于后，以便学者。”

---

① 南宋 · 荣棨，黄帝九章算经序，见：郭书春汇校，汇校《九章算术》增补版，辽宁教育出版社，九章出版社（台湾），2004 年。

三　夏源泽的《指明算法》

《指明算法》2卷，夏源泽作于明正统己未年（1439）。夏源泽，江宁人，生平不详。《指明算法》的内容与当时流行的数学内容差不多，包括算术基本知识，如大小数名、度量衡及其换算、基本算法（加减乘除，求一、归除、撞归等）及相关的应用问题等，可能还有珠算方面的内容，大体而言，相当于后来的《算法统宗》卷一与卷二的内容。这是根据清代的一些校订本的内容得出的结论。

《指明算法》原书已散佚。明王文素曾见过该书。正德八年（1513），宝朝珍在《算学宝鉴序》中转述数学家杜瑾的评价："窃觌宋杨辉及我朝金陵杜文高、江宁夏源泽、金台金来朋等诸公算法，固谓善矣，但藏头露尾，露尾藏头，俱以逢巧之法而算之，不通活变，以致后学之难悟。"① 这说明书中有一些用歌诀写成的"难题"，即所谓"藏头露尾，露尾藏头"的算题，还包括所谓的"杂法"，即"逢巧之法"。《盘珠算法》引用了"指明歌诀"和"算丈量田法"歌等内容。程大位《算法统宗》"算经源流"（1592）记："《指明算法》，正统己未江宁夏源泽作，而九章不全。"是知该书作于正统己未（1439），且不是以九章的形式编排的。在现传《指明算法》中，有不少珠算的内容，甚至可以看成是珠算专著，但是，这些版本都是后人校改本，无法断定与珠算相关的内容是原有的还是后人加入的。

《指明算法》对后世有很大影响，清代以来有一些校正本、改编本，现知至少有6种清代版《指明算法》，如金陵郑元美校正、以文居刊本，奎壁斋订、金川大立堂梓行本，书兰亭刊本，福州集新堂刊本，集成堂刊本，有道堂刊本等，但都不是原本，是后人的校改本。此外，还有多种不同书名的数学著作，都是以夏源泽的《指明算法》为母本形成的，如《铜陵算法》、《算法全书》、《算法指明》、《算法指掌》等，每一种书都有多个不同的版本，其内容大同小异，相互差别不大。所有这些书形成了一个关于珠算的传播系统，明清时代以《算法统宗》为中心的珠算传播系统并行②，二者都对晚明以来的民间数学有很大影响。

四　其他算书

元末明初之际，还有一些数学著作见诸记载。因为资料较少，在这里一并讨论。

《锦囊启源》，著者和时间均不详，原书已佚，现传《永乐大典》中残存30题和斤两单位说明及"斤见两歌"。其中，乘法及斤两运算21题，乘除题9问，均较浅显。

王氏《数学举要》若干卷，成书于1350年前后，有序文收入《皇明文衡》卷三十八及明胡翰《胡仲子集》（1380）卷四。

据李俨《十三十四世纪中国民间数学》云，《应用碎金》是元后期民间著作，有明洪武四年（1371）刊本，其中涉及一些常用算法和算术基本知识，如九九数、尺法、斛法、秤法、亩法等。

① 明·宝朝珍，算学宝鉴序。中国科学技术典籍通汇·数学卷，第二册，河南教育出版社，1993年，第337页。

② 李迪、冯立昇，对《铜陵算法》之研究，载戴吾三、维快主编《中国科技典籍研究》，大象出版社，2003年，第19～28页。

《文渊阁书目》中提到的有：《算学源流》一部一册，《算法补缺》一部一册，《钞录算法》一部一册，《算法百颗珠》一部一册等。明焦竑《国史经籍志》卷二（约1597）记《算法百颗珠》为《算术百颗珠》一卷。也有《算法颗珠》之记。

关于这些书的情况，目前没有线索可究。

第三节 筹珠并用的数学家和数学著作

一 吴敬及其《九章算法比类大全》

（一）吴敬

吴敬，字信民，号主一翁，浙江仁和人，15世纪中叶数学家（图23-3-1）。

1450年，吴敬完成了《九章算法比类大全》一书，此时他已"年老目昏"，进入老年，应该有60多岁了，这样，他当生于14世纪末期。吴敬一生主要以当幕宾为业，是江浙一带有名的实用数学家，擅长钱粮、租赋、田亩计算。时人项麒介绍他说："天资颖达，而博通乎算数。凡吾浙藩田畴之饶衍，粮税之滋多，与夫户口之浩繁，载诸版籍之间者，皆于翁手是资，则无遗而尤爽焉。一时藩臬重臣皆礼遇而信托之者，有由然矣。"① 因此，作为一名著名的经济核算师，他受到众多地方官员的礼遇和厚待，聘他担任经济计算工作。给吴敬的著作写序的人有"杭州府仁和县儒学教谕临川聂大年"，还有"奉议大夫脩正庶尹南京刑部郎中"项麒；给他的画像写赞语的有"赐进士中宪大夫、福建汀州知府、前礼科都给事中、赐一品服、吴兴张宁"和"大中大夫山东布政使司布参政"孙暲，这些人都是有相当地位的官员，可见吴敬与不少官员交往很多。



图23-3-1 吴敬画像

吴敬在从事官府的各种计算工作的同时，对数学研究也具有浓厚的兴趣。他自称"予以草茅求学，留心算数，盖亦有年"，数学是他长久研究的对象。作为一名民间数学家，要获得前人的数学著作是很难的，但他非常注意收集数学著作。

吴敬花十年工夫，认真研究了《详解九章算法》，对传统九章的内容形成了自己的见解，他自序云：

> 方田、粟米、衰分，不过乘除互换，人皆易晓。若少广之截多益少、开平方圆，商功之脩筑堆积，均输之远近劳费，其法颇难。至于盈朒、方程、勾股，题问深隐，法理难明，古注混淆，布算简略，初学无所发明，由是通其术者鲜矣。

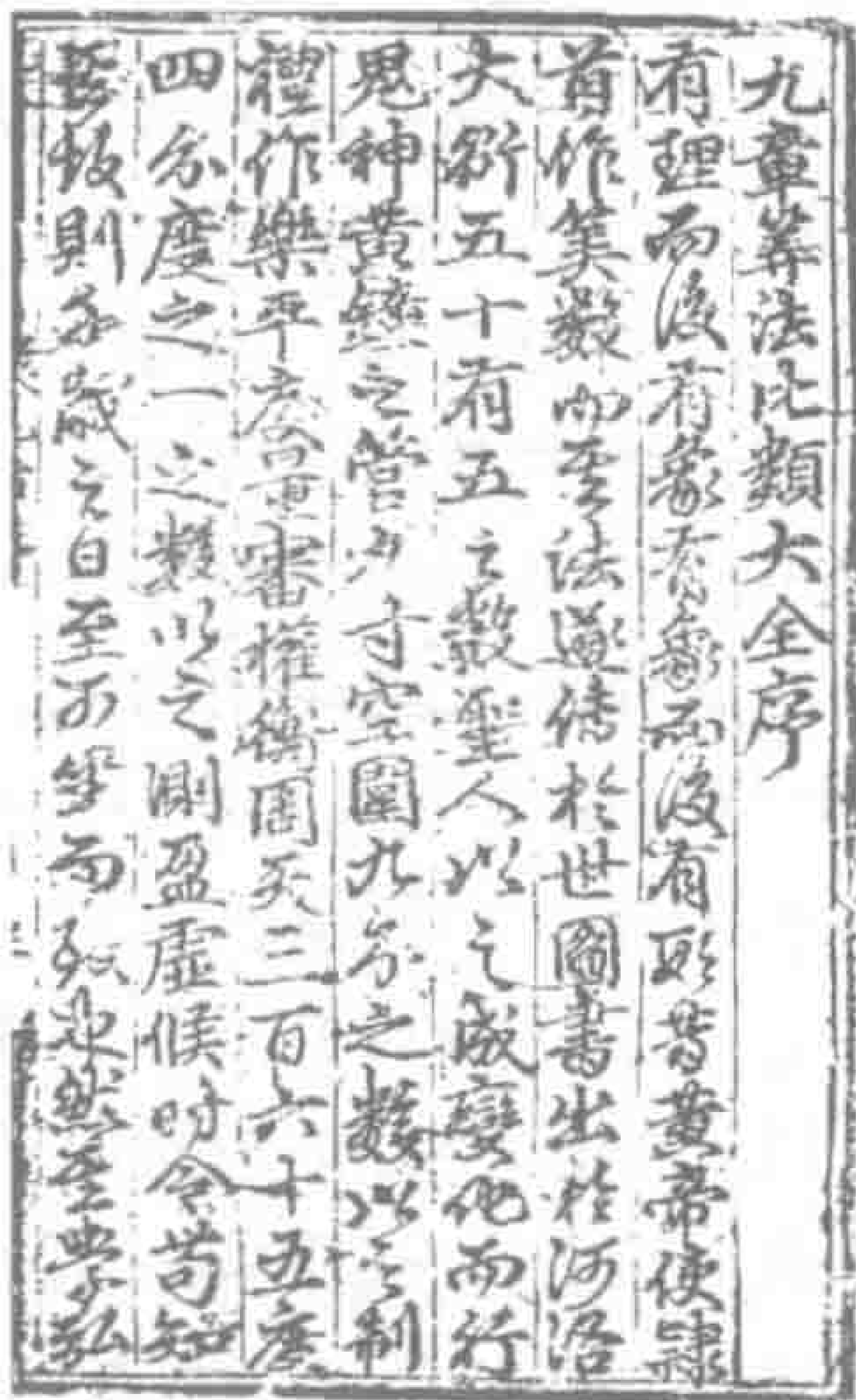
在研究的基础上，他"採辑旧闻，分章详注，补其遗阙，芟其纰缪"，编纂成《九章算

① 明·项麒，九章算法比类大全序，1488年。见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第二册，河南教育出版社，1993年，第7页。

法比类大全》10 卷。

（二）《九章算法比类大全》

《九章算法比类大全》（图 23-3-2），署“钱唐南湖后学吴敬信民编集”。该书完成并刊刻于景泰元年(1450)，书稿完成后，吴敬请人腾录成秩，由金台人王士杰帮助刊刻出版。《九章算法比类大全》出版后不久，“版毁于邻燹，而十存其六焉”。弘治元年(1488)，吴敬的长子怡庵又命其季子吴讷（字仲敏，号循善）重加编校，再次印行，后世流传者主要是该版。弘治本书名和序言均题《九章算法比类大全》，而目录和正文均题《九章详注比类算法大全》，不知初刊本就如此，还是吴讷修改的。



九章筭法比類大全序
有理而後有象有象而後有形昔黃帝使隸
首作筭數而筭法遂傳於世圖書出於河洛
大衍五十有五之數聖人以之成變化而行
鬼神黃鍾之管九寸空圍九分之數以之制
禮作樂平度量權衡周天三百六十五度
四分度之一之數以之閏盈虛候時令節知
藝數則無數之自至而學而知之然其學弘

图 23-3-2　《九章算法比类大全》书影

吴敬在自序中综述了全书的内容，他写道：

> 採辑旧闻，分章详注，补其遗阙，芟其纰缪，灿然明白，如指诸掌。前增乘除开方起例之法，中添详注比类歌诗之术，后续锁积演段还原之方，增千二百题，通古旧题总千四百余问，数十万言，厘为十卷，题曰《九章算法比类大全》。

全书包括卷首和正卷 10 卷，共 11 卷。卷首“乘除开方起例”，是全书的预备知识。该卷列举九章名目、习算之法、先贤格言、九九表、记数法、度量衡亩单位、名词解释、各种乘除运算及其结果的名数定位、各种“杂法”、开方、度量单位换算、异乘同除、就物抽分、差分、堆垛、盘量仓窖、修筑等内容，并附有例题 194 问。其中涉及的乘除运算有：因乘加法、归除减法、因法、乘法（下乘法）、归法、撞归、归除、加法（身外加）、减法（定身除）、商除、求一乘、求一除等，展示算法的多样性，强调随题用法。涉及的杂法有：袖中定位、河图书数、写算、乘除易会算诀、孕推男女、占病法等。其中写算是中国历史上最早的记载，以后有关的内容均源于此。卷十是“各色开方”，讲述各种类型的开方方法，并附有例题，开方的最高次数是六次方。

卷一至卷九，按九章方田、粟米等顺序编排，每卷包括基本算法、“古问”、“比类”、“词诗”等四部分内容。基本算法是关于各卷主要内容和公式的说明和解释，“古问”是《九章算术》的题目和解答，“比类”是吴敬附上的同类题目，“词诗”是以诗词歌诀编写的题目，各部分都有注释。

分析《九章算法比类大全》的算题文字、算题顺序、算题解法、注释性术文，可知卷一至卷九每卷的前两部分，即每卷开始的基本概念和算法及古问题部分，都是从杨辉《详解九章算法》“纂类”引录而来，再加上一些吴敬本人的注解。[1] 其中引录《九章算术》的题目 237 个，引录贾宪增加的题目 13 个。吴敬本想摘录全部《九章算术》原文，但是他见到的版本不是《九章算术》原著，无法分辨出贾宪补题与《九章算术》原题，只能依靠

---

① 张久春，《九章算法比类大全》与“九章”的源渊，自然科学史研究，2003，(1)，54～59。

《详解九章算法》“纂类”，所以《九章算法比类大全》所引古问的顺序有一些与《九章算术》不同，也有一些题目不是《九章算术》的原题。吴敬在引录“纂类”时，在顺序上也有一些变动，这样便使得问题的分类和编排更趋合理，更有条理。同时，吴敬在参考杨辉的著作时，也不是把所有重要内容都录入，例如，他引录了贾宪的开方作法本原图，而没有录其增乘开方法，他所用的开方法仍是传统的方法。

《九章算法比类大全》共有“比类”题目568个，是根据《九章算术》的算法问题分类增补上去的同类题目，其中有不少是前人已有的题目。吴敬大量增加了“词诗”类题目，共331题，占全书总题数1448题的22%强。使用歌诀是《九章算法比类大全》的特点之一，全书除了使用歌诀编写算题外，还对几乎每一个算法都编写了歌诀。后来王文素、程大位等人的著作都大量使用歌诀，受刘仕隆与吴敬的影响极大。

《九章算法比类大全》书中没有一个算盘图，所有演草图式都用筹式符号加文字说明表示，但书中提到了算盘，例如，在“河图书数”一节中就有“不用算盘，至无差错”的说明，还有“免用算珠并算子，乘除加减不为难”的歌诀。书中许多算法、口诀都是筹算与珠算可以共用的，有个别题目的演草实际上只有在用算盘时才会出现。因此该书也被一些珠算史学者看成是一部珠算著作。从珠算史的角度看，《九章算法比类大全》确实对珠算的发展有重要的贡献。因加乘法的“起五诀”和“成十诀”，归减除法的“破五诀”和“破十诀”等都是珠算技术中的重要内容。书中在乘除法算例中还使用了“先十法”。另外，“乘除易会算诀”、商除法、归除法等演草都是在算盘上可以实现的算法，因而颇受珠算史研究者重视。① 李俨主张《九章算法比类大全》是筹算为主的著作，华印椿主张是珠算著作，钱宝琮主张是筹珠结合的著作。我们倾向于钱宝琮的意见。整体而言，使用什么计算工具，对吴敬来说并不重要，他所处的是筹算与珠算并用的时代，两种计算工具他都熟悉，他的著作也不是专讲计算工具的，目的主要是介绍数学内容。

《九章算法比类大全》是明代第一部大型数学著作，其内容在当时来说是十分全面的，包括了当时数学家所了解的全部数学内容，既有九章名目下的全部内容，又有一些杂法，同时还有一些新内容如“写算”等。在编写方面，采取大众数学的路线，在引用古问的前提下，增加歌诀和日用算题，突出实用性等特点。但是，《九章算法比类大全》不仅无视杨辉对《五曹算经》等错误算法的批评，沿袭了这些错误，而且自己又使用了若干有明显算理错误的公式。后来王文素《算学宝鉴》对此提出了批评。

《九章算法比类大全》在明代有较大影响，被其后的重要数学著作广泛征引，例如程大位的《算法统宗》从歌诀、算法到算题，都大量引用该书。清初梅文鼎对该书评价很高：“其钱塘吴信民《九章比类》……在《统宗》之前，《统宗》不能及也。”②

二　王文素及其《算学宝鉴》

（一）王文素

王文素，字尚彬，山西汾州人，具体生卒年不详。据《集算诗》其三云“身似飘蓬近

---

① 华印椿，中国珠算史稿，中国财政经济出版社，1987年。

② 清 · 梅文鼎，《勿庵历算书目》“九数存古”条。

六旬，留心学算已年深”，年近60岁，而此诗当写于1522～1524年，可见王文素当生于1465年前后。成化（1465～1487）年间，乃父王林到河北真定行商，举家迁居于真定之饶阳。王文素年幼时随家外出经商，他早年亦当以经商为业，不过他不是一个十分成功的经商者，经济上并不宽余，无力出版自己的著作。他晚年以教书为业，“于嘉靖改元（1522）训蒙西城”，这时他已50多岁。

王文素“自幼聪悟，涉猎书史，诸子百家，无不知者，尤长于算法，留心通证，盖有年矣”。[①] 1524年，他自述：“愚是以留心算学，手不释卷三十余年，颇谙乘除之路。”由此看来，他20来岁时就开始努力钻研数学。因为有经商游历各地的便利，他收集到相当多的数学著作。据李迪《中国数学通史·明清卷》考察，在他的《算学宝鉴》中引用过的算书有20多种，如杨辉的著作、金来朋的《启蒙算法》、佚名《捷奇易明算法》、张伯奇的《指明算集》、冯敏的《纵横指南算法》、《详明算法》、《九章算法比类大全》，等等。王文素在研究了各家著作之后，提高了自己的数学水平，同时也发现了已有著作中的许多问题。他自序云：

> 尝取诸家算书读之，其问辞失旨者有之，问答不合者有之，歌诀包束不尽，定数不明，舍本逐末，弃源攻流，乘机就巧，法理不通，学者莫可适从，正犹迷人而指迷人也。又兼版简模糊，誊书舛误乎？愚者不能分别，智者弗与辩理[②]，理者不肯尽心，以致算学废弛，所以世人罕得精通，良可叹也。我朝景泰间，金台金来朋，有志改正，才论数题，即有二病，不足称也。

于是，他开始自己编撰一部数学著作，到正德八年（1513），他已完成了该书初稿10本30卷。正在这时，他在清河旅邸遇到一位数学家杜瑾（字良玉），二人进行了广泛的交流，“各伸所长”，王文素的数学能力比杜瑾高出了许多，令杜瑾敬佩不已。王文素向杜瑾出示了他的著作稿本《通证古今算学宝鉴》，杜瑾“深加赏叹，乃曰：窃觐宋杨辉及我朝金陵杜文高、江宁夏源泽、金台金来朋等诸公算法，固谓善矣，但藏头露尾，露尾藏头，俱以逢巧之法，而算之不通活变，以致后学之难悟，今公以通玄活变之术，断成诗歌讲义，诚可变而通之，使民宜之者乎，良玉愿捐资绣梓，以广其传”。王文素遇到了知音，并且能够为自己出版著作，自然是十分高兴。于是他整理书稿，并请宝朝珍写了序言，万事俱备，只等杜瑾出资刊印。可是，不知道是什么原因，杜瑾没有兑现诺言，这次出版计划流产了。

王文素没有气馁，继续修改和完善自己的著作，不久，在原10册30卷的基础上扩展为12册42卷。嘉靖元年（1522），他在教学之余，又编写了300多道诗词歌诀形式的算题，分为12卷，附于全书之后。王文素对他自己的著作颇有信心，他在自序中介绍：

> 愚故不揣鄙陋，敢以醯鸡井蛙之见，历将诸籍所载题术逐一钩[③]深探远，细论研推。其所当者述（迷）之，误者改之，繁者删之，阙者补之，乱者理之，断者续之，复增乘除图草定位式样、开方演段，捷径成术，编为拙歌，注以俗解。凡二百条，三百十七诀，千二百六十七问，分为四十二卷，号《通证古今算学宝鉴》。

但是出版问题仍未解决，他在嘉靖三年所写的序言中仍然为出版这部著作而着急发愁，

① 明·宝朝珍，《算学宝鉴》序，1513年。
② “乎”抄本讹作“呼”，“辩理”讹作“办理”，郭世荣校正。
③ “钩”字，抄本脱，此处原留有一个字空。

请求人们资助：

“欲刻于版，奈乏工赀，不获遂愿。倘有贤公，仗义损财，刻木广传，而与尚算君子共之，愚泯九泉之下，亦不忘也。不尔，徒为腐尘而已矣。噫！”

王文素一生研究数学，颇多感触，颇有心得，在《算学宝鉴》开首有“集算诗”八首（图 23-3-3），先录如下：

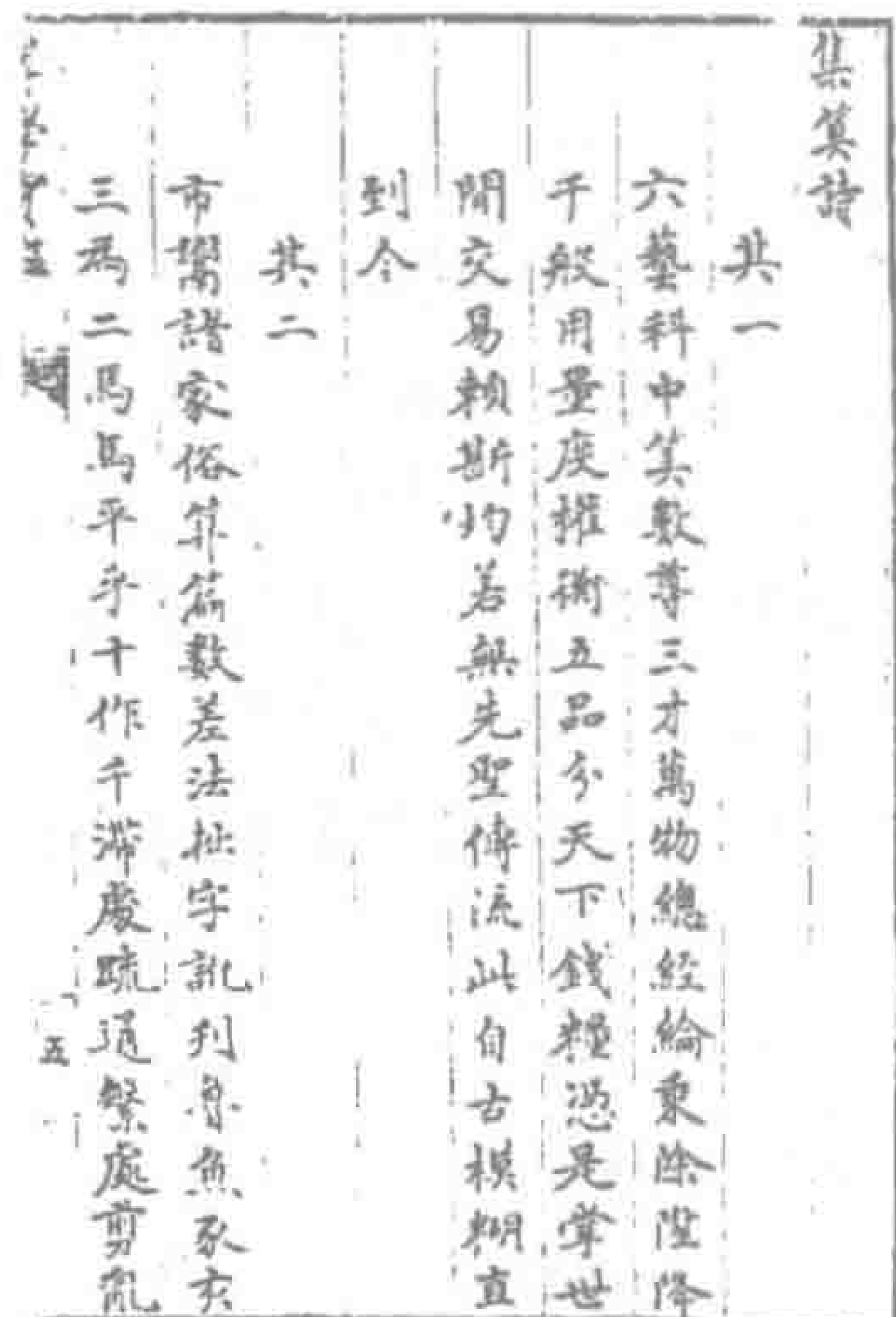

集筭詩
其一
六藝科中筭數尊三才萬物總經綸乘除陞降
千般用量度權衡五品分天下錢粮憑是掌世
間交易賴斯均若無先聖傳流此自古模糊直
到今
其二
市闤諸家俗筭篇數差法拙字訛刋魯魚豕亥
三爲二焉馬平乎十作千滯處疏通繁處剪亂

图 23-3-3　《算学宝鉴》书影

其一：

六艺科中算数尊，三才万物总经纶。乘除升降千般用，量度权衡五品分。

天下钱粮凭是掌，世间交易赖斯均。若无先圣传流此，自古模糊直到今。

其二：

市阛诸家俗算篇，数差法拙字讹刊。鲁鱼豕亥三为二，焉马平乎十作千。

滞处疏通繁处剪，乱时整理阙时添。而今历历皆更正，莫与寻常一样看。

其三：

身似飘蓬近六旬，留心学算已年深。苦思善致精神败，久视能令眼目昏。

铁砚磨穿三两个，毛锥乏尽几千根。如风扫退天边露，显出中秋月一轮。

其四：

诸家算籍甚差讹，暮玩朝参已证磨。有意刊传财力寡，无人成就恨嗟多。

鲁麟直得逢尼父，楚璧须还遇卞和。良马若非遭伯乐，盐车[①]困死告谁何？

其五：

莫言算学理难明，旦夕磋磨可致通。广聚细流成巨海，久封杯土积高陵。

肯加百倍功夫满，自晓千般法术精。忆昔曾参传圣道，亦由勉进得其宗。

其六：

暖衣饱食际雍熙，算数林中论是非。半间陋室寻妙理，灵台一点悟玄机。

犹如月到天心处，活似风来水面时。料此一般清意味，世间能有几人知？

其七：

其中奥理实难参，仰益高山[②]钻益坚。百法源流当细审，四家周径莫轻谈。

悬空定位无踪影，带从开方有正翻。[③] 人道算如隔张纸，我言如隔万重山。

其八：

总为诸家算未周，故忘鄙陋又重修。吹开毛孔寻疵病，使碎心机觅本流。

下海探珠非易得，登山采玉实难求。譬将昏镜磨明也，寄语英贤韫匮收。

这八首诗把他对数学的认识、研究数学的心得体会、自己的苦心钻研、他人数学著作中

---

① “盐车”，典出《战国策 · 楚策四》，即伯乐识马事。

② 抄本原脱“山”，今校补。《诗经 · 小雅》云：“高山仰止，景行行之。”

③ “带从”，抄本讹作“带踪”，依正文校正。

存在的问题、研究数学的酸甜苦辣及自己的贡献都表达得很清楚：

其一，他认为数学在六艺中处于十分重要的地位，“乃是普天下公私之间不可一日而阙者也”（自序），统掌天下钱粮，均衡世间交易，都离不开数学。其二，市场上出售的“俗算”著作中存在着不少问题，算法拙略，刊印错误。他的研究和著作解决了这些问题，做到了删繁就简，疏通错漏，理乱补阙，成绩不少，请大家不要把《算学宝鉴》与市场上那些“俗”书一般对待，要重视它。其三，之所以这样讲，是因为这是他几十年的研究成果。他孜孜不倦，几十年如一日，刻苦钻研，磨穿了二三个铁砚，磨秃了几千根毛笔，直到耗尽精力，人老眼花，才做到了拨云见日，扫清迷雾，获得了这些成果。其四，只可惜自己财力有限，无力出版，更可叹无人能够发现《算学宝鉴》的重要意义。当年“鲁麟”若不是被孔子认出，“楚璧”若不是遇到卞和，还不是和王文素今日一样被埋没？如果没有伯乐的发现，良马还不是会在拉车中困死？像他这样的贤才得不到识才者，即使被“困死”，又能与谁说呢？其五，数学难以学习，但是只要肯下功夫，就能积少成多，日积月累，必能精通。王文素因为下了百倍的功夫，所以达到了“自晓千般法术精”。其六，研究数学“妙理”，发现其中的奥妙，可以体验到世间少有人能得到的人生快意。其七，数学中确有一些十分难以理解体会的地方，并不是“算如隔张纸”那么简单，而是“如隔万重山”那么困难。其八，王文素一生使碎心机探讨数学的奥妙，不放过任何一个细节，经历“下海探珠”、“登山采玉”、“磨平昏镜”般的艰辛，所著成的《算学宝鉴》是精雕细琢的成果，请有识之士一定要重视啊！这八首诗把他自己的形象刻画得栩栩如生，使他的精神状态与思想情感跃然纸上。

（二）《算学宝鉴》

《算学宝鉴》，全称《新集通证古今算学宝鉴》，42 卷，王文素编集，全书分 200 个条目，包括 317 首歌诀，收题 1267 题。① 另有以诗词歌诀形式命题的附卷 12 卷。该书一直没有刊本流传，只有一个抄本传世，现藏于国家图书馆。近来才有了该抄本的影印本②以及校注本出版③。现传《算学宝鉴》抄本有不少传抄错误，且不完整，只有正文 42 卷，没有后附诗词歌诀题 12 卷。抄本目录漏掉了原卷 37 的目录“开仓窖积、开金石积、开堆垛积”三条，而将其后各卷的目录顺序前列，至使目录共只 41 卷，而正文中又有两个卷三十八，使终卷成为卷四十一。④ 这样，就使不少人误以为原书为 41 卷。

除了宝朝珍序（公元 1513）、自序（公元 1524）和“集算诗”八首外，《算学宝鉴》的内容和结构如下：卷之首是图及说明，包括“河图、洛书图、六觚图、方圆图、度图、量图、衡图、五辰图、五音相生图、律吕相生图、洛书均数图、花十六图、求等图、辐辏图、方胜图、王字图、古珞钱图、连环图、璎珞图、三同六异图”等 20 图及简要的说明。

---

① 这是王文素自序中的数据，原书实有条、诀、题数与此不同，参考李植：《算学宝鉴》卷、条、诀、问之校勘，见：山西省珠算协会编，王文素与算学宝鉴研究，山西人民出版社，2002 年，第 252 ~ 259 页。

② 明 · 王文素，算学宝鉴。国家图书馆藏抄本，影印收入中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第二册，河南教育出版社，1993 年，第 337 ~ 971 页。

③ 刘五然等，《算学宝鉴》校注，科学出版社，2008 年。

④ 刘五然、李孔伦，王文素与《算学宝鉴》，见：山西省珠算协会编，王文素与算学宝鉴研究，山西人民出版社，2002 年，第 19 ~ 30 页。

正文42卷分为12本，按12地支编排，整体结构是先列基础知识和算法，次按九章顺序编排，最后为开方。12本与卷次及内容的对应如下：

子本与丑本，卷1~6：基础知识与算法；寅本卷7~10：方田；卯本前半，卷11~12：粟米；卯本后半，卷13~14：衰分；辰本卷15~18：少广；巳本卷19~21：商功；午本卷22~24：均输；未本前半，卷25：盈不足；未本后半，卷26~27：方程；申本卷28~30：勾股；酉本、戌本和亥本卷31~42：开方。

《算学宝鉴》是一部大型著作，也是明代篇幅最大的数学著作。《算学宝鉴》的成就也是元中叶至明末最高的。这主要表现在以下几个方面：

第一，涉及的内容广泛而又全面，涵盖了当时所知的全部数学内容。表现在基础数学知识较为丰富全面，涉及了一些珠算技术，日用问题丰富多彩，九章内容全部具备，算题和图形数量众多，算法十分全面。

第二，算法严谨，改正了前人不少错误，书中引用前人的工作，大部分是修正错误的，而在后来程大位的《算法统宗》中却因袭了前人的一些错误。例如，《详明算法》、《算法全能集》和《九章算法比类大全》等书中的修筑歌中有“穿地四因于壤积，法中仍用五归成”，程大位照录原文，其实，“四”与“五”应互换才对，王文素指出：“愚谓四因五归是壤求穿地，非穿求壤也。”

第三，《算学宝鉴》是按问题集的编写形式，但是在问题的分类方面，却是按算法归类的。例如，卷十四“贵贱分身”云：

> 贵贱差分　解曰：贵贱差分即方程二率分身之法也。题有六等：有二价者，有二数者，有二互换者，有一价一数者，有一价一互换者，有一数一互换者。其诸家算籍只有二价二数题术，余并不载。惟《九章详注》而载互换三题，其一酒分醇醨，载粟米章内，其二龟鱼分身，载均输章内，其三布绢分身，载在方程章内。详此三题，一理而已，岂可分载三章乎？以致初学疑惑，可憾，可憾！今将六等总编一诀而说之，亦又各编一歌，以尽术之捷径之尔。

这里，王文素批评吴敬：将二率分身题分别编排在粟米、均输与方程三章中，令初学者感到困惑。王文素主张把算法和题意相同的题目放在一个算法之下，而不像吴敬那样分散在不同的算法之下。这种强调算法为中心的思想是十分先进的。

第四，《算学宝鉴》采用多种解题和论证形式，法、术、解、通解、草、细草、证、解证、通证、演段、解题、解义、释义等各种方法组合使用，从多角度反复申明算理。同时在例题配置方面也编写了不少新题，通常在题前标以“新题”、“比证新题”、“比类新题”、“新设证题”、“新立变题”、“新增”、“通变新题”、“通证新题”、“补遗新题”等说明。

第五，也是最重要的，《算学宝鉴》中有不少创新之处。如在珠算方面提出盘中定位法，首先使用珠算开方，发明众九相乘捷术，提出求亩24归歌；首先使用“见一无除作九一”，等等。又如设计了新的纵横图，对一次同余方程组解法有新的探讨，对开高次方有新研究，对于众率分身问题（不定方程）的解法有较深入探讨，等等。

三　其他算书

从明景泰（1450~1457）到隆庆（1567~1572）的100多年间，还有一些数学著作见诸

记载。关于这些著作的资料十分零散，兹集中介绍如下：

《启蒙算法》，金来朋著。宝朝珍在《算学宝鉴》序中称："我朝……金来朋等诸公算法"，王文素自序言："我朝景泰（1450～1457）间，金台金来朋有志改正，终论数题，即有二病，不足称也。"《算学宝鉴》中引用并校正了《启蒙算法》的一些题目，并说："金来朋讥吴信民等堆米四法……，"由此可见，《启蒙算法》在吴敬《九章算法比类大全》之后，与吴书时间很近，相差超不过四五年之间。又据李俨《明代算学书志》，明朱睦㮮《万卷堂家藏艺文目》（1570）抄本知《启蒙算法》四册。

《算学通衍》。程大位曰："成化壬辰（1472）京兆刘洪作。"

《九章详注算法》。程大位曰："成化戊戌（公元1478）金陵许荣作，采取吴氏之法。""吴氏之法"指吴敬的著作，可见受到了吴敬的影响。王文素《算学宝鉴》卷二引录《九章详注算法》之"九章袖中锦"，并注曰："金陵许荣，字孟仁，成化有《重编九章算法》。"又有"尝读九章袖中锦定类十题"等语。《九章详注算法》应该也是依九章顺序编排的，仅"袖中定位"一节就有十题之多，看来其篇幅也不会太小。

《九章详通算法》。程大位曰："成化癸卯（公元1483）鄱阳余进作，采取《详明》、《通明》法。"《详明》应是《详明算法》，《通明》应是刘仕隆的《九章通明算法》，看来是综合二书而成的。

《纵横指南算法》。王文素称："尝见写本名曰《纵横指南算法》，四帙，序云冯好学所著。"又说："尝见写本名曰《纵横指南算法》，序云冯敏所著（无）。"

王文素还提到《捷奇易明算法》、《捷用算法》、《推用算法》、《精明算法》以及张伯奇《指明算集》等，多未提及作者和时间。据李俨《明代算学书志》，这一时期还有蔡尔光撰《开方指南》二本，杨廉[①]《缀经举例》一卷，杨廉《数学图籍发明》一卷，陈邦偁[②]《算集》若干卷，高永祉《算法指南车》等书。[③]

在《算法统宗·算经源流》中记载的还有以下7种："《启蒙发明算法》，嘉靖丙戌福山郑高升作。"（1526）"《马杰改正算法》，河间吴桥人，嘉靖戊戌作，而无乘除，只改钱塘吴信民法，反正为邪数款。今予辨明，图释参校，免误后学。"（1538）（13卷本《算法统宗》"戊戌"作"丙戌"。）"《正明算法》，嘉靖己亥金台张爵作。"（1539）"《算理明解》，嘉靖庚子江西宁都陈必智作。"（1540）"《重明算法》。""《订正算法》，嘉靖庚子浙东会稽林高作，详解定位。"（1540）"《算林拔萃》，隆庆壬申宛陵太守杨溥作。"（1572）其中，《马杰改正算法》因为程大位的记述而有一些线索可寻。程大位批评《马杰改正算法》"只改钱塘吴信民法，反正为邪数款"。并引用马杰"改正"的题目3个，其中2个是钱田的计算问题，1个是"诸葛统兵"题，都是"改正"吴敬法的。程大位用较多篇幅批评了马杰算法。清代梅瑴成也说："方田章算钱田之法本之吴信民《九章比类》，本自不误。乃孤峰马杰自逞私智，用方束法以算方周，反以吴法为非，并作诗词极其诋毁，已为可嗤。"[④]显然，《改正算法》的内容不止这几题，其改正也必有正确可取之处，同时马杰的数学水平也不是

---

① 杨廉，字方正，成化十四年进士，《明史》有传。
② 陈邦偁，广西全州人，正德甲戌（1514）进士。
③ 李俨，明代算学书志。
④ 梅瑴成，《增删算法统宗》凡例，江南制造局本。

很高。

最近张爵的《正明算法》有残本被发现。[①] 该残本一册，是原书卷之四，卷首有少许残缺，末叶双行书“正阳门里西米市巷书坊张氏万历壬午立冬吉日校正重刻”，由此可知是1582年北京重刻本，程大位所记是初刊本。据此残本可知，《正明算法》全称是《九章正明算法》，原书共四卷。现存卷四包括难题和杂法两部分：难题9类，共114问，是根据九章的顺序编排的，现存101问，前13问佚。杂法9项，包括金蝉脱壳4题、河图书数算7题、写算7题、纵横图15种、五音相生歌、律吕相生歌、袖中锦10题、孕推男女1题、算病法1题。《九章正明算法》列出难题条目后有：“以上三十三条出刘氏《九章通明》内，其余八十一条出吴氏《九章比类》等内。”是知难题的来源是刘仕隆与吴敬等人的著作。《九章正明算法》对《算法统宗》等书产生了一定的影响。

在文献中还有其他一些算书的书名，例如柯尚迁《数学通轨叙》中有：“近有青阳庐氏《算法解》，发明诸法，近而益知。”[②] 据李俨《明代算学书志》还有一些未知时代或撰著者的著作，如《精彩算法真诀》三卷，已失传。又周弘祖（1559年进士）《古今刻书》中记有《算法大全》，都察院刻；《算法》，南京国子监刻，《九章算法》，南京国子监刻。还有《算法》二卷，见《南雍经籍考》（1544）卷下，是当日国子监学习所用的课本。《算数歌诀》一卷，王应选［王征（1571～1644）父］撰。

第四节　理论数学研究的余绪

一　唐顺之及其《数论》六篇

（一）唐顺之

唐顺之（1507～1560），字应德，一字义修，号荆川，学者称“荆川先生”，江苏武进（今属江苏常州）人。唐顺之出身于书香门第，父亲唐宝曾任永州知府。他天生禀赋聪明，嘉靖八年（公元1529）23岁时会试第一，四年后官翰林编修，参校累朝《实录》，后调兵部主事。因不愿附属权贵而被迫归乡。嘉靖十八年复职，但不久又被削职为民，隐居山中，闭门谢客，专心于学术研究。嘉靖三十二年又被起用，以兵部郎中督师浙江，亲率兵船于崇明破倭寇于海上，是抗倭名将。最后，升右都御史，巡抚凤阳，不顾重病缠身，仍率船从太仓出发，巡视江海，途中在通州（今南通）病卒。崇祯时追谥襄文。

唐顺之学识渊博，对天文、地理、数学、历法、兵法兵器及乐律皆有研究。他是明中叶重要散文家，为明代重要文学流派唐宋派的代表之一。唐顺之著作有《荆川先生文集》17卷，《右编》40卷，《史纂左编》124卷，《两汉解疑》2卷，《武编》10卷，《南北奉使集》2卷，《荆川稗编》120卷等，另辑有《文编》64卷，集取宋代及其以前之文，分体编列。近代林纾辑有《唐荆川集》。

---

① 李兆华，残本《九章正明算法》录要，自然科学史研究，2001，（1），66～76。

② 明·柯尚迁，数学通轨，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第二册，河南教育出版社，1993年。本编凡引《数学通轨》，均据此。

唐顺之精通历法与数学，是当时数学名家。他对古今历法颇多了解，特别是对明朝使用的大统和回回历较为熟悉，而且对回回历颇有研究。在数学方面，唐顺之特别重视理论探讨。他的数学著述不多，只有总称为《数论六篇》的6篇短文，但是在当时影响很大，顾应祥、周述学和柯尚迁等人都受到他很大的影响。他与顾应祥、周述学有学术交流，共论数学与天文学，其意见往往带有指导性。顾应祥撰述《弧矢算术》和《测圆算术》均与他的建议有直接关系。周述学的《历宗算会》基本上引述了他的全部数学观点，有些内容都是原文引用，全书的结构编排也体现了唐顺之的见解。柯尚迁也引述他的不少数学见解。

唐顺之对珠算也十分熟悉，还是打算盘的高手，时人目之为神手。

（二）《数论六篇》

《数论六篇》包括：《分法论》、《六分论》、《勾股六论》、《勾股测望论》、《勾股容方圆论》、《弧矢论》等论文，收入《荆川全集》中，另有单行本《唐荆川数论六篇》，有嘉靖十二年（1533）跋，但这些文章的写作时间要早一些。

嘉靖年间，唐顺之、顾应祥和周述学等数学家的研究方向与研究方法有一些复古的倾向。唐顺之的六篇论文研究的都是一般理论问题，《分法论》从总体上讨论差分、方程、盈朒、粟米之间的关系，《六分论》讨论各种分数运算之间的关系，《勾股六论》、《勾股测望论》、《勾股容方圆论》三篇都是关于勾股理论方面的专题研究，《弧矢论》专门研究弧矢算术，从三个基本公式出发，讨论弧矢形的积、矢、径、弦、背、残周、弧弦差七者之间的互求关系，“凡七者转相为法，而转相求，共得二百二十六法”。

二　顾应祥及其四部数学著作

（一）顾应祥

顾应祥（1483～1565），字惟贤，号箬溪道人，著名数学家。祖籍长洲（今江苏吴县），父亲定居于浙江湖州长兴今鸿桥顾家潭。他于弘治十八年（公元1505）中进士，正德三年（公元1508）被授为江西饶州（今江西鄱阳）推官，后任广东按察佥事兼岭东道。正德十四年擢江西副使、分巡南昌道。嘉靖六年（公元1527），升任山东布政使，不久任都察院右副都御史，巡抚云南。后因母丧回到乡里，与蒋瑶、刘麟等结文酒社，徜徉于菰城、岘山（均在今湖州市近郊）间，有终老之志。不久，再次被召任南京兵部侍郎，未到任而改任刑部尚书，居官二年，致仕回乡。

顾应祥一生勤奋好学，手不释卷，九流百家，无所不窥，对数学、天文、法律、诗词、围棋、方志等都有研究。他著述很多，涉及面极广，其中：《传习录疑》1卷、《致良知说》1卷、《惜阴录》12卷等都属于儒家类著作，《南诏事略》为在云南任上所著少数民族史专著。他在刑部尚书任上，曾受诏定议刑律条例，又自撰《重修问刑条例》7卷和《律解疑辩》等法律方面的著作。在家乡，他还纂修了《长兴县志》（公元1559）。

顾应祥与唐顺之在天文历法和数学研究方面兴趣相同，交流颇多。唐顺之研究回回历有心得，而顾应祥则著有《授时历法》二卷。顾应祥《勾股算术》自序：“自幼性好数学，然

无师传，每得诸家算书，辄中夜思索，至于不寐，久之若有神告之者，遂尽得其术。”① 这表明他在数学学习和研究上是下过一番大功夫的。

嘉靖癸巳（公元1533）年，顾应祥正在滇南巡抚任上，公余研究《周髀算经》和《四元玉鉴》，对勾股问题有所心得，自己觉得“悉得古人立法之旨，求之于心，无不吻合，盖有不假思索者”，撰写了《勾股算术》一书。后来他又从唐顺之处借得抄本《测圆海镜》一书，经过再三研究，理解了其中的开高次方法，但对书中天元术却无法下手。尽管如此，他还是撰写了《测圆海镜分类释术》十卷（公元1550），对其中的开方法做了研究，并在算盘上进行运算。

此前一年，嘉靖壬子（公元1552），他完成了《弧矢算术》一书，专门研究弧矢形的弧、矢、圆、径、弦、截积之间的关系。唐顺之“答顾箬溪先生数学书”云：“仆既作为《弧矢论》，以请于明公，而明公亦既演之为书矣。”可见《弧矢算术》是在与唐顺之交流基础上做出的研究工作。他还研究过其他一些数学文献，如《梦溪笔谈》中的数学部分、杨辉的著作、吴敬的《九章算法比类大全》等。

顾应祥与唐顺之等不能理解天元术的意义。顾应祥因为不懂天元术并在其著作中删除了相关的部分，而受到后世数学家的批评，阮元《畴人传》卷三十写道：“略涉九九者，遇三乘方便望洋惊叹。应祥于廉隅加减之故，反复推之，而无不合，其用功亦勤矣。然不解立天元术，故于正负开方论说，都不明晓。明代算学陵替，习之者鲜，虽好学深思如应祥，其所造终未能深入奥室，删去《海镜》细草一节，遂贻千古不知而作之讥。惜哉！”自清中叶之后，人们批评顾应祥不懂天元术而尽行删去，这是对的。但一种倾向掩盖另一种倾向，由此而忽视他关于勾股测圆、弧矢算术等方面的研究，认为《测圆海镜分类释术》和《测圆算术》不重要，在一般著作中很少有所讨论，则有失偏颇。在明代，顾应祥的这两部著作还是很重要的，当时的数学家都把精力放在研究实用算术上，很少有人研究宋元时代的重要成果，这是导致宋元成果在明代失传的重要原因之一。顾应祥的两部著作是明代对于宋元时代几项重要成果进行研究的唯一工作，尽管没有达到人们所期望的深度和高度，但是毕竟是理论研究的尝试。顾应祥也是当时唯一对宋元重要成果有所接触和研究的数学家。实际上，顾应祥是明代数学大家，对他的评价甚至低于吴敬等人是不公正的。

顾应祥的研究兴趣与稍早一点的王文素等人不同，著述风格也不同，他与同时代的唐顺之和周述学等专注于研究宋元时代的成果。这表明，嘉靖年间的数学研究曾出现过专注于理论探讨的倾向，可惜这种兴趣和方法没有得到进一步发扬和光大。

（二）《勾股算术》

《勾股算术》二卷（图23-4-1），自序于嘉靖癸巳年（公元1533），是一部关于勾股形解法和勾股测望的专著。书前有“勾股论述”和“勾股名义”。“勾股名义”包括勾股形三边名称及勾股弦三边“五和五较”名目。“勾股论述”给出勾股弦三边及其五和五较之间的关系式，是正文的总纲。该书正文上下卷分为38节，前22节讲述勾股形三边及其五和五较已知其二求三边的问题，所用公式多数已见于前人著作中或根据前人的公式整理而成。后16节讲述勾股容圆和容方、相似、测望等问题，其中最后2节“勾与股率、勾弦和率求股”

① 明·顾应祥，《勾股算术》自序，1533年。

唐顺之精通历法与数学，是当时数学名家。他对古今历法颇多了解，特别是对明朝使用的大统和回回历较为熟悉，而且对回回历颇有研究。在数学方面，唐顺之特别重视理论探讨。他的数学著述不多，只有总称为《数论六篇》的6篇短文，但是在当时影响很大，顾应祥、周述学和柯尚迁等人都受到他很大的影响。他与顾应祥、周述学有学术交流，共论数学与天文学，其意见往往带有指导性。顾应祥撰述《弧矢算术》和《测圆算术》均与他的建议有直接关系。周述学的《历宗算会》基本上引述了他的全部数学观点，有些内容都是原文引用，全书的结构编排也体现了唐顺之的见解。柯尚迁也引述他的不少数学见解。

唐顺之对珠算也十分熟悉，还是打算盘的高手，时人目之为神手。

（二）《数论六篇》

《数论六篇》包括：《分法论》、《六分论》、《勾股六论》、《勾股测望论》、《勾股容方圆论》、《弧矢论》等论文，收入《荆川全集》中，另有单行本《唐荆川数论六篇》，有嘉靖十二年（1533）跋，但这些文章的写作时间要早一些。

嘉靖年间，唐顺之、顾应祥和周述学等数学家的研究方向与研究方法有一些复古的倾向。唐顺之的六篇论文研究的都是一般理论问题，《分法论》从总体上讨论差分、方程、盈朒、粟米之间的关系，《六分论》讨论各种分数运算之间的关系，《勾股六论》、《勾股测望论》、《勾股容方圆论》三篇都是关于勾股理论方面的专题研究，《弧矢论》专门研究弧矢算术，从三个基本公式出发，讨论弧矢形的积、矢、径、弦、背、残周、弧弦差七者之间的互求关系，“凡七者转相为法，而转相求，共得二百二十六法”。

二　顾应祥及其四部数学著作

（一）顾应祥

顾应祥（1483~1565），字惟贤，号箬溪道人，著名数学家。祖籍长洲（今江苏吴县），父亲定居于浙江湖州长兴今鸿桥顾家潭。他于弘治十八年（公元1505）中进士，正德三年（公元1508）被授为江西饶州（今江西鄱阳）推官，后任广东按察佥事兼岭东道。正德十四年擢江西副使、分巡南昌道。嘉靖六年（公元1527），升任山东布政使，不久任都察院右副都御史，巡抚云南。后因母丧回到乡里，与蒋瑶、刘麟等结文酒社，徜徉于菰城、岘山（均在今湖州市近郊）间，有终老之志。不久，再次被召任南京兵部侍郎，未到任而改任刑部尚书，居官二年，致仕回乡。

顾应祥一生勤奋好学，手不释卷，九流百家，无所不窥，对数学、天文、法律、诗词、围棋、方志等都有研究。他著述很多，涉及面极广，其中：《传习录疑》1卷、《致良知说》1卷、《惜阴录》12卷等都属于儒家类著作，《南诏事略》为在云南任上所著少数民族史专著。他在刑部尚书任上，曾受诏定议刑律条例，又自撰《重修问刑条例》7卷和《律解疑辩》等法律方面的著作。在家乡，他还纂修了《长兴县志》（公元1559）。

顾应祥与唐顺之在天文历法和数学研究方面兴趣相同，交流颇多。唐顺之研究回回历有心得，而顾应祥则著有《授时历法》二卷。顾应祥《勾股算术》自序：“自幼性好数学，然

（π = 3）求解具体问题。他认为即使用再精确的圆周率也不可能达到绝对精度，反而使计算过程变得繁琐，而在日常生活中，用古率计算就足以解决问题。他说："二术以圆为方，以方为圆，非不可，但其还原与原数不合，数多则散漫难收，故算历者止用径一围三，亦势之不得已也。"

《弧矢算术》在明清数学史有较大影响，成书略晚一点的《历宗算会》和后来的《算法统宗》等书都引录了"弧矢论说"，清代李锐有《弧矢算术细草》，用天元术为该书中的公式进行演草，证明各个公式。罗士琳有《弧矢算术补》，在《弧矢算术》的基础上又补 27 术。

（四）《测圆海镜分类释术》

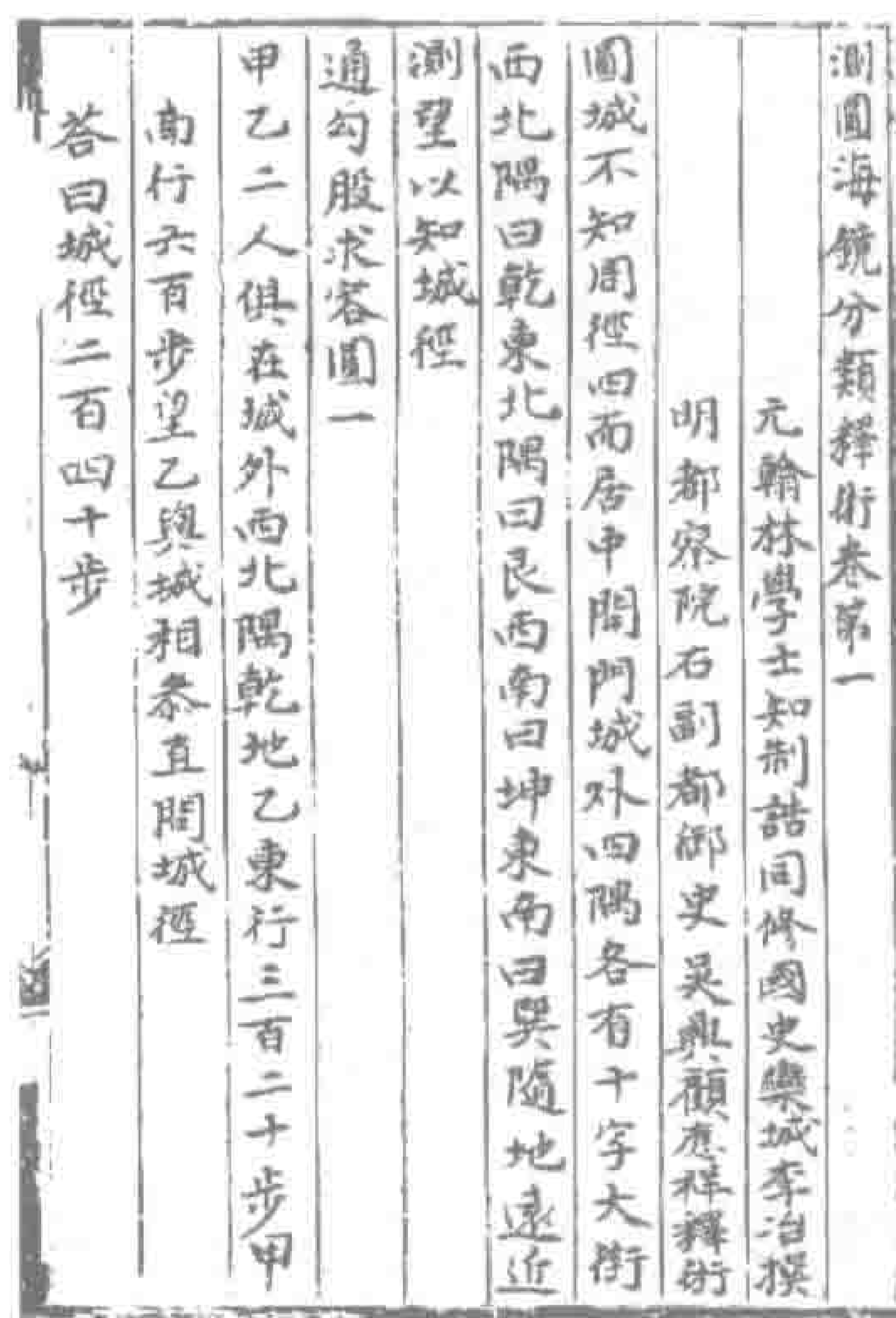

測圓海鏡分類釋術卷第一
元翰林學士知制誥同修國史欒城李冶撰
明都察院右副都御史吳興顧應祥釋術
圓城不知周徑四面居中開門城外四隅各有十字大街
西北隅曰乾東北隅曰艮西南曰坤東南曰巽隨地遠近
測望以知城徑
通勾股求容圓一
甲乙二人俱在城外西北隅乾地乙東行三百二十步甲
南行六百步望乙與城相叅直問城徑
荅曰城徑二百四十步

图 23-4-3　《测圆海镜分类释术》书影

《测圆海镜分类释术》十卷（图 23-4-3）[①]，成书于明嘉靖庚戌年（公元 1550），内容主要是对元代李冶的《测圆海镜》（1248）进行删减、分类、注释。李冶的原著以天元术为主要方法，并在"识别杂记"中列出了大量的几何公式作为列方程的理论依据。顾应祥不懂天元术，删去了李冶列方程的细草（即天元术部分）和"识别杂记"。

《测圆海镜分类释术》包括《测圆海镜》的圆城图式（称勾股容圆图）、总率名号、勾股步率。《测圆海镜分类释术》正文共 173 题，分为十大类，每类一卷。其分类大致是：卷一各勾股形容圆，卷二两勾、两股、两弦容圆，卷三各勾与"别股"测望，卷四各勾与"别弦"测望，卷五各股与别弦测望，卷六勾股弦与和较测望，卷七通勾股和与诸和较测望，卷八诸和参互立法测望，卷九诸较参互立法测望，卷十和较参互带分测望。每题都包括题、释、术和开方说明四部分。

《测圆海镜分类释术》的"释"解释题意和适用的公式，系根据原著的"法曰"而编成；"术"给出求解的方程，基本上照录了《测圆海镜》中的方程。而该书最重要的内容是给出了开方过程的具体细草。全书对于涉及的每一种类型的开方都有具体的演算，共有开平方到开四次方的各种开方细草和方法解释 60 多个，包括了方程不同系数符号与不同开方形式的说明。从细草看，全部是用珠算开方的，这是明代珠算开方的重要成果。

（五）《测圆算术》

《测圆算术》四卷（图 23-4-4），成书于嘉靖癸丑年（公元 1553），有的研究者认为它是《测圆海镜分类释术》的简写本，或它的普及本。[②] 其实不然。唐顺之读了顾应祥的《测圆

① 明 · 顾应祥，测圆海镜分类释术 · 序，见：中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第二册，影印明嘉靖本。河南教育出版社，1993 年。

② 马翔，测圆算术提要。中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第二册，河南教育出版社，1993 年，第 1107 页。

海镜分类释术》之后，一方面对他的工作十分敬服，另一方面指出："此书形而下之数太详，而形而上之义或略，使观之者尚不免有数可陈而义难知、及示人鸳鸯枕而不度人以金针之疑。"他建议道："仆意：明公于紧要处提授一二作法源头出来，庶使后世为数学者识其大者得其义，识其小者得其数，则此书尤觉精末耳。"[①] 于是顾应祥又撰写了《测圆算术》，进一步阐述自己对《测圆海镜》和勾股及其容圆的理解与研究。


測圓算術敘
句股求容圓之徑古有其法未有若元翰林學士欒城李
先生之精且密者也其所著測圓海鏡設爲天地日月山
川東西南北乾坤艮巽名號而以通句股邊句股底句股
錯綜而求之極爲明備但每條細草止以天元一互算
漫無下手之處應祥已爲之類釋既而思之猶有未當
於心者蓋圓之內外其橫者爲句其直者爲股一橫一直
或兩橫兩直相夾或一橫一斜一直一斜自有天然對待
之妙比而合之皆可推類而知者於是別出己見復爲編
次其難曉者附以布算之法名號雖因其舊而詞則務簡

图 23-4-4　《测圆算术》书影

三　周述学及其《历宗算会》

（一）周述学

周述学，字继志，号云渊子，生卒年不详，活跃于16世纪中期，与唐顺之、顾应祥有较密切的学术交往。周述学的先人为汝南（今河南汝南）人，后迁居山阴（今浙江会稽）。周述学曾游历江苏和北京等地，广泛学习各种知识，是一位兴趣广泛、研究范围宽广、博学多才的学者，对数学、天文历法、兵法、地理学、航海及术数均有深入研究。他"读书好深湛之思，尤邃于历学"[②]。在天文历法方面，他对《授时历》、《回回历》、历代史志中的历法资料、五星运行等都有研究，并改进沙漏，制作浑仪更漏等一些天文仪器，著有《神道大编历宗通议》、《中经》、《大统万年二历通议》、《天文图学》、《中星测》等著作，是16世纪著名天文学家。[③] 黄宗羲《周述学传》云："自历以外，图书、皇极、律吕、山经、水志、分野、算法、太乙、壬遁、演禽、风角、鸟占、兵符、阵法、卦影、禄命、建除、埋术、五运六气、海道针经，莫不各有成书。"[④] 在数学方面，周述学著有《历宗算会》15卷。在地理方面他有《测绘地理》等书。清初著名学者黄宗羲（1610～1695）在周述学之孙周仲家里"见其《地理图》，纵八尺，横二丈，画方以界远近，每方百里"。他的著述极为宏富，统名曰《神道大编》，号称千余卷，黄宗羲还亲见"架上堆《神道大编》数十册，皆方广二尺余。仲言遗书散失，此不能十之一二也"。

周述学对于兵法也颇有研究，得到一些官员的重视。黄宗羲说，嘉靖间（1522～1566）锦衣陆炳（1510～1560）访求知识分子，经历沈炼推荐了周述学。陆炳将他礼聘至京，又荐给兵部尚书赵锦。赵锦向他咨询边防事务，并打算把他推荐给朝廷，此时总兵仇鸾（1512～1552）"闻其名，欲致之"，周述学没有受聘，回到家中。后又应聘于总督胡宗宪（？～1565），在幕中为征倭献计献策，"不惮出入于狂涛毒矢之间，卒成海上之功。"他一生没有做官，以布衣终。

---

① 明·唐顺之，答顾箬溪先生数学书，见：柯尚迁《数学通轨》。

② 清·张廷玉，明史，中华书局，1974年。本编凡引《明史》，均据此。

③ 李迪、白尚恕，中国十六世纪天文学家周述学，中国科技史论文集，内蒙古教育出版社，1991年，第344～356页。

④ 清·黄宗羲，周述学传。又《明史》周述学传及徐阶"山阴云渊周子传"也有同样记载，只文字略异。俱见抄本《云渊先生文选》，藏国家图书馆。

《牡丹亭》的作者汤显祖（1550～1616）亦曾致书周述学讨论历法问题。邢云路的《古今律历考》也受到周述学著作的影响。周述学的著作流传下来的只是一小部分，目前所知有《神道大编历宗通议》18 卷，《神道大编历宗算会》15 卷，又有明万历 20 年（1592）何继高刊《云渊先生文选》6 卷，其内容基本上都见于前二书中。

（二）《历宗算会》

《历宗算会》15 卷（图 23-4-5），嘉靖戊午（公元 1558）年周文烛序，有嘉靖刊本和明抄本流传。由于一般研究者不易见到原书，对它的研究不像吴敬、王文素和程大位的著作那样深刻全面，只到近年才对该书有较为全面一些的介绍。南京图书馆藏明代抄本被影印收入《续修四库全书》[①]，为进一步研究提供了方便。

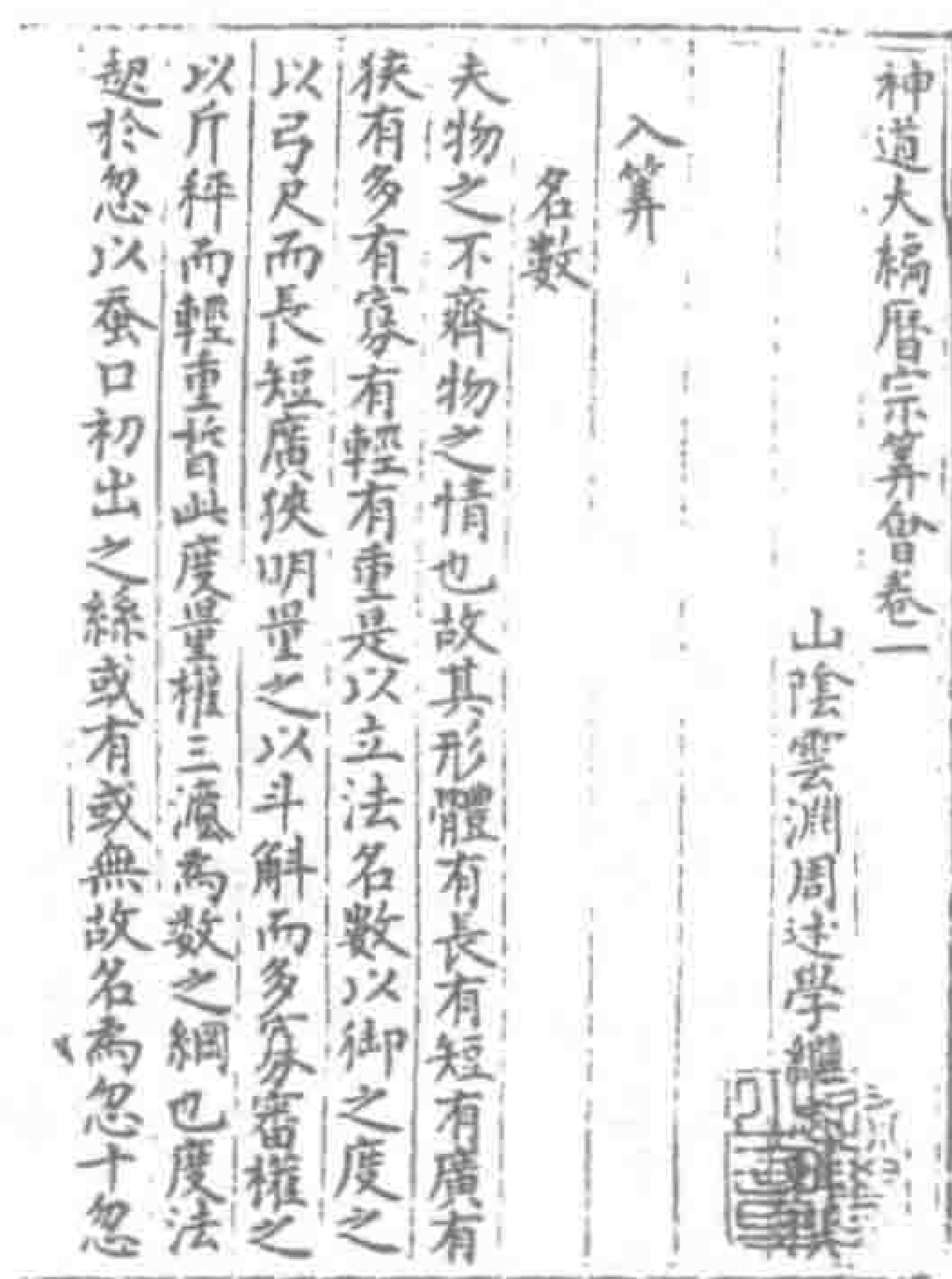

神道大編曆宗算會卷一
山陰雲淵周述學編
入算
名數
夫物之不齊物之情也故其形體有長有短有廣有
狹有多有寡有輕有重是以立法名數以御之度之
以弓尺而長短廣狹明量之以斗斛而多寡審權之
以斤秤而輕重皆此度量權三處為數之綱也度法
起於忽以蚕口初出之絲或有或無故名為忽十忽

图 23-4-5 《历宗算会》书影

《历宗算会》是当时一部与其他数学著作风格不同的著作。它不是按传统的九章分类方法编排的，而是对算法进行重新分类，以新的算法观点编排在一起的。周述学将已知的算法分为基础知识与基本概念、分数、勾股、开方、圆与截积、弧矢、分法、积法 8 大类，每类又包括若干算法，先述算法原理及相互间的关系，再列例题。全书结构如下：

卷 1 “入算”：基础知识和基本算法。介绍记数法，解释词义，说明基本算法（包括因法、乘法、归法、归除法、撞归法、商除法、异乘同除法、身外加法、身外减法、求一乘除法）、度量衡单位和定位法，并介绍“图书算法”、“写算法” 和 “连环算法” 等内容。

卷 2 “子母分法”：分数及其运算方法。包括命分、益分、约分、合分、课分、平分、乘分、除分等内容。

卷 3 “勾股”：包括勾股形、勾股五和五较和较互求、勾股容方容圆、勾股测望等内容，内容与《九章算术》的勾股章和《海岛算经》相当。

卷 4～5 “开方”：卷四是开平方和各种带纵平方。卷 5 是开立方、开三乘方、四乘方、五乘方（即开 3 到 6 次方）及开带纵三、四次方。

卷 6 “平圆、立圆、截方”：与圆以及球体相关的计算、各种面积和体积的截积问题。

卷 7～8 “弧矢经补（上、下）”：在顾应祥和唐顺之研究弧矢的基础之上进一步讨论弧矢形之弧、矢、弦、弧背、面积之间的关系以及两圆相割所成弧矢形的计算问题，还有弧矢内容矩方的问题。

卷 9～11 “分法”：又分为 “互分”、“总分” 和 “各分” 三小类，各为一卷。研究如何把混杂在一起的事物区分开来，从算法上来讲相当于传统粟米、衰分、盈不足、方程的内容。其中 “互分” 相当于衰分和粟米的问题及算法，“总分” 相当于盈不足术和物不知总等类问题及其算法，“各分” 相当于方程问题及其算法。

卷 12～14 “积法”，包括 “平积”、“立积”、“隙积” 和 “镕积” 4 部分，前两部分各

① 明 · 周述学，《神道大编历宗算会》，见：《续修四库全书》，上海古籍出版社，1995 年。

占一卷，后两部分合为一卷。平积即面积计算，立积即体积计算，隙积即垛积类问题，镕积即由体积和比重求重量的问题。卷 14 末还附有“算会圣贤姓氏”，即一些数学家的姓名及极简单的说明，如唐李淳风“重注周髀，校正诸家算法”。

卷 15“歌诀”：包括九九表和关于因法、九归、归法、归除法、定身除法、商除法、异乘同除法、同乘异除法、加法、减法、求一乘法、求一除法、度法、量法、权法、截两为斤、定位法、掌中定位法、图书算法、连环算法、大定位法秘诀、子母分法、勾股、开平方法、开立方法、立圆法、长阔相和、长阔相较、梯田截积、圭田截积、环田截积、互分、总分、各分、平积、立积、隙积的歌诀 37 首。

《历宗算会》把中国传统的数学问题重新分类的做法，是中国数学史上继杨辉之后一种新的分类尝试。周述学给出的分类思想和方法与杨辉不同。杨辉是针对《九章算术》进行分类，不涉及《九章算术》以外的内容。周述学则是对数学的整体分类，包括了当时几乎全部的数学内容，同时也吸收了新的研究成果，把顾应祥和唐顺之对弧矢的研究成果单列成一类，以前的数学著作中弧矢问题只是方田下的一个小问题而已。这个分类也体现了时代的特点，把度量衡亩等单位和记数法及各种乘除法、杂法等作为基本知识列在开始。此外，把勾股和开方放在前面，而把原来属于方田、粟米、衰分、盈不足与方程的内容放在后面，这也是由作者对数学内容的不同理解方式所决定的。他把这些都视作从混杂在一起的事物中分离出各物的方法，所以他在“分法”的一开始指出：“差分、方程、盈朒、粟米，总是一分法也。”不过将自《九章算术》起便自成一类并在中国传统数学中占有重要地位的“方程”混同于粟米、衰分、盈朒等算法，反映出明代对方程研究裹足不前的现实。

《历宗算会》在写法上也与当时其他数学家的做法不完全相同，更强调论述与说明。吴敬等人的著作基本上还是寓理于算的，而周述学则更重视算理分析。《历宗算会》每卷一开始都有大段的论述，有时在重要的标题下也有论述，还引用前人的分析。例如，在“弧矢经补”中就引用顾应祥、唐顺之、沈括等人的大段论述。兹摘引两段论述。例如论述名数产生背景的“名数”云：

> 夫物之不齐，物之情也，故其形体有长有短、有广有狭、有多有寡、有轻有重，是以立法名数以御之。度之以弓尺而长短广狭明，量之以斗斛而多寡审，权之以斤秤而轻重晰。此度量权三法为数之纲也。

论述“分法”的思想及其适用各种算法的原理的“互分”云：

> 物有多寡，价有贵贱，两物相形，已知物之孰贵孰贱，各有定价矣。若使两物总共若干，两价亦总共若干，两物混杂。虽则两物混杂，而总价固相差也。于是以价权物，则因价之贵贱而差之也。未知两物之孰贵孰贱，而但知两物相参伍之总价，若使此三而彼五，则价共增若干，此五而彼三，则价共减若干，则两价混杂而物数固相形也。于是以物权价，则因物之参伍而推出价之贵贱，谓之方程。方程者，言物价相检括有定式而不可乱也。差分、方程之所不能尽，于是有盈朒。盈者，有余；朒者，不足。盈朒者，因其外露畸零可见之数而推知其中藏隐杂不可见之数，以据末颖而窥全锥也。

其论述都十分清楚。《历宗算会》中的 18 篇论述文字的初稿被摘出来编入他的《云渊先生文选》卷四之中，有个别篇章有些差别，例如“互分”。

此外，《历宗算会》还有一些自己的研究工作，例如关于弧矢的研究就有一些新的内

容，其中讲述了弧矢容矩方的问题。

《历宗算会》也有个别错误的地方，例如“开方”中讲道：“一乘之积谓之平方，二乘之积谓之立方，三乘之积长立方也，四乘之积平方之立方也，至五乘之积则立方中藏立方矣。”这里对三乘以上方的认识就不正确，书中还试图用立体图形表示 4～6 次方形，也是不能反映其真实情况的。清初梅文鼎曾指出前人在乘方方面的错误认识，并说：“三乘方以上不可为图，诸书有强为之图者，非也。”①

《历宗算会》对后世产生了一定的影响，最近的研究表明，《同文算指》就受到该书很大的影响。②

四　朱载堉及其《算学新说》和《嘉量算经》

（一）朱载堉

朱载堉（1536～1611），字伯勤，号句曲山人，还自号狂生、山阳酒狂仙客等，去世后赐谥端清。他是明仁宗朱高炽的六代孙，其祖父获得了郑王爵位，父亲朱厚烷继承此爵位，他本人一出生便被封为世子。

朱载堉自幼学习音律、数学与天文学，其父是一位音律学专家，对他颇多指导。朱载堉 15 岁时，其父受陷害被削爵为庶人，遭到禁锢，17 年之后嘉靖帝去世，才获释，不久复爵，朱载堉也恢复了世子名义。父亲削爵后，朱载堉在宫外筑土屋，“席藁独处十九年”，专心读书与研究，学问大进，成为专家。其间，他于嘉靖三十九年（公元 1560）完成音乐学方面的大型著作《瑟谱》。后来他又帮助恢复了爵位的父亲整理旧稿，共同完成《操缦》、《旋宫》等谱。万历十九年（公元 1591），父亲去世，他应当嗣郑王爵位，但他十几年累次上书皇帝，最终将爵位让予他人。

自嘉靖四十五年（1566），他撰写了各类著作 20 多种。万历二十三年至三十四年（1595～1606）间，他整理刊印了自己的 14 种著作，总名《乐律全书》。其中属于律学方面的著作有：《律学新说》4 卷（1584 年序）、《律吕精义》内外篇各 10 卷（1596 年序）、《乐学新说》以及《操缦古乐谱》等各种乐谱或舞谱。属于历法方面的著作有《圣寿万年历》2 卷、《万年历备考》3 卷、《律历融通》4 卷（1581 年序），此三书统称《历学新书》。属于数学方面的有《算学新说》（1603 年刊印）。后来他还写了《律吕正论》4 卷（1610）、《嘉量算经》3 卷（1610）以及《圆方勾股图》等著作。

朱载堉是晚明杰出的科学家，在音律学、数学、天文学、物理学、文学艺术等多方面均有突出的贡献。③ 在乐律方面，他创立了“新法密率”，即今日所说十二平均律，并把它应用于管口校正上，这是一项具有世界意义的重要成果。他在乐器研究与制造方面也做了大量工作。在天文历法方面，他编写了圣寿万年历和黄钟历。当时朝廷对所有修订历法建议一概拒绝，朱载堉的新历虽未被朝廷采用，但是打破了历禁。同时他在历法研究上也有不少新成

① 清 · 梅文鼎，《少广补遗》。

② 潘亦宁，中西数学会通的尝试——以《同文算指》的编纂为例，自然科学史研究，2006，(3)：215～226。

③ 戴念祖，朱载堉——明代的科学与艺术巨星，人民出版社，1986 年。

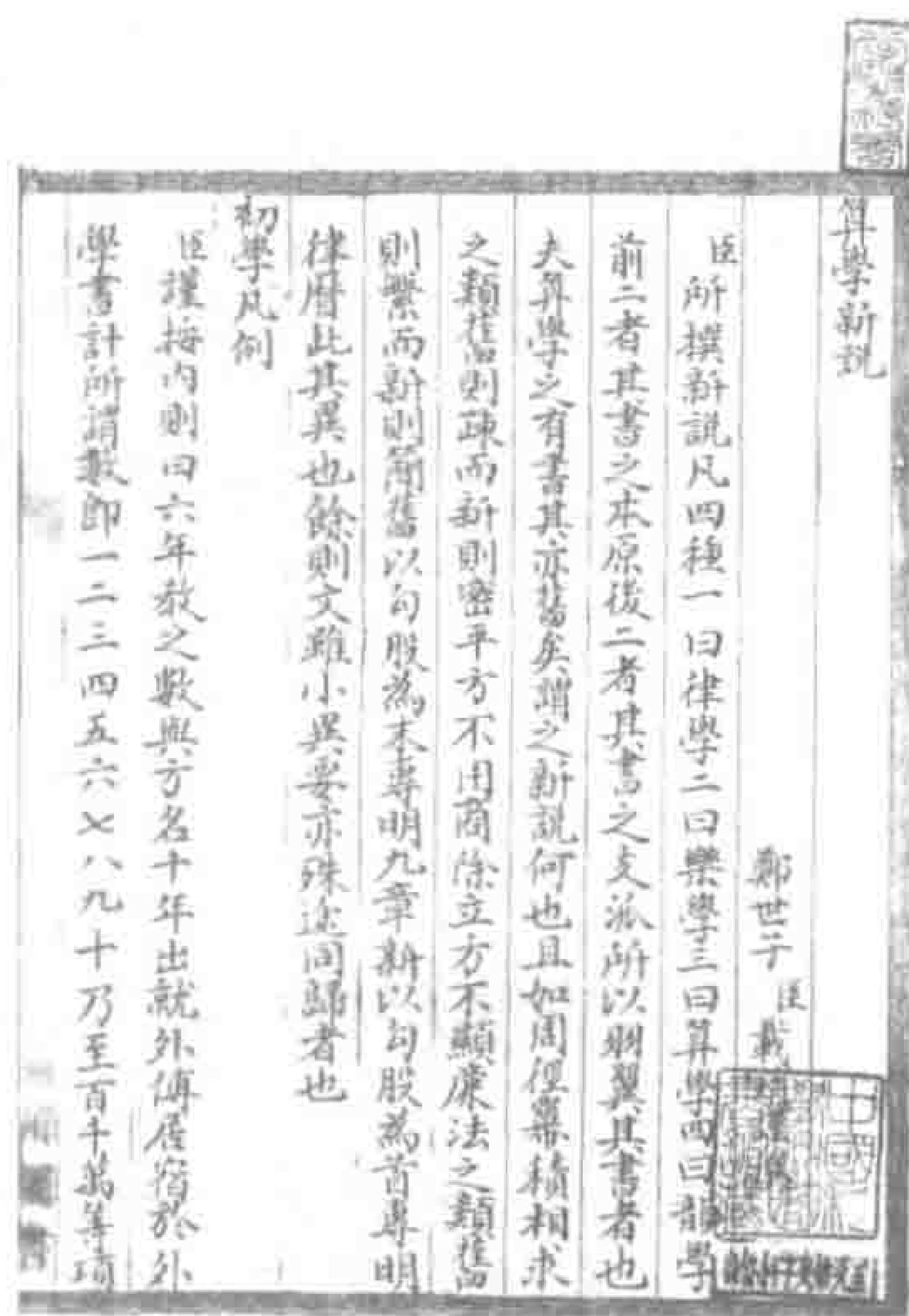
果，对授时历做了一系列修正，特别是对回归年长度和岁实消长的研究工作尤为突出。在数学方面，朱载堉的成就也十分突出，例如，他研究了九进位制小数和十进位制小数间的换算方法，又如，造81位大算盘用于开平方，以求出平方根的25位有效数字。这些都是中国数学史上重要的成果。

朱载堉的数学工作主要是为音律和天文历法研究服务的，因此，在他的音律与历法著作中也涉及不少数学问题，而其数学著作的内容则全部是在他的音律与历法研究中所遇到的数学问题，是他研究乐律的副产品。他在《算学新说》一开始写道："臣所撰新说，凡四种，一曰律学，二曰乐学，三曰算学，四曰韵学。前二者其书之本原，后二者其书之支派，所以羽翼其书者也。"① 对其数学研究服务于乐律的思想，表达得十分清楚。实际上，《算学新说》和《嘉量算经》二书的内容几乎全部在他的《律学新说》、《乐学新说》、《律吕精义》等乐律著作中涉及了，有的内容甚至在后者中讲得更清楚。

朱载堉对自己的科学水平，尤其对自己在数学与音律学方面的学识很有自信心。他自称"余少嗜音律，长而益得其趣，是以乐学之说颇异于众"。② "臣笃好数学，弱冠之时，读《性理大全》，见宋儒邵雍《皇极经世书》、朱熹《易学启蒙》、蔡元定父子《律吕新书》、《洪范皇极内篇》等而悦之，口不绝诵，手不停披，研穷既久，数学之旨颇得其要。壮年以来，复观历代诸史志中所谓历者五十余家，考其异同，辨其疏密。志之所好，乐而忘倦。"③他75岁时写道："余为人无所长，惟算术是好。因其所好而益穷之，以求至乎其极。用力既久，豁然贯通。故有得先儒所未得、发先儒所未发者存焉。"④ 这是他对自己研究数学的自我总结与评价。自我评价较高，不过大体上还是客观的。

（二）《算学新说》

《算学新说》（图23-4-6），不分卷，可能写于1584年，但出版较晚，刊本末书"万历三十一年八月初三日刻完"，即1603年出版。该书前有"初学凡例"，列举大小数名、平立方积单位、平立方数等，说明开平方和开立方对算盘的要求等。正文以问答形式写成，共12问，专论 律吕计算。其中第1问阐明黄钟长九寸和十寸的等同性，即：黄钟的律度是客观存在的定值，所谓黄钟九寸和黄钟十寸都是算家人为设定的数值。黄钟九寸是九进制的一尺，它是为适应"三分损益法"而提出的。第2问以下全部为律吕计算问题，从数学上阐述其十二平均律理论，并在理论指导下给出十二律正律、半律、倍律共36律的律度计算，包括十二平均律计算的数学原理与具体计


算學新說

鄭世子 臣 載堉

臣所撰新說凡四種一曰律學二曰樂學三曰算學四曰韻學前二者其書之本原後二者其書之支派所以羽翼其書者也夫算學之有書其來舊矣謂之新說何也且如周髀纂積相求之類舊則疏而新則密平方不用商除立方不顯廉法之類舊則繁而新則簡舊以句股為本專明九章新以句股為首專明律曆此其異也餘則文雖小異要亦殊途同歸者也

初學凡例

臣謹按內則曰六年教之數與方名十年出就外傅居宿於外學書計所謂數即一二三四五六七八九十乃至百千萬等瑣

图23-4-6　《算学新说》书影

① 明·朱载堉，《算学新说》前言，《万有文库》本《乐律全书·算学新说》（六），商务印书馆，1931年。本编凡引《算学新说》，均据此。

② 明·朱载堉，《瑟谱》卷二。

③ 明·朱载堉，进历书奏疏。王云五主编《万有文库》本，《乐律全书》，第31册，商务印书馆，1931年，第8，9页。

④ 明·朱载堉，《嘉量算经》自序。

算，36 律之间的互求，生律计算以及 36 律通长、外周、外径、内周、内径、面幂、实积计算等。他自己总结该书的创新点有三：

谓之新说，何也？且如周径幂积相求之类，旧则疏而新则密；平方不同商除，立方不显廉法之类，旧则繁而新则简；旧以勾股为末，专明九章，新以勾股为首，专明律历；此其异也，余则文虽小异，要亦殊途同归者也。

朱载堉所用的圆周率为$\frac{40}{9\sqrt{2}}$，称为周公密率，而否定更为精密的祖冲之密率。用算盘进行开方运算，包括归除开平方和公式法开立方，都有具体算草，对后世影响很大，颇受珠算史研究者重视，这是朱载堉的重要成果之一。他所用算盘的档位达到 81 位。勾股只是朱载堉律学理论的基本数学工具，他本人在勾股理论上并没有什么创造。另外，朱载堉的十二平均律计算的本质是等比数列各项的计算和互求，按他的理论，十二律黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、中吕、蕤宾、林钟、夷则、南吕、无射、应钟的长度构成一个以$\sqrt[12]{2}$为公比的等比数列，而其内径、外径均是以$\sqrt[24]{2}$为公比的等比数列。在实际计算中，他用两次开平方和一次开立方来代替开 12 次方，同时使用递推算法，尽量使计算简化方便。

（三）《嘉量算经》

《嘉量算经》三卷，附《嘉量算经答问》一卷。卷上"明律之理" 20 款，解读古代关于嘉量的记录文字，给出相关计算。卷中"明律之数" 14 款，内容与《算学新说》大同小异，讨论乐律的计算。卷下"明律之音" 60 款，是关于旋宫的说明。《嘉量算经答问》27 款，先述与嘉量相关的基本计算公式，次列各律三种不同尺的律度，末陈实验（包括对圆周率的验证和制作律管的一些要求等）。该书的大部分内容与朱载堉的乐律著作或《算学新说》中的内容重复。兹不多述。

第五节　珠算数学家和数学著作

一　《算法统宗》以前的珠算著作

（一）《铜陵算法》与《桐陵算法》[1]

《铜陵算法》，作者不详，应是 16 世纪的珠算著作。[2] 目前未发现有明代刊本传世，所能见到的只有清代刊本。现存有清刊本 5 种，其中 4 种都署名"莆阳俞嘉庆笃培校订"，并有王相序言。据王相序言称："友人俞笃培素精算学，深得其奥，偶因暇日重较（校）其书，详晰而精微，简易而洞彻，使学者一览了然，诚后学之津梁，均衡之秘宝也。"[3] 明确

---

① 李迪、冯立昇，对《铜陵算法》之研究。戴吾三、维快主编，《中国科技典籍研究——第二届中国科技典籍国际会议论文集》，大象出版社，2003 年，第 19～28 页。

② 李俨，《铜陵算法》的介绍，安徽历史学报，1958，（2）：67～70。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第十卷，第 362～373 页。

③ 载道光二十年（1840）京都打磨厂文成堂刊本，内蒙古师范大学图书馆藏。

说明俞笃培是重校者。俞笃培（字嘉庆）和王相（字晋升，号訒庵）都是清康熙年间人。现传《铜陵算法》上下卷，目录为：

上卷：算盘定式　九九上法　九九退法　九因合数　九归歌　乘除加减倍折总诀　算至极数法（大数 小数　丈尺　粮钱　斤两　田亩）　变算口诀　算学节要　分别法实左右图　九归算法　九因还原法　乘法　归除法　撞归法　起一还原法　便蒙法实总诀　混归法

下卷：分别物价乘除法实歌诀　斤两法　截两为斤歌　倾煎论色　丈量田地法　地亩图式歌诀　田形科粮带耗法　田中算稻法　铺地锦并图式歌诀　掌中定位法并图式歌诀　一掌金法

《铜陵算法》现传本的内容在《算法统宗》中全部都有，晚明的其他一些著作中也有。李俨先生认为《铜陵算法》的撰写时间在《盘珠算法》之前。如果这个观点是正确的，那么，《铜陵算法》对《算法统宗》等书的影响是相当大的。但是，由于该书经过俞笃培重校过，目前还不能确定哪些内容是原作已有的，哪些又是俞笃培加入的。当然也不排除俞笃培根据《算法统宗》的内容改写了《铜陵算法》的可能性。这样，在发现明代刊本《铜陵算法》之前，它的真正内容可能永远是个谜案。

需要说明的是，清代校刊的另外几部珠算著作都与《铜陵算法》关系密切，内容大同小异，如《算法全书》、《指明算法》、《算法指掌》等。甚至有同一部书同时出现《铜陵算法》和《算法全书》两个书名的现象。另外《铜陵算法》还有《算法指明》的名称。这表明这些不同名称的著作之间存在着密切的联系。《铜陵算法》的祖本可能是夏源泽的《指明算法》，由这两部书及其校正本、改编本派生出30多种不同书名或不同版本的著作，这些著作形成了一个珠算系统。

《桐陵算法》与《铜陵算法》的书名只差一个同音字，但是二者没有关系。该书卷一为“新刻校正家传秘诀桐陵算法士民利用”，卷二为“新刻校正家传秘诀明珠算法士民利用”，所以也叫《桐陵明珠算法》，卷一第一页有“建邑徐氏少嵩校正 黄氏耀宇刊行”，卷末又有“万历甲寅秋月书林黄耀宇梓”，是知刊刻于1614年。奇怪的是，该书内容甚至版式，均与《盘珠算法》相同①，或许是盗版书之一例。

（二）徐心鲁的《盘珠算法》

《盘珠算法》二卷，署“闽建徐氏心鲁订正”，全称为《新刻订正家传秘诀盘珠算法士民利用》，有“万历新岁仲夏月熊台南刊行”本，万历新岁即公元1573年。又有“万历甲寅秋月书林黄耀宇梓”本，即1614年本。② 该书在国内流传不广，程大位《算法统宗·算经源流》没有注录，现仅日本内阁文库藏有一部1573年初刊本，目前能见到的三种现代印本，均以这一内阁文库本为底本。该本是民间坊本，校刻质量较差，错漏之处不少，重复、漏排、上下文不连贯、示图不完整、文字错误等现象均存在。作者徐心鲁，无考。

《盘珠算法》每页分为上下两部分排印，上半页较小（图23-5-1），约相当于下半部分

---

① 兒玉明人编，《明刊の珠算書について》，第30页。《十六世纪末明刊の珠算书》，1970年，第22，23页。

② 关于该版本的情况不详。郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第二册，河南教育出版社，1993年，第1164页。



图 23-5-1　《盘珠算法》书影

的一半。每页的上半与次页上半相联，下半与次页下半相联，上下两半页相互独立，各自成体系。整体而言，下半部分是正文，上半部分是珠算运算图式等辅助部分。全书正文部分目录包括：上卷："隶首上诀"、"退法要诀"、"归法总诀"、"乘法"、"归除法诀"、"归除乘法式"、"金蝉脱壳诀法"、"二字奇法"、"狮子衮球法"、"铺地锦"、"算垛物诀法"、"田中算稻歌诀"、"算员束木法"、"算方束木歌法"、"度影量木歌诀"、"指明歌诀"、"算孕妇生男生女诀法"、"断人生死诀法"、"初学累算数法"、"算钱两法式（图）"、"钱两分数图"、"算米麦法式图"、"算匹帛法格图"、"一掌金手图"。下卷："算丈量田法""田形歌诀"、"假分田地歌"、算舡法式"、"算升斗数法"。辅助部分的内容包括：上卷：上法及下法各九图、因法及归法九图及大小数名法、度量衡名数等。下卷："新起钱粮歌法"、"算麻歌法"、"杂法" 及 "马子暗数"。

《盘珠算法》是一部为初学者准备的入门性著作，以讲述珠算技术为主，同时也涉及田亩计算、体积计算和当时流行的各种杂法。其中，值得提出的重要内容主要有以下几点。

关于珠算方面的记述。

关于田亩的度量与计算问题。卷二"算丈量田法" 首先给出了各种田形计算的诗歌，与当时流行的诗歌大同小异，接着列举了 12 个基本田形和 12 个繁杂田形的计算例题，并总结道：

> 前列十二问体源流之格范，依形量势而已矣。后列一十二问，竭愚衷之管见，剖决异同①，裁量中径，合方折角，丈量步度，求其数的无偏而已矣。算者留心于前，以明其形势之规模；用意于后，以究其积数之准的。是益治其精，升堂而入于室也。乐道君子宜细详而择思之可也。
>
> 右列一十二图，明其形势之规模而已，至于经量在人之取舍而变通也。如若拘量形势而依样画葫芦也，难以斟其端的之数也。经画高明君子，观其方、直、圭、梭、勾、弧形势，折合方正，以量之可也。余别异样，不必拘形量势，要须合方折角，截段分形，立向极足，以四方量中径以及四隅②，求合圭、梭、勾、弧之势，而酌量之，则数端的而无偏误。惟算理之精微也。明其物理至极致无偏无倚，凡执其中致中和之道欤！

说明量田的基本思想是根据田形进行适当的分拆拼合，"合方折角，截段分形"，选择适当的计算方法以"究其积数之准"，而要避免"依样画葫芦"和生搬硬套。这关键在于"明其物理"，灵活应用。这是重要的思想。

---

① 本段中"前段十二问"，原本讹作"前列二十问"，依算题校正；"后列一十二问"，明刻本讹作"后例一　二问"，"异同" 脱 "同" 字，今校补。

② 本段中"右列一十二图"，原本讹作"右例三十二圈"，"中径"，原本讹作"中经"，今校正。

《盘珠算法》也涉及一些当时流行的杂法。如："一掌金"和"马子暗数"：只是简单提到。"算孕妇生男女诀法"和"断人生死诀法"：有具体分析算例，并强调"其法最准不误"，"吾算得是三数，其后果不死"。这当然是无稽之谈。"铺地锦"："不用算盘而因乘见总"，但与前面吴敬和后面程大位略有不同，吴程二氏都要在计算前画好方格，《盘珠算法》则不画方格，直接将每次乘得的结果写下，然后合总。"井字法，不用算盘能垛帐"，即笔算加法式。在计算过程中有时会用到一些快捷的算法。例如："田中算稻歌诀"，已知每方步产量，计算亩产量。当已知每方步产粮若干两后，算亩产量时需要乘以240，再除以16而成亩产斤数。其中16除，用"二八归之"代，又240乘，也直接以亩产15斤代。并有歌诀曰："还有截法深容易，归乘不必用心机。每两每亩十五斤，千金莫度富人知。"又如，"新起钱粮歌法"中需要用872乘，不径乘，代之以"八因加九"，即先八因，再身外加九。还有以"折半七加"代535乘等。这些都是珠算中较为快捷的代用算法。

《盘珠算法》还有以诗歌形式编成的"难题"15个。如苏嫂绩麻、僧分馒头、公公记年、鸡兔同笼、苏武牧羊、西天取经、古寺僧人、李三开店、隔墙分银等。

《盘珠算法》署名"徐氏心鲁订正"，说明徐心鲁是在订正前人工作基础上完成此书的。既是"订正"，"则订正之前，必更有原本"。[①] 目前我们无法知道原本的情况，但是可以在书中找到一些引用前人工作和订正的痕迹。例如"乘法"给出的四句歌诀是：

乘法之数此为真，位数先将第二因，三四五来乘便了，却将本位破其身。

在第一句下注文为："下，下其子也。乘，因而乘之。法，定数之法则也。以此定数之法则而乘之，则得其真矣。"可是，原歌诀中并无"下"字，而注文中解释"下"字。文注不相符。这是修改前人工作而露出的痕迹。实际上，当时流行的歌诀第一句是"下法之数此为真"。又如，卷上有"指明歌诀"，讲粮仓计算，即引自《指明算法》。"新起钱粮歌法"中所讲的是"铜陵科则"。"难题""一个母猪十二奶"题末有"其理依愚意推究不明，明者详之"一语，也是评论前人的题目与方法。

目前流行的1573年版《盘珠算法》的刊印质量很差，错误相当多，特别是文字校核错误。这里只指出以下几条：第一，算盘图式错误，一是图示用珠错误有20多处。二是口诀与内容对不上，如第三退法。三是算盘档数不全，如因乘图式只给出九档，而实际计算中常要用到十档，末档不列于图中。四是"七归法式"的图和口诀误刊成"八因法式"，这样就有两个八因法式而无七归法式。第二，有缺漏现象。例如，"铺地锦"下题目只有一半；"第九退法"下"还原用乘法"与上文没法相连，且下页也连不上，下页开头也不完整，中间有缺页。第三，串页。"狮子衮球法"题的还原计算应在正文，但刊在了上半页的辅助文字中，使得上半页上下文不贯通。

（三）柯尚迁及其《数学通轨》

柯尚迁，又名文迁，字时益，号乔可[②]，自称阳石山人。生于弘治十三年（1500）五月初三寅时，明万历十年（1582）去世，终年83岁。福建长乐县下屿（现长乐市漳港镇百户村）人。嘉靖二十八年（1549）贡元，二十九年入国学监，三十一年补廪，三十八年授直

① 靖玉樹，《盘珠算法》简述，《中国历代算学集成》中，山东人民出版社，1994年，第2037页。

② 一说字乔可。见《四库全书提要》之《周礼全经释原》提要。

隶顺德府邢台县丞，四十一年致仕后寓居南京，隆庆五年（1571）回长乐定居，直到去世。① 他的生平事迹在柯氏族谱中有记载。

柯尚迁著有《周礼全经释原》十四卷，清代收入《四库全书》。明万历六年，柯尚迁完成了《数学通轨》和《书学通轨》，附于《曲礼外集 · 补学礼六艺》之后。《数学通轨》是一部重要珠算著作。与明代一般的数学家一样，柯尚迁对古代九章的内容也不是完全掌握，其《数学通轨 · 叙》认为："九数之目，古法必详，至汉张苍始补算经，唐李淳风、宋杨辉注，然皆不真，若少广之截纵步以益广，大违本旨，商功、均输、盈朒、方程，题问深隐，法理难明，而勾股一法，深微莫究，通九章者鲜矣。"②

柯尚迁在撰写《数学通轨》时参考了"青阳卢氏"的《算法解》和顾应祥及唐顺之的著作。特别是直接引录了顾、唐著作中的一些论述性文字。

柯尚迁家乡的人民特别重视他的贡献，1992 年漳港镇政府建立了以他的名字命名的尚迁中学。

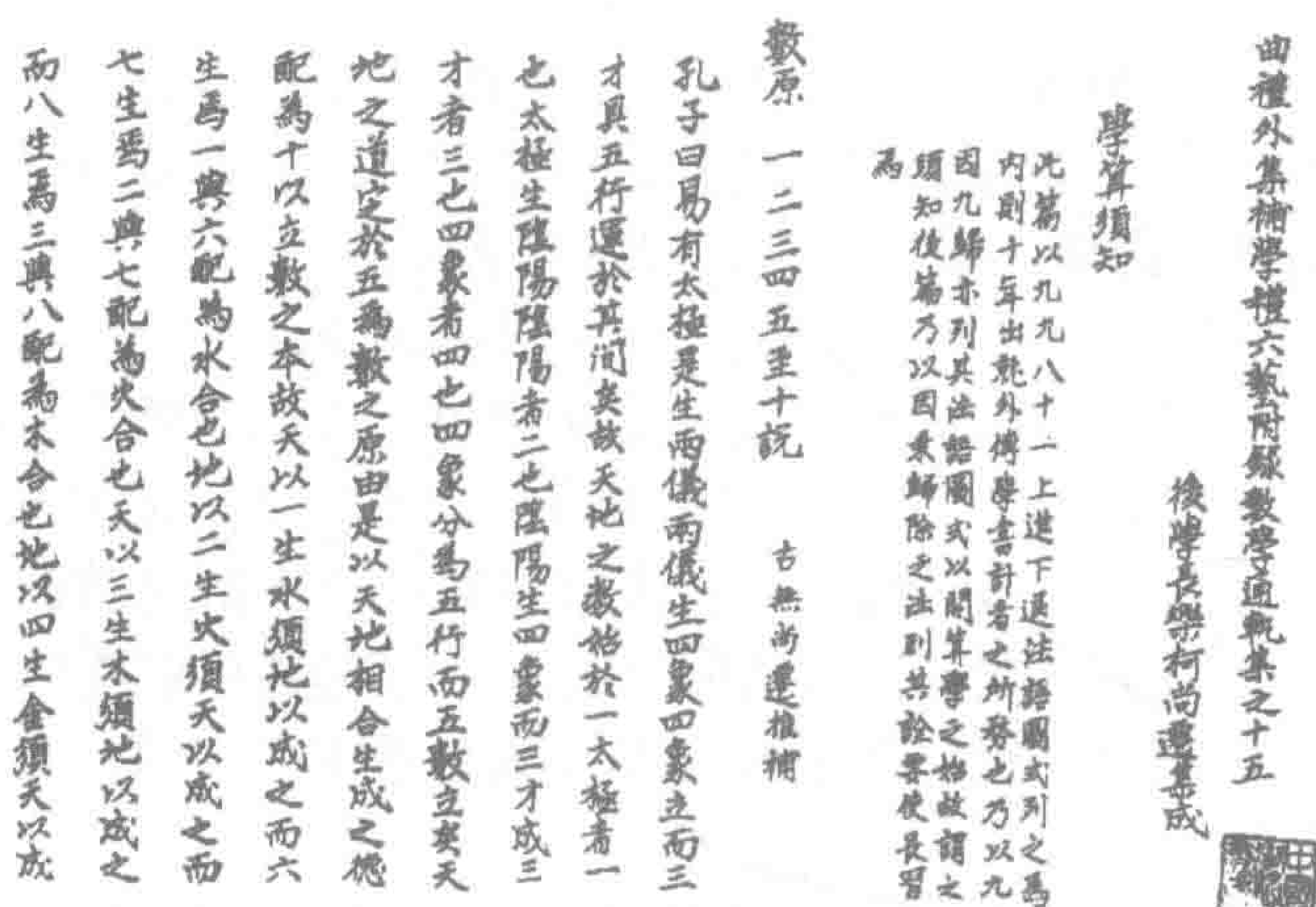

曲禮外集補學禮六藝附錄數學通軌集之十五
後學長樂柯尚遷集成
學算須知
此篇以九九八十一上進下退法語圖式列之為
內則十年出就外傅學書計者之所務也乃以九
因九歸亦列其法語圖式以開算學之始故謂之
須知後篇乃以因乘歸除之法則其詮要使長習
焉
數原　一二三四五至十說　古無尚遷推補
孔子曰易有太極是生兩儀兩儀生四象四象立而三
才具五行運於其間矣故天地之數始於一太極者一
也太極生陰陽陰陽者二也陰陽生四象而三才成三
才者三也四象者四也四象分為五行而五數立矣天
地之道定於五為數之原由是以天地相合生成之德
配為十以立數之本故天以一生水須地以成之而六
生焉一與六配為水合也地以二生火須天以成之而
七生焉二與七配為火合也天以三生木須地以成之
而八生焉三與八配為木合也地以四生金須天以成

图 23-5-2　《数学通轨》书影

《数学通轨》，全名为《曲礼外集补学礼六艺附录数学通轨》（图 23-5-2），有万历六年自序。现在日本尊经阁收藏有刊本一册，兒玉明人影印刊入《十六世纪末明刊の珠算书》中，另有日本宽文十二年（1672）野田庄右卫门翻刻本。李俨有抄本一册，影印编入《中国科学技术典籍通汇 · 数学卷》第 2 册。日本神宫文库藏有抄本一册。

《数学通轨》是作为儒学著作《曲礼全经》的补卷编写的。《曲礼全经》包括全经 12 卷，通论 1 卷，续论 1 卷，共 14 卷，补卷第 15 卷为《数学通轨》，第 16 卷为《书学通轨》。柯尚迁视数学与书学为儒者学礼必备的知识，其《数学通轨 · 叙》云："凡人生世，不论贵贱，皆须二艺之要以立身也。"因此在《曲礼全经》后补充关于数书二艺的内容："曲礼必补学礼于后，而学礼六艺又补书数二艺于末。"所以，《数学通轨》的内容是柯尚迁认为一个文人应该掌握的内容。

《数学通轨》分为"学算须知"、"归除诠要"、"九章释例"和"九章总义"四部分。各部分的内容如下：

"学算须知"："此篇以九九八十一上进下退法语图式列之，为《内则》'十年出就外傅学书计'者之所务也。乃以九因九归亦列其法语图式，以开算学之始，故谓之须知。"也就是十来岁孩童时期学习数学应该理解的内容，包括"数原"（含度量衡和田亩制度）、"初定

① 郑克俭、郭愈、施春凯，访问明代珠算家柯尚迁的故乡和后代。

② 明 · 柯尚迁，数学通轨。中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第二册，河南教育出版社，1993 年，第 1167 ~ 1212 页。本编凡引《数学通轨》，均据此。

算盘图式”、“九九上进下退法语图式”、“九因九归总歌重演法语图式”等。

“归除诠要”：“乃以因乘归除之法，列其诠要，使长习焉。”内容包括“因乘归除义”、“加法、减法、金蝉法义”等术语界定，及“九归分数”、“九因法总数”、“定身除法”“加法”、“归除法分数”、“乘法”等基本算法，这是学习数学的第二阶段应掌握的内容。

“九章释例”：按古代九章的顺序概要介绍数学的一般内容。

“九章总义”：引述顾应祥《测圆海镜序论》和唐顺之《六分论》、《答顾尚书书》等对于数学的一些论述。

柯尚迁在序言中交待了上述结构安排的用意：

> 愚以数原、九九归除法语图式著之于前，名曰学算须知，为教数首务。乃以归、除、乘、因，分合法例，举其要略，令习者易知，名曰归除诠要。然后分九章之目，列古今注释，略表法例数条。以及九章总义。至于顾唐二先生之勾股全书，不列于此，学者考焉，总名《数学通轨》。

与《盘珠算法》一样，《数学通轨》对珠算的介绍也比较全面。

《数学通轨》对九章的介绍比较粗浅，不能够反映九章的内容，作者柯尚迁似乎不能完全理解九章，经常出现文不对题的现象，例如，在“少广”下讲求体积问题，在“盈朒”下讲异乘同除，在“方程”下讲乘除算例，均不讲原来的本法。这是为初学者所编的学习用书，可能会误导读者。这是该书的不足之处。

《数学通轨》在当时对普及珠算所起的作用还是很大的，该书传到了日本，并在那里刊刻出版，对日本的珠算发展起到了重要作用。[①] 目前所能见到的也只有日本传本。

（四）余楷的《一鸿算法》

《一鸿算法》，四卷，刊本四册，全称《新刻一鸿简捷便览算法》，安徽黄山市博物馆存有明代明雅堂刻本，略有残缺，前三卷刻于1584年冬季，第四卷刻于1585年初。[②] 目前还没有发现该书的其他版本。现存本因封页残缺而没有作者署名。《算法统宗》卷十二记“万历甲申（1584）银邑余楷作”。

现存残本《一鸿算法》中不见一幅算盘图，但根据其中具体算例和注解分析，它所用的算盘是梁上二珠，梁下五珠。[③] 全书主要由歌诀和算题构成，先歌后题。书中包括珠算加、减、乘、除和开方法口诀等。前三卷除歌诀外，共有108道数学题，其中卷一有49题，卷二有23题，卷三有36题。每题下都有“答曰”和“法曰”，题的开头大都有“今有”两字，仅两题例外。卷四没有算题。

该书内容浅显，是一种普及性读物。卷一主要讲珠算法及算例。文中有筹码记法，但只用于记数而不用于计算。卷二总共记述了39种平面形面积的计算，但多数是三角形、四边形和圆的各种变形或简单拼合。卷三的内容较杂，包括少量的体积问题、开立方、测量、“方程”、垛积以及一些杂题。卷四“斤求两法”，全是钱物换算比率。

《一鸿算法》作者余楷亲自参加了万历年间的土地丈量工作，并制作了丈量工具。因此

---

① ［日］兒玉明人编，《明刊の珠算書について》，富士短期大学出版部刊，昭和45年（1970），第42~45页。

② 李迪、王荣彬，新发现的史料《一鸿算法》简述，见：数学史研究文集（二），1991年，第80~84页。

③ 王荣彬、李迪，新发现“一鸿算法”の珠算を探究する，［日］珠算史研究，1991，（26）：3~16。

该书在地亩丈量和计算方面有一些自己的见解。以卷二一首“丈田总歌”为例：

田形无数尽难详，尺用方圆作纪纲，遇有凹尖斜曲处，就中裨补取其方。

如田中画量其十，横直相乘得积良，方圆六归图用八，全凭目力空中央。

书中还记录了制作田地测量工具的方法。

同时，《一鸿算法》作为一部普及性数学著作，不可避免地要大量吸收前人的成果。它从《盘珠算法》中吸收了许多内容。例如，卷三的“金蝉脱壳”内容和例题都与《盘珠算法》相同。《算法统宗》则又从《一鸿算法》中继承了一些内容，如许多几何图形的面积算法。

《一鸿算法》卷二有一首开平方认商歌，歌诀如下：

一百以十定无疑，一千三十有零余，九千九九不离十，一万才为一百推。

得商须倍为方法，下法亦置上商除，除了续商方又倍，纤微不尽命其余。

这首歌诀后有“解曰”，详细说明认商的方法，并有开之不尽的命分法，李迪、王荣彬认为这是其他珠算书中所少见的。①

二　程大位及其《算法统宗》和《算法纂要》

（一）程大位



图 23-5-3　程大位像

程大位，字汝思，号宾渠，生于嘉靖十二年四月初十日（1533 年 5 月 3 日），卒于万历三十四年八月初七日（1606 年 9 月 18 日），徽州府休宁县（今安徽屯溪市）率口（屯光乡前园村）人（图 23-5-3），有故居保留至今。程氏是安徽几大望族之一，在徽商中，休宁、婺源、歙县等地，程姓占有重要地位。有程氏宗谱，续编至今，程大位家世出身，源流脉络十分清楚。

程大位的一生，可分为少年、青年、壮年和晚年四个阶段。少年时，他“幼负颖敏，综涉坟籍”，知识涉猎广泛。儒学是当时正统教育的内容，他“为儒业，既通，不复出试吏，而为儒不废”。他对书法有浓厚的兴趣，时人记述他“耽坟籍科斗文字”、“诗文篆法，备极工妙”。他对数学最为喜好，“酷嗜算学”，自称“数癖”，虽天地之大，万物之多，“不以异物他好易”。程大位中年“商游吴楚”，20 岁左右开始在长江中下游各地从事商业活动，算是一位成功的商人，到 40 岁左右便不再外出经商，不仅能够维持生计，且有所结余，晚年还有财力刊印自己的著作。在商游活动中，他一边经商，一边学习数学，收集资料，利用各种机会，“遍访明师，绎其文义，审其成法”，“闻有人耆宿通数学者，辄造请问难，孳孳不倦”。“遇古奇文字及算类诸书，辄购而玩之，斋心一志，至忘寝食。”在这 20 年间，他收集到了极为丰富的数学著作，为以后撰写数学著作打下了良好的基础。约在 40 岁壮年之时，程大位回到家中，不再商游，“覃思于率水之上”，专心数学研究。他经过 20 年的苦心钻研，整理、消化、吸收收集到的数学资料，使自己成为数学名家，远近闻名。万历年间，朝廷进行了全国的土地丈量工作，作为数学家，丈量田地、

① 李迪、王荣彬，明代算书《一鸿算法》研究，自然科学史研究，1993，（2）：112~119。

计算田亩，是他的专长，他参加了这次“清丈”工作，亲自制作测量工具“丈量步车”，同时他从数学的角度对当时官府规定的“休宁县课则”的不合理性提出了严厉的批评。

程大位晚年专心于纂集和出版自己的数学著作。万历二十年（1592），他刊刻了《直指算法统宗》（常称《算法统宗》）17卷（图23-5-4）。据书后自述，他参考了几十种数学著作，综合各家成果，“参会诸家之法，附以一得之愚，纂集成编。凡前法之未发者明之，未备者补之，繁芜者删之，疏略者详之，而又为其订其讹谬，别其次序，清其句读……”《算法统宗》可以称得上是一部集大成之作，几乎包括了当时数学家所了解的所有数学知识，特别是对珠算做了一次全面的总结。



图23-5-4　《算法统宗》书影

《算法统宗》出版后受到极大的欢迎，很快销售一空，于是他自己不断重印或再版。为了打击盗版盗印，他还在书中附上自己的“小像”，作为正版的标志。这是我国数学史上第一次防盗版的工作。此外，他还以“平济会”和“均济会”等方式集资，把出版著作办成产业，这也体现了他的商业思维特点。

《算法统宗》销售量很大，十分抢手，但是程大位认识到该书篇幅太大，不适合一般的数学爱好者和常人百姓所用，于是他又将原书删节改编，简化成《算法纂要》四卷，于1598年刊行。《算法统宗》和《算法纂要》是晚明时期影响最大的数学著作。

程大位是明代一位影响极大的数学家。1996年在他的家乡建立了程大位纪念馆。

（二）《算法统宗》

《算法统宗》初版分为金、木、水、火、土5册，后又改为元、亨、利、贞4册，又有13卷本和12卷本行世。《算法统宗》是明代乃至中国数学史上最为流行的数学著作，它一出版，立即“风行宇内”，“一时纸价腾贵，坊间市利，竞相翻刻”[①]，除了程大位自己印行出版外，还有一些书商盗版售卖，此外，也有大量改编本和缩写本。由《算法统宗》演化出来的书名中带有“算法统宗”字样的数学著作就有十几种，仅《算法统宗》和清代梅瑴成的《增删算法统宗》的各种版本就有七八十种之多[②]。

《算法统宗》17卷加卷首共有6个组成部分：

第一部分：卷首，内容很少，讲述数学的起源，包括“总说”、“河图”、“洛书”、“伏羲则图作易图”、“洛书释数”、“九宫八卦图”、“洛书易换数”和“黄钟万事根本图”等。

第二部分：卷一和卷二属于起例发凡和算法研究，对珠算术语、算盘结构、珠算的口诀、算盘中数据的陈列方式及位置关系、珠算定位等和解释和论述，还有珠算学习方法、步骤、要领以及珠算练习题等内容，而且论述较以前更加详细和系统。其中，卷一论述数学的

① 明·范时春：《算法纂要》序，1598年。

② 郭世荣：《算法统宗导读》“附录”，湖北教育出版社，2000年，第494～498页。

重要性、学习数学的要领、定义基本概念和用语，并对算法作扼要介绍等。卷二是对算法的阐释，说明每一算法的演算方法和算盘上的运算过程。涉及的算法有：九因、九归、乘法、归除、加法、减法、商除、约分、乘分、课分、通分、差分、异乘同除、异乘同乘、异除同除、同乘同除、倾煎论色等。以上二卷是全书的基础部分，所介绍的概念和算法都是以后各章所必需的知识。

第三部分：卷三到卷十二，按方田、粟布、衰分、少广、商功、均输、盈朒、方程、勾股等九章分类方式排列各种算法及实用问题，每章1卷，又在少广章后增加了"分田截积"一卷，所以共10卷。

第四部分：卷十三至十六是"难题"，即用诗词歌诀形式编写的题目，按九章顺序编列108题。卷十三前有"新编直指算法统宗·难题附杂法序"。

第五部分：卷十七是"杂法"，包括"金蝉脱壳"、"二句字诀"、"写算"、"一笔锦"、"洛书书数算"、"一掌金定位图"、纵横图、"五音相生"、"律吕相生"、"统纪历年、度分地里"、"袖中定位诀"、"孕推男女"。

第六部分：附录"算经源流"，注录古今算学著作51种。有近40种是他所"见闻者"，这些图书流传至今的并不太多，所以这个书目的史料价值极大。

《算法统宗》是程大位"参会诸家之法"、综合前人著作纂集而成的一部著作，吸收了前人的不少成果，时人认为是"兼综百家"的著作。程大位在写作该书时直接参考过的著作有40种左右，采录杨辉和吴敬著作中的成果相当多，书中的算题，大部分都可在吴敬的《九章算法比类大全》中找到。

《算法统宗》是一本全面讲述珠算的著作，是珠算的代表著作之一。对于珠算的学习和使用也有一套自己的观点：以乘除为重点，重视留头乘，认为破头乘、掉尾乘、隔位乘等"总不如留头乘之妙"，"故皆不录"，以便集中精力学习留头乘。重视归除法而轻视商除法，认为古法没有归除，所以才用商除，商除不如归除"最是捷径"，"归除既通，不必学此"。书中根据算盘一档最大可表示15的特点，设计了新的斤两互换珠算法，编写了新的斤两互换口诀。该书还强调学习珠算要熟记口诀，多算多练。《算法统宗》对珠算的总结性研究和介绍成为以后珠算研究的重要基础，影响极其深远。

除了珠算成果外，《算法统宗》在数学的其他方面也取得了不少新成果。《算法统宗》所记载的纵横图，除与杨辉《续古摘奇算法》中所介绍的相同者外，也有几种不同者。卷十七中的"一笔锦"既是珠算的记录，也是一种笔算方法，以前的数学著作中未出现这项内容。书中还记录了程大位自己制作的丈量步车。

（三）《算法纂要》

程大位对《算法统宗》"删其繁芜，揭其要领"，集成《算法纂要》（图23-5-5）。该书在明末也颇多印行出版，入清后，因为原书序言中有"今南倭北虏充斥于边陲"等为清廷所忌之语，无人再敢翻刻。

《算法纂要》四卷基本上是根据《算法统宗》删节而成，前二卷的内容是删节《算法统宗》卷一和卷二而成，卷三依据《算法统宗》卷三"方田"章删节而成，卷四据《算法统宗》卷十七"杂法"整理而成。基本内容不出《统宗》范围，但也有少许变化，如卷二中

有些题设与《算法统宗》不同，且先讲除法后讲乘法，与《算法统宗》次序相反①。

《算法纂要》是一部很好的实用数学著作，当时程际用评价道："提纲挈领，去繁就要，约而该，简而尽，明白而易晓。"② 只可惜入清后，该书传播极少，没有发挥应有的作用。

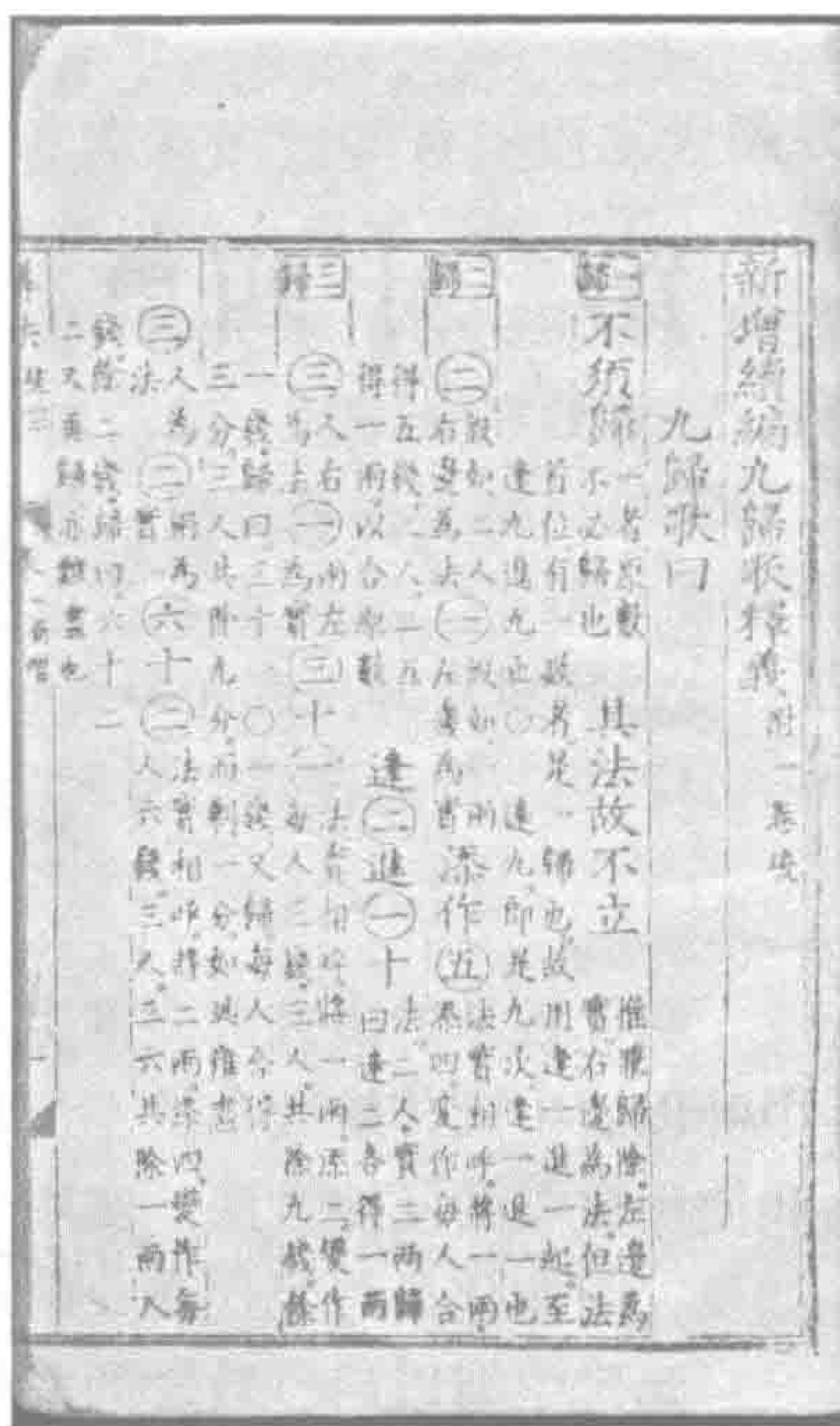


图 23-5-5　《算法纂要》书影

三　其他珠算著作

16 与 17 世纪之交，还有一批与珠算相关的著作。举例如下：

《算学指南》上下卷，全称《新鐫易明捷径算法指南》，黄龙吟编撰，万历三十二年（1604）刊行，由汪一诚校梓，汪一栋撰序。

《书算玄通》和《算法门》，载《新锓天下备览文林类记万书萃宝》卷之三十六。

《算法便览》，《新锓精拣天下便览博闻胜览考实全书》卷十四。

《精採算法》和《算法门类》，载《新锓崇文阁汇纂士民捷用分类学府全编》卷十四，万历岁次丁未（1607）潭阳刘太华梓。

《新鐫九龙易诀算法》，联捷堂，年代不详。存卷之一。③

这些著作的内容都比较浅显，大同小异，且有互相传抄的痕迹。它们讲述珠算的基本内容，并附有少量算例。其中，黄龙吟的《算法指南》内容略多一些，该书上卷以讲珠算为主，涉及上法、退法、因法、九归以及下乘法、归除法等算盘运算，包括口诀和练习图式。下卷主要是斤两互换、各种杂法和一些算例，大多都已见于《算法统宗》中。该书末尾还有"算孕生男女"、"算病生死"、"六壬课数"等内容。

---

① 李培业：（《算法纂要》）校释说明，算法纂要校释，安徽教育出版社，1986 年。

② 程际用：刻直指算法纂要序。

③ 以上四种均收入：兒玉明人编，《十六世纪末明刊の珠算书》，富士短期大学出版部刊，昭和 45 年（1970）（有简要介绍）。

第二十四章　数学的歌诀化与珠算的普及

第一节　数学的实用化与歌诀化

一　数学的实用化、大众化与商业化

明代数学的研究方向发生了转变，数学的大众化、实用化、歌诀化和珠算化是14世纪中叶以后中国传统数学的主流特征，数学家的主要兴趣在于为大众百姓提供实用的数学知识和使用数学的便捷方法。实用化特点是中国传统数学所固有的，大众化是数学向民间普及的结果，商业化是与明代商业的迅速发展紧密联系的。

元代中期以后，数学的实用化和大众化特征更加明显。明代是中国传统实用算术发展的高峰期，也是数学实用化与大众化的高峰期。在这里重点讨论明代数学商业化的一些表现。

明代的手工业与商业较前代发达了许多，甚至出现了资本主义的萌芽，对数学也提出了新的问题和要求。快速和便捷是商业经济最主要的要求，商品的快速流转与交易的简便易行，都是商家所希望达到的良好经济运行方式，反映在数学上，就是要求有一些简捷快速、易学易懂的计算方法。大多数从事商务的人员并不是专门的数学家，但是他们需要方便快速的数学计算，需要易学易懂的数学。

明代数学的许多特点实际上都与上述要求相关。所谓的“杂法”中就有一些是易学易懂的算法，如金蝉脱壳、一笔锦等算法均属此类。明代数学著作中对各种速算法的高度重视也是对快速便捷要求的一种反映。珠算在16世纪中后期成为所有数学著作关注的焦点，应该说与当时商业经济的迅速发展有密切关系。珠算与筹算相比，在计算方法上更加灵活多变，容易被常人百姓所接受，更易成为商业人员的计算工具。

同时，商业问题的不断增加，促使许多商人研究数学，有的成为数学家，使得数学为商业服务的倾向越来越浓，大大促进了数学向服务商业化方向的发展。明代出现了两位著名的商人数学家，即王文素和程大位。他们了解和熟悉市民百姓需要什么样的数学，特别是对数学在商业上的作用有深刻的认识，并且能够容易地从商业活动中提取出数学问题来。

明代数学家中还有一些与商业活动有关的人员。例如，严恭就是一位低级官吏，他在日常工作中就涉及大量商务和经济问题，“若金谷之出纳，田土之度量，户口之增减，大而山堆土积，小而毫分缕析”，都是他在工作中要遇到的问题。吴敬也是一位与商业活动密切相关的数学家。他以钱粮算师为职业，虽不是职业商人，但他的工作都是与商务、经济计算相关的活动。他又身处江浙商业发达地区，对数学在商业与经济中的作用自然不陌生。明代中期的数学家唐顺之也对商业与地方经济计算问题颇为熟悉。

在明代的数学著作中，不仅以往的数学著作中已有的与商业和经济相关的问题被保留和继承了下来，而且增加了不少新问题，涉及的商业与经济问题也是五花八门。例如，“就物

抽分”，是从所运输物品中抽取一小部分作为运费的雇佣报酬计算方法；再如，合伙经营、交税、实物计税等问题都是与商业活动息息相关的。

16世纪后期，数学的商业化和大众化气息更加浓厚了，甚至有的数学著作也成为赚取利润的商品。当时，学习使用数学书的人越来越多，购买数学著作的人也越来越多了，出版数学著作，特别是内容丰富、质量上乘的著作，亦可赚钱获利。程大位《算法统宗》的情况就是明末数学著作商业化的一个典型的例子。《算法统宗》甫出版，就引起广泛重视，形成抢购风，于是有一些书商开始盗印，以图“射利”。清代编纂《增删算法统宗》的梅瑴成所用的就是明王桂堂盗印本，17、18世纪朝鲜数学家所用的也基本上是这个本子。有的盗印本至今仍有流传。有丰富商业经验的程大位当然也不会放过这样的商机和宣传自己著作的机会。他不仅再版或重印，而且加上自己的画像，作为正版的标记，打击盗版，同时还组织其他人合资出版，扩大销售量。

二　数学的歌诀化

在数学中使用口诀、歌诀和诗词的历史很长，早在战国时代就已有了九九口诀，但是数学与歌诀诗词结合在一起，却是唐末以后的事情，并在明代真正成为一种时尚。歌诀与捷算、速算法紧密相关。寻找便捷算法本身就有易学易记的目的，而歌诀、诗词、口号、小令等是帮助记忆的最好方法之一。以优美典雅的歌诀或诗词表达算法和公式，甚至表达数学问题，是元明数学的特点之一。

数学歌诀化的动因来自于商业发展的需要。自两宋到元明的数学家们对数学的歌诀化的态度是不同的。活动于民间的数学家，如《宋史·艺文志》记载的《注法算三平化零歌》的作者张祚，《法算机要赋》、《法算口诀》、《法算秘诀》等书的作者以及南宋著名数学教育家杨辉等，都积极从事数学歌诀的收集、整理，甚至写成专著，或其著作中有大量歌诀。但是，一部分数学家，特别是出身于社会高层的数学家，则对此不屑一顾，甚至挖苦，讽刺。他们不仅认为数学歌诀影响了数学的发展，而且提高到道德的高度予以谴责。居于统治阶级上层的南宋大数学家秦九韶，明代大数学家顾应祥、唐顺之等虽没有留下谴责数学歌诀的文字，但他们的著作中也没有这类内容。另一方面，在高深数学的研究和教育上同样做出重大贡献的元代朱世杰却是喜好使用歌诀的数学家。他的《算学启蒙》除了书前有“释九数法”、“九归除法”、“斤下留两”、“明纵横诀”、“明正负术”等十来首歌诀外，正文中的“纵横因法”、“身外加法”、“留头乘法”、“身外减法”、“九归除法”等算法都有歌诀。在他的《四元玉鉴》“或问歌彖门”更有以歌诀形式编写的题目12个，这大概是现有数学著作中最早用诗词歌诀编写算题者。朱世杰的这些歌诀有的在明代的算书中反复出现。

元末的数学著作《详明算法》和《算法全能集》也大量使用歌诀。此二书都有20首歌诀，用歌诀表达算法，而且有一些完全相同，这些歌诀也大部分成为后来最为常用的算法歌诀。进入明代以后，使用歌诀成为时尚，大部分数学家都使用歌诀。其中，刘仕隆被明代数学家认为是使用歌诀的重要人物。在吴敬、王文素、程大位等人的著作中，诗词歌诀随处可见，不胜枚举。随着珠算的盛行，歌诀对于数学来说已是须臾不可离开的内容。这里暂且不论珠算口诀，就一般的诗词歌诀来说，大体可分为三类。

第一类是对数学和学习数学的认识方面的诗词歌诀。例如，《九章算法比类大全》、《算

学宝鉴》、《算法统宗》等许多数学著作都载有“先贤格言”，讲述数学的重要性，学习数学的必要性、难度等。《九章算法比类大全》云：

心灵者蒙童易晓，意闭者皓首难闻。慇勤学全书可解，不留心至老无能。

人生世不能学算，如空中日月无光。既学书不学其算，俾精神减其一半。

《算学宝鉴》改了几个字，意思未变。《算法统宗》的改动较大，调寄“改调西江月”，云：

智慧童蒙易晓，愚顽皓首难闻。世间六艺任纷纷，算乃人之根本。

知书不知算法，如临暗室昏昏。谩同高手细评论，数微无萦方寸。

又如，《九章算法比类大全》的“习算之法”，《算学宝鉴》称为“学算总诀”，《算法统宗》称为“算法提纲”，讲学习数学的方法和次第。再如，《算法统宗》的“算学节要”，讲述学习珠算乘除法的要领：

学算之人须努力，先将九数时时习。呼如下位算为先，变其身数呼求十。

观其发问各何如，仔细斟量分法实。若然法实既能知，次求定位最为急。

再考九归及归除，又将减法细寻绎。有能致意用功夫，算学虽深可尽识。

王文素在其《算学宝鉴》前更有“集算诗”八首，把自己对数学的感悟和认识、研究数学的成就以及研究数学的辛酸苦辣与获得成果后的成就感、兴奋感都表达得淋漓尽致，一个辛勤耕耘的数学家形象跃然纸上。

第二类是对各种算法、公式和数学方法的说明。例如，“定位总歌”、“二十字诀”、“定位秘诀”等是专门讲述决定运算结果的名数的。讲算法的如“因法歌”、“归因总歌”、“九归歌”、“乘法歌”、“归除歌”、“加法歌”、“减法歌”、“商除歌”等。讲公式的歌诀也特别多，如“丈量田地总歌”、“盘量仓窖歌”、“匿价差分歌”、“就物抽分歌”、“贵贱差分歌”、“归除平方带纵歌”、各类求截积歌、“筑堤歌”、“盈朒歌”、“二色方程歌”、各类勾股互求歌，等等。

第三类是用诗词歌诀编写算题，详见下节。

这些歌诀诗词是帮助记忆和理解数学的重要手段，对于普及数学知识和数学的大众化起到了很大的作用。因为流传广泛，大众百姓喜闻乐见，数学家们都乐于采用这种歌诀化的形式，并且后代数学家一般都继承了前代人的歌诀，或者直接引用，或者修饰改进。

我们说数学的歌诀化是明代数学的一个特点，主要是因为诗词歌诀在明代数学达到了普及与流行，甚至是时尚。

三　元末以来的数学歌诀化算题

上节已经讲过，数学问题歌诀化是明代数学歌诀化的一大特点。当时的数学著作把用歌诀写成的算题称做“难题”。张爵与程大位等明代算家认为，这种出题形式始于刘仕隆的《九章通明算法》。程大位《算法统宗 · 难题附集杂法序》解释“难题”称：

难者，难也。然似难而实非难。惟其词语巧捏，使算师一时迷惑，莫知措手。不知难法皆不离于《九章》，非《九章》之外。其难题惟在乎立法，立法既明，则迎刃而破，又何难之有哉？今分列九章，立法明辨，附集杂法于《统宗》之后，俾好事者共览云。

实际上，用歌诀来编写算题在刘仕隆之前早已存在。朱世杰《四元玉鉴》“或问歌彖门”以歌诀形式编写了12个题目。这些问题多次被明代算书引用，只是个别文字有改动。程大位的著作中就有其中第2，4问的歌诀，但是他不知道它们在刘仕隆以前就存在了。

刘仕隆《九章通明算法》附了33个用歌诀写成的题目，产生了十分重要的影响，开明代歌诀化命题之风气。

15世纪中期的吴敬对用歌诀编写算题起了推波助澜的作用，他的《九章算法比类大全》（仅比刘仕隆的著作晚26年）用歌诀诗词形式编写的题目有331个，是刘仕隆编写题目的10倍之多。几十年之后，王文素也在编写完成《算学宝鉴》之后，“又韵诗词三百余问，分十二卷以续于后。”张爵《九章正明算法》中收录此类算题114问，占全书四卷之一卷。程大位《算法统宗》卷13到卷16收录歌诀化题目108问，总为“难题”，而且在前12卷中还有一些这种类型的题，加起来接近全书595题的1/5。16世纪后期的其他数学著作，包括珠算著作，如徐心鲁《盘珠算法》、柯尚迁《数学通轨》等书，也都大量地引录这种类型的题目。这情况表明，15世纪以后，以歌诀诗词形式命题成了时尚。

写诗作词本是中国传统社会文人的拿手好戏，不会做诗写词基本上算不上文化人。数学家用诗词歌诀表达算题，当然不是一件困难的事情。他们把令人望而生畏的数学内容用诗词歌诀的文学语言表述出来，使之文学化、歌诀化、趣味化，对数学知识的传播起了不小作用，特别是某些题目颇受百姓群众欢迎，在娱乐消遣中就记熟于心中，不少算题在不同的数学著作中被互相传抄，在民间广为流传，代代相沿，至今仍为一些人所津津乐道。例如，将《孙子算经》“物不知数”问题的解法编成歌诀：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝。七子团圆正半月，除百令五便得知。

华罗庚的数学科普读物《从孙子算经谈起》起首就引用了这首七绝。

明代算书中的歌诀化题目是用多种诗词格式编写而成的，有五言、六言、七言等诗歌，也有各种词牌写成的，如凤栖梧、双捣练、清江引、山破羊、醉太平、雁儿落、皂罗袍、梅气清、西江月、水仙子、鹧鸪天、驻马听，等等。数学家们通过诗词歌诀形式，把枯燥的数学问题编成令人兴趣盎然的生动故事，变成题材广泛的实际生活和社会问题，包括社会、经济、文化生活的方方面面。如有写郊游、丈田、牧羊、交易、女儿省亲、农妇纺织、古寺僧人、体育游戏等日常活动者；有写自然风景、风土人情、厅堂古塔、大川名山者，有写苏武牧羊、唐僧取经、诸葛统兵等家喻户晓的历史人物和传说故事者；还有写商人合伙经营、分配红利、雇佣劳工等商业活动者，也有书生读书、志怪故事（如三足团鱼）、水陆行路、哑子买肉、僧分馒头、以碗知僧、排鱼求数、问甲纪年、沽酒问价、鸡兔同笼等趣味故事。题材十分广泛，语言浅显易懂，生动活泼，富有情趣，富于形象色彩，具有浓厚的生活气息。

今择《算法统宗》三例说明之。卷十四一首七律如下：

赵嫂自言快绩麻，李宅张家雇了他。李宅六斤十二两，二斤四两是张家。

共织七十二尺布，二人分布闹喧哗。借问卿中能算士，如何分得的无差。

这是一个在明代数学著作中多次出现的歌诀题目。这个题目本身不复杂，是个衰分问题，题意为李、张二家分别出麻6斤12两和2斤4两，织成72尺布，问两家应各得多少布？题目把这样一个简单的算题编成一个十分生动有趣的故事，塑造了一位勤劳能干的农村妇女赵嫂，她同时受雇于李张两富家，为其绩麻纺织。题目开首两句14字，就描绘出赵嫂这一人物形象：贫家妇女，勤劳干练，心直口快，手儿巧、活计重、工效高，靠出卖劳动力养家糊

口。尤其是“自言快绩麻”五个字，就把赵嫂这一人物的个性特征勾画得活神活现、栩栩如生了。而富户则既自私又颟顸，账算糊涂，为分72尺布而大吵大闹、互不相让。末尾两句，巧妙地提出了所要回答的问题，最后达到了以诗命题的目的。整首诗语气衔接连贯，结构紧密无缝，一气呵成。①

卷十六《鹧鸪天》：

百兔纵横走入营，几多男女斗来争。一人一个难拿尽，四只三人始得停。

来往聚，闹纵横，各人捉得往家行。英贤如果能明算，多少人家甚法评？

吴敬和程大位的著作中都有此题。这里描述了一幅园中逐兔图。百只兔子在一个园中东奔西跑，避免被抓住，而几十个男男女女在园中竞相逐兔，你追我堵，左冲右撞，呼喊叫笑。这一片欢腾的景象仅用六字“来往聚，闹纵横”便勾画出来了。本题题意十分简单，园中有100只兔和一群人，每3人可得4只兔，问有多少人。用乘除法即可解。

卷十四《水仙子》：

元宵十五闹纵横，来往观灯街上行。我见灯上下，红光映。绕三遭，数不真。

从头儿三数无零，五数时四瓯不尽，七数时六盏不停。端的是几盏明灯？

这是一首水仙子，以元宵节观灯为背景提出一个同余方程问题。元宵节的夜晚，各种各样的花灯挂满街头，灯光辉映，满街通明，观灯者人头攒动，人们一遍又一遍地品评、比较各式灯笼。也有好事者，希望数清有多少灯，可灯数太多，数了几圈也数不清。借此提出问题。题目十分有趣，意为：街上有灯不知其数，三三数之无余数，五五数之余四，七七数之余六，求灯数。这是一个一次同余方程组问题，需要解同余方程组：

$$x \equiv 0 \pmod 3 \equiv 4 \pmod 5 \equiv 6 \pmod 7$$

歌诀化题目注重的是易记、易传、有趣，富有吸引力的特点，在修辞音韵上则不十分计较，有些甚至就是“口号”，更适合一般大众百姓的口味。歌诀类算题具有审美的认识、教育和愉悦的作用，会使读者获得美的享受。所以只要搞明了题意，“立法既明，则迎刃而破”。

第二节　明代数学中的各种“杂法”

“杂法”在明代相当流行。在刘仕隆《九章通明算法》、吴敬《九章算法比类大全》、王文素《算学宝鉴》、张爵《九章正明算法》、徐心鲁《盘珠算法》、程大位《算法统宗》和《算法纂要》、黄龙吟《算法指南》、柯尚迁《数学通轨》、佚名《铜陵算法》、《书算玄通》、《算法便览》等书中均载有一些杂法，只是多寡不一而已。

所谓“杂法”，即是非主流的算法，依传统数学观点看，是可有可无的数学内容。它们对于学习数学的人来说，能掌握更好，不能掌握也无妨。明代流行的杂法有：“金蝉脱壳”、“二句字诀”、“写算”、“一笔锦”、“河图洛书”、“纵横图”、“一掌金”、“黄钟五音相生图”、“律吕相生图”、“统纪历年”、“袖中定位”、“孕推男女”、“占病法”、“掌中定位”、“悬空定位”、“六壬课数”，等等。

上述杂法中，属于数术和迷信的有：“算生死诀”、“占病法”、“孕推男女”、“河图洛书”、“纵横图”和“六壬课数”等，它们在市井百姓中颇为流行，信之者颇多。例如，

① 刘亮，采用诗词形式命题是《算法统宗》的一大特色，新珠潮，1986，(4)：17~20。

“孕推男女”原出于《孙子算经》，属于数术，在数学上没有任何意义，且所论问题也属荒诞，生男生女与几个数字没有关系。

属于音律和历法计算的有“黄钟五音相生图”、“律吕相生图”、“统纪历年”等。“一掌金”、“袖中定位掌图”等都是过时或不适用的东西，“纵横定位分别九图”运行复杂，运算繁难，都没有适用性。这些内容属于数学神秘主义，有故弄玄虚、惑众玄己之嫌。

杂法中也有一些相当重要的内容。“金蝉脱壳”、“二句字诀”等虽然运算程序较多，但可以省却大量珠算口诀，易学易会，在珠算技术中占有一席之地，常被使用。“写算”和“一笔锦”是笔写算术方法，应属中算中一枝奇葩。各种纵横图既有继承杨辉的，也有明代数学家自己设计的，是重要的数学内容。

“金蝉脱壳”，又名“乘除易会诀”，还有“大扒皮”、“剥皮”、“混归”、“飞流归”等别名，是一种不费任何功夫就可以学会的方法，用筹或算盘计算都很容易，特别是使用算盘计算时不必记忆大量的口诀。吴敬的“乘除易会算诀”：

乘法除双还倍数，须知去一要添原。归除满法过身一，实无折半当身五。

不用九归并小九，只将二十字为先。乘除加减皆从此，万两黄金不与传。

程大位把乘除法分开来，用两首歌诀：

因乘歌：起双下加倍，见一只还原。倍一挨身下，余皆隔位迁。

九归并除歌：加双下除倍，加一下除原，倍一挨身下，余皆隔位迁。

徐心鲁《盘珠算法》则用文字说明，称为“金蝉脱壳诀法”：

蠢子清曰：躭闲功夫，不能归除，分物易明，不拘多少，分物在位，人数在，只管一进一除。此一位进除殆尽，又从次位进除之，次位进除又尽，又下次位进除之，直进除到末位俱尽，方才是数，科量呼喝数目是也。

金蝉脱壳法原理十分简单，计算乘法时，实数每次减二、得数加法数之倍，或实数减一、得数加法数。计算除法时，商数加二、从实数中减法数之倍，或商数加一、从实数中减去法数，直到实数减尽而止。此法后来还有发展，在一倍和二倍的基础上增加五的倍数。

二字奇诀：“有除隔位进，无除挨身进。”（《算法统宗》）实际就是金蝉脱壳“起一”的情形。

以上二法，原理简单，易学易会，但运算繁琐，所以程大位说：“金蝉脱壳并此二字奇诀，布算繁叠，只是小智之术，蠢子顽儿之数，若遇开方等法，则不能施，又不如乘除简易。此小智之术，不学可也。”其他人也有类似的说法。

“写算”是吴敬《九章算法比类大全》中最早介绍的一种用于计算乘除法的笔算方法，又叫“铺地锦”。此法是从国外传来的。后来王文素《算学宝鉴》、徐心鲁《盘珠算法》、程大位《算法统宗》等多种著作都有记载。“写算”计算乘除法都需要先画好计算图，乘法先画“格眼”，将实数置于上方，法数置于右侧，将两数字相乘的结果填入相应的格眼中，最后把对角线上的数加在一起，满十进一于前位，便得结果。写算除法比较麻烦一些，画图较为复杂。

“一笔锦”，在《盘珠算法》中叫“井字法”，也是一种笔法方法，实际上是把珠算过程记录在纸上的结果。程大位的《算法统宗》中有较详细记述，并配有较多实际计算例题。这是中国数学家自己的方法。

写算在后来影响很大，清代数学著作涉及写算的很多。此法也传到了朝鲜，并且十分流

行，朝鲜数学家黄胤锡（1729～1791）还把它用于天元式乘法运算上。朝鲜数学家不仅采用了写算的乘除法，还把写算乘法和一笔锦结合在一起改进了写算的除法，称之为“文算法”。

第三节　珠算的发展与普及

目前所掌握的早期珠算史料主要来自诗词、小说、绘画等作品中的零星记载。这些资料表明珠算在元代已较流行。元末明初之后，在数学著作中开始有珠算的内容。明代是珠算发展和普及的重要时期，各种珠算算法越来越成熟，最终取代了自古以来就使用的筹算。

一　元明时代几项珠算史料所反映的情况

在元代晚期的数学著作中有一些使用珠算的迹象，元代算盘确已在社会上广泛流传。现在已经发现的一些元到明初的史料可以较好地说明这一点。例如：

《乾坤一担图》中的算盘。《乾坤一担图》是元中叶画家王振鹏的作品，是至大三年（1310）秋八月完成的，反映一老人所挑货郎担，其中装满了各种日用品，如图 24-3-1 所示，清晰可见一把算盘。

在元杂剧中也有用算盘的例子。《元曲选》中“庞居士误放来生债”杂剧中有“去那算盘里拨了我的岁数”的戏词。

陶宗仪《辍耕录》（公元 1366）中有用算盘珠做比喻的例子。

《魁本对相四言杂字》和《新编对相四言》中的算盘图（图 24-3-2）。这是明初一部儿童看图识字读物的两个不同的版本。其中有算盘与算筹，图像十分清晰，框、梁、档、珠俱全，是上 2 珠下 5 珠的算盘。

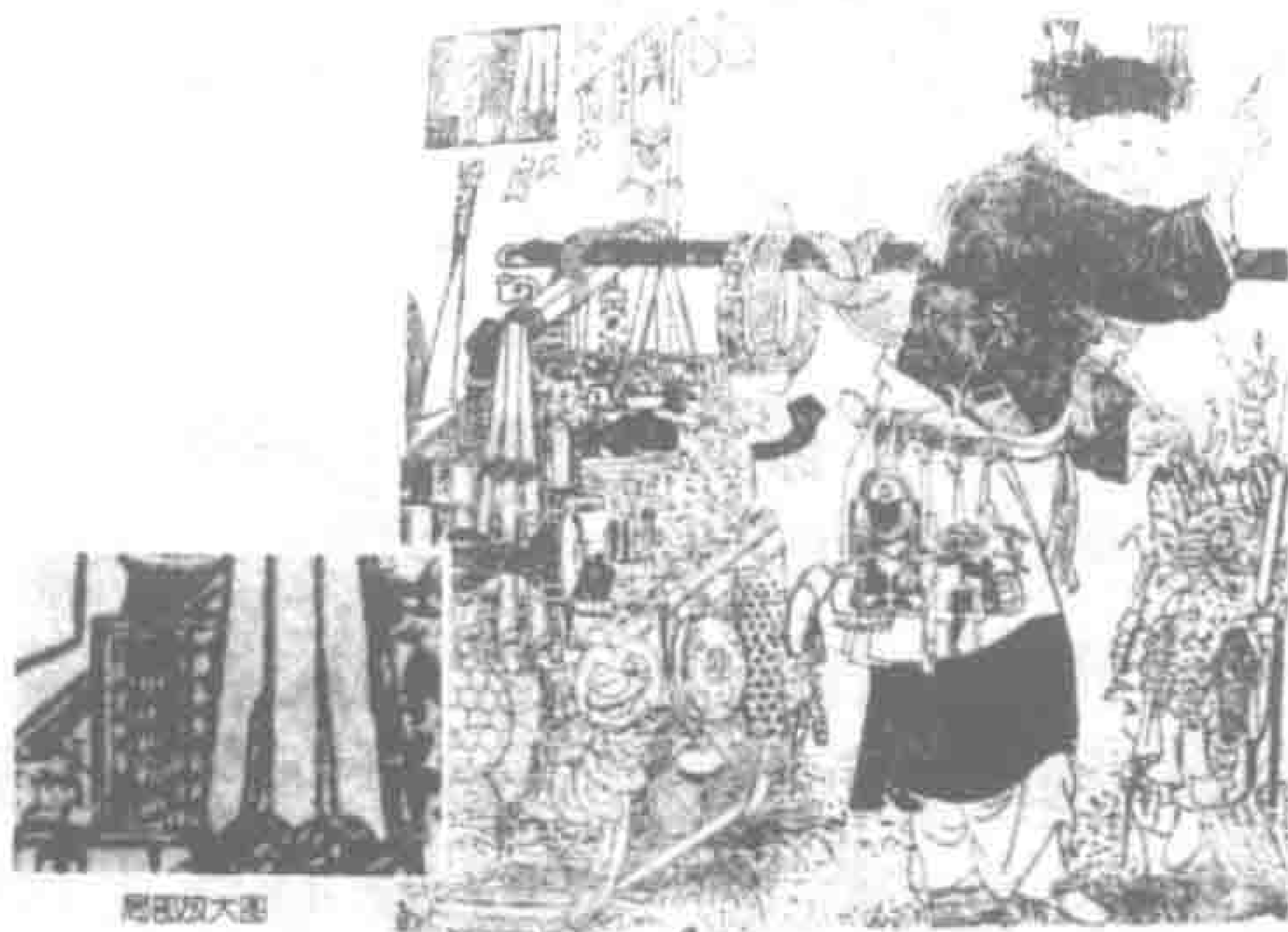


图 24-3-1　元代的《乾坤一担图》

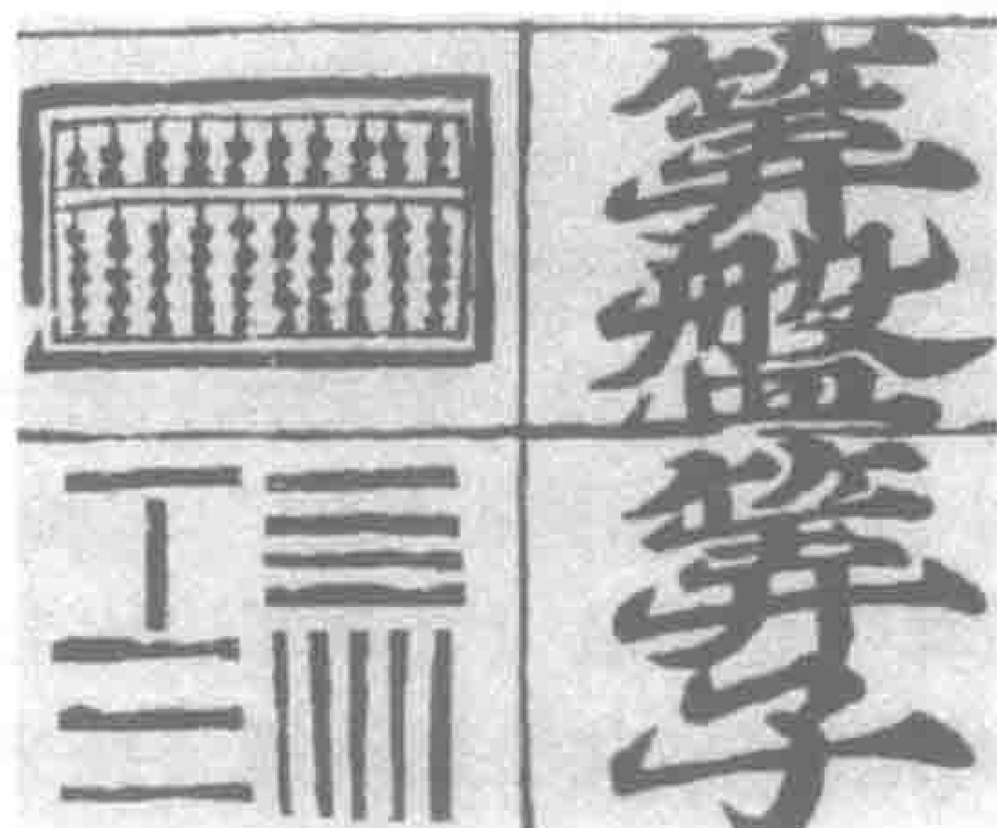


图 24-3-2　算盘与算子

《鲁班木经》中的算盘规格。《鲁班木经》是给木匠定的工作标准，传本无刊刻年代，其署名是“北京提督工部御匠司司正午荣汇编、局匠所把总章严同集、南京递匠司司承周言校正”，应是明永乐十九年（公元 1421）以后的作品。其中记录了制作算盘的规格。①

① 关于上述各项史料，研究者已有相当细致的分析与研究，这里只略言其概。可参看华印椿，《中国珠算史稿》，第 53～66 页。

上述史料表明，从14世纪初期到15世纪初，算盘已在社会上广为流行。只有在民间已经对算盘的使用相当广泛的时候，它才能成为走街串巷的货郎担所贩卖的商品。算盘已成为百姓生活中重要的用具，不论市井百姓，还是上流社会，都十分熟悉它，所以不论在杂剧中使用，还是在日常生活中用于打比方，都能被听众和读者容易地理解和体会。就连不谙世事的孩童也对算盘耳熟能详，因此算盘才会作为看图识字的例子被列入儿童学习读物中。社会对算盘的需求也越来越多，大小规格颇不统一，制作算盘的木匠越来越多，所以朝廷管理部门工部要制定朝廷所用算盘的规格。总之，在14世纪和15世纪，算盘已为全社会所熟悉。

二　数学著作中对珠算的反映

虽然珠算在元代就很普及了，但是在数学著作中表现珠算的内容却比较晚，专门珠算著作的出现则更晚。元代珠算流行，但数学著作仍然以筹算作为计算工具。明代前期基本上是筹算与珠算并用的时代，16世纪中期以前的数学著作，或者是以筹算为主要计算工具，或者无法断定是用筹算还是珠算。因为筹算的历史比珠算久远得多，所以数学史和珠算史研究者在思维上往往考虑筹算对珠算的影响较多，而反过来研究珠算对筹算的影响则较少。珠算的产生和发展无疑受到了筹算的极大影响，同时珠算算法对筹算算法也有一定的影响，特别是在珠算即将代替筹算成为主流计算工具之前，有一段筹算与珠算并用的时间。在此过程中，某些珠算算法表现出了其便捷之处，十分自然地会被筹算所采用。在这种情况下，数学著作中就会体现一些珠算所用的算法，反映出一些珠算的情况。

早在《算学启蒙》中就有了除法的撞归算法，后来成为珠算中最重要的口诀之一。在元末明初的数学著作《算法全能集》和《详明算法》等书中都把九九乘法表口诀、归除口诀、撞归口诀等歌诀列入其中，并反复设例演算，就是珠算与筹算交互影响的反映。在第二十五章第一节将看到，明初严恭在《通原算法》中的开方算法，取消了方、廉、隅的进退位变化，直接给出计算数值。这可能是在算盘上实现开方运算的结果，也是数学著作中对珠算的一种反映。

明代前期和中期的数学家大多还是按照传统的惯例，用筹算的表示符号和写作习惯来完成自己的著作。但是，他们肯定是知道珠算的，有些还是打算盘的高手。有确切证据表明，数学家吴敬、王文素、唐顺之、顾应祥等对算盘十分熟悉。例如，唐顺之就是一位珠算能手，《元明事类钞》引明《李开先集》中所记一个他打算盘的事例：

> 唐顺之至庐州，适府有算粮事，唐子乃索善算者十余人，人各与一算，算讫，记其概只数字，凡三四易，自拨盘珠，每一数亦只记数字，不移时，一府钱粮数目清矣。老书算咸惊其神速。①

唐顺之领着十来个人在极短时间内就将一府钱粮算清楚了。他“自拨盘珠”，达到了“神速”，可见他对珠算不仅仅是一般的熟悉而已。

这些数学家对珠算如此熟悉，在他们的数学著作中反映珠算的一些成果也是必然的。吴敬的《九章比类算法大全》就有不少珠算口诀，如加减法的上法和退法口诀、起五诀、成十诀、破五诀、破十诀等，还有先十法、乘除易会诀等，都是与珠算密切相关的算法和口

① 清·姚之骃，元明事类钞，卷18，《四库全书》，第884册，上海古籍出版社，第305页。

诀。该书还提到了算盘，在“河图书数”下的注文中有：“不用算盘，至无差误，实为妙术也。”并在相应的歌诀中写道：“免用算盘并算子，乘除加减不为难。”

王文素的《算学宝鉴》反映了更多的珠算内容。王文素和吴敬一样，在书中记录了一批珠算口诀，并在算法上有一些改进之处，如把“身前因”发展成为“身前乘”、发展了“归总还零”法、创造“截法实乘”，等等。《算学宝鉴》中也明确提到了算盘，该书卷五有一节名“众九相乘”，就是专门针对算盘的算法：

> 解曰：众九相乘，用子甚多，算盘子少，乘则不便，既乘已毕，只动一子居下，余仍如故，……法实俱各二位者，只于实尾起一子，那①于尾后第二位，即得答数。

“众九相乘”就是乘数和被乘数的各位数都是由若干个 9 组成的乘法，如果在算盘上用普通的乘法计算，需要用到顶珠和悬珠，十分不便。王文素用损乘法计算，十分巧妙便捷。《算学宝鉴》中还有其他一些与算盘相关的内容。例如，乘除定位有“盘中定位法”，计算乘法时有“实列于左上，法列于右下”，计算开方法时也是一行横列商实法廉隅各项，用珠算开方。这都是珠算方法的表现。

顾应祥的著作都是讨论宋元数学问题的，但是他的著作中也不可避免地出现与珠算相关的方法。他在《测圆海镜分类释术》和《测圆算术》中要做大量的开诸乘带从方运算，其开方式也是横列一行，并有“实左上”之类的用语。这和王文素的开方一样，也是珠算方法的反映。

关于吴敬的《九章算法比类大全》和王文素的《算学宝鉴》是珠算还是筹算著作，学者有不同的看法，争论不休。概而言之，16 世纪中期以前专门讨论珠算的数学著作十分罕见。这里应该说明的是，这些著作都完成于珠算完全取代筹算成为主流计算工具之前，珠算和筹算是交织在一起的，数学著作的作者既不可能完全摆脱传统的筹算，也不可能完全不受珠算影响。他们所处的是一个珠算与筹算并用的时代，筹算没有完全退出历史舞台，珠算也没有一统天下。在这样背景下，数学著作既采用筹算的体例与表现方法和手段，也要自觉不自觉地反映一些珠算的内容。

在讨论 15 世纪和 16 世纪的数学著作与珠算的关系时，有一本书不能回避，即夏源泽的《指明算法》。现传《指明算法》的版本很多，其中有算盘图，可以看做是珠算的专著。但是都是清代的，没有发现明代的版本，也没有署夏源泽的名字，都经过清代学者的校改，无法分清原有内容和后来加入的内容。该书早于吴敬的《九章算法比类大全》11 年，与同时代的吴敬和一个世纪之后的王文素等人的著作相类比，《指明算法》似不会完全以珠算形式写成。但是，《指明算法》肯定与珠算有不少关系。

三　珠算的普及与筹算的消失

16 世纪后期，珠算与筹算的地位发生了逆转，珠算发展成了主流计算工具，筹算退出历史舞台。这主要表现在以下几个方面：

首先，珠算专门著作大量出现。1573 年后的 30 年间，珠算专门著作像雨后春笋一般大量出现，有十几部珠算著作流传至今，它们是：《盘珠算法》上下卷（1573），徐心鲁订正。

① 那：音 nuó，有移动义，宋明还常用。后作挪。

《数学通轨》（1578），柯尚迁撰。《一鸿算法》二卷（1584），余楷撰。《算法统宗》十七卷（或十二卷，1592），程大位撰。《算法纂要》四卷（1598），程大位撰。《算学指南》二卷（1604），黄龙吟撰。《铜陵算法》上下卷，佚名。《新镌九龙易诀算法》，联捷堂刊行。《书算玄通》，即《新锓天下备览文林类记万书萃宝》卷之三十六。《算法便览》，即《新锓精拣天下便览博闻胜览考宝全书》卷十四。《算法门类》，即《新锓崇文阁汇纂士民捷用分类学府全编》卷十四（1607）。《精採算法》（1607）。

还有其他一批著作也使用珠算进行计算，如朱载堉的几部著作：《算学新说》二卷（1603 年刻）、《周髀算经图解》一卷、《嘉量算经》三卷（1610），《圆方勾股图解》等。为了乐律计算的需要，朱载堉须计算 25 位数字的平方根，他用有 81 档的大算盘，或把几个拼在一起进行计算。

珠算著作的大量出现，使我国的珠算著作的出版达到了高峰时期，珠算全面普及。《盘珠算法》与《数学通轨》奠定了明末珠算的算法基础。而《算法统宗》和《铜陵算法》，则对后世的发展产生了极大的影响。这两部书都在明清时代风行宇内，为学珠算者所必读，也都被介绍到国外。两书都被反复改编、校订、增订、扩展或缩编。围绕二书各自形成了同源共祖的不同版本系列。由《算法统宗》形成的各种版本就达到了几十种之多。由《铜陵算法》结合《指明算法》演化出来的版本亦复不少。这样，围绕两书形成了两个珠算著作的版本系统，一个是《算法统宗》为中心的系统，另一个是由《指明算法》和《铜陵算法》形成的系统，清代有不少珠算书都是这两个系统的组成部分，都是由它们而来。两个系统的珠算内容虽大同小异，但编排结构却自成体系。

其次，珠算算法得到空前发展。珠算是在筹算的基础上发展起来的，明代珠算中常用的算法有不少在唐宋元时代的筹算著作中就已经有一定的发展，如古代的商除法、归除法、飞归法、撞归法、定身除、求一乘除法、开平方、开立方等，都是在筹算著作中开始发展起来的。在明代，这些算法都移植到了算盘运算中，并且得到进一步完善和改进，还增加了不少新内容，《盘珠算法》和《数学通轨》等著作中把过去零散在各书中的公式做了系统整理。《盘珠算法》较为全面地论述了珠算的口诀、运算和操作方法：第一，对珠算口诀的介绍与说明，包括加法的上法诀、下五诀、进十诀，减法的下法诀、起五诀、退十诀，除法的归法诀、归除诀、撞归诀，乘法的下乘法诀、九九乘法诀，乘除法共用的“金蝉脱壳诀”、“二字奇诀”等。还包括给初学者准备的“初学累数算法”。其中的九九乘法表有一些特殊，没有一乘的口诀，但是增加了十乘的口诀，如“十二二十”、“十三三十”之类。第二，配有详细的算盘图式，全书共列出算盘图 54 幅，具体展示各种口诀在实际计算中的应用与操作过程。例如：

> 如有田九百一十四亩八分九厘，每亩收粮二升九合。问：该粮若干？答曰：二十六石五斗三升一合八勺一抄。
>
> 九九八十一，二九一十八，八退二进一十。八九七十二，二八一十六，六退四进一十。四九三十六，六上一去五进一十。二四如八，八上三去五进一十。一九如九，九退一进一十，三位上打。一二如二，二位上打子。九九八十一，一下五除四。九九八十一。八退二进一十。
>
> 如有银二千六百五十三两二钱，五百一十五人分之。问：每人该银若干？答曰：五两一钱五分一厘八毫二丝三忽。

五二倍作四，逢五进一十，五除五，五五除二十五，二除十还八。五除十还五，逢五进一十，一除一，五除五，五除十还五。五二倍作四，逢五进一十，五除五，五五除二十五，二除十还八，五除十还五。逢五进一十，一除一，一上四去五。五除五，五除十还五。五四倍作八，八除八，八除十还二。五八除四十。四下一去五。

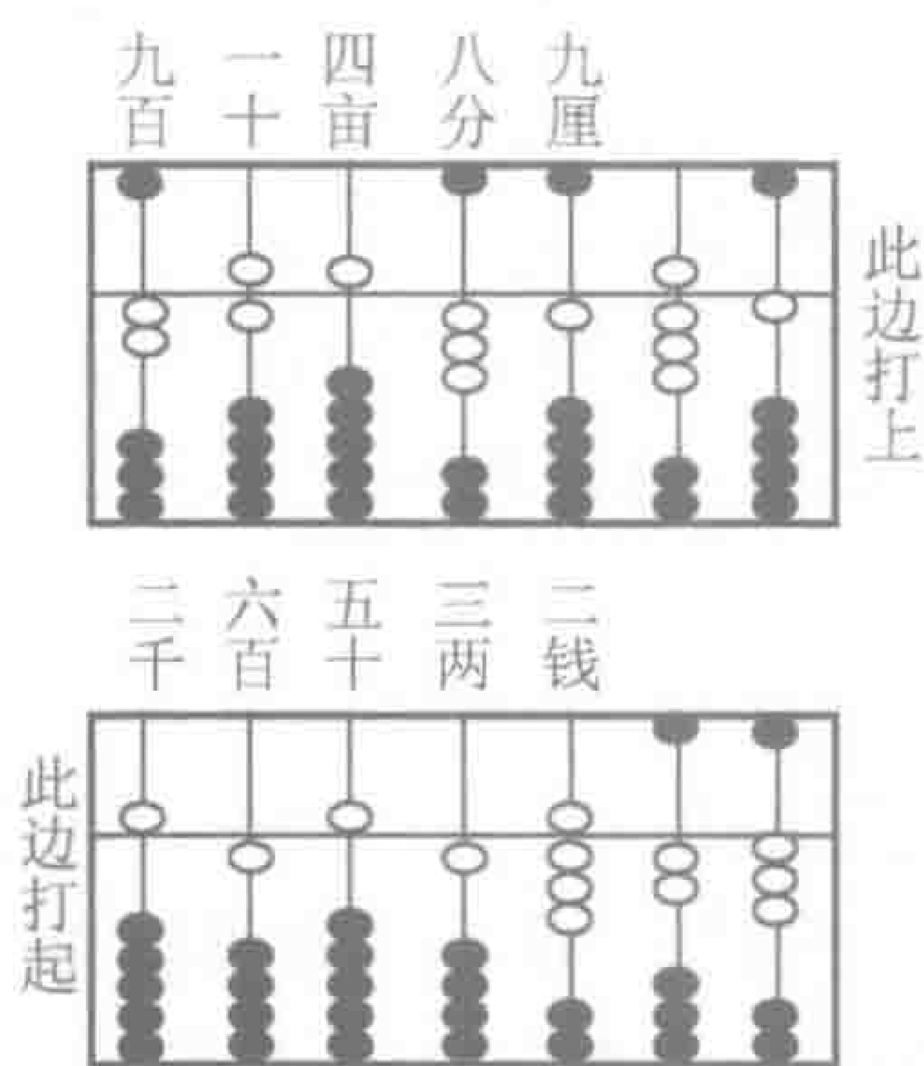


图 24-3-3　《盘珠算法》中的算盘图

在计算除法时（图 24-3-3），直接把剩余尾数作为商值处理。在本例中，商得 5158 后，余 23，原书直接把 23 作为答案，所以答案为“五两一钱五分一厘八毫二丝三忽”。书中的其他题也做了同样的处理。第三，所绘算盘图式均为上一珠下五珠，并用白子或黑子来区分已用子或未用子，54 个图例全部如此，但是在实际计算时会出现算盘一挡超过 10 的现象。例如，“八因法式”中出现这样的问题，但书中给出的图式都是最终计算结果，没有交待中间计算算盘图式，不知如何处理，可能是以心算配合完成。

《数学通轨》对珠算的介绍也比较全面，其中有以下几点值得注意：第一，书中给出的“初定算盘图式”，共 13 档，并对算盘的结构给予说明，算盘是上二珠下五珠，而《盘珠算法》给出的算盘图是上一珠下五珠。在一般的算例中所绘出的均为 10 档，但在“算盘法实数”下给出的算盘是 16 档。第二，《数学通轨》设定的读者对象是初学者，因此特别重视加减乘除练习，列出各种练习的算盘图式。从这些图式可知，上法（即加法）练习是从左向右打上，而退法（即减法）练习是从右向左打，这一点与其他珠算书不同。第三，《数学通轨》中所涉及的珠算口诀与珠算技术较为全面，后来所用到的口诀全部出现了。

《算法统宗》中集珠算算法之大成。原来零零散散的口诀，也被进一步系统化和改进完善，细化到打算盘的运指技法上来。例如，此前的“一起四作五”变成了“一下五除四”，前者的拨珠顺序为“先去四后下五”，而后者的拨珠顺序为“先下五后去四”，下五去四可一气呵成，比先前的先去梁下四珠，再拨下梁上一珠要合理得多。这相当于现代社会中使用高科技电脑的打字指法一样。珠算已经当成一种技术来教和学了。为了提高加法的运指速度，不少珠算著作中配备了专门的练习题，有的至今还在使用。

还有，珠算由非主流转变成了主流。明末，用筹算方式写成的数学著作越来越少，到清初，数学家已经完全不懂筹算了。17 世纪，流行“四算”，即珠算、写算、笔算和纳贝尔筹算[①]，传统的筹算已不为人所知。1713 年，清五官司历何国柱到朝鲜进行大地测量，见朝鲜数学家洪正夏（1684 ~ ?）用算筹计算，大为惊异，说“中国无如此算子，可得而夸中国乎？”向洪正夏要了 40 根算筹。[②]

① 例如，方中通在《数度衍》中对“四算”有详细的介绍。

② ［朝 · ］洪正夏，九一集，金容云编，韩国科学技术史资料大系，数学篇（2），骊江出版社，1985 年，第 493 页。

第二十五章　明代的若干数学工作

元中叶到明末在同余方程组和不定方程的解法、纵横图的研究、九进制的研究以及弧矢论等方面，都有一定的创新之处。开方及高次方程的数值解法，本来是宋元时期的重点研究内容之一，明代数学家也颇多讨论，他们的有关工作既从一个角度反映了明代数学家对宋元数学的继承情况，又体现了开方从筹算向珠算过渡的过程。

第一节　开方及方程的数值解法

开方和高次方程的数值解问题仍是明代数学史上一个重要的节目，几乎所有明代算书都或多或少涉及有关的内容。

一　元中后期的增乘开方法

元代中后期的数学著作《透帘细草》和《丁巨算法》等书，与《算学启蒙》和《四元玉鉴》相去不远，朱世杰著作中的增乘开方法及解高次方程的数值方法的影响仍然较大。在《透帘细草》中，既有利用开方作法本原图的立成开方法，又有增乘开方法。如《永乐大典》卷16344载其中一问为：

今有立方、圆、平方各一所，共计积二十二万九千六百七尺。只云立方面多如立圆径七尺，其平方面如立圆径三分之二。问：三事各多少？

法曰：以立方开之。

其“草”列出三次方程：

$$225x^3+3088x^2+21168x=33014016$$

之后接着列出的开方细草是：

计积为实三千三百一万四千一十六于头位，从法二万一千一百六十八于下位，廉法三千八十八于从法下，隅法二百二十五于廉之下。从法一进，廉法二进，隅法三进。上商四，共隅法相呼四因，廉法得一百二十万八千八百，廉法相呼生于从法，得五百四万六千八百八十，命商除之，余有一千二百八十二万六千四百九十六。又四因隅法生于廉法，得二百一十万八千八百，又生于从法，得一千三百四十八万二千八十。又四因于廉法得三百万八千八百。[①]从法一退，廉法二退，隅法三退。上商八，生于廉法，得三万一千八百八十八，又八生于从法，得一百六十万三千三百一十二，命商除之，恰尽，得立圆径。内加七尺为立方面。二因三除，为平方面也。合问。

这是标准的增乘开方法。

---

① 《永乐大典》于此处衍“又八因隅法一退，于廉三百一十八万八千八百”凡19字，今删。

《丁巨算法》中的开平方法是传统《九章》的开方法，即立成法，而开立方题则是用增乘开方法。该书还有一题是用试商后直接减积的开平方方法。元末的另一部数学著作《算法全能集》也用同法开方，其开方法云：开方之法“其法最难取算，然公私亦少用之。但平方一法间自用之取算”。①从书中例题和解法看，作者对开方法了解不多。该书求 1444 的平方根的术文如下：

开平方法：置总步②在地，用商三三如九。另于上退二位置三，合商十。下亦另置三为方法在地。止有五百四十四。却以方法三，倍之得六。又以六商除，六八四十八，续上商八在地。止有六十四，方下亦置八，以八八呼除六十四，恰尽。商得三十八步为一方面。其余开方皆仿此。

这里，初商和次商都是直接将试商的平方从实数中减去，而且次商是用方法与余实商除而得。16 世纪晚期朱载堉与程大位等人的归除开平方法与此极为相似。

二　《通原算法》的开方法

明初严恭《通原算法》开方时出现了一种新的现象。兹以求 49836032 的立方根说明之：

术曰：置本积为实，借一算为下隅，常超二位，约实。上商三百③尺，乘下隅得三百尺，为廉法。以上商三百尺与廉三百尺相乘，得九万尺，为方法，与上商呼除本积：三九除去二千七百万，余积上存二千二百八十三万六千三十二尺，为实。三因廉得九百尺，三因方得二十七万尺。续上商六十尺，乘下隅得六十尺，却乘廉得五万四千尺，并入方法。又上商六十尺与下隅六十尺相乘得三千六百尺，亦并入方法，共三十二万七千六百尺，为方法。与上商六十尺呼除本积：三六除去一千八百万，再呼二六除去一百二十万，再呼六七除去四十二万，再呼六六除去三万六千尺，余存三百一十八万三十二尺。再于方法内更加原廉五万四千尺，又倍商隅三千六百得七千二百尺，亦并入方法，共三十八万八千八百尺。次以上商三百六十，三因得一千八十为廉法。续上商八尺，乘下隅，得八尺，却乘廉得八千六百四十，又上商八尺，与下隅八相乘，得六十四尺。亦并入方法，共三十九万七千五百四尺，为方法。与上商八尺呼除本积：三八除去二百四十万，再呼八九除去七十二万，再呼七八除去五万六千，再呼五八除去四千尺，再呼四八除去三十二尺，适尽。得立方面三百六十八尺，合前问。

上述过程可表示为：

---

① 元 · 贾亨，算法全能集，见：中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第一册，河南教育出版社，1993 年，第 1345 页。

② 步：《永乐大典》所引作“法”。

③ “三百”，《永乐大典》所引讹作“二百”，依所引《透帘细草》同问校改。

表 25-1-1　《通原算法》开方程序

项　目	第1步	第2步	第3步	第4步	第5步	第6步	第7步
商		300	300	360	360	360	368
实	49836032	22836032（=49836032－90000×300）	22836032	22836032	3180032（=22836032－327600×60）	3180032	0（=3180032－397504×8）
方		90000（=300×300）	270000（=90000×3）	327600（=270000+54000+60×60）	388800（=327600+54000+3600×2）	388800	397504（=388800+8640+8×8）
廉		300（=300×1）	900（=300×3）	54000（=900×60）	54000	1080（=360×3）	8640（=1080×8）
隅		1	1	60	3600	7200	8

《永乐大典》录《透帘细草》也有此题，并说“旧草冗繁，今以透帘开之”。据其草知道，《透帘细草》此题开立方术中，在求次商时用公式法进行减根变换，而在求三商时用增乘法，并无特别之处。而《通原算法》的特别之处在于：整个开方过程中没有方、廉、隅的进退位变化，而是直接计算数值，明王文素、顾应祥、程大位等人都采用了这种做法。这是开方术与珠算相结合的一个信号。在筹算计算中，实、方、廉、隅上下排列，各行筹式的数字是固定的，所以必须通过进退位来实现上下对位计算。而在算盘中，开方的实、方、廉、隅横行排列，它们之间无法对位，只有通过算盘定位来决定数值大小，这样，进退位变换的作用就没有了，所以就直接在相应的数字上拨数，而不进行进退位变换来实现减根变换。王文素之后的珠算开方运算，都是这样做的。《通原算法》的开方法有借算、步算等步骤，应是筹算开方法，但是已有了珠算开方的一些要素，为珠算开方的发展奠定了基础。

三　吴敬、王文素等的开方法

15世纪中期以后，吴敬、王文素、顾应祥、唐顺之、周述学等的著作都大量涉及开方问题。吴敬《九章算法比类大全》卷10专讲各色开方，是全书最重要的内容之一。王文素《算学宝鉴》卷33到卷41全部都是开方及其应用。顾应祥《测圆海镜分类释术》和《测圆算术》两书也以开方作为研究重点。周述学《神道大编历宗算会》卷4和卷5专论开方，其内容基本上来自吴敬的著作。这些著作中都有开高次方的内容，吴敬有开五乘方（6次方），王文素举例到开八乘方（9次方）。其中吴敬和周述学所用的肯定是筹算开方术，珠算史家认为王文素所用的是珠算开方法。以往的文献没有讨论过顾应祥的开方法，其法基本上与王文素法相同。吴敬与王文素等人所用的开方原理大同小异，是在贾宪开方作法本原图指导下的立成开方法，没有用到增乘开方法。设某实积 N 的 n 次方根由初商 a、次商 b、三商 c 三部分组成，即 $N=(a+b+c)^n$，以上各家的开方过程中表现出来的开方原理与减根变换过程可用现代符号表达为下式：

$$(a+b+c)^n = a^n + b\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i+1}a^{n-1-i}b^i +$$

$$c\left[\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\binom{n}{i+1}a^{n-1-i}b^{i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i+1}(a+b)^{n-1-i}c^{i}\right]$$

七隅一
六廉八　乘甲若干一遍得若干　乘乙若干六遍得若干　副并方法○六因得若干　入乙总
五廉二十八　乘甲若干二遍得若干　乘乙若干五遍得若干　副并方法○五因得若干　入乙总
四廉五十六　乘甲若干三遍得若干　乘乙若干四遍得若干　副并方法○四因得若干　入乙总
三廉七十　乘甲若干四遍得若干　乘乙若干三遍得若干　副并方法○三因得若干　入乙总
二廉五十六　乘甲若干五遍得若干　乘乙若干二遍得若干　副并方法○二因得若干　入乙总
一廉二十八　乘甲若干六遍得若干　乘乙若干一遍得若干　副并方法○一因得若干　入乙总
商除八　乘隅法若干得若干　为方法　副并廉隅若干　为乙总
本积若干　以法命甲除积若干　余积若干　以乙总命乙又除积尚余积若干，求丙
上商　初商甲若干　次商乙若干　再商丙若干

图 25-1-1　王文素的开七乘方减根变换说明图

开方过程就是从 N 中分别减去上式右端三项。由于上式右端第三项中的前一小项与第二项有相同的和式部分，并且在具体计算时 a，b 有对称关系，所以，在实际计算时，后面的计算可以借用前面的，且可以用同样的程序。例如，王文素给出开七乘方求前两位根的减根变换过程，见图 25-1-1。其中，甲、乙、丙与上式中的 a，b，c 相对应，“商除”列中的“乙总”相当于上式右端第二项和号部分，各廉最后“几因得若干，入乙总”计算上式右端第三项中前一部分 $\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\binom{n}{i+1}a^{n-1-i}b^{i}$，这里，借用了求“乙总” $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i+1}a^{n-1-i}b^{i}$ 的结果。在计算三商丙（c）时又回复到与求次商乙相同的程序，这样不断反复，直到开方完毕。

为简便又能说明问题，简述王文素开 5 次方一例：

> 四乘方积一万九百九十五亿一千一百六十二万七千七百七十六尺，问：方面几何？
>
> 法曰：置积一万九百九十五亿一千一百六十二万七千七百七十六为实，以一为隅算，开四乘方法除之。常超四位，约实。初商甲二百，置于积上，为法。另置二百于积下，自乘三遍得一十六亿，为隅法。命甲二百除实三千二百亿尺。余实七千七百九十五亿一千一百六十二万七千七百七十六尺。乃五因隅法，得八十亿，为方法，移置积下。以甲生廉求乙。

王文素布置“四乘方问乙数图”和“四乘方问丙数图”，其简化形式如图 25-1-2 所示。王文素求乙草的大意是：依上表第 1 行计算方法、上廉、中廉、下廉和隅，五位相加得

序	商	余实	方法	上廉	中廉	下廉	隅算
1	初商甲200为法生廉	779511627776	5×200^4 =80亿	10×200^3 =8000万	10×200^2 =40万	5×200 =1000	1
2	次商乙50为法，乘廉除实。	乙总命乙除得122949127776（即减1313125万×50=65656250万）	加廉隅共得：1313125万，为乙总。	×50 =40亿	$\times50^2$ =10亿	$\times50^3$ =12500万	$\times50^4$ =625万
3			并廉隅得：1953125万，为丙方	× 1 =40亿 入乙总	× 2 =20亿 入乙总	× 3 =37500万 入乙总	× 4 =2500万 入乙总
4	250为法生廉		丙方：1953125万	10×250^3 =15625万	10×250^2 =625000	5×250 =1250	1
5	再商丙6，为法，乘廉除实。	以丙总命丙，除实，适尽。(6丙总=余实)	并入廉隅共20491521296为丙总	×6 =93750万 入丙方	$\times6^2$ =2250万 入丙方	$\times6^3$ =27万 入丙方	$\times6^4$ =1296 入丙方

图 25-1-2　简化合并后的“四乘方问乙数图、四乘方问丙数图”

8080401001，与余实相商，得 50，续于甲后为法。依第 2 行计算廉隅，皆副并方法，方法得 1313125 万，为乙总。乙总命乙 50，除实 65656250 万，尚余实 122949127776。依第 3 行计算廉隅，皆并入乙总，得 1953125 万，为丙方。

王文素指出“以甲乙生廉求丙”。其求丙草的大意是：并甲乙共 250，依第 4 行计算上廉、中廉、下廉和隅，方、廉、隅共 19688126251，以商余实，再商丙 6，续于甲乙之后为法。依第 5 行计算廉隅，皆并入丙方，得 20491521296，为丙总，命丙 6 除余实，适尽。得方面 256，合问。

上述开方过程的减根变换过程即依前面给出的公式进行。

另外，这一时期王文素和顾应祥等人的著作把原来的商、实、方、廉、隅竖排改成一行横排，同时省去了筹算开方的“借算”步骤，去掉了方、廉、隅的退位过程，这些都是开方向珠算方向发展的一个重要步骤。珠算史研究者的著作（如华印椿《中国珠算史稿》）认为，王文素的开方法是珠算开方法，正是以此作为重要的证据。

四　珠算开方法

明万历年（公元 1573）以后，开方计算已经基本上完全在算盘上进行了。朱载堉的《算学新说》、《嘉量算经》和程大位的《算法统宗》等著作中都明确记载了用珠算开方的方法。他们都记录了珠算归除开平方和开立方法。朱载堉需要开出 25 位方根，所用算盘的位数达 81 位，他说：“凡学开方，须造大算盘，长九九八十一位，共五百六十七子，方可算也。不然，只用寻常算盘四五个接连在一处算之，亦无不可也。”朱载堉给出了珠算开平方和开立方的详细算草。

例如，求 $\sqrt{200}$的归除开平方细草如下：

算盘演算	
200	
1100	20
1500	20
1420	24
1404	28
1412	281
141119	281
……	…

图 25-1-3

于实首位归实，呼逢一进一十，得一十寸，有归不除，余实一百寸。倍下法一十寸改作二十寸，命作二归。自此已后有归有除。于实第一位归实，呼二一添作五，起一还二，只得四寸。下法亦置四寸于二十寸之下，共得二十四寸。于实第二位除实，呼四四除一十六，余实四寸。倍下法，四寸改作八寸，共得二十八寸。于实第三位归实，呼逢二进一十，得一分。下法亦置一分于二十八寸之下，共得二十八寸一分。于实第三位除实，呼一八退位除八，于第四位除实，呼一一退位除一，余实一寸一十九分。

一直开到 25 位方根（参考图 25-1-3）。

又如，计算大吕正率："置夹钟正律，以黄钟再乘，得立方积八百四十寸〇八百九十六分四百一十五厘二百五十三毫七百一十四丝五百四十三忽〇三十一微，开立方所得即大吕正律也。"

朱载堉按公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a(a+b)b + b^3$ 进行开立方运算，其算盘演算过程见图 25-1-4。

	840,896,415,253,714,543,031			置积于盘
9	840,896,415,253,714,543,031			840可商9
9	111,896,415,253,714,543,031			减$9^3=729$
9	111,896,415,253,714,543,031	27		3乘初商9得27为下法
94	111,896,415,253,714,543,031	27		27与111相商得次商4
94	111,896,415,253,714,543,031	27	64（4^3为隅）	副算94×4×270＝101520
94	10,312,415,253,714,543,031	27		实积减101520＋64
94	10,312,415,253,714,543,031	282		3乘次商4并入下法
943	10,312,415,253,714,543,031	282		10,312 与282相商得三商3
943	10,312,415,253,714,543,031	282	27（3^3为隅）	副算943×3×2820＝7977780
943	2,334,608,253,714,543,031	282		实积减7977780＋27
⋮				

图 25-1-4　朱载堉开立方算盘演算

按上法开出 8 位商后，朱载堉写道："如欲开至二十五位，须用八十一位算盘先将蕤宾、夹钟等律各开至于七十余位，然后乃得立方积实，其商除法俱与前同。"他所开出的大吕正率为：9.438，743，126，816，934，966，419，134（寸）。

五　开带从方法

王文素开带从方算例的方程次数高达 9 次（8 乘方），而顾应祥对各种开带从方的论述最为全面，他在《测圆海镜分类释术》和《测圆算术》二书中详细给出了各种开方的具体演算细草，仅前一书中就有 60 多个开带从方的程序说明。包括开各种形式的二、三、四次方，涉及益积术、减从术、翻积术等各种不同的题型类别。开带从方术在数学原理上与开方术一致，就是开方中求次商以后的过程，不必赘述。

开带从方的方程主要来源于实际问题，也有一些是编造出来的问题。例如，《九章算法

比类大全·各色开方》全书最后一题为：

> 今有方垛垛、圆垛垛、大立方、小立方、大平方、小平方、大立圆、小立圆、阳马、鳖臑共一十事，计积一十五万四百六十二尺，号曰十样锦。只云方圆垛垛高、阳马鳖臑广，与小平方面等。其大立方面、大立圆径多小平方面四分之一，又小立方面、小立圆径如小平方面三分之二。又云大平方面与小平方面幂等。阳马广少如袤二尺、高四尺。又鳖臑广少如高二尺、上袤四尺。其方垛垛面多高六尺，圆垛垛径多高四尺。问：十事各几何？

这个问题最终通过开4次方可求其解。但是原著中没有给出建立方程的过程，而是直接给出开方式。吴敬自称这一卷是“后续锁积演段还原之方”，可见他对宋元时代的演段术有所耳闻。实际上同类题目在朱世杰的著作中就有，建立开方式的过程正是“锁积演段”的内容，吴敬却没有给出说明。《九章算法比类大全》卷1中用过“细演天源如积”之语，将“天元”误作“天源”，说明他是不懂天元术的。吴敬之后一个世纪的顾应祥不仅没有给出建立方程的过程，而且不能读懂李冶用天元术语言写出的建立方程的过程。王文素对于建立方程有一些简单的说明，特别是展现了把相乘的式子展开成多项式的方法，并在《算学宝鉴》卷40编写了计算歌诀：

> 带从求隅有妙方，天元差数按图张。差乘正上加斜左，次第生来用下行。
> 三位连乘开立取，五家乘积四乘商，四般乘积三乘展，寄语诸君仔细详。

例如，他在展开 $x(x+a)(x+b)(x+c)$ 时列出的计算图式相当于（图25-1-5）：

商除天元一	1（商除天元）
差 a　平方天元一	a　　1（平方天元）
差 b　差 b　立方天元一	ab　　$a+b$　　1（立方天元）
差 c　差 c　差 c　三乘方天元一	abc　　$ab+c(a+b)$　　$a+b+c$　　1（三乘方天元）

图25-1-5

其中，左栏是初始图式，即是“天元差数按图张”，右栏是计算结果，其计算法是从“差 a”开始，“差乘正上加斜左”，如“立方天元一”行的 $a+b$ 是由差 b 乘正上的“平方天元一”加左斜的 a 而得。最下一行为终结结果，即是“次第生来用下行”：

$$x(x+a)(x+b)(x+c) = abcx + [ab+c(a+b)]x^2 \times (a+b+c)x^3 + x^4$$

这里，王文素使用了“天元”这个术语，说明他对天元术有所耳闻，但是无论在术语的使用上还是在具体运算上都与宋元时期的天元术有很大的差距，不能认为他懂得天元术。他也用其他方法展开多项式，下面举《算学宝鉴》卷四十一中王文素计算 $x^4(x+3)^3[(x+3)+5]^2$ 的过程来说明他用“开方作法本原图”展开多项式的方法：

（1）先展开 $[(x+3)+5]^2$ 并与 $(x+3)^3$ 相乘：

隅算1不乘，即以1为四乘方一段

商除2乘较一遍（10），得三乘方一十段

本积1乘较二遍（5^2），得立方二十五段

得

$$(x+3)^3[(x+3)+5]^2 = (x+3)^5 + 10(x+3)^4 + 25(x+3)^3$$

（2）展开上式（分别计算各项，再相加），再与 x^4 相乘：

一廉 $25\times1\times3^3=675$	一廉 $10\times1\times3^4=810$	一廉 $1\times3^5=243$	相加得：$1728\ x^4$
二廉 $25\times3\times3^2=675$	二廉 $10\times4\times3^3=1080$	二廉 $5\times3^4=405$	$2160\ x^5$
三廉 $25\times3\times3^1=225$	三廉 $10\times6\times3^2=540$	三廉 $10\times3^3=270$	$1035\ x^6$
立方 $25\times1\quad=25$	四廉 $10\times4\times3^1=120$	四廉 $10\times3^2=90$	$235\ x^7$
	三乘方 $10\times1\quad=10$	五廉 $5\times3^1=15$	$25\ x^8$
		四乘方 $1\quad=1$	x^9

得

$$x^4(x+3)^3[(x+3)+5]^2=x^9+25x^8+235x^7+1035x^6+2106x^5+1728x^4$$

这表明，明代中后期的数学家不懂得增乘开方法和天元术，但是他们对于“开方作法本原图”是熟悉的，并能够用此图开高次方和解数值方程，而且应用自如，得心应手。

第二节　一次同余方程组与不定方程

一　一次同余方程组的解法

杨辉《续古摘奇算法》称解同余方程组之法为“翦管术”，并说“俗名秦王暗点兵，犹覆射之术”。周密《志雅堂杂钞》（公元1290）还记载了“鬼谷算”和“隔墙算”等不同的名称，并给出《孙子算经》一题的隐括算法歌诀。①

南宋秦九韶的“大衍总数术”系统解决了一次同余方程组问题，但未见明代数学家引用秦九韶著作的实例，而杨辉《续古摘奇算法》则多被征引。《续古摘奇算法》共有5个一次同余方程组的题目，其第1题引用《孙子算经》原题，第2题所列方程组与《孙子算经》的题相同，第3－5题的方程组之现代形式是：

第3题：$x\equiv1\pmod 7\equiv2\pmod 8\equiv3\pmod 9$。

第4题：$x\equiv3\pmod{11}\equiv2\pmod{12}\equiv1\pmod{13}$。

第5题：$x\equiv1\pmod 2\equiv2\pmod 5\equiv3\pmod 7\equiv4\pmod 9$。

原著解题过程十分简略，例如第5题的解法为：

> 术曰：二数余一下三百一十五，题内余一，五数余一下一百二十六，题内余二，下二百五十二，七数余一下五百四十，题内余三，下一千六百二十，九数余一下二百八十，题内余四，下一千一百二十，并之，三千三百〇七，满总法六百三十去之。去五个六百三十，余百五十七为答数。合问。②

杨辉的算法完全正确，所用方法似与秦九韶的大衍术相同，但具体算法过程没有留下记录。

明代有几部著作涉及同余方程组问题，但新题不多，例如，吴敬和周述学照录了杨辉的上述1，3，4，5题，程大位只引了第1，3题。吴敬和周述学各补了一题。但是吴、周二氏引录第5题时都有错误，将原题和术文中之“二数剩一”改为“三数剩一”，其他均照录原文。就本题来说，不论“二数剩一”和“三数剩一”，答案都是157，但是术文却不应该相

① 南宋 · 周密，志雅堂杂钞，中华书局，1991年，第32页。

② 南宋 · 杨辉，续古摘奇算法。

同，如果是“三数剩一”不仅母数3，5，7，9不是两两互素，而且“下数”不应相同。这里或是：吴、周著作中的“三数剩一”系“二数剩一”之笔误或刊误，或是他们对秦九韶的算法并不理解。

严恭《通原算法》和王文素《算学宝鉴》有一些新的内容，兹简略分析如下：

《诸家算法及序记》载《通原算法》“物不知总”两题（其中小字为自注）如下：

今有散钱不知其数，作七十七陌穿之，欠五十文凑穿；若作七十八陌穿之，不多不少。问：钱数若干？此系管数，却非不足适足。

术曰：列七十八，自乘得六千八十四，又以七十七减欠五十，余二十七，乘头位得一十六万四千二百六十八为实。别以七十八、七十七相乘得六千六，减头位，实不满法，却合前问。若以七十八数为零，当五千九百二十九乘。

今有瓦不知其数，若三十四片作一堆，剩五片；若三十六作一堆，剩七片。问：瓦若干？亦非两盈也。

术曰：以三十四片，加一乘之，得一千一百九十，半之，得五百九十五，却以七片乘之，得四千一百六十五片。别以三十六，减一乘之，得一千二百六十，半之，得六百三十，却以五片乘之，得三千一百五十片，并之，得七千三百一十五片为实，却以三十四、三十六相乘得一千二百二十四，减除头位，实不满法即瓦①数，合前问。

此二题分别相当于求解同余方程组

$$N_1 \equiv (77-50) \pmod{77} \equiv 0 \pmod{78}$$

和

$$N_2 \equiv 5 \pmod{34} \equiv 7 \pmod{36}$$

原书的求解公式分别是

$$N_1 = 78 \times 78 \times (77-50) - 78 \times 77 P_1 = 2106$$

$$N_2 = 34 \times 35 \div 2 \times 7 + 36 \times 35 \div 2 \times 5 - 34 \times 36 P_2 = 1195$$

这表明严恭基本上是按秦九韶大衍总数术公式求解的，但细节上还有一些不同，计算较繁。前一题中，母数77与78互素，可得衍母78和77以及乘率78和77②。按秦九韶法，可以直接得第一个乘率为1。后一题中，母数34和36不互素，按秦九韶算法无法得到上述求N_2的算式。这表明，严恭求乘率的算法与秦九韶不同，另有作法。又$N_2=1195$不是最小解，这是没有把34和36做约化处理而使衍数变大一倍的结果。实际上$N_2=583$是最小解。尽管有小纰漏，但严恭会解母数不互素的同余方程组是肯定的。

王文素《算学宝鉴》卷二十二“剪管”一节收录11题，增加了新题目。他用3种方法解一次同余方程组问题。第一种是“满数法”，有歌诀：

求原母子有根基，众母连乘满数齐。三母问题乘二母，其余一母去除之。

惟余一者方堪下，以子乘来并实奇。满数去之余剩数，便为原总数无疑。

设有同余式方程组$N \equiv R_i \pmod{a_i}$，$i=1, 2, \cdots, n$，且各a_i互素，命$M=\prod a_i$，$M_i = M/a_i$，大衍总数术公式为：$N=\sum k_i M_i R_i - KM$。其中，k_i满足$k_i M_i \equiv 1 \pmod{a_i}$，$K$取整

① “瓦”，《诸家算法及序记》误作“九”。《十三、十四世纪中国民间数学》作“（瓦）”。

② 定母为78时，余数为0，故与此相关各事可以省去不算。但是从一般性出发，原书也计算了乘率：“若以七十八数为零，当五千九百二十九乘。”说明如果余数不为0，则乘率是77，即5929÷77。

数使得 $N \leqslant M$。王文素称 N 为"原数"或"总数"，a_i 为诸"母"，R_i 为诸"子"，称诸 a_i 之积为"满数"。若将诸 a_i 按大小顺序排列，较大者称为"大母"，较小者称为"小母"，相应的诸"子"也称为"大子"或"小子"。"满数法"歌诀是对大衍总数术的说明。第一句"求原母子有根基"不具算法意义。第二句"众母连乘满数齐"，即诸 a_i 之积 $\prod a_i = M$ 为"满数"。第三至五句"三母问题乘二母，其余一母去除之，惟余一者方堪下"，与秦九韶"大衍求一术"功用相当。"大衍求一术"所得，秦九韶称为"乘率"，今记之为 k_i。王文素没有提到"乘率"，他直接计算"下数"，与秦九韶不同。其求下数法是：用 M_i（$= M/a_i$）的倍数除以 a_i，直到 k_iM_i 除以 a_i 所得余数是 1 为止，即取 k_iM_i 作为"下数"。其中 k_i 即秦九韶的乘率。末三句给出大衍总数术公式：

$$N = \sum_i (k_iM_i)R_i - KM$$

王文素《算学宝鉴》卷二十二给出"满数法"的解释性证明，在其所引《孙子算经》题下有：

通证解曰：尝疑此术。以三、五、七为题者，术云"三数剩一下七十，五数余一下二十一，[①] 七数余一下十五。"愚谓：此数不知自何而得，思之既久，忽得拙法，未知是否？且如三、五、七者，令三、五相乘得一十五数，以七除之余一，故术曰"七数余一下十五。"又另以三、七相乘得二十一，以五除之余一，故曰"五数余一下二十一"。又另以五、七相乘得三十五，以三除之余二，不可，再下三十五，以三数之方才余一，故曰"三数余一下七十"。各以下数乘各余数，并之为实。另以三、五、七连乘得一百五，为满数去之，余不满法者为原总物数。余皆仿此。

此"通证解"以具体例题来论证满数法公式的正确性，系秦九韶《数书九章》中所未言明者，是对秦法的补充，亦为中算著作中首次证明大衍总数公式。但是王文素不会处理诸 a_i 不互素的情况，因此他说："凡数犯相可约者，不可同题，如有三不可用六、九，有四不可用八之类。"

基于上述理解，王文素又总结出两种"不用满数"求解同余方程的方法，称为"以少减多法"和"以多减少法"。其"以少减多术"歌与法曰：

不用满数以少减多口诀：

求原母子另详推，以少减多要合题。不合再加多母数，合其题者总无移。

或将三母为题问，余母除前二总宜。不合相乘前母并，合其题者总才知。

以少减多术曰：先下多母、多子，以少母、少子约之，合其题者为二母总数。题云余一，得余一之数即是。题云余二，得余二之数即是。以下[②]仿此。以三母题，先以二母如前求之，得二母小总，以所余一母约之，合题者即是。或不合，以先求二母相乘，并之，再约。四母以上者，次第求之。

把诸母按大小顺序排列，大者为多，小者为少（下文不妨用升排列）。先举《算学宝鉴》卷二十二中一例：

钱不知总数，置以为实，以五除之余三，以七除之余二，以九除之余八。问：

---

① 原抄本脱此"一"字，今校补。

② 原抄本讹作"上"，今依意校正。

总钱几何？答曰：二百三十三文。

在叙述了“满数法”之后，王文素给出了“以少减多法”：

以少约多法曰：先下多母余八，以中母七约之余一，不合题。下四次九，加三十六，共四十四。以七约之余二，方合题数。就以四十四为多子，以少母“五除余三”约之余四，不合。另以多中二母七、九相乘得六十三，为多母，并子共一百七，以五约之余二，不合。再下两多母下一百二十六，并前共二百三十三，以五约之余三，方合题数。

亦即：先求满足“七数”与“九数”之余的“小总”，再求满足三母之余的总数。其法是：先取 R_3（$=8$）验证，看是不是合题。若不合，便反复加 a_3（$=9$），直到合题为止，此题加 4 次 a_3，得 $R_3+4a_3=44$，正好是满足七数余二。于是得小总 44。接着再验证，以小母 a_1（$=5$）约之，若不合则反复加 a_2a_3，直到合题，即得总数。本题加 3 次 a_2a_3 后合题：

$$44+3a_2a_3=233$$

最终得 233 合题。

一般地，不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，“以少减多法”的计算程序的步骤为：第一步：先求 N_1 满足 $N_1\equiv R_{n-1}\pmod{a_{n-1}}\equiv R_n\pmod{a_n}$，用 a_n+R_n 除以 a_{n-1}，看其余数是否为 R_{n-1}，若不是，在被除数中反复加 a_n，直到 $N_1=p_1a_n+R_n$（p_1 是整数）除以 a_{n-1} 的余数为 R_{n-1} 为止。第二步，求 N_2 满足 $N_2\equiv R_{n-2}\pmod{a_{n-2}}\equiv R_{n-1}\pmod{a_{n-1}}\equiv R_n\pmod{a_n}$。其法与第一步相同：在 N_1 上反复加（p_2 个）a_na_{n-1}，直到 $p_2a_na_{n-1}+N_1$ 除以 a_{n-2} 所得的余数为 R_{n-2} 为止，取 $N_2=p_2a_na_{n-1}+N_1$。如此反复，直到最后一步求 N（即 N_{n-1}）：$N=p_{n-1}a_na_{n-1}\cdots a_2+N_{n-2}$。

上述算法同时也证明了它自身的正确性。实际上，由

$$N\equiv R_{n-1}\pmod{a_{n-1}}\equiv R_n\pmod{a_n}$$

可知，存在 p_1 和 p_2，使得 $N=p_2a_{n-1}+R_{n-1}=p_1a_n+R_n$ 成立，因此必有

$$(p_1a_n+R_n)\div a_{n-1}=p_2\cdots\cdots R_{n-1}$$

这说明从 a_n+R_n 出发，加 p_1 次 a_n，再除以 a_{n-1}，必可得商数 p_2 和余数 R_{n-1}，即上述程序的第一步是可实现的，且符合要求。同理可证，第二步以下各步也是可实现的，并且所得结果满足原方程组。

《算学宝鉴》卷二十二“以多减少术”歌与法为：

以多减少口诀：

求原母子细踌躇，多母之余减少余，不勾减时加少母，减余为实且傍居。

别将二母相差数，为法将前寄实除．除尽数乘多母数，加多余子总无虚。

解术曰：先下少子，以多子减之，或不勾，再加少母，减之，余为实。别置多母，以少母去之，余为法。以法除实，务令除尽。不尽，再加少母。以除得之数而乘多母，搭入多子，为二母原总数。如三母题，先以二母如前求之，得二母小总，为多子，以二母相乘为多母，与所母子如前求之。母多者递以求之。

“以多减少”法的计算程序与“以少减多”法的原理相似，程序相近：

计算 $(R_{n-1}-R_n+q_1a_{n-1})\div(a_n-t_1a_{n-1})$，不断增大 q_1，直到所得商为整数时为止，取 $N_1=a_n(R_{n-1}-R_n+q_1a_{n-1})\div(a_n-t_1a_{n-1})+R_n$。其中，$t_1$ 为正整数，使得 $(a_n-t_1a_{n-1})$ 取最小正数。接着计算 $N_2=a_na_{n-1}(R_{n-2}-N_1+q_2a_{n-2})\div(a_na_{n-1}-t_2a_{n-2})+$

N_1。(q_2, t_2 意义同前，下同。) 同理计算 N_3, N_4, …, N_{n-1}。最终得 $N = N_{n-1} = a_n a_{n-1} \cdots a_2 (R_1 - N_{n-2} + q_{n-1} a_1) + N_{n-2}$。

上述递推过程是可实现的和正确的。

以上二法的本质上是试错法。对于母数较少时很方便，但对于母数较多时计算过程较为繁复。王文素对于线性同余方程组的解法有自己的研究，找到了正确的解法，而且他的解法与现代解法一致。这是他的重要成果之一。同时也应注意到，他理解并能解释秦九韶的大衍总数术，但是不知道大衍求一术，因而不会处理母数非互素的情形。上述情况反映了数学家在大衍术失传背景下对一次同余方程组解法的探讨情况。

二 不定方程问题

我国最早的不定方程问题是《九章算术》中的“五家共井”题，《张丘建算经》又有“百鸡问题”，杨辉《续古摘奇算法》把同类问题称为“三率分身”。在夏源泽、吴敬、王文素、周述学、程大位和其他一些人的著作中都可以看到这类问题，但多数是录前人题目，没有对算法进行分析。真正有所研究的只有夏源泽、吴敬和王文素三人。王文素《算学宝鉴》卷二十七对前人的工作有一段评述：

> 《辨古通源》及《张丘建算经》并《九章》三田分粮、四物分数，只有细草，俱无成术，杨辉亦云本无三率分身之术。

同卷又云：

> 尝读《张丘建算经》、《辨古通源》及《九章》、《指明》四家元草，参玩其《张丘建》元草，乘机就巧，不足言之。惟《辨古通源》略似，而未发互乘对减之旨。《九章》近是，而不明退减换那之法，以致术意不通。且杨辉尚未明之，况吴（敬）夏（源泽）辈乎？

这里所说的《张丘建算经》和《辨古通源》是杨辉著作中所引录的，《九章》指吴敬的著作，《指明》是夏源泽的《指明算法》。《指明算法》原本不传，根据《算学宝鉴》卷二十七的引录可知，夏源泽在《指明算法》中对不定方程的解法有一些讨论，涉及三率分身、四率分身等问题，给出了比以前更为复杂一些的算题。兹摘录《算学宝鉴》所引《指明算法》二问。一问是四率分身问：

> 《指明》四率题：今有银一百一十两五钱六分五厘，买到桃、李、梨、栗四色果子共九万六千三百五十个。只云四色果个相仿。桃一百二十五个价银一钱，每李一百个价银一钱，每梨八十个价银一钱，每栗六十五个价银一钱。问：四色果子及价各若干？

一问是八率分身问：

> 配销荒金：今有官追八色不等零金一百五十两，有九七五色金四十两，九五色金二十两，九色金十两，八五色金二十两，八色金十六两，七五色金十两，七色金二十二两，六五色金十二两。欲配销作三色，八成、八五、九成每色一锭五十两。问：各色零金内取用分两若干？

夏源泽对两题都只给出一个答案。下面是他对“配销荒金”问的解法说明：

> 《指明》原立法曰：置八色不等金分两，各以成色折之，共并赤一百二十七两

五钱。另宜令作三色每色五十两，各以成色折之，并数与前相同。各列其位，各将高低成色荒金约之，先定中等荒金分两，各以折赤数俱于五十两内荒赤两减。余赤计位，余荒先以高色折见赤数，于内减去余赤，剩为实。别将高色内减去低色，剩为法。以法除实，先[①]得低色荒金分两，各以成色折之，并赤相同。合前所问。

夏源泽的解法本质上是凑答案，没有形成一套系统的方法。

吴敬在《九章算法比类大全》中的解法比夏源泽《指明算法》中的解法前进了一步。兹选卷八一例来说明他的方法：

今有旧有、云宗、站田共二十六亩五分，该秋粮米六石三升五合。只云每亩科米：站田二斗五升，云宗田二斗三升五合，旧有田二斗。问：三色田并米各几何？

法曰：排列问数，先以右行米二斗五升为法，遍乘左行得数

右 二斗五升	二斗三升五合	二斗	六石三升五合
左 一亩得二斗五升	一亩得二斗五升	一亩得二斗五升	二十六亩五分得六石六斗二升五合

却以左行站田米对减尽，云宗田余米一升五合，旧有田余米五升。总余米五斗九升，为实。以云宗、旧有田共余六升五合为法。除之，得二色田各九亩。余米五合约商，得旧有田九亩二分五厘。以余米五升乘之，得米四斗六升二合五勺，以减总余米五斗九升，余米一斗二升七合五勺。却以云宗田余米一升五合除之，得田八亩五分。以每亩科米二斗三升五合乘之，得米一石九斗九升七合五勺。旧有田九亩二分五厘，以[②]每亩科米二斗乘之，得米一石八斗五升。将二项田米以减原科米六石三升五合，余米二石一斗八升七合五勺，为实。以站田每亩科米二斗五升为法。除之，得田八亩七分五厘。合问。

此题相当于求解不定方程组：

$$250x+235y+200z=6035 \tag{25-2-1}$$

$$x+y+z=26.5 \tag{25-2-2}$$

吴敬的解法是：以公式（25-2-1）（右式）x 的系数 250 乘公式（25-2-2）（左式）得

$$250x+250y+250z=6625 \tag{25-2-3}$$

与式（25-2-1）对减得

$$15y+50z=590 \tag{25-2-4}$$

以未知数系数 15 与 50 相加，除常数项 590，得 9，余 5。即若取 $y=9$ 和 $z=9$，则尚有余米 5 合。于是以余米 5 合除旧有田每亩科米 2 升，得应有旧有田 0.25 亩[③]，于是得旧有田 $z=9.25$ 亩。代回公式（25-2-4），得 $y=8.5$ 亩。再将 y 和 z 值代回公式（25-2-1）得：$x=8.75$ 亩。

吴敬只求得一个答案，便不再计算了。大体而言，用他的方法所得的答案保证 y 与 z 的值大小相近。我们看到，吴敬尚不能充分理解像式（25-2-4）这样的二元一次不定方程有无穷多个解的事实。但是他能按自己的思路解出一个答案来，其方法对王文素有一定的影响。

---

① 此段中二“先”字，原抄本讹作“光”，今校正。

② 原抄本脱“以”字，参考上文校补。

③ 此处吴敬误将单位扩大了 10 倍。但是因为公式（25-2-4）有无穷多组解，不论 z 取何值，吴敬仍能求得一个答案。这不影响我们了解他的方法。

王文素是明代对不定方程问题研究最多的数学家。他在《算学宝鉴》卷二十七“众率分身”一节中，把三率分身扩展为“众率分身”，即增加了未知数的个数，多至七率分身。他说：“愚乃玩之既久，得此拙法，虽十率以上，亦可求之，岂止三率乎？故名之曰众率分身。”他的方法基本上与吴敬的解法相同，但略有改进，同时他注意到了不定方程的多解特点。王文素众率分身歌曰：

众率分身法立新，物银并列两边存。头乘对减余诸价，都要商除减剩银。

除得错综各样数，各乘银物俱明真。都教减总余银物，便是当头贵贱身。

解术曰：以所问各样银物，分列两行，物列一畔，价列于一壁，本物与价并肩两列，务令贵物居首，中者、贱者列于下，不拘次第。或贱物居首亦可，切不可以中物居乎首矣。惟总物、总价列于最下。先以居首之物遍乘其银价，次以居首之价遍乘其物。令本物、本银对减，余诸价为法，余总价为实，以各法除之。宜先尽多数之法除之，务令那换除尽其实，各得错综之数，记于本物、本价之间。乘物而得物数，乘价而得价银。以减总物、总价，余物、余银为居首之物、银也。

这里，设有 n 种物，每 a_i 个物值银 b_i，今有总物数 N_1，总银数 N_2，求各物、各价。这就是众率分身的数学模型，上述解法，相当于解方程组：

$$\sum_i a_i x_i = N_1$$

$$\sum_i b_i x_i = N_2$$

用两方程的首位系数互乘两方程并对减得：$\sum_{i=2}^{n}(a_1 b_i - b_1 a_i)x_i = a_1 N_2 - b_1 N_1$，然后用“实” $a_1 N_2 - b_1 N_1$ 和各“法” $a_1 b_i - b_1 a_i$ 之和相除，并适当调整商数，得诸 x_i ($i \neq 1$) 之值，再代回原方程得 x_1 之值。这就是王文素解不定方程的方法，所得为原方程的部分解。另外，王文素所列方程与现代方法所列方程不同，相当于在现代方程中做了变换 $y_i = \frac{x_i}{b_i}$，这样可保证所得方程的系数全为整数。所以他称所得到的 x_i 为“错综之数”。又王文素强调“切不可以中物居于首”，是为了保证相减后所得的新方程系数为正数。兹举“众率分身”第 9 题说明如下：

七率新题：绫一匹价银三两，罗一匹价银二两四钱，纱一匹价银一两八钱，紬一匹价银一两三钱，葛布一匹价银九钱，绢三匹直一两，绵布七匹直一两。凡百匹共价银一百。问：七色各几何匹，及各该银几何？

以钱和匹为单位，按王文素列方程法得：

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 + 7x_7 = 100$$

$$30x_1 + 24x_2 + 18x_3 + 13x_4 + 9x_5 + 10x_6 + 10x_7 = 1000$$

互乘对减得：$6x_2 + 12x_3 + 17x_4 + 21x_5 + 80x_6 + 200x_7 = 2000$，左端各项系数之和为 336，除右端常数 2000，先得各 $x_i = 5$，余 320，正好是 x_6 的系数的 4 倍，所以得 $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 5$，$x_6 = 9$，代回第一个方程得 $x_1 = 18$。这是按“众率分身”歌和术中的方法解方程的。

王文素并不是完全死守以上解法，而是根据实际问题采用灵活的处理方法。如在第 8 题“五率新题”中，互乘对减后所得方程为 $6x_2 + 24x_3 + 219x_4 + 619x_5 = 3160$，因为左端各项系数相差较大，所以按“宜先尽多数之法除之”的原则，先计算 3160 除以 619，本可得商

5，但考虑到所得余数太小，不方便后续计算，故取 $x_5=4$，余 630，将其除以 219，得 $x_4=2$，余 192，将其除以 24，本可得商 8，但只商 $x_3=7$，最后得 $x_2=4$。

王文素认识到不定方程的多解性质，他在一些题目的答案后说明这一点。例如在第 5 题写道："此四率论价之题计答数凡一千五百九十有六，不及备载，略记数荅于左。"对《指明算法》的四率题，王文素指出"此题荅数尤多，不可枚举"。又如在第 7 题下记：

可荅万余，岂可历载乎。但将加减之数记于左云：

一、栗价不动，李价加一分八厘，梨价减一分，桃价减八厘。

二、梨价不动，李价加四分八厘，栗价减二分，桃价减[1]二分八厘。

三、李价不动，梨价加八分，栗价[2]减六分，桃价减二分。

四、李价加八分四厘，桃价减四分四厘，梨价减二分，栗价亦减二分。

其上四变，凡云加者则减之，减者则加之，皆合其数。

给出变换求出多组答案的方法。

第三节　勾股术、测圆术与弧矢术

勾股术、测圆术与弧矢术是中国传统数学中三个既互相关联又有区别的研究内容。明代中期，顾应祥、唐顺之和周述学等人研究了李冶的《测圆海镜》和朱世杰的《四元玉鉴》等著作，虽对天元术等内容无从下手，但对勾股测圆体会较深，又由于研究天文历法的需要，对弧矢割圆等问题产生了特别的兴趣，理解了《授时历》中所使用的球面几何内容。这是明代直接研究宋元数学著作的为数不多的例子。虽然其成果不算特别突出，但是在明代以实用数学为主的大背景下，这些工作表现出数学理论研究的一种新气象，值得重视。可惜这种研究兴趣在后来没有得到发展。

一　勾　股　术

勾股形之勾（a）、股（b）、弦（c）及其五和五较，凡十三率，将它们相互组合，可构造出许多问题，因而成为古代构造数学问题的一个重要模型。王文素《算学宝鉴》卷 28 及卷 29、唐顺之《勾股六论》、顾应祥《勾股算术》和周述学《历宗算会》卷 4 等都专门讨论勾股互求问题。唐、顾、周三人关于勾股互求的著述内容大同小异，但顾应祥的著作更具有代表性。下面分三类介绍。

（一）勾股相求

在勾股形的三边及其和较 a、b、c、$a+b$、$b+c$、$a+c$、$b-a$、$c-a$、$c-b$ 共九个条件中，已知其二，求勾股弦，共有 36 种情况。通过勾股互换或加减运算转化之后，值得研究的有 8 种。[3]《勾股算术》给出了其中 7 种的计算公式，同时还对已知 a、b 之一及 $a+b+c$、$c+(b$

---

① 原抄本脱"减"字，今依上文校补。

② "价"，原抄本讹作"加"，今校正。

③ 沈康身，中算导论，上海教育出版社，1986 年，132 页。

$-a$)、$(b+a)-c$、$c-(b-a)$ 之一求其余的问题进行了讨论，给出了相应的计算公式。

此外，已知勾股形两边乘积和另一条件，求三边的问题，共有 10 种基本情况，明代数学著作涉及其中已知 ab, c；已知 $ab, a+b$；已知 $ab, b-a$；已知 $ab, c-a$；已知 $bc, c+b$；已知 $bc, c-a$ 6 种。

（二）勾股率问题

《九章算术》勾股章有两题涉及勾股与速率相结合的问题，使用了勾股数组的通解公式（5-3-10）、公式（5-3-11），刘徽注配合图形进行解释和证明，宋代杨辉和明代吴敬引用了原题和原术。王文素在其《算学宝鉴》卷二十八之"勾股率"一节中讨论了 17 个已知勾股形的两边（或其和）之比和另一边（或三边和较之一），确定勾股形的问题，扩展了研究范围，其中涉及问题的已知条件如表 25-3-1 所示。

表 25-3-1　《算学宝鉴》中勾股率计算问题

问题序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
已知比率	$b:a$	$b:a$	$c:a$	$c:b$	$b:a$	$c:a$	$c:b$	$b:a$	$c:b$
已知边	$c-b$	$c-a$	$b-a$	$c-a$	$b-a$	$c-a$	$c-b$	c	a
问题序号	10	11	12	13	14	15	16	17	
已知比率	$c:a$	$b:a$	$(a+c):b$	$(a+c):b$	$(b+c):a$	$(a+b):a$	$(a+b):c$	$(a+b):c$	
已知边	b	a	a	c	b	c	a	b	

例如，"股与勾弦和约率口诀"为：

勾弦和股约为停，二约相乘股率称。二约各乘相并折，便为弦率不差争。

却将弦率减和率，余数称为勾率名。三色题中言一色，一为除率二为乘。

设已知勾股形的勾弦和 $(a+c)$ 与股 b 的比为 m/n，此歌诀给出的算法和《九章算术》使用的算法公式（5-3-10）、公式（5-3-11）相同。这个算法适合问题 12 和问题 13。

顾应祥《勾股算术》卷下第 37 节"勾与股率、勾弦和率求股弦"和第 38 节"容方与勾股率求勾、股、弦"讨论了同类问题。现在以第 37 节为例加以说明。原文是：

勾与股率、勾弦和率求股、弦三十七：

甲善走，乙次之。甲行七，乙行三。今乙东行，甲南行十步斜之会乙。问：各行几何？

术曰：南行，勾也；斜行，弦也；乙东行，股也。甲行七，勾弦和率也。乙行三，股率也。以勾弦和率自乘得四十九，为勾弦和准[①]；以股率自乘，并之[②]，折半得二十九，为弦准。二率相乘得二十一，为股准。以弦准减勾弦和准，余二十，为勾准。以弦准乘勾，以勾准除之，得弦，以股准乘勾，以勾准除之，得股。

此题与《九章算术》勾股章"二人同所立"相同，却提出了"准"的概念。"术"中的"率"

---

① "勾弦和准"，原本脱"弦"字，今校补。

② "并之"下，原本衍"勾弦和准"，今校删。

是根据已知条件导出的反映勾股形之间的整勾股数关系。虽然这里的准与《九章算术》原题的两组“率”最终都表达了勾股形三边的边长之比率关系，但含义不同。顾应祥以前的讨论者均未区分这两组率之不同，顾应祥通过“准”这个术语对二者进行区别，认识深刻。

（三）勾股容直问题

贾宪、杨辉明确提出了“勾中容横与股中容直”面积相等的定理，但是对于勾股容直的计算却没有涉及。吴敬《九章算法比类大全》卷九提到勾股容直，但题目设问不严密，结果亦误。王文素在《算学宝鉴》卷30指出：“勾股容方、容圆，古籍已载之矣，但容直一法未之载也。愚尝论之，既有容方、容圆，岂无容直！”并指出：“凡立题，必先称出长阔差数，亦犹带从开方。苟不以差数拘之，则任求长阔矣。”设勾股形的勾和股分别是 a 和 b，其内容矩形的长阔差为 d，王文素给出求长 x 和阔 y 的公式分别为

$$x=\frac{ab+bd}{a+b},\ y=\frac{ab-ad}{a+b}$$

可以证明所得公式正确。结合王文素强调勾中容横与股中容直等这个事实，我们推测他的证明如下：如图25-3-1所示，设有勾股形$\triangle ABC$，内容矩形$\square FDEC$。取 I 使得 $FI=FD$，则 $d=FC-FI=IC$。延长 BC 至 BJ 使 $JC=d$，则 $JE=FC$。ab 为矩形$\square CG$之积，bd 为矩形$\square CK$之积，故 $ab+bd$ 是$\square BK$之积。而 FC 乘 a 为$\square CH$之积，而$\square CD=\square DG$，所以$\square CH=\square EG$，故 FC 乘 a 为$\square EG$之积，所以 FC（$a+b$）为$\square CK$之积，由此得上述公式之前式。ad 为矩形$\square BI$之积。（$ab-ad$）为$\square IG$之积，而$\square IG=\square IH+\square FG=\square IH+\square AE=CE\times a+CE\times b$，由此即得上述公式之后式。

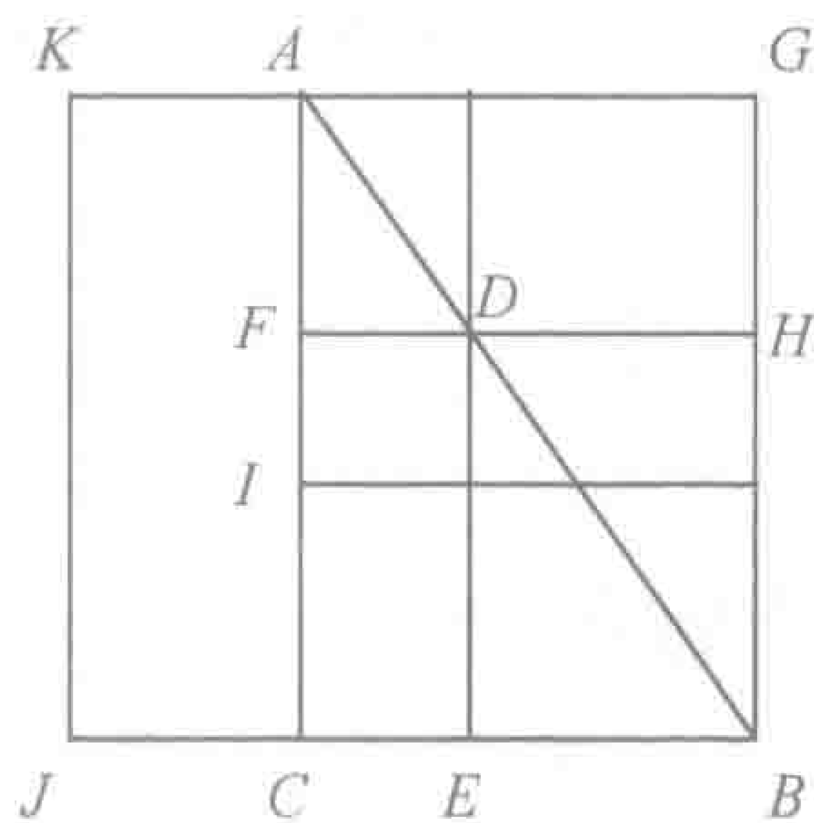


图25-3-1

二　测　圆　术

李冶自称《测圆海镜》为“考圆”之作，着重于利用“识别杂记”中所提到的几何定理来列方程，对方程的具体解法则视为已知，仅以“翻法在记”表示，很少具体提及。顾应祥研究李冶的《测圆海镜》，抓住了《测圆海镜》以测圆为中心的本质，但是没有抓住“识别杂记”和天元术两种重要内容，对前者的重视不够，而对后者则不能理解。他所著《测圆海镜分类释术》和《测圆算术》把重点放在了解方程的具体步骤。《测圆海镜分类释术》中共有173个题目，每题包括题、释、术和开方四部分。其中“释”就是对题意和适用公式的解答，是从李冶的术中总结出来的。“术”则是求解问题的方程式，照搬了李冶的方程。开方部分是求解方程式的过程。顾氏对所有新出现的方程类型都给出细草，对于前面已有的方程类型则用参见某某条的方式指明。李冶《测圆海镜》的体例是先写解法后演出细草。大多数题目（卷二的第14问以及卷三至卷十二的全部题目凡157问）的算草使用天元术推导出最终的方程。顾应祥《测圆海镜分类释术》把李冶的“识别”摘出来放在“释”中，然后照李冶给出方程，因为读不懂天元术而删去了公式的推导过程，但增加了详细的开方过程。《测圆算术》亦如是。

尽管如此，顾应祥并不是完全照搬李冶的工作，他有自己的想法。《测圆海镜》卷2至卷12分类讨论“圆城图式”（图17-1-1）中的勾股形与直径之间的关系，按正率、边股、底勾、大股、大勾、明叀、大和、三事和、杂糅、之分10大类来编排算题。顾应祥《测圆海镜分类释术》10卷也分为10类，但分类方式不同。李冶基本上是以一个勾股形的某边为中心展开的，如“边股”：以边勾股形的股为中心，再配以另一个已知条件来求圆径。顾应祥则是以不同勾股形的勾、股、弦之一为中心展开，他的分类如下：

（1）已知某勾股形的两边；

（2）已知两勾，或两股，或两弦；

（3）已知某勾股形的勾与另外一个勾股形的股；

（4）已知某勾股形的勾与另外一个勾股形的弦；

（5）已知某勾股形的股与另外一个勾股形的弦；

（6）已知勾、股、弦之一与两边的和较之一；

（7）已知通勾股形两边或三边和较之一与诸和较或别弦；

（8）已知两个和，或一和一较；

（9）诸和较立法；

（10）和较参互带分。

顾应祥完成《测圆海镜分类释术》之后，又著有《测圆算术》。二者之间存在着一个根本的不同点，那就是研究和分类方法不同。顾应祥在《测圆算术 · 叙》中说明自己著《测圆海镜分类释术》之后说：

> 既而思之，犹有未当于心者。盖圆之内外，其横者为勾，其直者为股，一横一直，或两横两直相夹，或一横一斜、一直一斜，自有天然对待之妙，比而合之，皆可推类而知者，于是别出己见，复为编次。其难晓者附以布算之法。名号虽因其旧，而词则务简而明，庶使学者一览而可得其要领焉耳。

也就是说，《测圆算术》中所反映的主要是勾股形中的“天然对待之妙”，发掘对称性关系，既注意到了勾和股的对称性，又考虑到了“圆城图式”中某些勾股形之间的对称关系，如小差勾股形与大差勾股形，边勾股形与底勾股形，都是对称的。因此，《测圆算术》中对题目进行重新编排，以对称性为中心展开。①

顾应祥的工作，不论是放在中国古代数学历史发展的长河中，还是从当时他所掌握的这些知识都是其他数学家所不具备的角度来看，都应在明代数学史上占有重要的地位。我们不能因为顾应祥不懂天元术而攻其一点，不计其余。

三　弧　矢　术

李迪《中国数学通史 · 宋元卷》说，中国传统数学中关于弧矢问题直到宋元一直未形成完整的算法体系。明代顾应祥著《弧矢算术》，这是中国传统数学中第一本关于弧矢问题

① 李冶的《测圆海镜》的“识别杂记”中推导公式时用到了对称关系，参考：林力娜著、郭世荣译，李冶《测圆海镜》的结构及其对数学知识的表述，见：李迪主编，数学史研究论文集，第五辑，内蒙古大学出版社，九章出版社，1993年，第123～142页。

方面的专著，也是中国传统数学中弧矢问题的一个总结。与顾应祥同时的唐顺之和周述学都对弧矢问题感兴趣，形成了研究弧矢问题的小高潮。他们的研究内容和结果基本相同，这里主要介绍顾应祥的工作。

顾应祥的《弧矢算术》一开始有一篇“弧矢论说”，认为弧、矢、弦等要素的大小主要取决于所在圆径的大小，求解方法主要以勾股、开方之术为基础，他说：

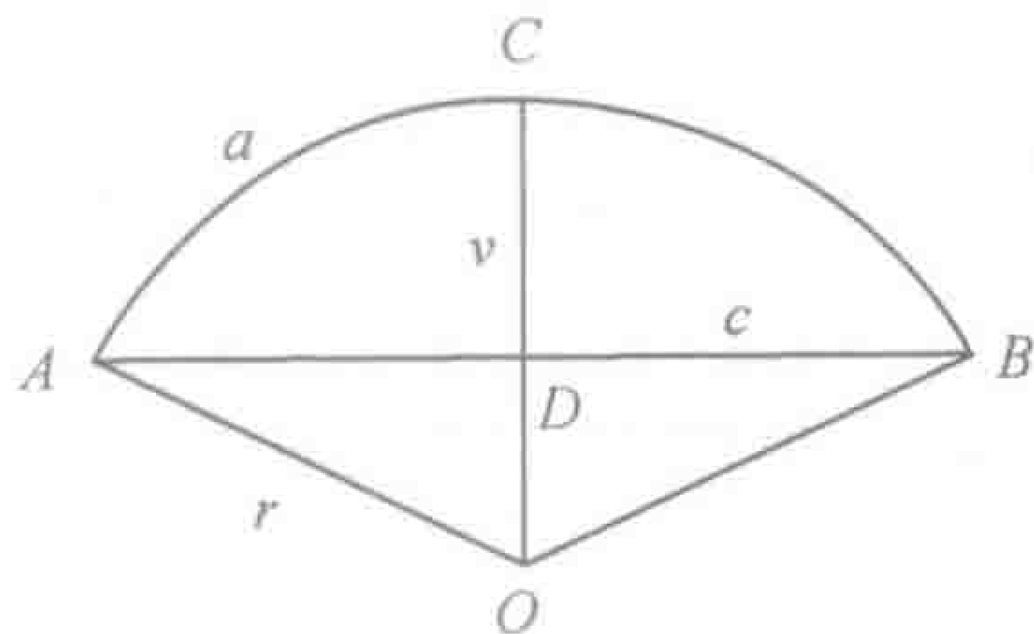


图 25-3-2　弧矢图

弧矢者，割圆之法也。割平圆之旁，状若弧矢，故谓之弧矢。其背曲曰弧背，其弦直曰弧弦，其中衡曰矢，而皆取法于径。径也者，平圆中心之径也。背有曲直，弦有修短，系于圆之大小。圆大则径长，圆小则径短，非径无以定之，故曰取则于径，而其法不出于勾股开方之术。①

接着顾应祥总结了弧、矢、弦、截积、径之间互求的公式。他在正文中再一次列出公式，并结合算例，一一列举说明已知弧、矢、弦、积、径之二，求另外一个要素的方法，共有 18 种。其中重要者（图 25-3-2）有：

（1）圆径与截矢求截弦

术曰：半径为弦，半径减矢为股，各自乘，相减，余为勾幂。平方开之，得勾，即半截弦。

又曰：以矢减径，以矢乘之，即半截弦幂。

这是已知 r 与 v，则

$$\frac{c}{2} = \sqrt{r^2 - (r - v)^2} = \sqrt{(d - v)v} \tag{25-3-1}$$

在圆径 $d=10$ 寸，矢 $v=1$ 寸的例题中，顾应祥给出：

圆径自之，得一百为弦幂。圆径减倍矢，自之，得六十四，为股幂。相减，余三十六，为勾幂。平方开之，得全弦。

此即

$$c = \sqrt{d^2 - (d - 2v)^2} \tag{25-3-2}$$

（2）圆径与截弦求截矢

又术：半弦自之，为实，径为从方，作减从开平方除之。

这是已知 d 与 c，通过对

$$v^2 - dv + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 0 \tag{25-3-3}$$

开带纵平方得 v。

（3）圆径与截积求矢

术曰：倍积，自之，为实。四因积为上廉。四因圆径为下廉。五为负隅。以隅

① 明·顾应祥，弧矢算术，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第二册，河南教育出版社，1993 年，第 1081～1105 页。本编凡引《弧矢算术》，均据此。

减下廉，并上廉，为法。① 三乘方法开之。

这是已知截积 S 与 d，求 v，有

$$-5v^4+4dv^3+4Sv^2-(2S)^2=0 \qquad (25\text{-}3\text{-}4)$$

或 $-1.25v^4+dv^3+Sv^2-S^2=0$ 开三乘方得 v。

(4) 截积与截矢求截弦

术曰：倍积，减矢幂，余如矢而一，即弦。

这是已知 S 与 v，求 c，有

$$c=\frac{2S-v^2}{v}。$$

(5) 截积与截矢求圆径

又曰：积自乘，减矢自乘乘积，余为实。矢自乘再乘为法。除之，加虚隅，即径。

这是已知 S 与 v，求 d，有

$$d=\frac{S^2-Sv^2}{v^3}+1.25v。$$

(6) 截弦与外周求截矢

术曰：弦幂半弦幂相乘，四而三之，为实。并弦及残周，乘半弦幂，为益方。倍半弦幂加弦幂为从上廉。并弦及残周为下廉。以隅并上廉减从，以余从并下廉为法②。三乘方法开之。

已知残周 L 和 c，求 v，有

$$-v^4+(L+c)v^3-\frac{3c^2}{2}v^2+(L+c)\left(\frac{c}{2}\right)^2v-\frac{3}{16}c^4=0$$

开三乘方得 v。

(7) 圆径与弧背求矢

术曰：半弧幂径幂相乘，为实。径乘径幂为从方。径幂为上廉。径背相乘为下廉③。以上廉减从，以隅减下廉④。三乘方法开之。

已知弧背 α 和 d，求 v，有 $-v^4+(d\alpha-d^2)v^2+d^3v-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2d^2=0$，开三乘方得 v。

得出上述公式的基础是《九章算术》的弧田公式（5-1-9），顾应祥称为圆径与截矢求截积，以及沈括会圆术中的公式（17-2-1），顾应祥称为圆径与截矢求截弧背，其他公式都是由这几个公式推导出来的。顾应祥对他的推导做了说明。兹举“圆径与截积求矢”式（25-3-4）为例，此式曾见于《四元玉鉴》。顾应祥先通过把弓形与三角形相类比说明弓形

① “以隅减下廉，并上廉，为法”，是对开方过程的说明，今改做注。

② “以隅并上廉减从，以余从并下廉为法”：是对开方过程的说明。因为隅与上廉为负，而从与下廉为正，所以相加减：以隅与上廉相并后减从，减余结果再与下廉相并。意即，若试商 q，则以：“［从－（q^3×隅＋q×上廉）］＋q^2×下廉”为法。

③ “径幂为上廉。径背相乘为下廉”：顾应祥用算盘开方，在开方过程中经常给一些项重新命名，如“上法”、“下法”等，其名词术语变化较多，甚至混乱。此处，因“径幂”与“径背相乘”一正一负，所以他命名为上、下廉，其实都是二次项系数。

④ “以上廉减从，以隅减下廉”：是对开方过程的说明。

面积公式，这种类比的思路较为新颖。然后再推导得出所需公式。顾氏原文如下：

解曰：弧矢状类勾股。勾股得直方之半，故倍其积，以股除之，即得勾。弧背曲，倍积则长一弦而又一矢。以矢除①积倍之，恰得一弦一矢之数。因未知矢，故以积自乘为实，约矢一度乘积，以为上廉，两度乘径以为下廉，并之为法，而后可以得矢。用三乘者何也？积本平方，以积乘积是两度平方矣，故用三乘方法开之。上廉、下廉俱用四因者何也？倍积则乘出之数为积者四，故上下廉俱四以就之。减径者何也？径乃圆之全径，矢乃截处之勾，矢本减径而得，故亦减径以求矢。五为负隅者何也？凡平圆之积，得平方四之三，在内者七五，在外者二五。不拘圆之大小，每方一尺，该虚隅二寸五分。四其矢得四，四其虚隅得一，合而为五。亦升实就法之意。如不倍积，廉不用四因，以一二五为隅法亦通。

顾氏认为，弓形与三角形在求面积方面可以相类。三角形面积为 $S_{三角}=\frac{cv}{2}$，故有 $v=\frac{2S_{三角}}{c}$。而弓形面积为 $S=\frac{(c+v)\ v}{2}$，即 $2S$ 等于一个以（$c+v$）为长，v 为宽的矩形面积，或者 $v=\frac{2S}{c+v}$。若能找到 $c+v$ 的值，便可用除法求得矢长 v。因为 c，d，v 间有关系 $c=2\sqrt{dv-v^2}$，所以需把 $2S$ 做平方得：$(2S)^2=(c+v)^2v^2$，因而有

$$\frac{(2S)^2}{v}=(c+v)^2v=(c^2+2cv+v^2)v=c^2v+(2cv+v^2)v=4(dv-v^2)v+(2cv+2v^2-v^2)v=4dv^2-4v^3+4Sv-v^3=-5v^3+4dv^2+4Sv$$

由此即得公式（25-3-4）。

用现代的观点看，公式（25-3-4）其实就是由公式（25-3-1）、公式（5-1-9）、公式（17-2-1）直接推导而得。但顾应祥的推导思路不同。他不熟悉列方程的方法，以古代开方术做为理论基础。按开方术思路，如果把 $(2S)^2$ 看成是开方术中的“实”，则 $(c+v)^2v$ 就是开方术中最后一步“下法”的值，其重点是解出 $(c+v)^2v$ 的值。

《弧矢算术》中的问题和公式大多为前人已涉及，顾应祥的工作主要体现在总结与整理方面，但此项工作仍具有其重要性，它较为全面地介绍了弧矢术中的各种计算方法，对弧矢术的发展起到了承上启下的作用，为后来的进一步研究奠定了良好的基础。

第四节　纵　横　图

明代数学家关于纵横图知识的来源主要是杨辉的《续古摘奇算法》，研究纵横图的有王文素和程大位，二人各有创新。

王文素《算学宝鉴》卷首共载有10幅图②，分别为“洛书均数图”、“花十六图”、“求等图”、“辐辏图”、“方胜图”、“花王字图”、“古珞钱图”、“连环图”、“璎珞图”和“三同六异图”。其中“璎珞”也作“缨络”。李迪《中国数学通史·明清卷》指出，其中“洛书均数图”早已为人们所熟知，“花十六图”与杨辉“花十六图”的“阴图”相同，“求等

① “除”，原本讹作“乘”，今校正。

② 图中个别数字存在抄写错误或磨灭不清现象，下文引用时均已校正，兹不一一指明。

图”不是纵横图，另外七个图都是王文素新创的。

王文素在“洛书均数图”下有一段文字说明：

杨辉因而度之，乃作四四、五五等图，至[①]八阵、九攒之图。又有连环一图，以七十二子分为九队，化为一十三队，积数俱各相均，诚妙用共数者也。愚亦述立图而载于后。

可见王文素对杨辉的纵横图十分熟悉，但是他没有简单地抄录杨辉的图，而是以列出自己新设计的图形为主。下面介绍《算学宝鉴》中的几个新图：

“辐辏图”（图 25-4-1），与杨辉“攒九图”形式相同，但数字排列则不同。

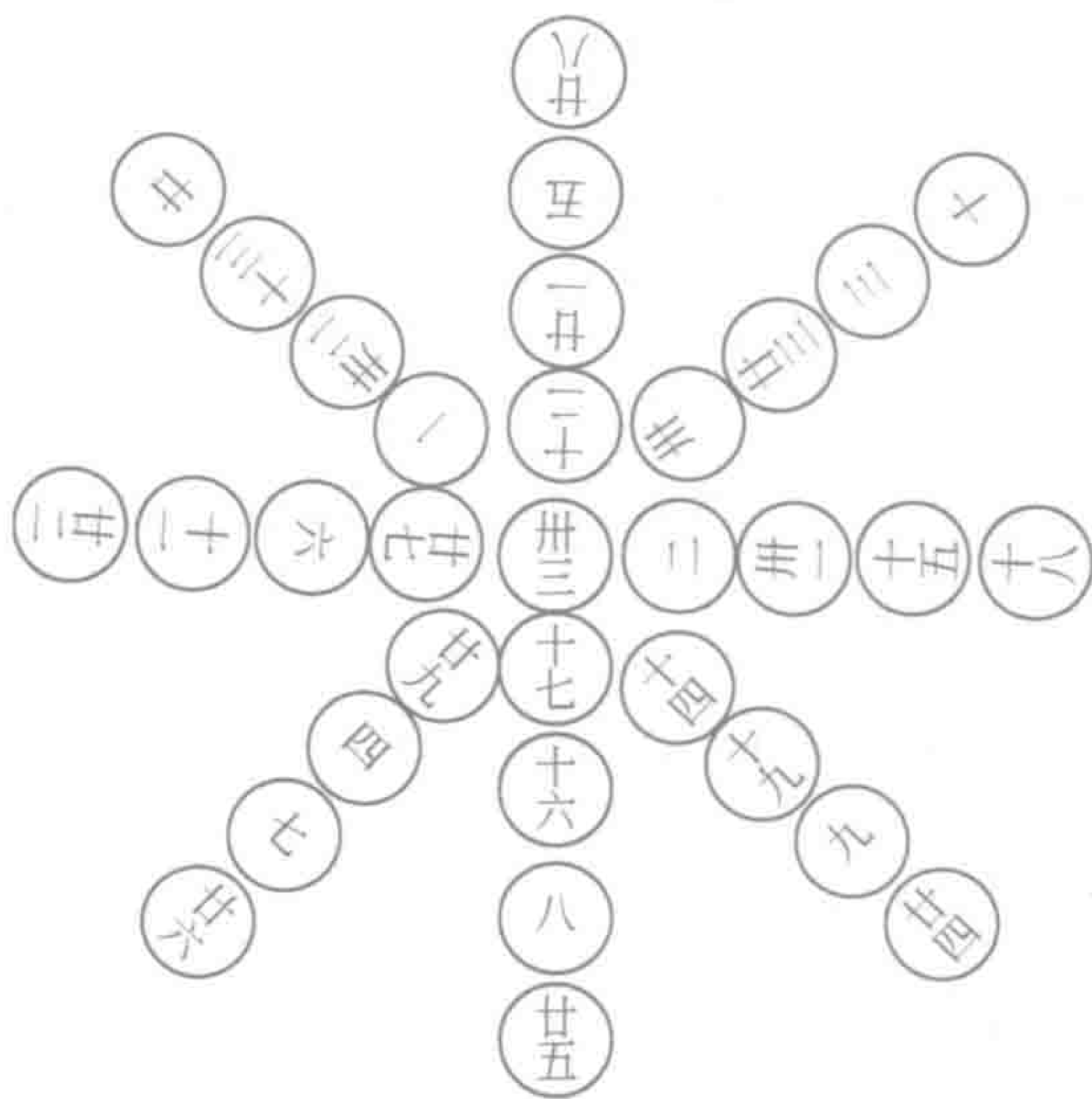


图 25-4-1　辐辏图



图 25-4-2　方胜图

辐辏图：三十三[②]子总积五百六十一，为四十五子用之。一横一直二斜并中一方各用九子，均积一百六十五。求积法曰：置总子三十三，别置三十三，添一，得三十四，相乘折半，得五百六十一。

此图由数字 1 到 33 排列成，四条钱和中间各九子之和全为 165，其中中间九子重复使用。

“方胜图”（图 25-4-2）是一个四阶纵横图，“四区各积三十四，借为九区亦各积三十四”。即相邻四个数组成的四边形内之和都是 34。

数字借用，构造复杂，是王文素的纵横图的特点。如“花王字图”、“璎珞图”、“古珞钱图”等。“花王字图”（图 25-4-3）是用 17 个由数字组成的圆圈形成的像个王字的纵横图，每个圆圈 8 个数字，总共 104 个由 1 到 104 的自然数。

王字图：一百四子，总积五千四百六十根。各积四百二十，借为十七环，亦各积四百二十。

图中的 17 个圆圈中有 32 个数字各用 2 次，独立存在的环圈只有 13 个。每个环圈的 8 个数字之和都是 420。

---

① “至”，原抄本讹作“乃”，今校正。

② “三十三”，原抄本讹作“三十六”，今校正。

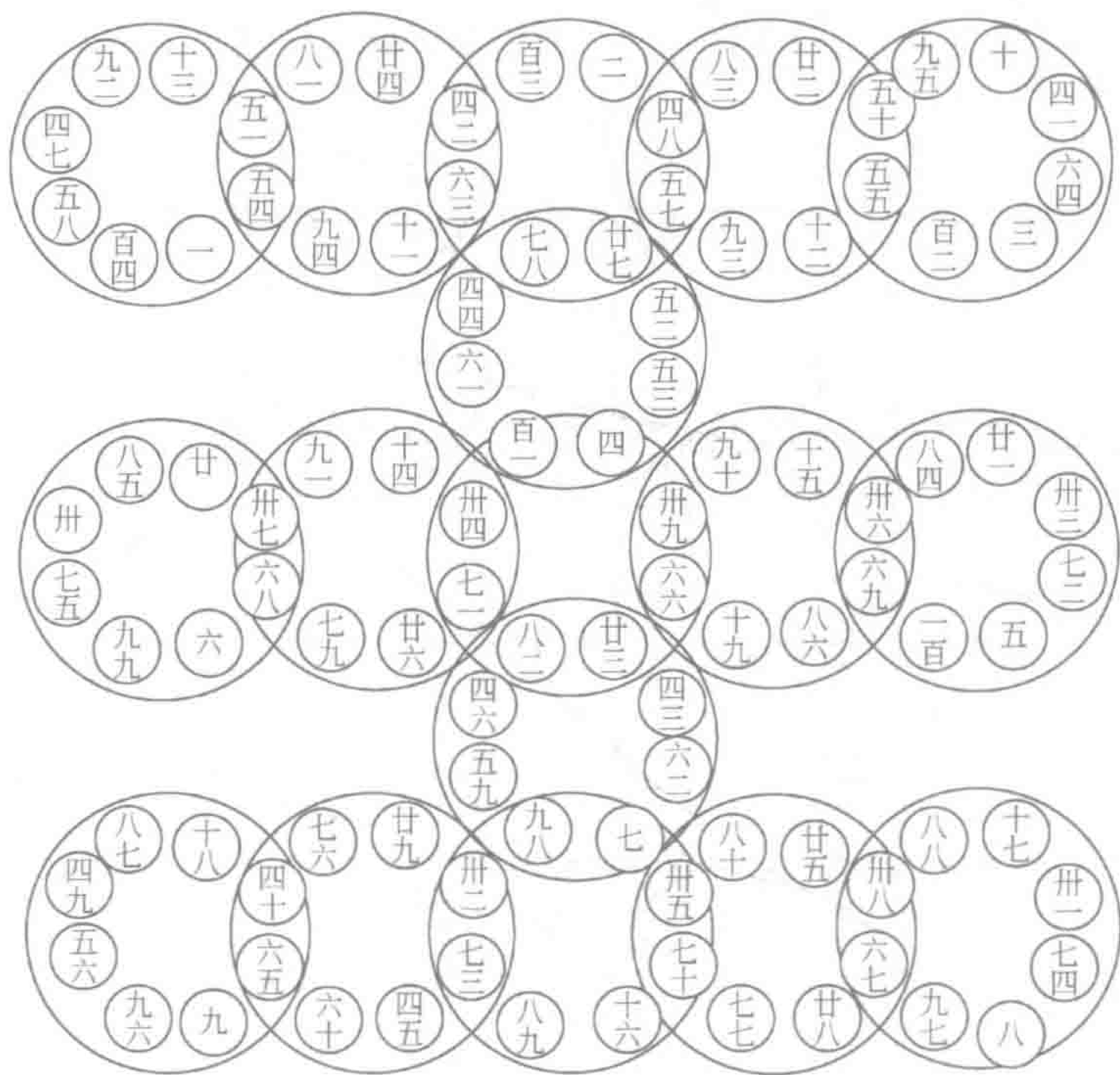


图 25-4-3 花王字图

古珞钱图：百二十子，十五钱，各积四百八十四，借为二十五钱，亦各积四百八十四。总积七千二百六十。

古珞钱图（图 25-4-4）由 1 到 120 组成 25 个圈，构成古珞钱形。“连环之图”（图 25-4-5）是由 1 到 128 组成的 25 个圈，每圈 8 个数之和为 516。

“璎络图”（图 25-4-6）的构造很特殊，它由 13 个圆环组成，每个圆环 6 个数字，该有数 $13\times6=78$，但实际只有 42 个数，因为其中有 12 个数各用 3 次，有 12 个数各用 2 次，只 18 个数使用 1 次。各圈内数字之和为 129。关于此图的说明是：

缨络图：四十二子，摆为七环，各积百二十九，借为十三环，亦各积百二十九。总积九百三，求积如前。

“三同六变之图”（图 25-4-7）是由数字 77 – 108 组成的。先由这 24 个数组成 3 圈，每圈 8 个数之和为 708。然后如法重新组合五次，这样共得到六组 18 个圈，每圈 8 数之和都相同。原作中以一个美丽的长寿老人聚会故事来讲述此图：

假令二十四老人，长者寿高一百，次者递减一岁，止于七十七。共积总寿二千一百二十有四。卜会三社，八老相邻①七百八岁。盖因人情逸顺敬，而复令更换六次。其换六次，其积仍均七百有八。此见连用之道。

求积法曰：并首尾共一百七十七，以二十四老乘之，得四千二百四十八，折半，得总积二千一百二十四。

王文素进而指明了此图的构造法：

① “邻”，原抄本讹作“令”，今校正。

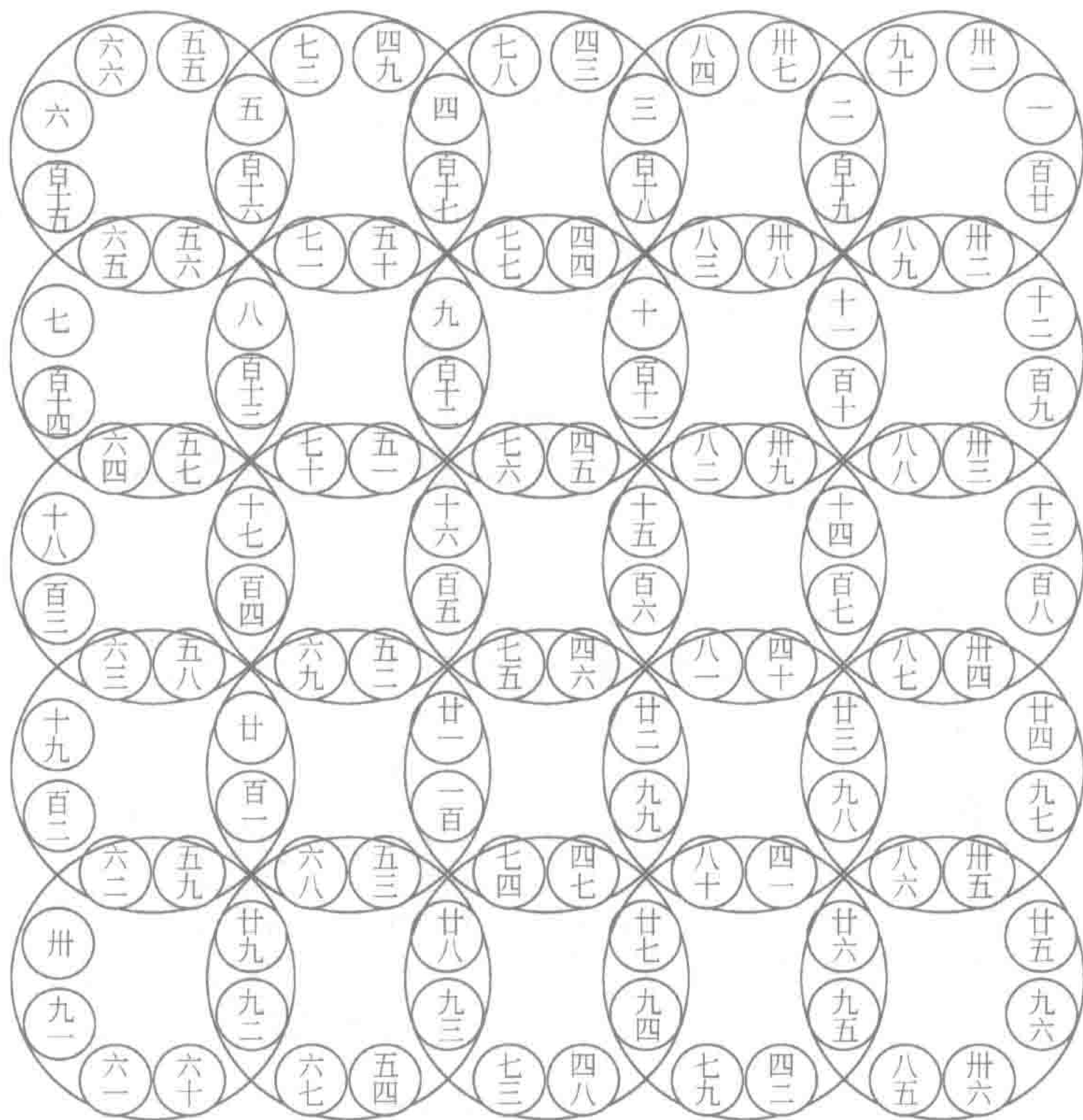


图 25-4-4　古珞钱图

> 求等法曰：依[①]图列数，得横三行先等，第一图是也。余图别求，其变尤多，不及备载。

也即：从 77 开始，将 24 个数依次正反序排列在三组中，即得第一图：

组别	正序	反序	正序	反序	正序	反序	正序	反序
1	77	82	83	88	89	94	95	100
2	78	81	84	87	90	93	96	99
3	79	80	85	86	91	92	97	98

在以上 3 组中，每组 8 数之和都为 708。因为每次排列，不涉及重复使用数字，不同的排列法不止 6 个，所以“其变尤多”。

王文素给出了所有图的求总积术，所用公式也是当时数学家十分熟悉的，并不新鲜。上述图的构造是很复杂的，如有时一个数字要重复使用 3 次，构造起来相当困难，这就是王文素工作的重要性所在。王文素在熟练掌握杨辉著作的基础上，构造出了不少新图，为中国纵横图研究增加了新内容。

程大位《算法统宗》卷 17 给出纵横图 12 个。其中与杨辉《续古摘奇算法》所记不同的有五五图、六六图、聚五图、八阵图 4 种，并对个别图补充了“易换术”即构造法[②]。另外，张爵《九章正明算法》卷四也有纵横图 15 种。

---

① 原抄本此处衍“求”字，今校删。

② 更详细的内容，请见郭世荣，《算法统宗》导读，湖北教育出版社，2000 年，第 450～470 页。

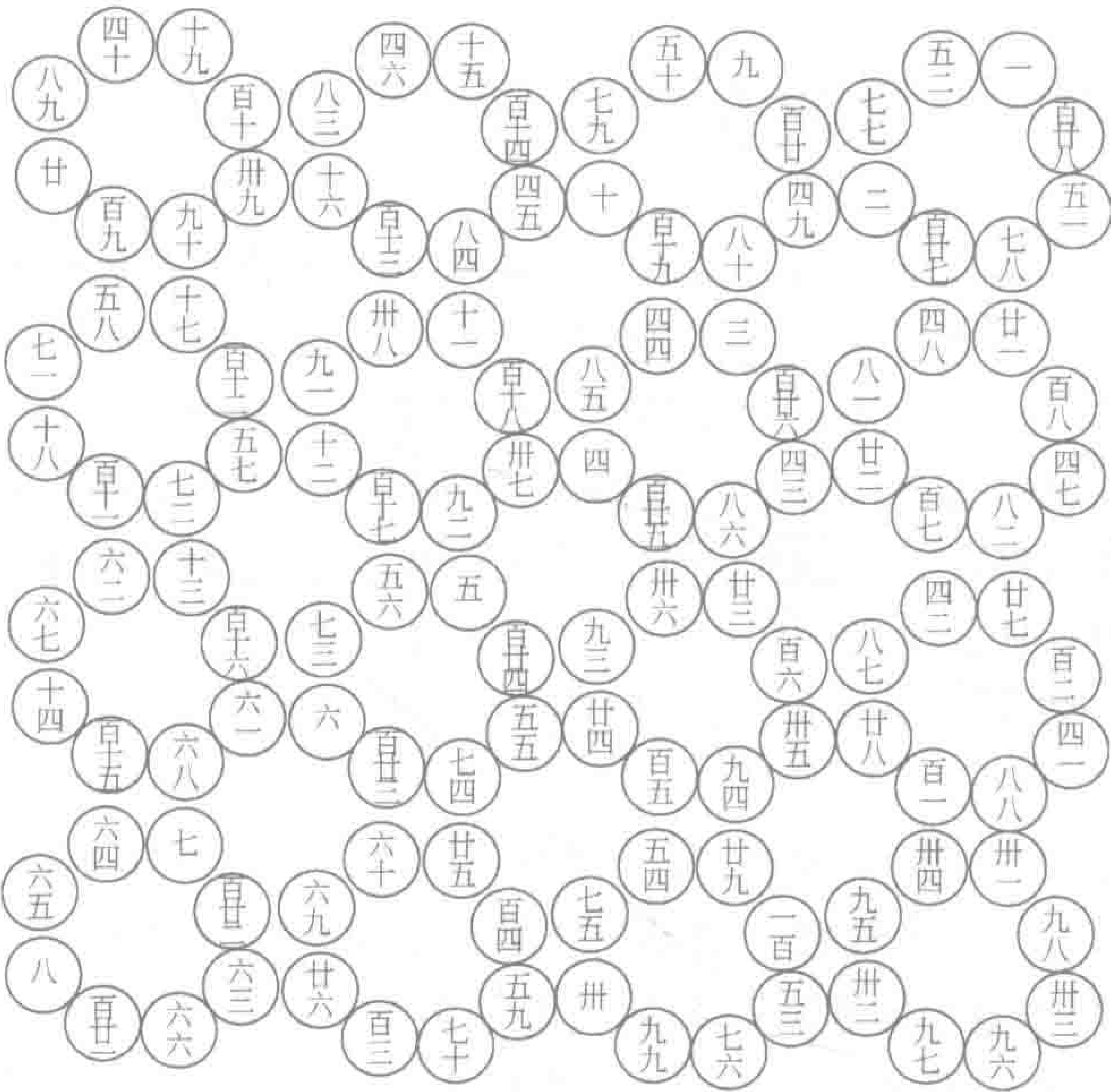


图 25-4-5　连环之图

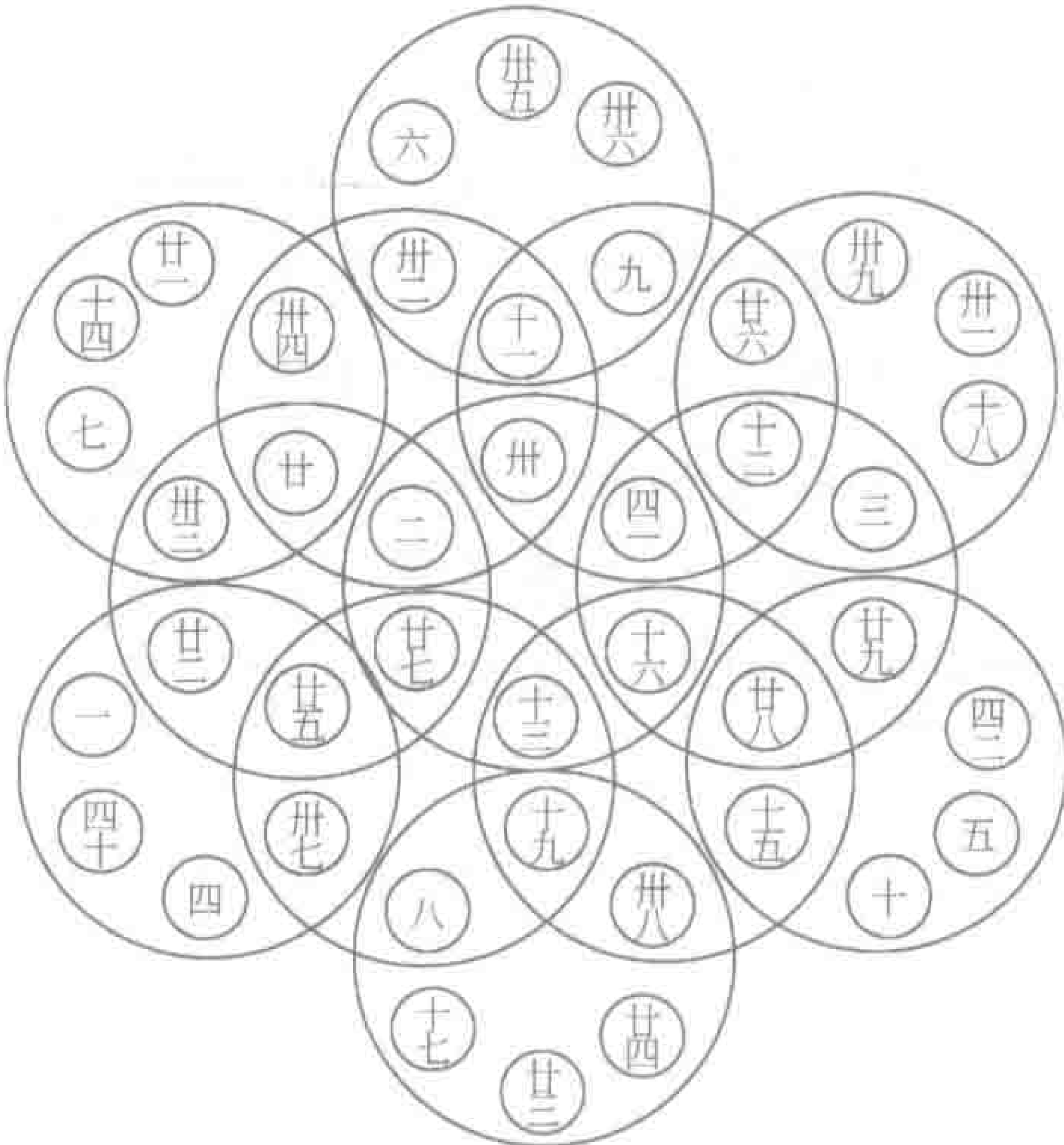


图 25-4-6　缨络图

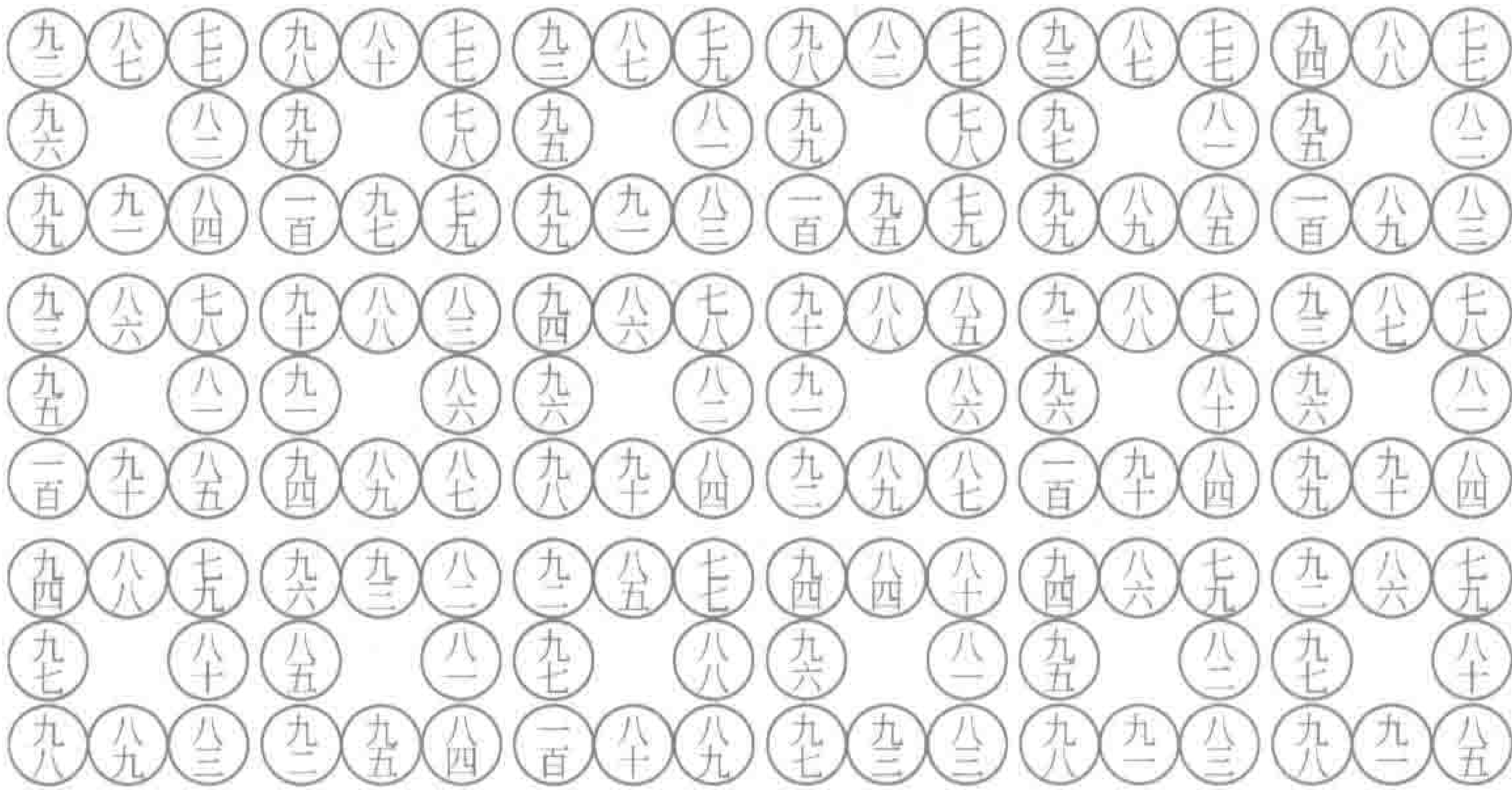


图 25-4-7　三同六变之图

第五节　九进位制与十进位制的小数换算

朱载堉最重要的数学成果，就是关于十进制与九进制的小数之间的换算。

朱载堉在研究律吕计算时遇到九进制问题。古代乐律理论中以“十二律”来命名音高，分别称为黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、中吕、蕤宾、林钟、夷则、南吕、无射、应钟。古代用竹制的一组律管作为十二律的标准器。其中第一律黄钟是最为基本的，它的长度和口径决定了，其他各律均可依相关的理论由它推出。古书上记载，黄钟律管长 9 寸，所以后来的人们都认为这里的 9 寸是 1 尺 10 寸之 9 寸。何瑭（1474—1543）研究乐律时，重新解读“度起于黄钟之长”，提出一个观点：黄钟管长 9 寸与平时所言 1 尺，其长正等。这是两种长度相同而进制不同的尺。

朱载堉接受并发挥了何瑭的观点，在《律学新说》、《律吕精义》、《算学新说》等著作中，反复论说了三种尺。一种尺称为横黍尺，等于把 100 粒黍横排在一起的长度，另一种尺称为纵黍尺，等于把 81 粒黍纵排在一起的长度，还有一种尺是斜黍尺，为 90 粒黍斜排在一起的长度。横黍尺按 10 进制，每尺 10 寸，每寸 10 分；纵黍尺按 9 进制，每尺 9 寸，每寸 9 分；斜黍尺是混合进制，每尺 9 寸，每寸 10 分。三种尺的绝对长度相同而进位制各异。朱载堉称在十进制横黍律度和九进制纵黍律度间的换算为“律度相求”。因为黄钟的长度 1 尺（在横黍为 10 寸，在纵黍为 9 寸）是十二律中最长的，其他各律均小于 1 尺，是小数。

《律学新说》卷一中“约率律度相求第二”给出了 9 进制小数换成 10 进制小数之算例：

> 大吕纵黍律长八寸三分七厘六毫。大吕横黍度长九寸三分六厘四毫四丝二忽。置八寸三分七厘六毫在位。先从末位毫上算起，用九归一遍，得六毫六丝六忽奇。却从次位厘上算起，再九归一遍，得八厘五毫一丝八忽奇。又从次位分上算起，再九归一遍得四分二厘七毫九丝八忽奇。又从首位寸上算起，再九归一遍，得九寸三分六厘四毫四丝二忽奇。余律皆仿此。①

此即：九进制的大吕律长 0.8376 尺换算成十进制的大吕度长为 0.936442 尺。其算盘运算步骤及现在的解释如下：

置数在位	837 6	
九归第一遍	83 7666	末位 6，以 9 归，得 666…
九归第二遍	8 38518	第 3 位以下 7666，以 9 归，得 8517…，余数进 1
九归第三遍	8 42798	第 2 位以下 38518，以 9 归，得 42797…，余数进 1
九归第四遍	936442	第 1 位以下 842798，以 9 归，得 936442…

“密率律度相求第三”给出了十进制换算成九进制的算例：

> 大吕横黍度长九寸四分三厘八毫七丝四忽，大吕纵黍律长八寸四分四厘〇六丝七忽。置九寸四分三厘八毫七丝四忽为实。初九因至寸位住，得八寸。又九因至分位住，得四分。又九因至厘位住，得四厘。又九因至毫位住，得〇毫。又九因至丝位住，得六丝。又九因至忽位住，得七忽。凡九因六遍，共得八寸四分四厘〇六丝

① 明 · 朱载堉，律学新说。见：王云五主编，《万有文库》本《乐律全书》，第 1 册，商务印书馆，1931 年，第 6 页。

七忽为大吕。余律皆仿此。

此题实际是：十进制的大吕律长 0.943874 尺等于九进制的大吕度长 0.844067 尺。其算盘演算程序如下：

置数在位	943874	
九因第一遍	8494866	用 9 乘 943874，得 8494866，定首位 8 寸
九因第二遍	84453794	用 9 乘 494866，得 4453794，定次位 4 分
九因第三遍	844084146	用 9 乘 453794，得 4084146，定三位 4 厘
九因第四遍	8440757314	用 9 乘 084146，得 0757314，定四位 0 毫
九因第五遍	84406815826	用 9 乘 757314，得 6815826，定五位 6 丝
九因第六遍	844067342434	用 9 乘 815826，得 7342434，定六位 7 忽

可以证明，上述方法完全正确，而且操作方便，直观明白。

朱载堉把上述计算过程总结为“律度相求诀曰：从微至著，用九乘除，纵横律度，契合图书”。具体解释为：“若置纵黍之律，以求横黍之度，则用九归；若置横黍之度，以求纵黍之律，则用九因。反复相求，各得纵横二黍律度。盖纵黍之律，契合洛书，故以九忽为丝，九丝为毫，九毫为厘，九厘为分，九分为寸，九寸为尺，从微至著，皆用九焉。其横黍之度，契合河图，则以十忽为丝，十丝为毫，十毫为厘，十厘为分，十分为寸，十寸为尺，从微至著，皆用十焉。”

朱载堉的九进制与十进制小数换算法，对于一般 p（大于 1 的十进整数）进制小数与十进制小数的换算也成立，只要把“从微至著，用九乘除”改为“从微至著，用 p 乘除”，即可。①

所谓“纵横律度，契合图书”，是为附会“律吕本源”，即所谓“河图洛书者，律历之本源，数学之鼻祖也”。朱载堉《律学新说》卷一“律吕本源第一”对此颇有解释。他还认为，律度是客观存在，不以人意而改变，而其数据大小则“皆算家命之尔”，不论九进制还是十进制都是人为的，均为了方便计算。“黄钟之长，固非人所能为，至于九其寸而为律，十其寸而为尺，则人之所为也。”比如，采用九进制乃为了适应“三分损益法”，在这种情况下，黄钟 9 寸，林钟 6 寸，太簇 8 寸，均为整数。如果采用十进制，黄钟 10 寸，则其他各律均为无限不循环小数。这个认识是十分正确的。

需要说明的是，九进制并不是何瑭和朱载堉首次提到，早在宋代，蔡元定就简略地提到九进制。②

---

① 李兆华，朱载堉数学工作述评，见：古算今论，天津科学技术出版社，2000 年，第 283 ~ 297 页。

② 戴念祖，朱载堉——明代的科学和艺术巨星，人民出版社，1986 年，第 197 页。

第二十六章 中国数学在朝鲜和日本的传播与影响

元中叶至明末的中外数学交流主要有二个方面。一是中国与阿拉伯世界的交流，二是中国数学在朝鲜、日本等汉字文化圈国家的传播。关于前者已在第二十一章介绍过，而目前对于明代的资料掌握还不够充分。本章主要介绍后者。由于17世纪和18世纪初期也是中国数学对外传播的重要时期，而在第六编的结构中又不便安排，所以本章的时间界限向后略有延伸。

第一节 中国数学外传朝鲜半岛及其影响

李氏朝鲜王朝（1392~1910）建立后，中朝两国之间人员往来比以往更加频繁，朝鲜每年都派出大量赴燕使来北京，包括专门来采购书籍的官方使团。中国宋、元、明三代的大量数学著作通过各种渠道传播到了朝鲜，朝鲜传统数学（称为“东算”）的起步和发展就是在中国数学的基础上展开的，同时，朝鲜也对传入的中国算书起到了很好的保存作用。

一 中国数学在李氏朝鲜初期的流传与影响

李氏朝鲜王朝的第一个科学发展高峰就是在引进、学习、研究中国科学的过程中形成的，这个高峰出现在15世纪前期，组织领导这次大规模引进活动的是李裪（1397~1450）。李裪是李氏朝鲜的第四个国王（1418~1450年在位），他是李朝500多年中最著名的和最有为的国王，朝鲜史称“世宗大王”。他十分重视发展科技，以此为强国之策。在他的努力下，15世纪朝鲜在科学技术方面突飞猛进，学术繁荣，成就惊人，在天文历法、数学、医学、技术、测量、气象等诸多方面达到前所未有的水平，是朝鲜科技发展的黄金时代。①

李裪对数学的重要性有较深刻的认识。他强调：“算学虽为术数，然国家要务，故历代皆不废。”②“算法非独用于历也，若有起兵、量地之事，则舍是无以他求。”③他组织了一次大规模的“博求历算之书”的活动，于世宗六年（1424），获得了《大明历》、《回回历》、《授时历通规》及《算学启蒙》、《杨辉算法》、《捷用九章》等中国历算著作，这些书有的在高丽时代就开始在朝鲜半岛流传，这次是再次传入。另外，当时朝鲜还收藏有《详明算法》和《五曹算经》等书。世宗时代的中国天文历法和数学著作已经初具规模。

---

① 韩·洪以燮，朝鲜科学史，正音社，1946年，韩文本，其后多次重印，并有日文本，又收入：洪以燮全集，延世大学出版部，1994年。Sang－Woon Jeon（全相运），*Science and Technology in Korea*，The MIT Press，1974；再版本：*A History of Science in Korea*，Jimoondang Publishing Company，1998. 全相运还有多种韩文版本的朝鲜科技史著作。

② 韩·国史编纂委员会，《世宗实录》卷一百二“世宗二十五年癸亥十一月戊辰”条，见：朝鲜王朝实录，第四册，东国文化社，1955年，第524页。本章凡引《世宗实录》，均据此版。

③ 《世宗实录》卷五十一，“世宗十三年三月丙寅”条，见：《朝鲜王朝实录》，第3册，第297页。

这些数学著作对朝鲜的数学教育发挥了很大的作用。刚搜集到这些书时，朝鲜能读懂的人很少。世宗设立了专门机构“算法校正所”，组织人员攻读这些著作，又设立了“历算所”，专事人才培养。据朝鲜《世宗实录》卷二十三“世宗六年六月辛酉”条记载：

然书云观①、习算局、算学重监等，无一知之者。于是，别置算法校正所，命文臣三四人及算学人等，先习算法，然后推求历法。数年之内，算书与历理，皆能通晓。然犹虑未传后世，又设历算所，训导三人，学官十人，算书历经，经常习熟，每日置簿，每旬取才，考其勤慢，劝徵练业，故知算法者，相继而出。

世宗五年（1423），朝鲜重启了国家数学教育工作。据《世宗实录》卷四十七“世宗十二年庚戌三月戊午”条，该年对国家的考试用教材进行了改革，放弃了高丽时代使用的数学教材，采用《详明算法》、《算学启蒙》、《杨辉算法》、《五曹算经》和《地算》等书作为新的教科书，此后沿用了300多年，对于培养朝鲜的中人②数学家起到相当大的作用。世宗特别重视数学人才的培养，并亲自学习数学，请大臣为他讲授《算学启蒙》。他还和大臣们一起讨论数学问题，计议发展方略，要求集贤院“考历代算学”，向他禀告。世宗十三年（1431），他还有派人到中国学习数学的想法③。《世宗实录》卷五十一“世宗十三年三月丙寅”条云：“上谓工曹判书郑招曰：‘……我国之人，明於算术、详知方圆之法者盖寡，予欲择解文字通汉音者，入朝习算何如？’招对曰：‘上教然矣。’”同年三月他就指定了司译院注簿金汗、金自安等习算法，又“命集贤殿校理金镔、汉城参军禹孝刚习算法”。此外，他对学有所成的学者采取了一些奖励措施，对精通历算者予以重用。例如，当时著名的天文历法家和数学家李纯之就因“精于历算”而“最见亲宠”，以至于当李纯之丁母忧时，世宗考虑破常规起复任用。又如，据《世宗实录》卷七十五“世宗十八年丙辰十二月丁亥”条记载，当时年轻有为的学者金淡也受到重用。历算既为王者所好，臣民自然趋之，研习历算之风，应时而起，形成热潮。

作为研究中国数学与历法著作的结果，朝鲜学者编著了《七政算内篇》、《七政算外篇》（1442）、《诸家历象集》（李纯之，1445）、《交食推步法》（李纯之、金石梯，1458）、《天文类抄》（李纯之），整理了《步天歌》等著作。世宗本人也编写了《算学发蒙》。这些著作成了朝鲜历算学起步的基础。

仅靠抄写远不能满足对算书的需求。15世纪，朝鲜用铜活字版刊印了一些中国算书，包括《详明算法》、《算学启蒙》、《杨辉算法》等书④，这些算书后来都传到了日本。

二　17世纪朝鲜对中国历算著作的引进

世宗时代数学与科技发展的欣欣向荣局面，在几十年之后因为种种原因逐渐停止了。1592～1598年的“倭乱”（日本丰臣秀吉侵朝），1636年的“丙子胡乱”（满洲军侵朝）使朝鲜的文物典章损失殆尽。外族入侵之后，朝鲜朝野上下都在探索强国复兴之路，“实学”

① 书云观：是专门负责天文历法研究的机构。

② 中人：朝鲜的一个科学家与技术家阶层，其中数学家和历法家占多数，往往是父子相继，代代相传。

③ 郭世荣，中国数学典籍在朝鲜半岛的流传与影响，山东教育出版社，2009年，第25，26页。

④ 日·儿玉明人编，十五世纪の朝鲜刊铜活字版数学书，无有奇庵双私刊，东京，1966年。

思想开始兴起。实学思想激发了朝鲜学者对数学和天文历法知识的热情，这对中国数学著作继续在朝鲜的传播起到了重要的促进作用，朝鲜开始了从中国引进历算知识和发掘以前传到朝鲜的天文历算著作的新时期。特别是对追踪中国翻译引进西方历算著作的热情很高，一直保持了很长时间，并不断派出人员到中国学习和引进新知识。

朝鲜在《算法统宗》出版后不久就得到了该书，但具体时间还不是很清楚。李俨认为，在倭乱期间，该书就传到了朝鲜，并通过朝鲜传到了日本①，但是他没有给出证据，只是一种推测。16 世纪和 17 世纪之交，朝鲜学者李晬光（1563～1629）三次来中国，与传教士接触，了解了一些西方科技知识，并在他的《芝峰类说》（1614）中作了介绍。李光庭于 1603 年从中国把《坤舆万国地图》等西方著作带回朝鲜。自中国开始引进西洋历法之初，朝鲜就一直关注着中国的历法改革，曾派出多批人员来中国了解情况，收集资料②。经过 20 多年的努力，朝鲜从中国引进的天文历法书籍已相当可观。1705 年和 1708 年，许远到中国向何君锡学习，回国后撰写了《细草类汇》，说明时宪历的计算原理。

朝鲜学者也和中国学者进行过一些交流活动。例如，朝鲜天文学家郑斗源在 1639 年访问中国途中和中国数学家孙元化（？～1632）有过直接交往。后者著有《几何要法》、《几何体论》、《太西要法》等数学著作。又如清初数学家梅文鼎也和朝鲜学者有书信交流，他的《少广拾遗》（1692）就是为回答朝鲜学者的问询而作。此外，也有中国学者到朝鲜访问交流的事例：1713 年，中国历算人员何国柱到朝鲜进行大地测量期间，和朝鲜数学家洪正夏及其弟子刘寿锡进行过实质性的学术交流③。上述事例表明，17 世纪以来，朝鲜在引进历算知识方面积极性很高。根据各种朝鲜文献的引录与记述可知，在 17 世纪和 18 世纪前期，朝鲜从中国引入的汉译数学著作有：《几何原本》、《同文算指》、《筹算》、《圆容较义》、《测量法义》、《大测》、《比例规解》、《浑盖通宪图说》、《割圆八线表》、《几何要法》、《比例对数表》、《三角算法》等。④ 这期间，应该也有一些中国数学家的著述一起传到朝鲜。

三　宋元明数学著作的流传与影响

经过几次战乱，15 世纪朝鲜所刊中国算书，所剩不多，在世间流传较少。17 世纪在朝鲜有一个重新发掘整理的过程。

1433 年，朝鲜据明洪武戊午（1378）刊印本重新刊印了《杨辉算法》。到 17 世纪，金沟县令郑君瀁藏有一部《杨辉算法》，成为人们借阅传抄的依据，当时的多位学者引用或阅读过该书，如金始振（1582～1667）、庆善徵（1616～？）、任濬（1608～1675）等人都研究过。韩国延世大学收藏的一部《杨辉算法》刊本，最近郭世荣《中国数学典籍在朝鲜半岛的流传与影响》中的研究发现它是一个据 1433 年本重新刊印的版本。这表明，朝鲜不止一次刊印《杨辉算法》。18 世纪，数学家黄胤锡（1729～1791）节抄过《杨辉算法》。另外，中国 1840 年郁松年刊本《杨辉算法》也传到了朝鲜。

---

① 李俨，从中国算学史上看中朝文化交流，见：中算史论丛，第五集，科学出版社，1955 年，第 187～191 页。

② 石云里，古代中国天文学在朝鲜的流传与影响，中国科技大学博士学位论文，1998 年。

③ 郭世荣，李迪，何国柱与朝鲜洪正夏讨论数学问题的由来，内蒙古师范大学学报（自然科学版），2004，（2）209～212。洪万生，十八世纪东算与中算的一段对话：洪正夏与何国柱，汉学研究，2002，20（2）。

④ 郭世荣，17 世纪汉译西方数学著作在朝鲜，内蒙古师范大学学报（自然科学版），2007，（6）：683～686。

1660年，金始振重新刊印了《算学启蒙》，这是该书流传史上一个重大事件。当时庆善徵收藏有朝鲜初期刊印的《算学启蒙》。1657年，金始振从庆善徵手里借到了该书，又得到一个抄本，他对比过刊本和抄本，并把它和《杨辉算法》做了比较研究，请数学家任濬校补，最终刊刻出版，对《算学启蒙》的流传发挥了重要的作用。1660年刊本是后来朝鲜与中国各种刊本的母本，不仅在朝鲜流传很广，也传播到了日本，并反传回了中国。现在中、日、韩均藏有朝鲜刻本《算学启蒙》。现传朝鲜刊本《算学启蒙》，至少有三种不同的刊本，它们分别标有“乙未校正”、“庚午重刊，藏于本学”或“庚午重刊，藏于本学。乙未校正。”等字样。《算学启蒙》在朝鲜被多次刊印，说明朝鲜数学家需要它，朝鲜的数学教育需要它，东算的发展离不开它。

关于《算学启蒙》，还有一段中朝数学交流的佳话。1809年，朝鲜学者金正喜访问中国，与一大批名流学者进行学术交流，回国后以《算学启蒙》寄赠清代数学家徐有壬[①]，从而使朱世杰的这部数学著作在中国失而复得，经罗士琳整理刊刻，该书才再次在中国流传开来。徐有壬也给金正喜寄赠送了一批图书，其中就有朱世杰的《四元玉鉴》三册[②]。

上文已经提到，《算法统宗》出版后马上就传到了朝鲜。崔锡鼎（1645～1715）收藏有该书，李寿翁（？～1700）曾抄录一部，还请崔锡鼎写了一篇“书《算法统宗》后”[③]。明三桂堂刊本（1593）和清《古今图书集成》本《算法统宗》也都传到了朝鲜，黄胤锡摘抄过三桂堂本。目前韩国收藏的《算法统宗》有20多部，收藏《详明算法》十几部。还有一些书是混合摘录《算法统宗》和《详明算法》而成。朝鲜有一些民间日用数学著作是根据《算法统宗》编成的，有不少改编本和节略本。《算法统宗》在朝鲜被确定为官用教科书，使用时间很长，影响极大。

此外，还有一些宋元明算书也以各种方式传播到了朝鲜，秦九韶的《数书九章》、李冶的《测圆海镜》和《益古演段》等书是在19世纪中国重新发掘出来后传到朝鲜的。明代唐顺之和顾应祥的著作及《指明算法》等书也都传到了朝鲜。

17世纪是朝鲜东算初创时期，宋元时代的《杨辉算法》、《算学启蒙》、《详明算法》和明代的《算法统宗》和《同文算指》等著作对东算的形成发挥了关键作用和巨大影响，朝鲜数学家正是通过学习这些著作，掌握了数学知识，开始撰写自己的著作。其中有几部著作，如庆善徵的《详明数诀》、任濬的《新编算学启蒙注解》（1662）、朴繘的《算学原本》等，是专门研究中国数学著作的作品。

朝鲜数学家的绝大多数数学著作，都和中国传入的数学著作关系紧密。庆善徵的《嘿思集算法》、崔锡鼎的《九数略》、赵泰耉的《筹书管见》、洪正夏的《九一集》和《东算抄》、黄胤锡的《算学入门》和《算学本源》、洪大容的《筹解需用》等朝鲜数学著作，都以中国算书为基础，在体例、内容、思想等各个方面都与中国数学著作密切相关。19世纪的数学家李尚爀（1810～？）、南秉哲（1817～1863）、南秉吉（1820～1869）、赵义纯（生卒年不详）等人则对《测圆海镜》《数书九章》、《四元玉鉴》等书展开了深入的研究。

---

① 冯立昇，《算学启蒙》在朝鲜的流传与影响，《文献》季刊，2005，（2）57～64。

② 苏意雯，从一封函札看中韩儒家明算者的交流，HPM通讯，3（8，9）。

③ 崔锡鼎，《明谷集》卷十二“书算学统宗后”，见：韩国文集丛刊，第154册，民族文化推进会（汉城），1995，第74页。

兹以崔锡鼎、洪正夏、洪大容和黄胤锡等数学家为例说明如下：

崔锡鼎的《九数略》引用书籍37种："《周易》、《毛诗》、《尚书》、《春秋左氏传》、《公羊传》、《周礼》、《礼记》、《论语》、《孟子》、《中庸》、《大学》、《尔雅》，[以上经书]。《庄子》、《荀子》、《孙子》、《淮南子》、《阴符经》、《法言》，[以上诸子]。《史记》、《汉书》、《纲目》，[以上诸史]。《文选》、《邵子全书》、《朱子大全》、《易学启蒙》、《大学或问》，[以上诸集]。《九章算经》、《七改算》① [元郭守敬著]、《算学启蒙》[元朱世杰著]、《算学统宗》[明程大位著]、《乘除算》、《摘奇算》、《田亩比类》②、《天学初函》[西士利玛窦授，明李之藻演]、《筹算》[西士罗雅谷著]、《详明算法》、《嘿思集》[东士庆善徵著]，[以上算书]。"③绝大多数是中国典籍。由此可见他对中国典籍与数学的了解程度。《九数略》丙编所附"古今算学"对中国数学史的记述，也反映了他对中算的熟悉程度：

> 古者，黄帝命大挠作甲子、容成造历、隶首作算数、伶伦造律吕，于是算数之事兴矣。放勋以棋三百命羲和，大禹以九数治鸿水，周公作九章，以六艺教万民而宾兴，其一曰数。孔子不试故艺，而弟子颜渊、子贡之徒，身通六艺者七十有二人。自是，学士、儒家名算法者，汉有司马迁、杨雄、张衡、郑玄，六朝有祖冲之、刘徽，唐有孔颖达，五季有王朴，宋有胡瑗、邵尧夫及朱夫子、蔡季通父子。术士精算法者，称汉之落下闳、晋之郭璞、唐之李淳风及一行。心计、祖计，然后有曹元理、何祇、刘晏。近世明算法者：中国有钱塘杨辉、燕山朱世杰、新安程大位、浙西李之藻诸人；北有耶律楚材；西人利玛窦、汤若望；东国则新罗崔文昌致远精于艺数。我朝南忠景在号精算，黄翼成喜通书数，儒家徐文康敬德邃于数学，李文纯滉、李文成珥二先生俱明算法。近世朝士金观察始振、李参判惯、任郡守濬、朴殷山繘最著，术士则称庆善徵云。

洪正夏的《九一集》中广泛采用了《算学启蒙》和《算法统宗》中的内容。1713年，他带领弟子刘寿锡与清朝的五官司历何国柱有过一场有趣的学术交流。洪正夏用算筹计算，引起何国柱极大的兴趣，也使他大失颜面。当时中国数学家已不用算筹。

《筹解需用》列出的"引用书目"：《算学启蒙》、《算法统宗》、《算法全书》（清蒋守诚撰）、《续古摘奇算法》、《浑盖通宪》、《详明数诀》、《数原》（朝鲜著作）、《律历渊源》、《数理精蕴》，除两种外均为中国算书。

黄胤锡著作中涉及到的中国数学著作有：《梦溪笔谈》、《谢察微算经》、《杨辉算法》、《数学启蒙》、《革象新书》、《详明算法》、《算法统宗》、《指明算法》、《平三角举要》、《弧三角举要》、《律学正宗》（梅文鼎）④、《律吕正义》、《数理精蕴》、《八线对数表》、《对数阐微表》、《八线表》（以上《数理精蕴》附表）、《句股割圜记》（戴震）、《几何原本》（利玛窦、徐光启译）、《天学初函》（李之藻编，包括多种算书）、《圜容较义》（利玛窦、李之藻）、《句股义》（徐光启）、《表度说》（周子愚）、《同文算指》（利玛窦、李之藻）、《筹算》（罗雅谷）。他的《颐斋先生遗稿》续集卷九中有一段讨论弧弦关系的内容，题"弧弦

---

① 《七改算》可能是《七政算》之误。

② 以上三种《乘除算》、《摘奇算》和《田亩比类》是《杨辉算法》中子书目的简写。

③ 崔锡鼎，《九数略》，见：韩国科学古典丛书Ⅲ，诚信女子大学校出版部，1983。第7～11页。

④ 中国未见有此书名，黄氏记曰："梅文鼎所撰《律学正宗》十卷，其小目有：曰《笔算》、曰《弧三角》、曰《堑堵测量》、曰《三角举要》，诸目大约如此，而已经本国印行，又为清主御制《数理精蕴》所採者也。"

约说”，现在摘引其开头一段，以见其对中算的熟悉程度：

始余少时，阅朱氏《算学启蒙》，得弧矢田法，只知求积而已。及考张廷玉《明史·历志》，而参以沈括《笔谈》、《杨辉算法》，则弧矢句股弦相求之术，稍稍详矣。但郭守敬创授时本数，特据古法：径一圆三，而其所推求而得之者，多未确。明历虽改名大统，而只因郭氏耳。以此思量十数年，恒戞戞如物在肚。晚就李之藻《通宪图说》、《圜容较义》、徐光启《句股义》、周子愚《表度说》诸论，喜其实入细密，而一切有法之形，有度之数，悉奉利玛窦《几何原本》为律令，意利氏立法必是无上焉尔。今以清主康熙中所制《数理精蕴》、《历象考成》者绎之，则几何大意，略约可见，而徐究原法，卒止用线而准之。①

总之，中国数学典籍不仅给朝鲜数学家提供了新的数学知识，而且也成为朝鲜数学家学习和模仿的范本，朝鲜的东算与中算有着千丝万缕的联系，完全是在中算的基础发展起来的。朝鲜数学家对中国数学著作的熟悉与掌握程度极高，有的数学家如黄胤锡对中算的掌握比同时代的中算家毫不逊色。

第二节　中国数学在日本的传播与影响

1392年日本足利氏室町幕府统一全国，主张与中国进行交往与贸易，中日两国贸易活跃，宗教与文化往来较为频繁。1467年日本进入战国时代（1467～1573），1590年丰臣秀吉（1536～1598）完成统一大业，1592年和1598年丰臣秀吉两次率兵侵略朝鲜，中国出兵援朝。1603年德川家康（1542～1616）在江户（今东京）开设幕府，日本历史进入江户时代（1603～1868），此后中国与日本之间的贸易又开始活跃起来，文化交流也因此而增加。在这段时间内，中国的珠算及明代的算书首先传到日本，接着宋元数学著作也逐渐传入日本。

一　珠算与明代数学著作在日本的传播

算盘传到日本，是中日数学交流史和文化史上的重要事件。明初，载有算盘图式的《魁本对相四言》就传到了日本，日本人对珠算显然已有所了解②，明代侯继高在其《全浙兵制考》之附录《日本风土记》（1592至1593年成书，记录1573年以前日本的历史、地理与风土人情）中记录了日本对算盘名称的读音，16世纪在日本的西方传教士也记载了日本使用珠算的情况，日本尊经阁收藏有16世纪末期使用过的算盘。这些情况表明，珠算传到日本的时间不晚于16世纪中叶，16世纪后期珠算已成为日本流行的计算工具。珠算对日本国民教育影响深刻，激发了日本数学的活力，成为和算诞生的原动力③。

介绍算盘使用方法的珠算书应该与算盘相伴传到日本。传日珠算著作，影响至大者乃

---

① 黄胤锡，颐斋全书，景仁文化社，1976年，第493页。

② 日·户谷清一：「走盘」と日本考の「そおはん」—そろばんの傳來について，珠算春秋，1987，(65)：69～71。

③ 冯立昇，中日数学关系史研究，西北大学博士学位论文，1999年，第22～24页。

《算法统宗》。关于该书传入日本的经过，数学史学家们有各种不同的讨论与推测，例如，李俨估计是通过侵略朝鲜时从朝鲜带回去的；远藤利贞说是毛利重能从明朝得到的，而三上义夫指出这是不可能的，并推测是通过南洋贸易顺便带回去的；还有人认为是传教士传播过去的，等等。尽管这些说法都没有十分可靠的文献证据，但总的说来，都认为《算法统宗》传到日本的时间是在它被出版后不久。有确切材料可以证明在1610年之前《算法统宗》就传到了日本，并在日本的著作中有所参考。

《算法统宗》传入日本后，成为日本人学习的范本，对日本和算的产生发挥了巨大的作用，影响深远。和算家吉田光由（1599～1672）以《算法统宗》为蓝本编撰了《尘劫记》（1627年初本，后来又有修订），大量印刷与传播，成为和算发展的重要里程碑。后来和算家大量改编《尘劫记》，各种版本达到400多种。1675年，日本汤浅得之训点刊印《新编直指算法统宗训点》，其后又多次刊刻。《算法统宗》在日本流传之广泛由此可见一斑，无疑和算家对该书是十分熟悉的。目前日本所收藏的各种版本《算法统宗》有十几种。程大位的另一部著作《算法纂要》也传到了日本。

明代另外两部珠算重要著作《盘珠算法》和《数学通轨》也传到了日本。《尘劫记》和《增补算法阙疑抄》（礒村吉德，1684）等书均有与《盘珠算法》相似的内容，可能是参考该书的迹象[①]。《数学通轨》在日本的影响比《盘珠算法》大的多。宽文十二年（1672），田野庄卫右门翻刻了《数学通轨》，岛田贞继的《九数算法》（1653）和宫城清行的《和汉算法》（1695）均引用过《数学通轨》[②]。此二书在中国已失传，但在日本却得到保存，两书的明刻本在日本均有收藏。

传到日本的明代珠算著作还有《新鐫九龙易诀算法》、《启蒙便用九章算法全书》、《新镌校正指明算法》和《桐陵九章捷径算法》等。其中，前二书在中国失传，但在日本有收藏。后二书在中国目前只有清刊本。1673年，和算家村濑义益在《算法勿惮改》序文中提到了《桐陵算法》：“《桐陵九章捷径算法》、《算学启蒙》、《直指统宗》等因是异朝之书，虽考勘发明之人，无文才也不能读。”关孝和（1642～1708）与建部贤宏（1664～1739）都曾引用该书。目前日本东北大学收藏有该书。

还有一部传入日本的算书《算学群奇》。该书作者与刊年不详，现已失传，它应是一部与《算法统宗》关系密切的著作。汤浅得之在训点本《算法统宗》跋文中提到了《算学群奇》和清初的《算海说详》（李长茂，1659）：“爰《算法统宗》，有渡唐而以来，世久褒用，令为秘本，今予考订之，锓梓矣。此书所以备算法之本源者，于异朝缀拔此书作《算学群奇》，又注解此书，名《算海说详》，于本朝岛田氏统宗班班捨集著《九数算法》，和汉之一者也。”这段记述表明，《算学群奇》是以《算法统宗》为基础写成的，而《算海说详》又是研究《算学群奇》的著作，而《九数算法》参考了这几部著作。平山千里的《算薮》（1789）卷五中也提到了《算学群奇》中所记“僧分馒头”题，该题在明代其他著作中也屡次出现。

---

① ［日］铃木久男，算法统宗と尘劫记，珠算史研究，1986，（14）：841～850；藤原松三郎，支那数学史ノ研究，其一，東洋数学史への招待——藤原松三郎数学史论文集，日本仙台：东北大学出版会，2007年，第139～149页。

② ［日］藤原松三郎，和算史ノ研究，東洋数学史への招待——藤原松三郎数学史论文集，日本仙台：东北大学出版会，2007年，第9～20页。

传到日本的明代数学著作，已知的还有吴敬《九章详注算法比类大全》、朱载堉《乐律全书》和《算学新说》、唐顺之《唐荆川数论六篇》、佚名《精采算法真诀》，等等。关于这些著作传日的经过，目前尚不是很清楚，但在日本有收藏或记载。

二　宋元数学著作在日本的传播

宋元数学著作对日本影响至大的有《算学启蒙》和《杨辉算法》，同时《授时历》在日本也产生了很大的影响。

《算学启蒙》传入日本的具体年代已不可详考。该书传入日本的途径可能有两条。其一，丰臣秀吉侵略朝鲜时带回去了一批中国著作，其中包括《算学启蒙》。日本筑波大学图书馆所藏的《算学启蒙》押有养安院藏书印。养安院是阳成天皇赐给曲直濑正琳（1564～1611）的号。1594年，曲直濑正琳因治疗奇疾很有效果而获赐数百卷从朝鲜抢来的图书。[①]由此可知，此书应是从朝鲜传入日本的。其二，直接从中国传去元代刊本。1658年，久田玄哲加训点后的《算学启蒙》在日本刊行。抄本《数学纪闻》称，久田玄哲所用底本是他在京都东福寺内发现并购到的。因此，日本学者对于训点本的底本有两种说法，一种说法认为其底本与现养安院藏本相同，即朝鲜刻本；另一种说法则根据《数学纪闻》得之寺院之说，进一步推测为镰仓时代与佛书一同从中国传来的元刊本。冯立昇《〈算学启蒙〉在朝鲜的流传与影响》认为这两种说法都有一定道理，可能性都不排除。

在久田玄哲训点本刊行后14年，又有星野实宣（1638？～1699）的《新编算学启蒙注解》（1672年）问世，1690年，著名和算家建部贤弘的《算学启蒙谚解大成》七卷本刊行，此外，日本数学家还有《算学启蒙重注》和《算学启蒙明术》等研究著作问世。这样，《算学启蒙》在日本有训点本、注释本、谚解本和重注本等多种版本。和算家的这些研读、解释和注解工作，清除了理解该书的障碍，对于元代数学知识在日本的传播起了很大的作用。《算法统宗》的上述版本，有的在日本反复出版，流传广泛，影响深远，还有一些流传至今。此后，和算家研究、学习此书的人一直很多。因此，《算法统宗》在17世纪和18世纪在日本成为流行的数学著作。

《杨辉算法》传到日本的情形大约与《算学启蒙》相同。日本收藏有三部朝鲜1433年刊本《杨辉算法》，其中筑波大学藏本上押有养安院藏书印，说明也是16世纪末传到日本的。1664年刊行的和算书《童介抄》参考过《杨辉算法》。关孝和于“宽文癸丑[②]仲夏浣日订写讫”《杨辉算法》。关孝和的这个抄本订正了朝鲜刊本的一些不正确的排版次序，另外关抄本中《杨辉算法》所含四部算书的编排顺序也不同，这说明他手中应有朝鲜刊本以外的版本。据日本文献记载，南都（今奈良）的寺院中有一批与佛书混杂在一起的中国书，无人能读懂，关孝和从江户赶去抄写，并回去研究了三年，“终得其奥妙之极”，冯立昇《中日数学关系史研究》认为这与关氏抄写《杨辉算法》之事吻合。可见《杨辉算法》也有直接从中国传去的可能。

---

① 冯立昇，中日数学关系史，山东教育出版社，2009年，第66页。

② “宽文癸丑”年，即1673年。和算家石黑信由（1760～1836）转抄本《杨辉算法》把“癸丑”改成了“辛丑”（1661），和算史研究者都据此认为关抄此书在1661年，平山帝澄清了相关问题，将抄写时间定为癸丑年（1673）。

1371 年，明朝赐给日本《大统历》、《授时历经》、《授时历议》等历法著作也通过《元史》在明初传入日本。1672 年，日本刊行了《授时历经》和《授时历议》，次年，小川正义刊行了《授时历经立成》，引起了日本研究《授时历》的高潮。关孝和著有《授时发明》(1680) 和《授时历立成法》，关氏弟子建部贤宏著有《授时历议解》，小泉光保著有《授时历经图解》(1703)，建部的弟子中根元圭著有《授时历图解发挥》(1707)、《授时历议解摘要》、《授时历经俗解》(1768 年刊刻)。冯立昇《中日数学关系史研究》指出，在江户时代，日本流行的研究和注解《授时历》的著作有 50 多部。由此可见《授时历》在日本的流传与影响之一斑。

《革象新书》也应该在 17 世纪初传到日本，此书也对日本有重要影响。

《详明算法》也传到了日本。日本收藏的朝鲜刊本上也有养安院藏书印，这表明它与《算学启蒙》、《杨辉算法》一样，也在 16 世纪末经朝鲜传到了日本。

总之，16 世纪前半期的日本数学，是对中国数学的摄取期，也是和算独立发展的准备期[①]。这一时期传入日本的数学著作很多。村松茂清 (1608 ~ 1695) 在其《算俎》(1663) 卷三末提到："近顷，见板行算书十部余，……异朝选记算书二百六十七部九百余卷，内多历书也。"[②]意即当时日本的数学著作有十余部，而从中国传入的历算书有 267 部共 900 余卷。尽管其中历书居多，但数学书一定不会太少。

三　宋元明著作对日本数学的影响

16 世纪末至 18 世纪初，是宋元明数学传入日本的主要时期，日本先吸收明代数学，进而摄取宋元数学，形成和算，并飞跃发展。传入日本的中国数学著作发挥了十分重要的作用，《杨辉算法》、《算学启蒙》和《算法统宗》是这一时期在日本影响最大的三部数学著作，《授时历》中的数学也发挥了极大的作用。

《算法统宗》是这一时期较早对和算产生重大作用和影响的著作。该书不仅给日本人传去了数学知识，丰富了和算的内容，而且对和算的起步发挥了示范作用。《算法统宗》的编写方式与体例，通过《尘劫记》被和算家所接受，并成为和算的规范。同时和算家今村知商 (约 1591 ~ 1668) 在汉学和《算法统宗》的影响下用汉语撰写了数学著作《竖亥录》(1639)，从此，使用汉语撰写数学著作也成了和算的范例。冯立昇《中日数学关系史研究》认为《算法统综》还促进了和算由低级向高级阶段的转变，对和算的发展产生了强大的推动力。

接着，宋元时代的《算学启蒙》和《杨辉算法》开始发挥作用。这两部著作对和算的重要作用是向和算家传播了宋元数学知识和数学方法，特别是以天元术和开高次方为中心的代数方法，大力促进了和算的发展，使和算从起步阶段的实用数学为中心深化到以代数理论为中心的阶段。宽文十一年 (1671)，泽口一之刊行了《古今算法记》，标志着和算家已经正确理解、消化了天元术，和算从此进入了以代数学为中心的阶段。关孝和于延宝二年

① ［日］藤原松三郎，和算，原载：文学时报，(677)，昭和 15 年 (1940)，第 53 ~ 62 页，收入：東洋数学史への招待——藤原松三郎数学史论文集，日本仙台：东北大学出版会，2007 年，第 39 ~ 48 页。

② 徐泽林，和算选粹补编，北京科学技术出版社，2009 年，第 142 页。

(1674) 用天元术解答了《古今算法记》15 个遗题，从此确立了天元术在和算中的中心地位。此后，学习、应用和研究天元术成了和算的热点问题，涌现出大量相关著作，许多和算书冠以"天元"之名，如西胁利忠的《算法天元录》三卷（1697）、佐藤茂春的《算法天元指南》九卷（1698）、中村政荣的《算法天元樵谈集》二卷（1702）等都是以天元术为主要内容的著作。和算家不仅全面继承、吸收了天元术知识，而且在应用和研究天元术以及解决其相应的代数学问题过程中发展出了超过天元术的符号方法，从而使和算发生了新的飞跃。关孝和创立了傍书法、演段术和点窜术等代数方法，它们都是在《算学启蒙》和《杨辉算法》中的数学方法基础上发展起来的。关孝和通过研究《算学启蒙》、《授时历》和清代《天文管窥大成》，掌握了中国的招差法，进而推广发展起来了累裁招差法。和算的另一个重要内容"圆理"也是在研究中算基础上展开的数学创造。

总之，17 世纪初，日本数学家在研究中国数学和总结本国数学知识的基础上，开始撰写数学著作，逐渐形成具有独特风格的日本数学体系——和算。有关的细节，参考冯立昇《中日数学关系史》。

第三节　其他交流

中国数学著作除了传到日本和朝鲜之外，也传到了其他周边国家。

《算法统宗》传到了越南，越南的数学也深受《算法统宗》的影响。越南算书《算学底蕴》（作者不详）的"算数首篇总说"中有"其数莫不本于易范，故今推明直指算法，辄揭河图洛书于首，见数有本原云"，这话与《算法统宗》卷前"总说"完全一样。又越南潘辉框于明命元年（1820）自序《指明立成算法》一册，序称："予姓潘，字辉框……力学算辨，粗得《统宗》，可不立成法训以示后人，使易精识，为自浅人深之学者乎。"书中附有算盘图"初学盘式"，亦来自《算法统宗》。越南算书《九章算法立成》（范有锺撰）中有珠算口诀，如九归歌、撞归口诀以及归除歌等，均与《算法统宗》完全相同。事实说明越南算书承袭了中国《九章算术》和《算法统宗》的传统[①]。

16 世纪后期，欧洲传教士来到中国，他们通过各种形式向欧洲人介绍中国的事情，不仅通过自己的观察和研究来了解中国，以书信等方式向欧洲人传达他们所了解到的中国知识，他们还把大批的中国书籍带到了欧洲。例如，早在 1575 年，就有人从福建购买了几百书籍带回欧洲，其中就有天文和数学方面的著作。在法国和英国都藏有《算法统宗》[②]。1693 年，康熙皇帝命法国传教士白晋（J. Bouvet，1656～1730）以"钦差"的身份回欧招募更多的传教士。白晋回法国时带的礼物中就有 49 册图书，其中就有《算法统宗》[③]。又据毕奥（E. Biot，1803～1850）说，1839 年法国王家图书馆收藏 3 套《算法统宗》，编号为傅尔蒙（Fourmont）收藏 350、159 和 160 号。傅尔蒙是 18 世纪初王家图书馆整理汉文书目的学者，后来成为汉学家。这 3 套《算法统宗》中肯定包括白晋带去的那 1 套，根据当时中

① 韩琦，中越历史上天文学与数学之交流，中国科技史料，1991，12（2）：3～8。

② 郭世荣，《算法统宗》导读，湖北教育出版社，2000 年，第 50 页。

③ M. Cohen，A point of history，the Chinese books presented to the National Library in Paris by Joachim，Bouvet. S. J. in 1697，Chinese Culture，1990，31（4）.

国出版该书的情况应是明刊本，从 1839 年编目时已有的版本看，另 2 套不会晚到道光年 (1821～1850)。毕奥对《算法统宗》的研究兴趣始于 1835 年，这年他在一本杂志上看到一篇有关纳贝尔（Napier）的文章，其中附有《算法统宗》之“开方求廉率作法本源图”，因为早于巴斯加三角形，所以十分引人注意。于是毕奥撰文介绍《算法统宗》，并将该书的目录及部分内容译为法文，所依据的是编号为 350 的 12 卷本。[①] 朱载堉的十二平均律及相关的九进制与十进制的小数换算法也应该在明末传到了欧洲，并得到了欧洲研究者的重视[②]。

英国的伟烈亚力（A. Wylie，1815～1887）在他的英文文章中较为全面地介绍了中国数学，涉及大量宋元明算书。欧洲学者在介绍中国算盘时，都提到了《算法统宗》。

明代中国与阿拉伯世界也有数学交往。元代在回回司天台有一批阿拉伯天文学家，明朝之后，这批人都到了明代的回回司天监，同时还有另外一些从西域来的天文学家。明洪武二年（1369）马德鲁丁携三个儿子马沙亦黑、马哈麻和马哈沙来中国定居，从事天文历法工作，建立回回司天监，这些人当然也是懂得数学的。后来马沙亦黑编译了《回回历法》，马哈麻翻译《明译天文书》[③]，对回回天文学在中国传播起到了积极的作用，并通过中国对朝鲜产生了重要影响。这些懂得阿位伯数学的天文学家们，和中国数学家有什么样的交流呢？目前还没有确切的史料，需要做更多的研究工作。现在能够确定的是，回回天文学家们与中国天文学家在一起工作过，前面提到的《回回历法》和《明译天文书》均有中国学者参与其中的工作，正是双方交流的证明。我们深信他们在中外数学交流方面做了不少工作，但是尚不清楚他们之间在数学方面有什么具体的交流成果，也不知道他们对中国与阿拉伯世界的数学交流起了什么作用。不过，有一点是肯定的，在引进阿拉伯天文学的同时，中国的天文历法知识也有一些传播到了阿拉伯。更为确切的是，西方的一种计算方法传到了中国，吴敬的《九章算法比类大全》中以“写算”的名称记录了这种算法，在后来的中国数学著作中记载这种计算方法的不少，并有“铺地锦”等名称，而且朝鲜和日本的数学家通过中国的著作熟悉了写算。

---

① M. Biot, Table générale d' un ouvrage chinois intitulé souan - fa - tong - tsong, Journal Asiatique, 1839, 7: 193～217.

② J. Needham, Science and Civilisation in China, Vol. IV, Part 1, Cambridge University Press, 1962, 224～228.

③ 陈久金，回回天文学史研究，第七章，广西科学技术出版社，1996 年。

第六编　西方数学的传入与中西数学的会通

——明末至清末的数学

第二十七章　明末清初西方数学的传入与清初的研究

徐光启在“刻《同文算指》序”中认为，“名理之儒土苴天下之实事”、“妖妄之术谬言数有神理”是导致明代数学衰微的原因。① 万历年间，行用200余年的《大统历》预报日月食已不准确，一些有识之士倡言历法改革。然而，当时人们的数学知识已无法满足改历的需要。正是在这种情况下，利玛窦（Matteo Ricci，1552～1610）等耶稣会士传入西方数学，受到徐光启、李之藻等中国知识分子的欢迎。清初薛凤祚、王锡阐、梅文鼎等对西方数学知识进行了深入研究，力图融会中西数学。

第一节　明末西方数学的传入

一　西方数学著作的编译

（一）耶稣会士来华

1582年，意大利耶稣会士利玛窦来华，开辟了中国科学史的新纪元。之后，耶稣会士接踵而来，他们通晓欧洲科学，又怀着强烈的宗教热情，欲归化中国，在他们眼里，科学作为了解上帝的重要手段，在万物中发现上帝，以“愈显上帝之荣”。来华耶稣会士为达到传教之目的，尊重中国礼仪，深入研究中国典籍，并和士人广泛接触，促进了欧洲宗教、科学和艺术在中国的传播。传教士传入西方的科学，特别是数学和天文学方面的成就，为停滞的明代科学注入了新的活力，使得中国人重新审视传统数学，导致了传统数学的复兴。

明末清初，中国传统历算知识逐渐西化。在这一过程中，耶稣会士起到了重要作用。耶稣会是西班牙人罗耀拉（Loyola，1491～1556）创立的，目的是重振天主教会，维护教皇权威，1540年获得教皇保罗三世的批准。罗耀拉把数学的学习与教育写入耶稣会的会规。耶稣会士的教育机构，最重要的是学院（college），相当于现在的中学。这种教育继承了以前的人文传统，被分为三艺（trivium）和四艺（quadrivium），三艺包括语法、修辞和逻辑，四艺包括算术、几何学、音乐和天文学。1551年，耶稣会的罗马学院（Collegio Romano）建立，不久它成为耶稣会教育的范本。1556年，教皇承认它为一所大学。

在罗马学院任教的最著名的是耶稣会士数学家丁先生（C. Clavius，1537～1612），1566年已在罗马学院给出了一个大纲，传授欧几里得（Euclid，公元前330～前275）

---

① 这是中国数学史上首次探讨中国数学落后的原因，参见：韩琦，关于十七十八世纪西方人对中国科学落后原因的探讨，自然科学史研究，1992，（4）。

《几何原本》前六卷、算术和天文、光学等知识。丁先生写下了大量的教科书，涵盖了耶稣会士课程的各个方面。[1] 他还详细注解了《几何原本》（*Euclidis Elementrum Libri XV*），被誉为16世纪的欧几里得。他有关Sacrobosco的《天球论》的评注，以及实用算术和代数方面的教材，成为耶稣会传播数学知识的基础，其中有《实用算术概论》（*Epitome arithmeticae practicae*，1583）。其著作作为学生的标准教科书，影响深远。徐光启在刻《几何原本》序中说："利先生从少年时，论道之暇，留意艺学，且此业在彼中所谓师传曹习者，其师丁氏又绝代名家也。"丁先生的很多著作经过利玛窦等耶稣会士而传入中国，多数仍保存在原北堂图书馆。[2] 耶稣会学校曾培养出不少著名的学者、思想家和科学家，如斯台汶（S. Stevin，1548～1620）、笛卡儿（Descartes，1596～1650）、惠更斯（C. Huygens，1629～1695）、牛顿（I. Newton，1642～1727）都曾受到耶稣会士科学家及其著作的影响，耶稣会士在欧洲所受的教育，是他们在中国从事科学活动的基础。利玛窦是丁先生的学生，丁先生评注的《几何原本》前六卷及《实用算术概论》成为利玛窦与徐光启翻译《几何原本》，李之藻编纂《同文算指》的底本。邓玉函（J. Terrenz，1576～1630）曾是灵采研究院的院士，与著名科学家开普勒和伽利略是朋友，德国耶稣会士汤若望（J. A. Schall von Bell，1592～1666）也在罗马学院受过教育。

（二）利玛窦、徐光启与《几何原本》的翻译

利玛窦，意大利耶稣会士，1582年来华，先在广东肇庆一带传教。到中国后，为达到其传教的目的，采取了结交士大夫与上层知识分子的策略，并以传播科学为其辅助手段。他凭借非凡的语言才能，很快掌握了汉语，并努力学习儒家经典，博得了士大夫的好感。他向中国人传授了《坤舆万国全图》，介绍了世界地理知识和地球概念。1601年，经过多方努力，他终于如愿以偿，到达北京。他与徐光启、李之藻等过从甚密，以他与徐光启合作翻译《几何原本》为开端，西方科学陆续传入中国。此外，他还和李之藻翻译了西方笔算著作《同文算指》。为了满足中国人对西方数学知识的需要，利玛窦不断请求教会给他寄有关数学的书籍，在1608年3月8日给罗马耶稣会总会长阿桂委瓦的信中写道："希望您能多寄几本这类数学之类的书"。丁先生也经常把自己的著作寄给学生。

徐光启，字子先，号玄扈，上海人，1562年生于松江府上海县，1633年卒于北京。1593年受聘到广东韶州任教，在那里见到了耶稣会士郭居静（L. Cattaneo）。1597年，赴京应试，被主考官焦竑拔置第一。第二年参加考试，未能中进士。1600年，徐光启在南京结识利玛窦，1603年，在南京受洗，加入天主教，并开始接受西方科学新知。1604年考中进士。他和西方传教士翻译了大量科学著作，如《泰西水法》、《几何原本》，并主持改历，编纂了《崇祯历书》，全面介绍了西方新的历算著作，对后世产生了重要影响。

《几何原本》是古希腊数学家欧几里得的一部十分重要的数学著作，曾对西方科学的发展产生了深远影响。1604年，徐光启在北京参加会试。次年，利玛窦在与徐光启的谈话中述及《几何原本》之价值，于是徐光启迎难而上，每日到利玛窦的住所，采取利玛窦口授、

---

① James M. Lattis, *Between Copernicus and Galileo: Christoph Clavius and the Collapse of Ptolemaic Cosmology*, The University of Chicago Press, 1994, 32.

② H. Verhaeren, *Catalogue of the Pei－T' ang Library*, Peking, 1949, 372～380.

徐光启笔译的方法："反复展转，求合本书之意，以中夏之文，重复订正，凡三易稿。"至1607年，《几何原本》前六卷基本完成，此书译自丁先生的著作（*Euclidis Elementrum Libri XV*，1574）。1610年，利玛窦去世后，徐光启在利玛窦修订稿的基础上，与耶稣会士庞迪我（D. de Pantoja，1571～1618）、熊三拔（S. de Ursis，1575～1620）一起重新校订，并被再版。

《几何原本》最重要的内容是建立在定义、公理基础上的严密的逻辑推理体系。卷一包括几何概念的定义、公设、公理、命题；卷二用几何的语言叙述代数的恒等式；卷三讨论圆、弦、切线、圆周角、内接四边形和与圆有关的图形；卷四讨论圆内接与外切三角形、正方形、正多边形；卷五为比例论；卷六为平面图形的比例算法，涉及各种比例的线段等。这六卷主要介绍了平面几何学内容。在许多场合，徐光启都表现出对《几何原本》的推赏，认为"此书未译，则他书俱不可得译"，并认为《几何原本》是度数之宗，他把以《几何原本》为代表的数学放到了一个非常重要的地位。[①] 他认为《几何原本》"有四不必：不必疑、不必揣、不必试、不必改。有四不可得：欲脱之不可得、欲驳之不可得、欲减之不可得、欲前后更置之不可得。有三至三能：似至晦，实至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁，实至简，故能以其简简他物之至繁；似至难，实至易，故能以其易易他物之至难"。[②]

在利玛窦和徐光启合作翻译了《几何原本》前六卷之后，徐光启"意方锐，欲竟之"[③]，而利玛窦却说："止，请先传此，使同志者习，果以为用也，而后徐计其余。"直至明末，这部十五卷本一直没有译完。耶稣会士金尼阁在其所编《利玛窦中国传教史》中也曾提到这件事："徐光启还想把剩下的欧氏几何翻完，利神父认为翻的已经不少，已经达到了目的。"[④] 鉴于《几何原本》的重要意义，许多研究者都对利玛窦未能翻译十五卷本表示遗憾。实际上，考虑到《几何原本》自身的因素，前六卷主要论述平面几何，卷七至卷九是数论，卷十是关于无理量的内容，卷十一至卷十三是立体几何的内容，前六卷基本上是自成体系的。值得指出的是，在西方，《几何原本》仅译前六卷的情况也很多见[⑤]。直至19世纪末，来华的美国传教士狄考文（C. W. Mateer，1836～1906）对翻译欧几里得《几何原本》七、八、九、十卷还不理解，说"盖欧氏算书虽数经译为英文，终未闻有译七、八、九、十卷者，即或有之，亦属好书之家自为翻之。而孰意伟烈亚力竟不惜心力，甘费资财，舍诸更美更妙之法，而翻泰西之不屑翻者"。[⑥] 丁福保在《算学书目提要》西算类"《几何原本》十三卷"中亦称："其前六卷人人能解，俱宜熟读，其第七第八第九第十卷，狄考文谓无甚大用，为英人所不屑翻译，伟烈氏译之，不过为好奇者之所乐观耳。狄氏斯言，实获我心。"在清末西方数学大量传入的背景之下，一些中西学人尚作如是观，

---

① Peter M Engelfriet，*Euclid in China：The Genesis of the First Chinese Translation of Euclid's Elements，Books I－VI（Jihe yuanben，Beijing，1607）and its Reception up to 1723*. Leiden：Brill，1998.

② 徐光启，几何原本杂议。

③ 《几何原本》利玛窦序。

④ 刘俊余、王玉川译，利玛窦中国传教史，光启出版社、辅仁出版社，1986年，第459页。

⑤ 梅荣照等，欧几里得《原本》的传入和对我国明清数学的影响，载：梅荣照主编，明清数学史论文集，江苏教育出版社，1990年。

⑥ 狄考文《形学备旨》序。

则利玛窦只译前六卷，也有一定道理。

除《几何原本》前六卷以外，明末翻译的《大测》、《测量全义》、《比例规》等书，也介绍了欧几里得《几何原本》的部分内容，有的是后几卷的内容。至康熙时代，欧几里得《几何原本》第七卷也被全部翻译过来。① 但《几何原本》十五卷本直到19世纪才由李善兰和英国新教教士伟烈亚力（A. Wylie，1815～1887）译全。

除《几何原本》外，徐光启还和利玛窦合译过《测量法义》（1607～1608），主要介绍西方的各种测量方法。此外，徐光启还自己撰著了《勾股义》、《测量异同》，融合了中西数学，并进行了比较。在《勾股义》一书中，他用《几何原本》的方法对中国古代数学加以证明，认为西方数学与中国的大体一致。他还曾打算对元代数学家李冶（1192～1279）的《测圆海镜》（1248）以严格的论证，但这一计划未能实现。

明末孙元化的《几何用法》、《几何体论》，李笃培的《中西数学图说》，陈荩谟的《度算解》、《度测》等书都受到了《几何原本》的影响，他们用《几何原本》的方法对中国传统数学进行了探讨。

《几何原本》的影响在清初表现得更为明显，方中通的《数度衍》、李子金的《几何易简集》、杜知耕的《数学钥》和《几何论约》、梅文鼎的《勾股举隅》等书运用了《几何原本》的某些方法，借用了《几何原本》的点、线、面的定义。梅文鼎还运用传统的方法去证明勾股定理，并在《几何通解》一书中“以勾股解《几何原本》之根”，用勾股术证明《几何原本》的命题，这是中西数学结合时的一种特殊表现形式。

（三）李之藻与《同文算指》的编译

李之藻字振之，又字我存，浙江杭州人，万历二十二年（1594）举人，万历二十六年（1598）进士，曾任南京工部员外郎，年轻时曾编过中国地图，后见到利玛窦的世界地图，深为佩服，首先刊刻了《坤舆万国全图》，并自撰序文，刻成后，印刷多本，遍赠友人，在当时影响很大。出于对西方科学知识的兴趣，很快便跟随利玛窦学习，并于1610年受洗，成为天主教徒。杨廷筠在《同文算指·通编》序中说：“往予晤西泰利公京邸，与谈名理累日，颇称金兰，独至几何圜解弦诸论，便不能解。公叹曰：自吾抵上国，所见聪明了达，惟李振之、徐子先二先生耳。”对李之藻给予了很高的评价。李之藻和利玛窦、罗雅谷等编译的科学著作有《浑盖通宪图说》、《圜容较义》、《同文算指》等约十种，并和葡萄牙耶稣会士傅汎际（F. Furtado，1589～1653）翻译了亚里士多德的《论天》的注释本（葡萄牙科英布拉耶稣会学院教材），还翻译了《名理探》一书，是第一部介绍西方逻辑学的著作，主要是对亚里士多德学说的疏解，对三段论的解释尤为详尽。②

李之藻对欧洲笔算产生了浓厚兴趣，并在利玛窦的帮助下着手翻译，他在《同文算指》序中说：“往游金台，遇西儒利玛窦先生，精言天道，旁及算指，其术不假操觚，第资毛颖，喜其便于日用，退食译之，久而成帙。”后来在给皇帝的奏折中还提到“又有算法之

---

① 韩琦，康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响，中国科学院自然科学史研究所博士学位论文，1991年。

② 清·阮元等，《畴人传》卷三二李之藻传；方豪，李之藻研究，商务印书馆，1965；韩琦，李之藻，载：杜石然主编，中国古代科学家传记（下集），科学出版社，1993年，第914～916页。

书，不用算珠，举笔便成”。[①] 李之藻翻译的即是丁先生的《实用算术概论》（*Epitome Arithmetica*，1582），并且至迟到1608年就已经翻译完成。利玛窦在1608年8月22日给罗马耶稣会总会长阿桂委瓦神父的信中说：

> 同我交往已经五年的一位学者名叫李之藻，……跟我学习数学已经好久了，今年再印刷《浑盖通宪图说》，是我恩师丁先生神父的 Astrolabio 的节译本，由我口授而他笔录。分两卷印行，兹呈上一本，虽然您看不懂其中的内容，文体的优美，及他如何盛夸我们的科学等，但至少可看出图案印刷的精确。现在他已回到北京，准备印刷丁先生恩师的《同文算指》（*Arithmetica Practica*）及《论钟表》（*De Horologiis*）两书，后者也是恩师的著作，已译为中文。[②]

据此知李之藻大约于1603年开始翻译丁先生的《实用算术概论》，历经五年左右完成。李之藻翻译完成后，曾将书稿送给徐光启审阅，两人共同研讨，并将西方笔算和传统数学相比较。徐光启在刻《同文算指》序中说：

> 惜余与振之出入相左。振之两度居燕，译得其算术如干卷。既脱稿，余始间请而共读之，共讲之。大率与旧术同者，旧所弗及也；与旧术异者，则旧所未之有也。旋取旧术而共读之，共讲之，大率与西术合者，靡弗与理合也；与西术谬者，靡弗与理谬也。振之因取旧术，斟酌去取，用所译西术，骈付梓之，题曰《同文算指》，斯可谓网罗艺业之美，开廓著述之途，虽失十经，如弃敝履矣。

《同文算指》由李之藻和利玛窦共同编译而成，是明末最早介绍欧洲笔算数学的著作，全书分“前编”二卷、“通编”八卷和“别编”一卷。“前编”主要论整数及分数的四则运算，其中加法、减法、乘法以及分数除法和现今的运算方法基本相同。“通编”的内容有比例、比例分配、盈不足问题、级数、多元一次方程组、开方与带从开平方等，其中开方包括开平方、开立方以及开多乘方。“前编”二卷和“通编”八卷有明万历四十一年刻本、《天学初函》等版本。“别编”一卷，是三角函数表，仅有抄本，现藏法国巴黎国家图书馆。《同文算指》中的西方数学内容主要译自丁先生的《实用算术概论》和德国数学家 Michael Stifel（1487～1567）的 *Arithmetica Integra*。[③]《同文算指》介绍的笔算与现在的十分相近，曾引起清代数学家的兴趣，对普及笔算起过一定的作用。

《同文算指》刻于1614年，此时距李之藻完成翻译工作已六年，两部著作在内容方面也有很大的差异。例如《同文算指·通编》“杂和较乘法”、“测量三率法”、“积较和相求开平方诸法”、“带从诸变开平方法”以及“广诸乘方法”等内容在《实用算术概论》中均无，而且“通编”第八卷增补了200道例题，《实用算术概论》中没有。李之藻在编译《同文算指》的时候，首先是“荟辑所闻”，然后还“间取《九章》补缀”，最后成书三编，因此该书不仅仅是一部译著。

李之藻曾“行求当世算术之书”（徐光启《同文算指》序）。《同文算指·通编》第七卷“积较和开平方诸法第十四”和第八卷“带从诸变开平方第十五”是介绍一般二次方程解法的。前者给出7种解法类型，后者给出11种解法类型，共18种。这部分内容不出于丁

---

① 明·李之藻，“请译西洋历法等书疏”，《皇明经世文编·李我存集》，中华书局，1962年，第5323页。

② 利玛窦著，罗渔译，利玛窦书信集，光启出版社，1986年，第388页。

③ 原北堂图书馆藏有此书的1544年版。

先生拉丁文原著，实际上来源于明代周述学的《历宗算会》。

李之藻与周述学的生活年代与其相距不远，且为同里，比较《同文算指》和《历宗算会》中一般二次方程解法的相关内容可以发现两者之间的相同之处，例如两书中一般二次方程解法类型及所采用题目，甚至题目的编排顺序均完全相同。虽然两者的个别题目有差异，但绝大多数仍然相同。《同文算指 · 通编》卷七“积较和相求开平方诸法第十四”和卷八“带从诸变开平方第十五”所给的二次方程解法以西方笔算表示，但所使用的仍然是传统数学的方法，是在周述学《历宗算会》卷四“带从开平方”的基础上编写而成的。李之藻翻译完西方笔算的有关著作，与徐光启取“旧术”，与西法进行比较研究，所参考的传统数学著作至少包含《历宗算会》和程大位的《算法统宗》。①

徐光启、李之藻等以传统数学为主，以西学为辅，试图会通中西。徐光启在编纂《崇祯历书》时，提出了“镕彼方之材质，入大统之型模”的指导思想，并为明清之际的学者所尊崇。② 李之藻认为中西数学虽然存在差异，但其本身仍有许多共同之处，所谓“心同理同，天地自然之数同欤!”他希望通过编纂《同文算指》，将西方数学的方法（笔算）纳入传统数学的范畴之内，并以此达到会通中西数学的目的。李之藻还编成《天学初函》，其中包括一些天算著作，对后世产生了相当影响。

二　《崇祯历书》中的数学

明初以《授时历》为基础编成《大统历》，但不久推算日月食就有差错。在利玛窦到达中国之前，已有一些人发现大统历预测日月食不验，并酝酿进行历法改革。万历年间，改历的呼声显得更为突出，范守己在万历十三年（1585）所上的“十二议历法”中即提倡改历。③ 他后来与周子愚、徐光启一起最早参与历法改革，他的建议为《崇祯历书》的编纂打下了舆论基础。1595 年，朱载堉进《圣寿万年历》、《律历融通》二书，提出改历的建议。稍后，邢云路也曾建议修改历法，但遭到了保守派的反对。利玛窦来华，传播科学，可谓适逢其时，但他觉得自己并不擅长天文理论，因此向罗马发出迅速派遣精通天文学的耶稣会士来华的呼吁，以迎合中国改历的需要：

> 最后我有一件事向您要求，这是我多年的希望，迄今未能获得回音。此事意义重大，有利传教，那就是派遣一位精通天文学的神父或修士前来中国服务。因为其他科技，如钟表、地球仪、几何学等，我皆略知一二，同时有许多这类书籍可供参考，但是中国人对之并不重视，而对行星的轨道、位置以及日、月食的推算却很重视，因为这对编纂（历书）非常重要。我估计，中国皇帝每年聘用二百人以上，花费很大钱，编纂历书，且成立钦天监专司此职；目前中国使用的历书，有《大统历》与《回回历》两种，对推算日月食，虽然后者较佳些，但均不准确。宫里

① 潘亦宁，中西数学会通的尝试——以《同文算指》（1614 年）的编纂为例，自然科学史研究，2006，25（3）：215 ~ 226。

② Han Qi，“Astronomy，Chinese and Western：The Influence of Xu Guangqi's Views in the Early and Mid-Qing，” in *Statecraft and Intellectual Renewal in Late Ming China*：*The Cross-Cultural Synthesis of Xu Guangqi*（1562 ~ 1633），eds. Catherine Jami，Peter Engelfriet and Gregory Blue（Leiden：Brill，2001），360 ~ 379.

③ 范守己，《御龙子集》（万历刻本）内《吹剑草》卷 42，“恭陈治平十二议疏”内“十二议：历法”，第 33 页。

宫外各有两座修历机构，宫内由太监主持；宫外则设在南京雨花台，由学人主持。可惜他们除遵循先人所留下来的规律进行推算外，其他可说一概不知。①

1610年，钦天监推算日食，职方郎范守已上疏指出其误，礼部官员请求访求精通历法的学者，这时耶稣会士庞迪我、熊三拔等已到北京，于是五官正周子愚提出：

大西洋归化远臣庞迪我、熊三拔等，携有彼国历法，多中国典籍所未备者，乞视洪武中译西域历法例，取知历儒臣率同监官，将诸书尽译，以补典籍之缺。②

于是礼部推举邢云路、范守已以及徐光启、李之藻等改历。天启三年（1623），钦天监监正周子愚再次提出改历，并请葡萄牙耶稣会士阳玛诺（M. Dias，1574～1659）参与其事。③ 1629年，钦天监官员用大统、回回历所推日食有误，而徐光启用西方的天文学方法推算，与实测相符，于是崇祯命令开设历局，由徐光启主其事。龙华民（N. Longobardi，1559～1654）、邓玉函、罗雅谷（G. Rho，1592～1638）、汤若望等耶稣会士先后被召至北京，由于他们在科学方面的造诣，使得改历得以顺利进行。徐光启当时推荐了一些对西学、天主教有兴趣的学者参与修历，例如李之藻即被举荐到局工作。1633年徐光启死后，由山东参政李天经（1579～1659）继任，主持历局工作，最后编成《崇祯历书》。

天文历法是皇权的代表、天子的象征，因此，当耶稣会士介绍西方天文学，要改变传统的正朔时，势必遭到保守势力的反对。④ 于是徐光启在历议中，把明代洪武初年借用回回历的经验，作为明末改历的榜样，为崇祯改历制造舆论。此外，徐光启在担任历法改革的重任之后，对如何接受西学，在多种场合进行了宣传。崇祯四年（1631），在所上“历书总目表”中，他提出了以下看法：

《大统》既不能自异于前，西法又未能必为我用，亦犹二百年来分科推步而已。臣等愚心，以为欲求超胜，必须会通；会通之前，先须翻译……翻译既有端绪，然后令甄明大统、深知法意者，参详考定，熔彼方之材质，入大统之型模。⑤

当西方历算知识传入之后，一些明末士人为接受西学，不得不打出为传统辩护的幌子，这种貌似保守之举，实则是西化的有效手段，“熔彼方之材质，入大统之型模”即是典型的例子，其目的显然是为西学的合法化开道，徐光启的观点对清代士大夫产生了积极的影响。⑥ 徐光启认为，《大统历》不能满足天文观测的需要，有必要大规模翻译西书，为“超胜”做准备。他主张借用西方的天文知识，来重新研究大统历，而不是照搬西法。

《崇祯历书》共137卷，主要介绍丹麦天文学家第谷（Tycho Brache，1546～1601）的地心学说。全书分节次六目和基本五目，基本五目包括法原、法数、法算、法器、会通等。法原部分共有四十卷，数学理论著作包括在这一部分内。《崇祯历书》中的数学主要为天文

---

① 利玛窦1605年5月12日致罗马阿耳瓦烈慈神父（Giovanni Alvarez）信。利玛窦著，罗渔译，利玛窦书信集，光启出版社，1986年，第301页。

② 《明史》卷31，历志一，第528页。

③ 《熙朝崇正集》，明“闽中景教堂藏板”，巴黎法国国家图书馆藏（Chinois 1322）。

④ 明末魏文魁就对西法提出质疑，清初反教人士杨光先在《不得已》中曾宣称“大国无奉小国正朔之理”。

⑤ 王重民编，《徐光启集》下册，上海古籍出版社，1984年，第373～378页。

⑥ 参见韩琦：“耶稣会士与西方科学在中国的传播，”载：何芳川主编，中外关系史，国际文化出版公司，2008年，第79～113页。

学服务，因此大多是关于几何学和三角学的内容。

其中，邓玉函著《大测》二卷（1631），主要介绍三角八线的造表及使用方法，最为重要的是“六宗”、“三要法”、“二简法”、“四根法”。所谓“六宗 ”是指求内接正三、四、五、六、十、十五边形的边长，亦即求12、18、30、36、45、60度的正弦值。“三要法”是指正弦与余弦的关系式、半角与倍角公式。正弦与余弦的关系式 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$。倍角公式是 $\sin 2A=2\sin A\cos A$。半角公式是 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 A+(1-\cos A)^2}$。由此可以造出三角函数表。“二简法”则是根据托勒密的方法，用以计算“三要法”不能计算的正弦数值。“四根法”是平面三角的一些定理，包括正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 与正切定理 $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{A+B}{2}$。

罗雅谷著《测量全义》（1631），介绍了更多的三角学内容，包括同角的三角函数关系，积化和差公式及余弦定理；此外还介绍了球面三角的基本公式。这些三角学公式是由15世纪欧洲数学家玉山若干（Johnnes Regiomontanus，1436～1476）所发明和增补的，① 这些数学内容是首次介绍到中国来，有助于国人对球面天文学的了解。后来梅文鼎在此基础上，取得了一定成果。

《测量全义》和邓玉函编的《测天约说》介绍了圆锥曲线。《测量全义》卷六介绍了斜截圆锥（“截圆角体”）所得的抛物线（“圭窦形”）、双曲线（“陶丘形”）与椭圆形。《测天约说》卷上并给出了椭圆的定义：“首至尾之径大于腰间径。”

《崇祯历书》还介绍了阿基米德（Archimedes，约282～212 B.C.）的《圜书》及《圆球圆柱书》中的求圆面积、圆周率、椭圆面积、球体积与椭圆旋转体体积的内容。明末传入的数学书涉及立体几何知识的包括《圜容较义》（1608年，利玛窦授，李之藻演）、《测量全义》。《圜容较义》是一部比较图形关系的几何学，其中包括锥体与棱柱体之间、正多面体之间、浑圆与正多面体之间的关系。《测量全义》第六卷介绍了欧几里得《几何原本》中一些立体几何的知识，包括四、六、八、十二与二十面体的体积计算公式。其中，关于椭圆和多面体的内容曾引起了我国部分学者的研究，至康熙时代，有关多面体的内容得到了补充和完善。《比例规解》也有关于正多面体的知识，来自欧几里得《几何原本》第十三卷的内容，在这些内容中只有多面体曾引起梅文鼎的研究。② 欧几里得《几何原本》第十一至十五卷中的立体几何知识是相当丰富的，可惜利玛窦、徐光启只译了前六卷，《测量全义》介绍的也只是其中的一部分。这一时期还传入了一些西方新发明的计算工具，如纳白尔（J. Napier，1550～1617）算筹和伽利略（Galileo Galilei，1564～1642）的比例规，引起了一些学者的兴趣。

① 钱宝琮主编，中国数学史，科学出版社，1964年。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第五卷，辽宁教育出版社，1998年，本编引此书者皆据此。

② 刘钝，梅文鼎在几何学领域中的若干贡献。载：梅荣照主编，《明清数学史论文集》，江苏教育出版社，1990年，第182～218页。

第二节　王锡阐与薛凤祚的数学工作

一　王锡阐及其《圜解》

（一）王锡阐

王锡阐（1628～1682），子寅旭，号晓庵，自号天同一生，吴江震泽镇（今江苏吴江市震泽镇）人，明末清初的著名天文学家。明亡之后，拒不仕清，与顾炎武（1613～1682）、吕留良（1629～1683）、张履祥（1611～1674）、潘柽章（1626～1663）等著名明末遗民交往密切。他一生清贫，刻苦钻研，勤于著述，死后留下大量研究手稿，由潘耒（1644～1708）、徐善、姚汝鼎等人搜集整理，编辑成《晓庵遗书》和《晓庵先生集》，前者主要是对天文历法研究的成果；后者为王锡阐平日所作的诗文，分为《晓庵先生诗集》和《晓庵先生文集》两部分。王锡阐在天文历法方面的主要著作有《五星行度释》和《晓庵新法》两种，在数学方面有《圜解》和《筹算》两种，后两种均未刊。

（二）《圜解》

《圜解》一书发现颇费周折。李俨《近代中算著述记》根据朱记荣《国朝未刊遗书志略》和焦循《里堂道听录》卷三十八的记载知道王锡阐著有《圜解》一书，但当时并没有见到原书。20世纪50年代后期，严敦杰却在李俨藏书中发现匿名《圜解》抄本一册，经研究证实该书为王锡阐所著。1990年梅荣照公开严敦杰的发现并发表研究文章①。自此该书为数学界所知。1993年，该抄本影印收入郭书春主编的《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第4册中。

《圜解》的写作可能起因于天文研究②。《晓庵新法》的第一卷专讲数学，包括四部分，即“勾股”、“割圆”、“变率”和“通率”。在“割圆”中置全圆四分之一为“象限”，“割圆周之一曰正弧”，“正弧与象限之较曰较弧”，“弧之对边与两端属于弧之两端者曰全弦，全弦之末为其半弧之正弦”，“正弦与半径为勾弦求股，为较弧之正弦，亦正弧之较弦”等。其中，“较弦”就是余弦。因《晓庵新法》是讲天文学的，尽管用到许多数学知识，但没有展开讨论。对与天文学研究关系极为密切的圆进行专门研究是很必要的。

《圜解》全书有12个小标题，依次是：平圆第一，平行线第二，弧线矢第三，折线第四，勾股第五，三边形第六，四边形第七，圆内方形第八，弧矢互易第八，两弦相因第九，两弧损益第十，多弧较弦第十一。③ 其核心内容是用几何方法证明平面三角中两角和差的正弦与余弦公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \qquad (27\text{-}2\text{-}1)$$

① 梅荣照，王锡阐的数学著作——《圜解》，见：梅荣照主编，《明清数学史论文集》，江苏教育出版社，1990年，第97～113页。

② 李迪，对《圜解》的一些探讨，见：陈美东，沈荣法主编，《王锡阐研究文集》，河北科学技术出版社，2000年，第149～159页。

③ 原抄本“第八”有两个。

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (27\text{-}2\text{-}2)$$

需要注意的是，王锡阐和当时的天文学家一样，把正弦和余弦等看成正弧和余弧所对的弦而不是看成角的函数。为了证明需要，王锡阐先给出了一些预备知识和概念，但有些名称与他人不同，例如：较弦：余弦，又叫“全弦承数”。折：“凡两线相交必成四折，两线为一折”，如前后与左右两线相交于心，即四折。总弧：“两弧相从曰总弧”，“相从”即相加。多弧：“两弧相消曰多弧”，“相消”即相减，多弧实为大小两弧之差。矩折：“矩折者，其折中矩”，“中矩”即直角。尖折：“小于矩折为尖折”，即小于直角的“折”。斜折：“大于矩折为斜折”，即大于直角的“折”。上述概念中“折”相当于“角”，可是王锡阐并不用“角”这个词。

书中给出了一批命题，相当于定理，它们是：

凡圆中全径分全圆为两半周；

圆中平行两线得皆不为圆径，不得皆为圆径；

此线与彼线平行，彼线又与他线平行，则他线与此线必平行；

先有平行两线，次复有平行两线，在先两线之间俱与先两线相遇，则次两线俱等；

有大小两圆，其弧、径、弦、矢比例皆同。

在证明式（27-2-1）和式（27-2-2）的过程中，设大角为α，小角为β，王锡阐分四种情况进行讨论：① $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$；② $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$；③ $0<\beta<\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$；④ $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\pi$。他比较详细地证明了公式对于①成立，最后称：“……各两弧俱不及象限，其俱过象限及一过一不及者，可以意推。”即其他3种情况可以归结为第1种情况。

以两角和差的正弦公式情况①的证明为例说明他的思路和方法。

在证明开始之前，王锡阐先定义了两个概念“先数”与“后数”，并在图上构造出对应的线段。如图27-2-1所示，在⊙O（$OA=r$）中，$\overset{\frown}{ABCD}$为一象限，$\angle AOB=\beta$，$\angle AOC=\alpha$，它们对应的正、余弦分别是$r\sin\alpha=CG$、$r\cos\alpha=OG$，$r\sin\beta=BF$、$r\cos\beta=OF$。作⊙O（OF）交OC于点N，作⊙O（OG）交OB于M点。过N、M作OA的垂线，H为共同的垂足。由勾股形OHN与勾股形OGC相似，可以得到

$$NH=\frac{CG\cdot ON}{OC}=\frac{(r\sin\alpha)\ (r\cos\beta)}{r}$$

由勾股形OHM与勾股形OFB相似可得到

$$MH=\frac{(r\cos\alpha)\ (r\sin\beta)}{r}$$

以情形①说明公式（27-2-1）的证明。在图27-2-1的基础上，过B作$BP\perp OC$于U点，过J作$JT\perp OC$于T点，作$JP\perp BP$于P点，如图27-2-2所示。由勾股形BPJ和勾股形NHO全等可得$BP=NH$。由勾股形OTJ与勾股形OHM全等得到$TJ=MH$。$\angle BOC=\alpha-\beta$，对应的正弦为$r\sin(\alpha-\beta)=BU$。而

$$BU=BP-PU=NH-MH=\text{先数}-\text{后数}$$

故有

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

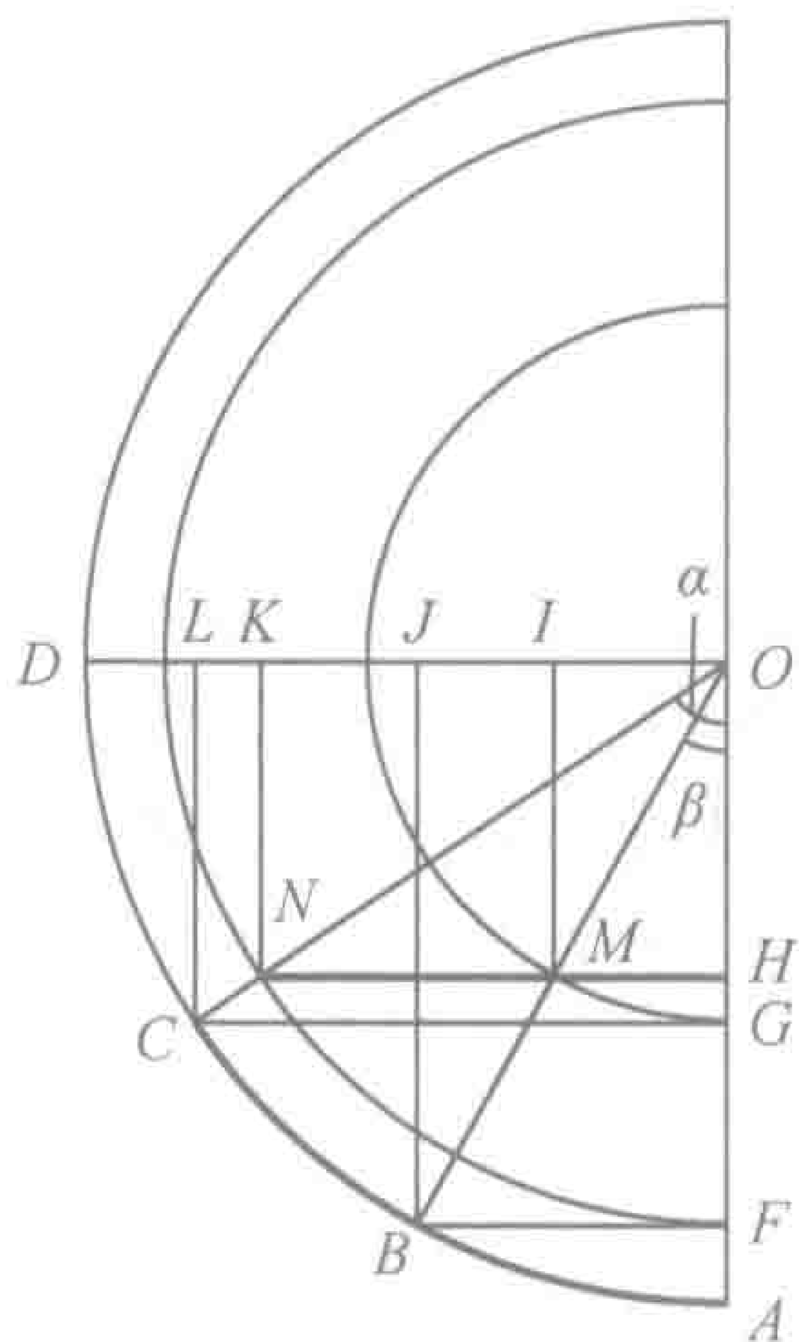


图 27-2-1

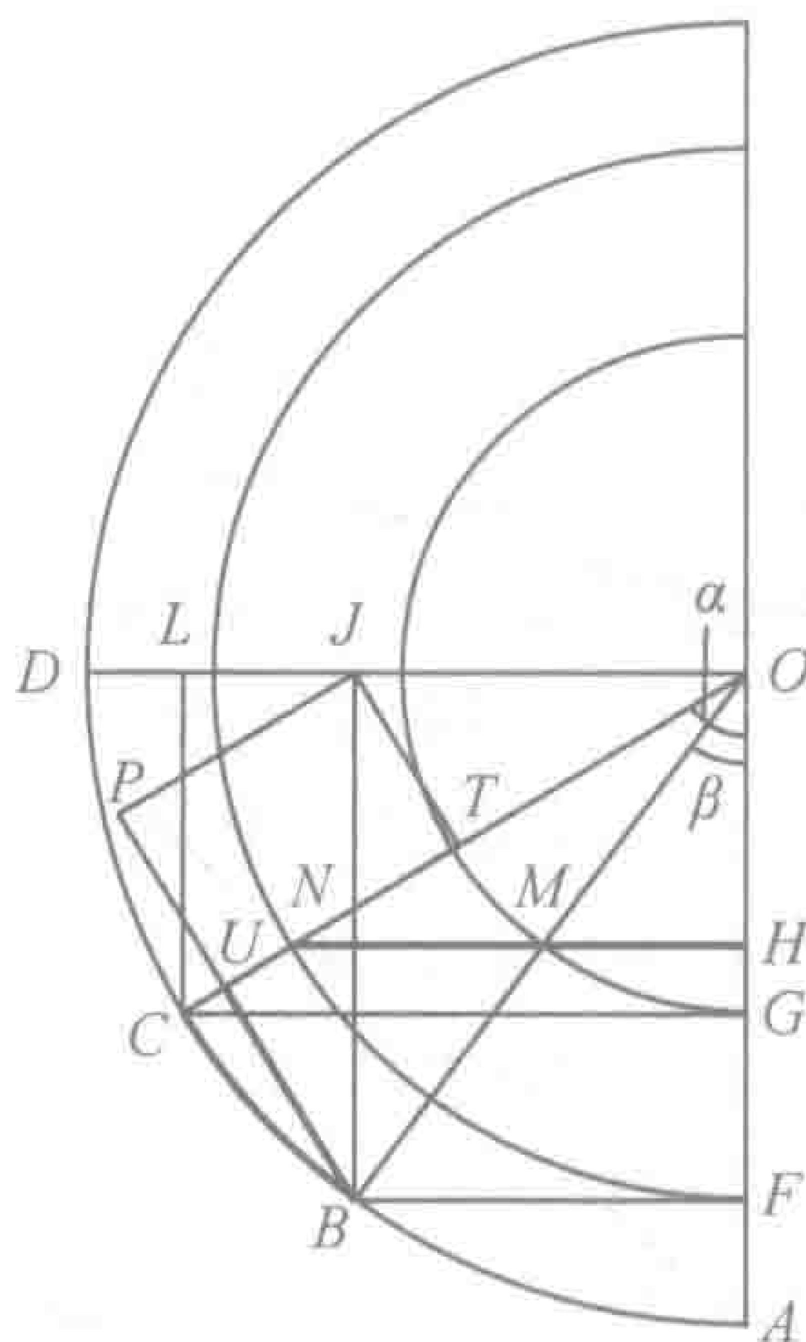


图 27-2-2

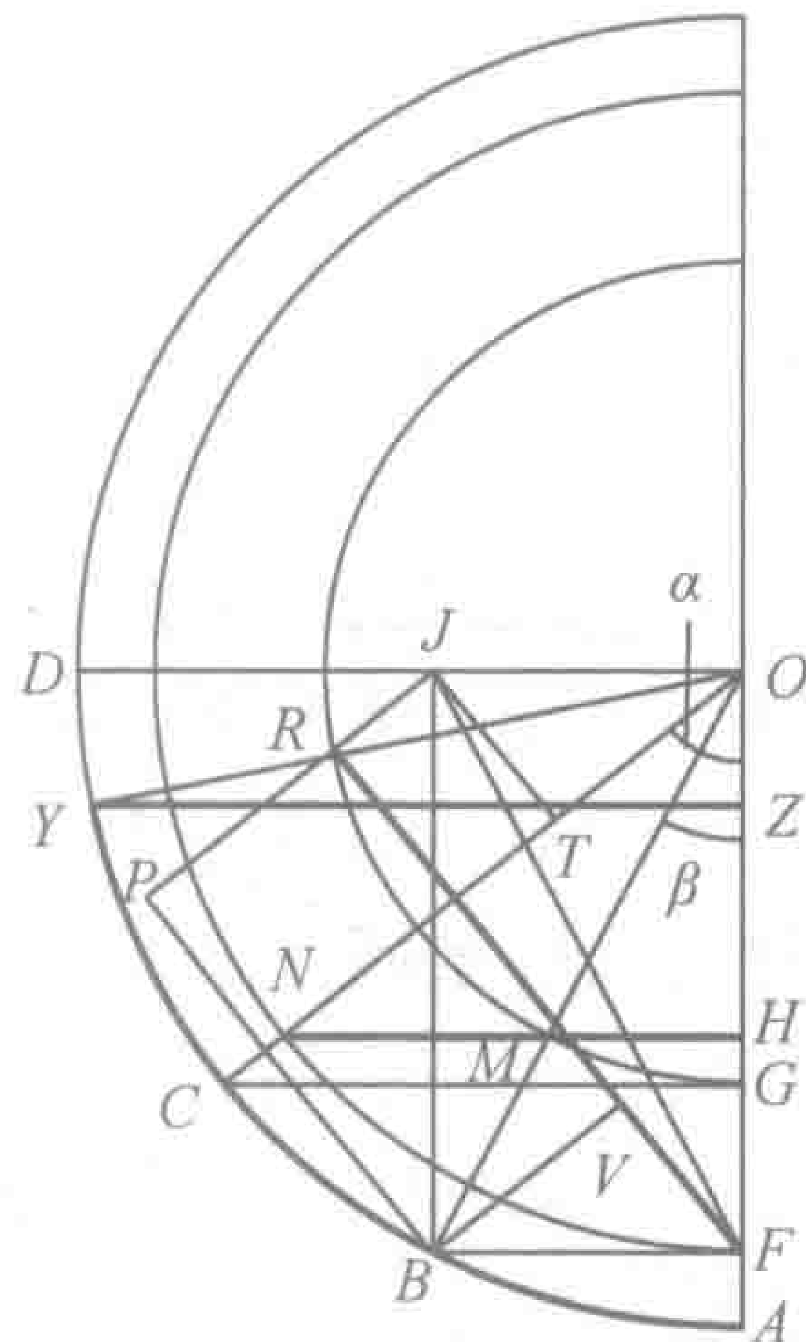


图 27-2-3

正弦情况时王锡阐称 NH 为“先数”，MH 为“后数”。若⊙O（$OA=r$）为单位圆，则 $\sin\alpha\cos\beta$ = 先数，$\cos\alpha\sin\beta$ = 后数。类似地，在证明余弦情况时称 $\sin\alpha\sin\beta$ 为先数，$\cos\alpha\cos\beta$ 为后数。

和角正弦公式的证明要复杂些。如图 27-2-3 所示，$\angle AOY=\alpha+\beta$，对应的正弦为 $ZY=r\sin(\alpha+\beta)$，过 F 作 $FR\perp PJ$ 于 R 点，过 B 作 $BV\perp FR$ 于 V 点。需要证明 $YZ=NH+MH$。

由勾股形 OTJ 与勾股形 BVF 全等可得 $TJ=VF$。在勾股形 YZO 和勾股形 FRJ 中，$OY=OB=FJ$，$\angle RJF=\angle RJB+\angle BJF=\alpha+\beta=\angle YOZ$。因此，勾股形 YZO 与勾股形 FRJ 全等，故 $YZ=FR$。结合前文差角公式正弦的证明可得

$YZ=FR=VR+FV=BP+JT=NH+MH$ = 先数 + 后数

即

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

此即王锡阐所称：

两弧俱不及象限者，以后数减先数者为多弧正弦，以后数加先数为总弧正弦。

王锡阐的工作贡献主要有两点[①]：其一，用演绎和逻辑推理的方法证明三角公式，论证相当严谨，并且在论证之前给出所用的概念和所需的定理，结构合理，受《几何原本》的影响明显。其二，运用传统的勾股知识证明传入的三角公式，开中国此项研究的先河，表现出用传统数学知识“会通”西学的倾向，其思想对后世影响很大。梅文鼎、戴震以及明安图都做过此方面的工作。

① 胡炳生，王锡阐中西数学会通工作及其意义，见：陈美东，沈荣法主编，《王锡阐研究文集》，河北科学技术出版社，2000 年，第 165 页。

二　薛凤祚及其《比例对数表》等著作

(一) 薛凤祚

薛凤祚（1599～1680），字仪甫，号寄斋，山东益都金岭镇人①。他早年“天资过人，禀赋聪敏”，出身于当地一个有名的家族，在家中受启蒙教育。后来到直隶保定府的定兴县学习“心学”，因感到空洞无味而弃去。又向持保守观点的魏文魁学习传统历法。当时正是徐光启领导改历的时候，因此他有机会与罗雅谷、汤若望接触，学习西方的天文和数学。入清以后，于顺治九年（1652）到南京，与在那里传教的穆尼阁相遇，并向他“求三角法，又求对数及对数四线表”。穆尼阁（J. Nicolas Smongolenski，1611～1656），波兰人，顺治三年（1646）来华，后在南京等地传教。薛凤祚因此“与穆尼阁、汤道未、罗雅谷游，得历学之要”。可以说，薛氏学贯中西，知识渊博。

薛凤祚晚年，受河道总督王光裕之聘，成为幕僚，参与治黄和运河的工作。他“躬历数千里，考黄淮漕运，利害曲折，施有成效。”

薛凤祚在年轻时考中秀才，补为贡生。但他一生潜心学术研究，特别是在天文学、数学、物理与机械、水利学等科学技术方面取得成果。他在当时就是很有名的学者，与王锡阐齐名，有“南王北薛”之称。他一生著述颇丰，计有《车书图考》、《两河清汇》8卷（又称《两河清汇易览》）、《天学会通》1卷、《天步真原》3卷、《历学会通》3集、《乾象类占》、《比例对数表》等，还纂修过《山东省志》。

《历学会通》3集56卷，是薛凤祚在穆尼阁死后，将他所受西学参以中法编纂而成，于康熙初年刊出。《历学会通》的内容涉及天文、历法、数学、律吕、水法、物理、医药以及占验之说，内容庞杂，异闻殊多。其中，包括数学的著作主要有《三角算法》1卷（1653），《比例对数表》1卷（1653）和《比例四线新表》1卷（1662）。

(二)《比例对数表》

薛氏在数学方面的工作主要是首次把对数介绍到中国，以及对三角学的研究。对数介绍方面的工作主要反映在《比例对数表》一书中。该书题“南海穆尼阁著，北海薛凤祚纂”。薛凤祚序称：

> 穆（尼阁）先生出，而改为对数。今有对数表，以省乘除，而况开方立方三四方等法，皆比原法工力，十省六七，且无桀错之患，此实为穆先生改历立法第一功。予执笔以受，时以重译，于戊辰（1628）历元后二十五稔（1653），岁在寿屋，历春既夏而秋，方盛暑则烈阳薰灼，挥汗浃背，劳诚劳矣，功于何有！

穆尼阁在书中解释对数的大意时称：

> 愚今授以新法，变乘除为加减……解此别有专书，今特略明其理，如下二表，二同余算，不论从一二三四起，或从五七九十一起，同余之内，中三相连度数，可取第四。

① 袁兆桐，清初山东数学家薛凤祚，中国科技史料，1984，5（2）：88～92。

这里所说的二表如表 27-2-1 所示。①

表 27-2-1　同余算

比例表	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
同余算（a）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
同余算（b）	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

这表的意义是：如“同余算（a）”中的6，7，8，9 有关系 $9=(8+7)-6$，“同余算（b）”中的5，7，9，11 有关系 $11=(9+7)-5$。

根据以加减代乘除的做法，“比例算”是四率成比例的，如 $1:2=4:8$，$8:16=256:512$ 之关系等。按该表内“比例算”中 $4:32=128:x$，应有 $x=\frac{32\times128}{4}$，这本是乘除算法，但是由“同余算”就变成加减算法了。因为对 32 为 6，对 128 为 8，对 4 为 3，则对 x 为 $(6+8)-3=11$，查表知 11 之对数为 1024，即 $x=1024$。实际上，“比例算”相当于真数，“同余算”相当于对数，该表揭示出真数成等比数列时对数成等差数列的对数特征。表中所列同余算具有示例作用，并非常用对数。

《比例对数表》包括 10000 以内的对数表，取 6 位小数。书中称：

> 原书当用十万，其表久成，尔西来不戒，失之于途，今止一万……原数一万之外，取比例法。

从这话可知，穆尼阁所用对数表著作不是利用北堂所藏之书，而是他自己从欧洲带来的，比最早传进者可能要晚若干年，但却是最先译成中文的。若求大于 10000 的数的对数则用比例法解决，如求 lg160 232 = ？具体步骤是

$$\lg1602=3.204\ 662,\ \lg160\ 200=5.204\ 662,$$
$$\lg1603=3.204\ 933,\ \lg1\ 603-\lg1\ 602=0.000\ 271$$

由比例法得 $\frac{32}{100}\times0.000\ 271=0.000\ 086$。于是 $\lg160\ 232=5.024\ 662+0.000\ 086=5.024\ 748$，即为所求结果。

（三）《三角算法》

薛凤祚三角学方面的工作主要是《三角算法》，题“穆尼阁著，薛凤祚纂”。该书是三角的专著，包括平面三角和球面三角两部分，内容全面。书的前半部为平面三角，包含正弦定理、余弦定理、正切定理、半角定理等，且除正弦定理外都用对数给出计算公式。

设 A，B，C 为三角形的三个角，其对应边为 a，b，c，则有

$$\lg b=\lg a+\lg\sin B-\lg\sin A$$

该式实由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 而来。

① 李俨，对数的发明与东来，见：李俨钱宝琮科学史全集，第七卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 96 ~ 97 页。

$$\lg\tan\frac{A-B}{2}=\lg\frac{a-b}{2}+\lg\tan\frac{180^\circ-C}{2}-\lg\frac{a+b}{2}$$

$$\lg\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{[\lg(s-b)+\lg(s-c)]-[\lg s+\lg(s-a)]\}$$

式中，$2s=a+b+c$。

《三角算法》的后半部为球面三角，称球面三角术为“圈线三角法”，书中将《测量全义》的一些公式归并，同时以对数入算。重要的是给出了如下的一些新公式：

1. 德朗贝尔比例式（Delambre’s analogies）

$$\begin{cases}\tan\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\times\cot\dfrac{C}{2}\\[2ex]\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\times\cot\dfrac{C}{2}\end{cases}$$

2. 耐普尔比例式(Napier’s analogies)

$$\begin{cases}\tan\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\times\tan\dfrac{c}{2}\\[2ex]\tan\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\times\tan\dfrac{c}{2}\end{cases}$$

3. 半弧公式

$$\begin{cases}\cos\dfrac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(B-E)\cdot\sin(C-E)}{\sin B\cdot\sin C}}\\[2ex]\cos\dfrac{b}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(A-E)\cdot\sin(C-E)}{\sin A\cdot\sin C}}\\[2ex]\cos\dfrac{c}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(A-E)\cdot\sin(B-E)}{\sin A\cdot\sin B}}\end{cases}$$

其中，$2E=A+B+C-\pi$。

4. 半角公式

$$\begin{cases}\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}\\[2ex]\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin c}}\\[2ex]\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin b}}\end{cases}$$

式中，$2s=a+b+c$。

上述公式都是中文书中第一次出现。① 所有这些三角学，都是为满足天文学上的需要而写的，只给结果没有证明，且图形也很草率。

第三节　梅文鼎及其数学研究

一　梅　文　鼎

梅文鼎（1633～1721），字定九，号勿庵，安徽宣城（今安徽宣城县）人。年十五补博士弟子员。年二十九从同里倪观湖（1616～?）学《交食通轨》，是为研究历算开始。至康熙八年（1669），从方中通得知耐普尔筹，后借薛凤祚《天步真原》等书，从此对西学发生兴趣。及购得《西洋新法历书》抄本，西学益进。康熙十八年（1679）入都，至康熙三十三年（1694）返里，其间五年与徐乾学（1631～1694）、李光地（1634～1719）等学者经常讨论历算，集益良多。康熙四十四年（1705），康熙皇帝南巡召见于山东德州舟次。临别时，御赐"绩学参微"四个大字。康熙五十三年（1714），《律吕正义》五卷成书，康熙皇帝赐梅文鼎一部"令看，或有错处，指出甚好。"梅文鼎一生致力于中西历算的研究传授，学问与年俱进，著述等身。据自撰《勿庵历算书目》所载共 88 种 219 卷。康熙六十一年（1722），魏荔彤收集已刻并未刻著作编为《梅氏历算全书》29 种 74 卷（包括杨作枚《勾股正义》1 卷及其补缀的《解八线割圆之根》1 卷），由杨作枚"为之订补疏剔"，雍正元年（1723）刊行。乾隆二十六年（1761），梅瑴成以魏本"校仇编次不善，而名为全书亦非实录"，另编为《梅氏丛书辑要》23 种 60 卷，其中，数学 13 种 40 卷。附录梅瑴成著作 2 种 2 卷。② 上述 13 种大致可依年代排列如下：《方程论》6 卷（1672），《筹算》2 卷（1678），《平三角举要》5 卷，《弧三角举要》5 卷（1684），《勾股举隅》1 卷，《几何通解》1 卷，《几何补编》4 卷（1692），《少广拾遗》1 卷（1692），《笔算》5 卷（1693），《环中黍尺》5 卷（1700），《堑堵测量》2 卷，《方圆幂积说》1 卷（1710），《度算释例》2 卷（1717）。

二　数学著作的内容概述

梅文鼎上列著作大致可分为西方数学研究与会通、中国传统数学研究两类。③ 择其要者简述如后，关于梅氏在立体几何和球面三角学方面的创见著述另立一节讨论。

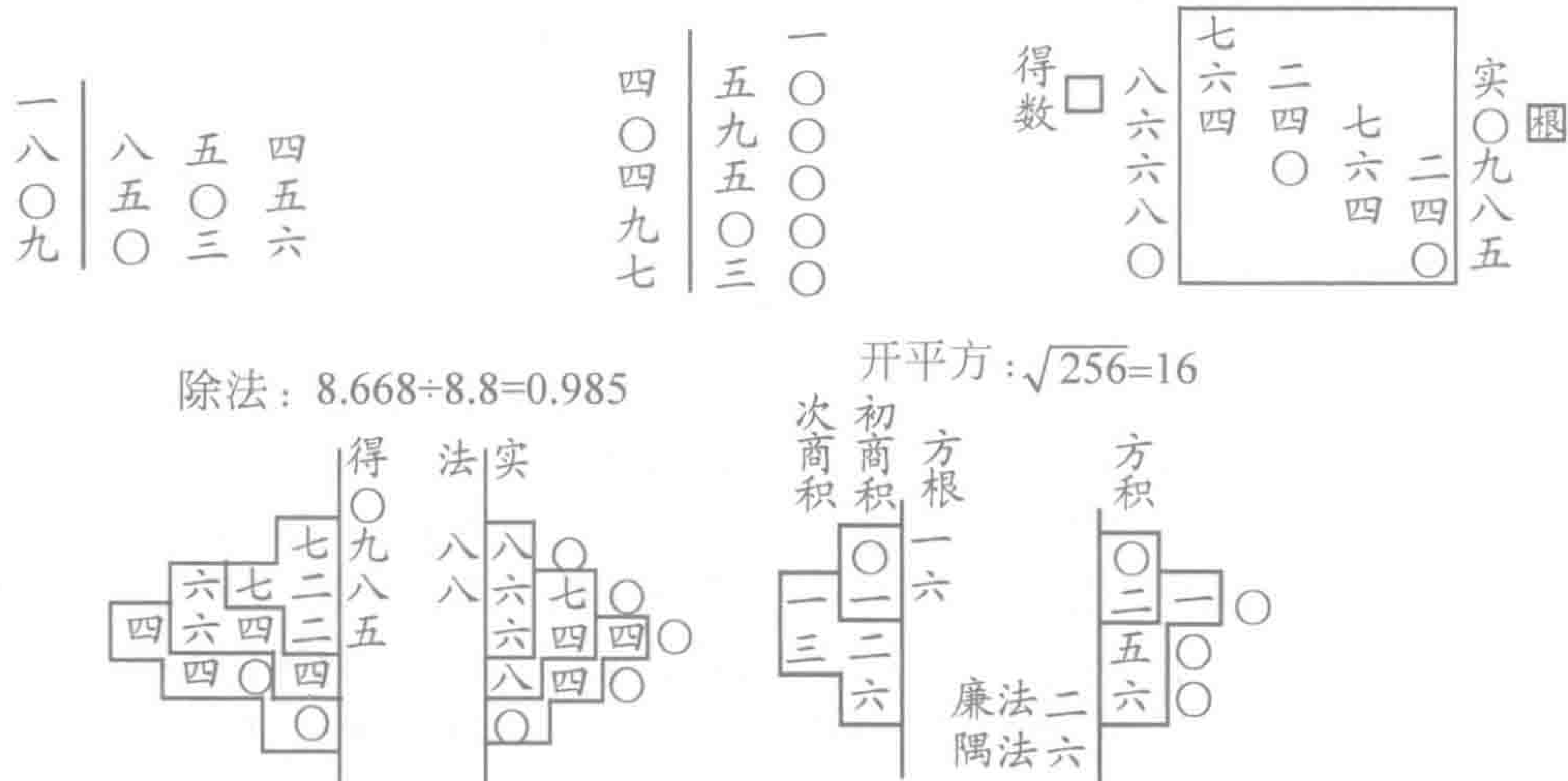
《笔算》5 卷，介绍梅氏改进后的笔算法。《同文算指》介绍的 15、16 世纪西方的笔算系横行书写。梅氏将算式由横书改直书。其理由是"笔算易横为直以便中土。盖直下而书者中土圣人之久而吾人所习也"。该书主要内容有四则运算、比例计算、通分、开平方、开带从平方以及开立方。仅以 $456+503+850=1809$，$100000-59503=40497$，$0.985\times8.8=8.668$，$8.668\div8.8=0.985$，$\sqrt{256}=16$ 为例说明梅文鼎改进的加、减、乘、除及开平方的算式。

① 李迪主编，中国数学史大系，第七卷，北京师范大学出版社，2000 年，第 104 页。

② 关于梅文鼎的著作的详细讨论，参见：李迪，《梅文鼎评传》第五章，南京大学出版社，2006 年。

③ 李兆华，中国数学史，文津出版社，1995 年，第 238～256 页。

加法：456+503+850=1809　减法：100000−59503=40497　乘法：0.985×8.8=8.668



在乘法算式中，被乘数称为实，乘数称为法。在实的个位标记“根”字以定位。得数中与根相对的六和法的末位八具有相同的位值。除法算式明确列出减数且被减数和减数均以框线标出，故较旧法明确。开立方算式和开平方法类似，唯廉法有二。

《筹算》2 卷，论改进后的耐普尔筹及其用法。耐普尔筹的数字原为直书，此与西方的笔算相适应。梅氏改为横书以与其改进的笔算直书相应。此外，又将耐普尔筹的斜格改为半圆形格式更明了。该书主要介绍筹算的乘、除、开平方、开带从平方、开立方、开带从立方。乘法、除法共用筹十支，依次为第一筹，第二筹……第九筹，空位筹。开平方、开立方时另有平方筹、立方筹各一支以定初商。以 4096 × 64 = 262144 为例，取第六筹、第四筹相并（64），又取其第四行、第九行、第六行数（4096）相并。如图 27-3-1 所示，第四行得数 256000，第九行 5760，第六行 384，三数相加得 262144 即为所求。

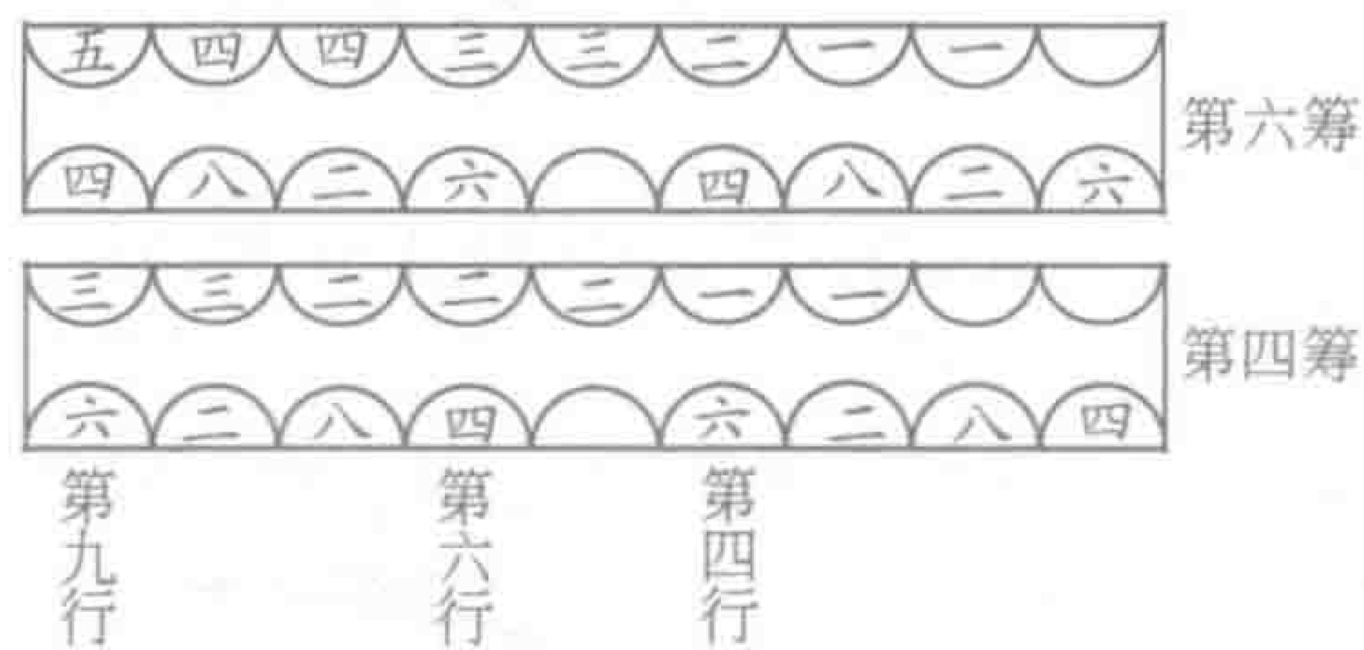


图 27-3-1

该书卷二论及开从立方，对带从立方的分类提出新的意见。梅氏称：“泰西家说勾股、开方甚详，然未有带从之术。《同文算指》取中算补之，其论带从平方有 11 种，而于立方带从缺然也。程汝思《统宗》所载又皆两从之相同者……兹因撰《筹算》，稍以己意完其缺。”梅氏将带从立方分为带一从、带两从相同、带两从不同等三种情形，亦即下列三个方程：

$$x^2(x+a)=v$$

$$x(x+a)^2=v$$

$$x(x+a)(x+b)=v$$

式中，a，b，$v>0$。该种分类及其解法皆属《九章算术》开方术系统。梅氏改进的耐普尔筹对康熙年间制造的手摇计算机有一定影响①。带从立方分类后采入《数理精蕴》下编卷二十四并改称为带从较数立方，以与带从和数立方区别。

《方程论》6卷，主要讨论多元一次方程组的分类和解法。梅氏认为，“旧传方程分二色为一法，三色为一法，四色、五色以上为一法，头绪纷然，法无画一。”于是，将方程组另行分类。梅氏提出“凡方程列位皆以下一位为之端。如所列下一位为上中两位之总价和也，若下一位为上中两位相差之价则较也。”设有甲物 a 个，单价 x，乙物 b 个，单价 y，则甲物与乙物两价之和较为 $ax \pm by = c$。式中，取加号时，c 称为和；取减号时，c 称为较。三元和三元以上的情形有类似的解释。以此为据，方程组分为和数方程、较数方程、和较杂方程以及和较交变方程四类。若方程组中每个方程的常数项均表示和且消元过程中不改变其和的属性，则此方程组称为和数方程。较数方程、和较杂方程有类似的定义。上列三类方程组在消元过程中若常数项的和较属性发生改变则为第四类。此系以方程组的未知元符号为据的分类法。梅氏所用方程组解法系互乘对减法。当两式欲消去的一元符号不同时则变为符号相同。该书对于系数有分数的方程组、方程组的应用以及明代算书有关错误之辩证均有详细的讨论。方程组的消元次数和其元数有关。梅氏总结其规律以求省算。其结果可概括如下：n 元一次方程组欲求得一元需相减 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 次，若有缺项则至多可省 $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$ 次。因此，n 元一次方程组求得一元至少相减（$n-1$）次。

《少广拾遗》1卷，讨论笔算开方法。该书所载贾宪三角形列至十二乘方并给出开平方开十二乘方之算例。其开方法属《九章算术》开方法系统。该书和《筹算》的开带从平方、开带从立方的内容构成梅氏开方术的研究。

《勾股举隅》1卷，讨论勾股恒等式兼及勾股测量。该书主要推导与弦和和 $(b+a)+c$、弦和较 $(b+a)-c$、弦较和 $(b-a)+c$，弦较较 $c-(b-a)$ 有关的几个恒等式：

$$[(b-a)+c][c-(b-a)]=4A$$

$$[(b+a)+c][(b+a)-c]=4A$$

$$\frac{1}{2}[(b+a)+c]^2=(c+a)(c+b)$$

$$\frac{1}{2}[(b+a)-c]^2=(c-a)(c-b)$$

式中，$A=\frac{1}{2}ab$ 为勾股积。以前两式为例，其推导过程如图27-3-2所示。

$$c^2-(b-a)^2=4A$$

如图27-3-3所示：

$$c^2-(b-a)^2=\text{Ⅳ}+\text{Ⅴ}+\text{Ⅵ}=[(b-a)+c][c-(b-a)]$$

故

$$4A=[(b-a)+c][c-(b-a)]$$

此即上述第一式。类似地，由图27-3-2可得，

$$(a+b)^2-c^2=4A$$

① 白尚恕、李迪，故宫珍藏的原始手摇计算机，故宫博物院院刊，1980，(1)。

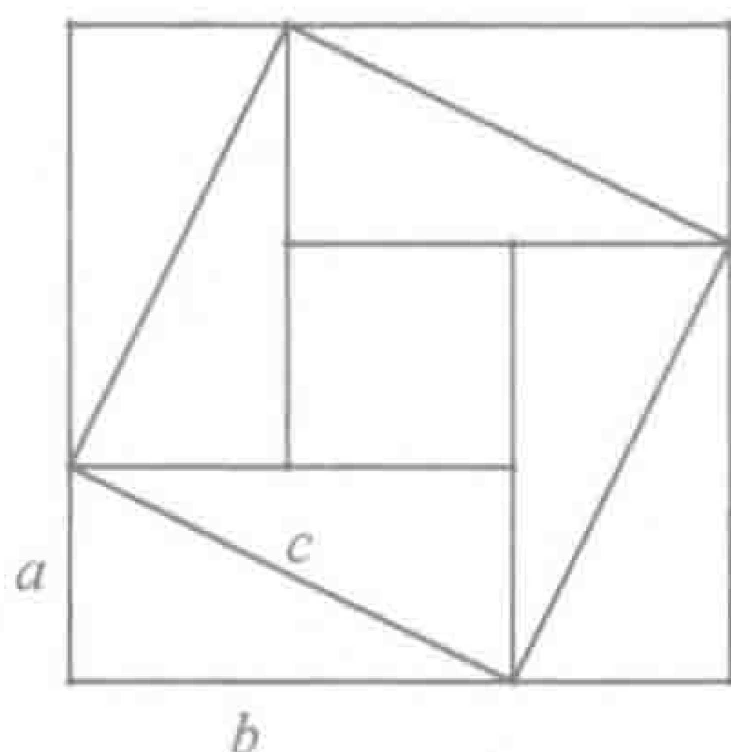


图 27-3-2

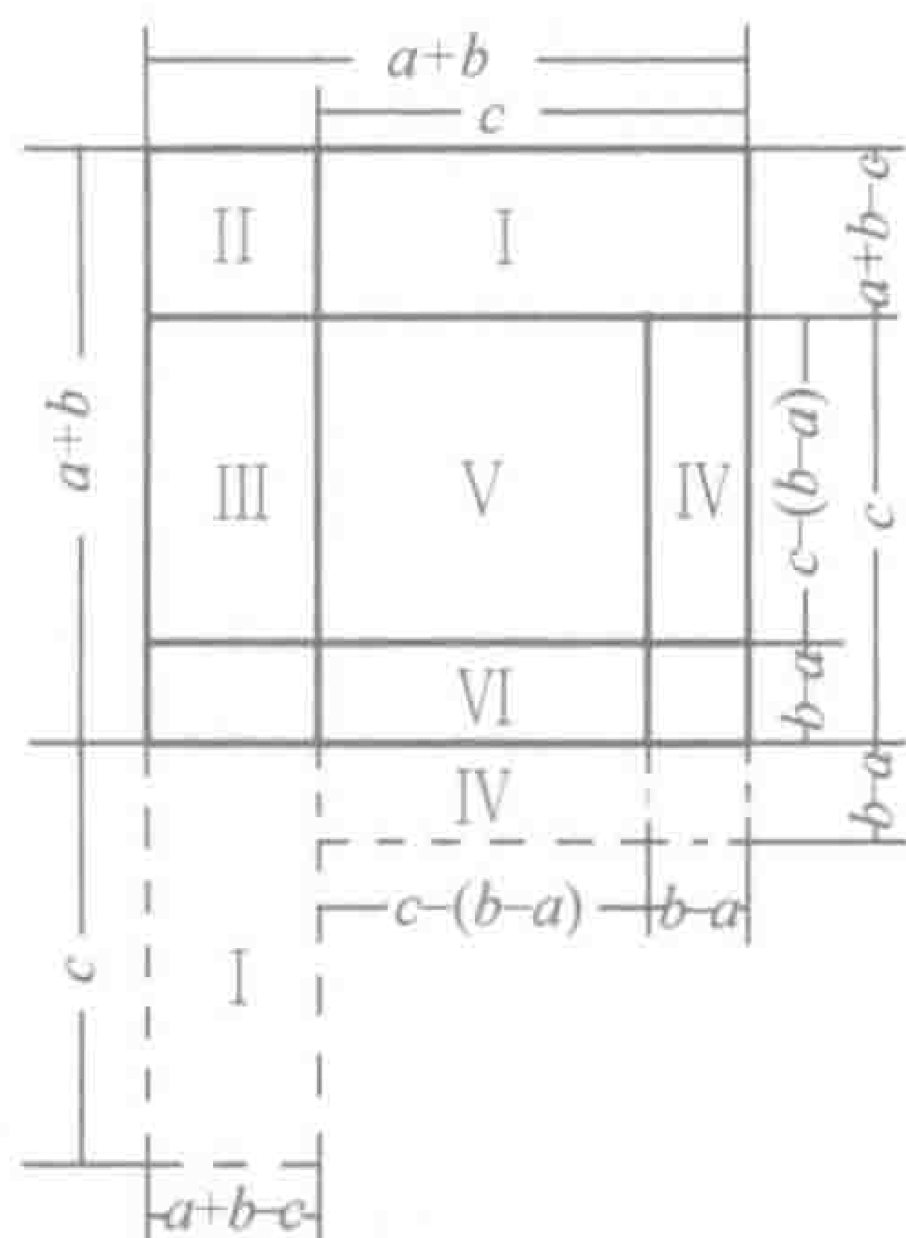


图 27-3-3

由图 27-3-3 可得，

$$(a+b)^2-c^2=\text{I}+\text{II}+\text{III}=[(b+a)+c][(b+a)-c]$$

故

$$4A=[(b+a)+c][(b+a)-c]$$

此即上述第二式。在第一式中，已知勾股积，由弦较和与弦较较二事之一，可得另一事，由此可得勾股形三边。第二式的运用类此。在第三式中，已知勾弦和、股弦和可得弦和和，由此可得勾股形三边。若已知勾股较、弦和和，则由

$$c+b=(c+a)+(b-a)$$

得

$$(c+a)(c+b)=(c+a)[(c+a)+(b-a)]=\frac{1}{2}[(b+a)-c]^2$$

令 $b+a=x$，则

$$x^2+(b-a)x=\frac{1}{2}[(b+a)+c]^2$$

开得 $x=b+a$，由此可得勾股形三边。第四式的运用类此。该书"窥望海岛"一节系据《算法统宗》卷 12 勾股相应内容改编。最末一题求海岛高远，《算法统宗》算法有误，梅氏改正表间距使与原答数相符。

梅文鼎还有关于立体几何与球面三角方面的四部著作，分别是：

《几何补编》4 卷在《测量全义》的基础上讨论正多面体和半正多面体计算和性质。主要工作有三点：第一，讨论了五种正多面体的体积计算，并指出《测量全义》中的一些错误；第二，给出两种半正多面体的作法及其性质；第三，讨论了正多面体的互容。

《弧三角举要》5 卷，讨论球面三角的解法。《测量全义》卷七介绍的解球面三角公式和定理其图说不无疏漏。梅氏"摘其肯綮，从而疏剔订补以直截发明其所以然"。并将所用方法概括为"析浑圆寻勾股而已"。该书仍使用黄道、赤道等名词，但所讨论的问题已不再此限。该书的主要工作是，证明解球面直角三角形的 10 个公式并讨论垂弧法和次形法。

《环中黍尺》5 卷，讨论球面三角形的正投影法。《测量全义》卷七以斜投影法讨论球面直

角三角形。梅氏认为“斜视之图无实度可纪”，“其实度非算不知”。书前的“小引”称：

《环中黍尺》者，所以明平仪弧角正形，乃天外观天之法。

这里的“平仪正形”就是天球的平行正投影，改用正投影法则“度皆实度，循图可得，即量法与算法通为一术”。他在“凡例”中写道：

二卷之平仪论，所以博其趣，而三极通机其用法也。黍尺名书，于兹益著。

所谓“三极”，即“赤道以北辰为极，而黄道亦有黄机，人所居又以天顶为极”，“三极通机”就是赤、黄、地平三种坐标的转换问题，“平仪论”是“三极通机”的纲领，即：

以横线截弧度，以直线取角度，并与外周相应。

以此为据，该书证明了余弦定理，并给出球面三角形的图解以及积化和差公式的证明。

《堑堵测量》2卷，以堑堵为模型推导黄经、赤经和赤纬的关系式并解释《授时历》的弧矢割圆术，使中西两法以堑堵为媒介得以会通。

三　立体几何与球面三角方面的创见

（一）正多面体和半正多面体

正多面体指的是各个面为相同正多边形的多面体，只有5种，分别是：正四面体、正六面体（即正方体）、正八面体、正十二面体、正二十面体。中国传统数学家对这5种正多面体的了解是源于明末传教士罗雅谷编译的《测量全义》（10卷，1631），该书收入《崇祯历书》，其中卷6记载了5种正多面体的体积公式，并求出假设棱长为100时对应的5种正多面体的体积值。该书计算棱长为100的正二十面体的体积为523809，这个值是错误的。梅文鼎《几何补编》重新讨论五种正多面体体积计算并给出棱长为100的正二十面体体积值应为2181693。梅氏计算主要步骤如下。

如图27-3-4所示，三棱锥$OABC$是正二十面体的二十分之一。正三角形ABC是正二十面体的一个侧面，O为其中心。过棱的中点D、E和中心O作截面将正二十面体分为两部分，截面为正十边形，ΔODE是该截面的十分之一。在直角三角形OFD中（Rt△表示直角三角形，下同），$\angle DOF=\frac{1}{2}\angle DOE=18^\circ$。$G$为侧面$ABC$的中心，$OG\perp$平面$ABC$。

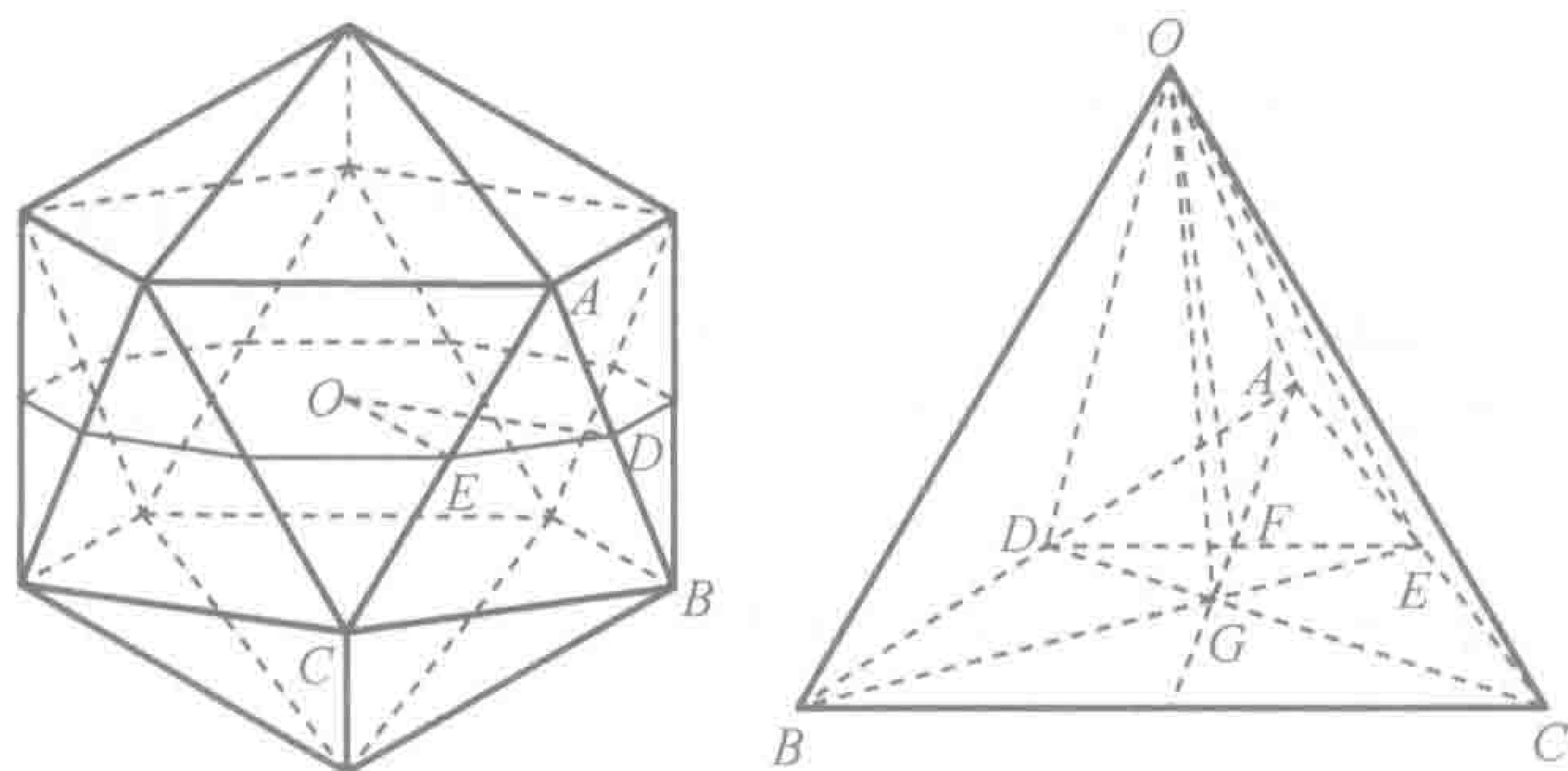


图 27-3-4

设正二十面体的棱长为l，则$DF=\frac{l}{4}$，棱锥侧高$OD=\frac{l}{4\sin18^\circ}$，边心距$DG=\frac{\sqrt{3}}{6}l$，高$OG=$

$\frac{\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})l$，正三角形 ABC 面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$。由此得到棱锥 $OABC$ 体积

$$V=\frac{1}{3}\times S\times OG=\frac{1}{48}(3+\sqrt{5})l^3$$

故正二十面体体积

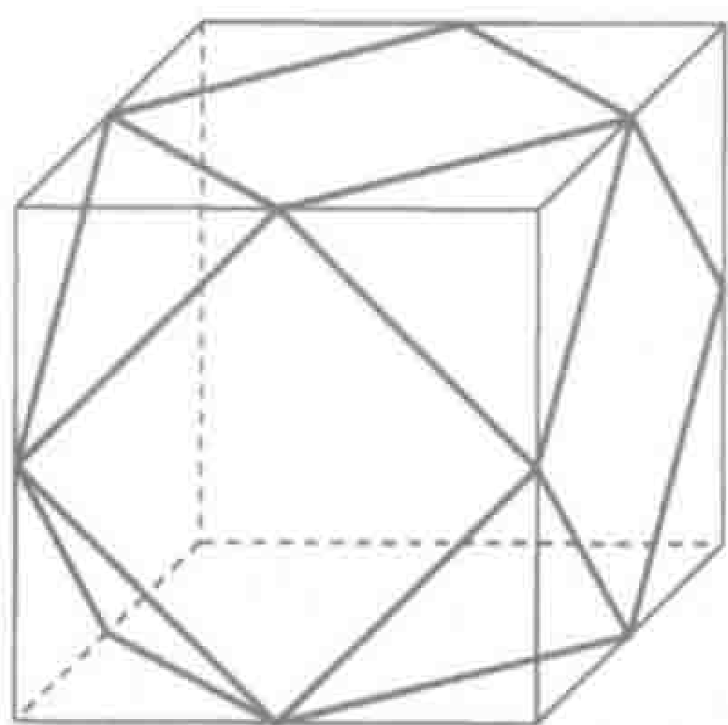
$$V_{20}=\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})l^3$$

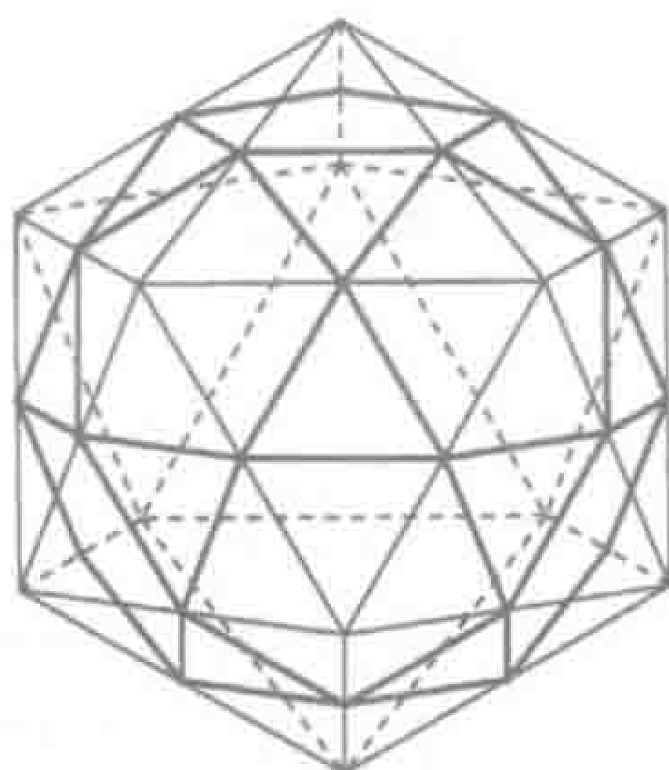
将 $l=100$ 代入，可得正二十面体体积为 2181693。

梅文鼎还提出两种等角半正多面体①，分别称为方灯体和圆灯体。关于方灯体的做法，梅氏称：

> （方）灯体者，立方去其八角也。平分立体面之边为点而连为斜线，则各正方面内成斜线正方。依次斜线剖而去其角，则成（方）灯体矣。

在图 27-3-5 中，粗实线所示是一个由正方体剖得的方灯体。


图 27-3-5


图 27-3-6

方灯体还可由正八面体做出："凡八等面容（方）灯体，皆以（方）灯体之边线得八面之半。"

圆灯体的做法是：

> 圆灯为十二等面，二十等面体所变，……，皆于原边之半作斜线相连，则各平面之中成小平面。此小平面与原体之平面皆相似，即为内容圆灯体之面。依此小平面之边平剖之去原体之锐角。

在图 27-3-6 中，粗实线所示是一个由正二十面体剖得的圆灯体。

梅文鼎进一步指出两种灯体的性质，主要是：

（1）凡灯体可补为诸体。即灯体均可还原为产生它的正多面体；

（2）凡灯体……棱之数皆倍于尖。即棱数是顶点数的二倍；

（3）凡灯体之棱皆可连为等边平圆圈。即方灯体的中截面为正六边形，圆灯体的中截面为正十边形。

《几何补编》中有孔林宗的附记，孔氏在梅氏的基础上补充了 4 种等角半正多面体：

（1）四等面体又可变为十八等边体。为六边之面四，为三边之面四；

（2）六等面体又可变三十六等面体。为八边之面六，为三边之面八；

（3）八等面体亦可变三十六等边体。为六边之面八，为四边之面六；

① 等角半正多面体指的是所有多面角相等，且各个面边数不全相同的正多边形的多面体。

（4）（八等面体）又可变四十八等边体。为四边之面十八，为三边之面八。

等角半正多面体又称阿基米德（Archimedes，公元前287～前212）体。阿基米德发现13种等角半正多面体。上述为其中的6种。

梅文鼎《几何补编》还讨论多面体的互容问题。实际上，互容问题在《几何原本》卷十五曾有论述，共给出5种情形，但当时《几何原本》后九卷尚未译出，梅氏无从参考。他所讨论正方体内容正十二面体以及正方体内容正二十面体的做法简明实用。具体论述为：

置十二等面边为理分中末线之小分，求其全分为外切立方边。

立方根与所容二十等面之边，若全数与理分中末之大分。

凡立方内容十二等面，皆以十二等面之边，正切于立方个面之正中凡六，皆遥相对如十字。假如上下两面切十二等面之边横，则前后两面所切之边必纵，而左右两面所切之边又横。若引其边为周线，则六处相交皆成十字。立方内容二十等面边亦同。

（十二等面的）外切立方与体内容立方径之比例，若理分中末之全分与其大分。

根据以上表述，任给一正方体，只要利用黄金分割（理分中末比）容易得到该正方的内容正十二面体和内容正二十面体。具体做法如下：

设正方体的棱长为l，在图27-3-7中，其内接正十二面体棱长为$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})l$。AB、CD、EF等六个棱分别位于正方体六个侧面的中位线上，因而A、B、C、D、E、F等十二个顶点可以确定。G、H、I、J等八个顶点是正十二面体的内容正方体的顶点。设原正方体的中心是O，OG'是外切立方体的半径，OG是内容立方体的半径，由$OG=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)OG'$，可以得到$G$点。类似地，可以得到$H$、$I$、$J$等顶点。

在图27-3-8中，正二十面体棱长为$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)l$，AB、CD、EF均位于正方体各侧面的中位线上，因此A、B、C、D、E、F等二十个顶点容易确定。

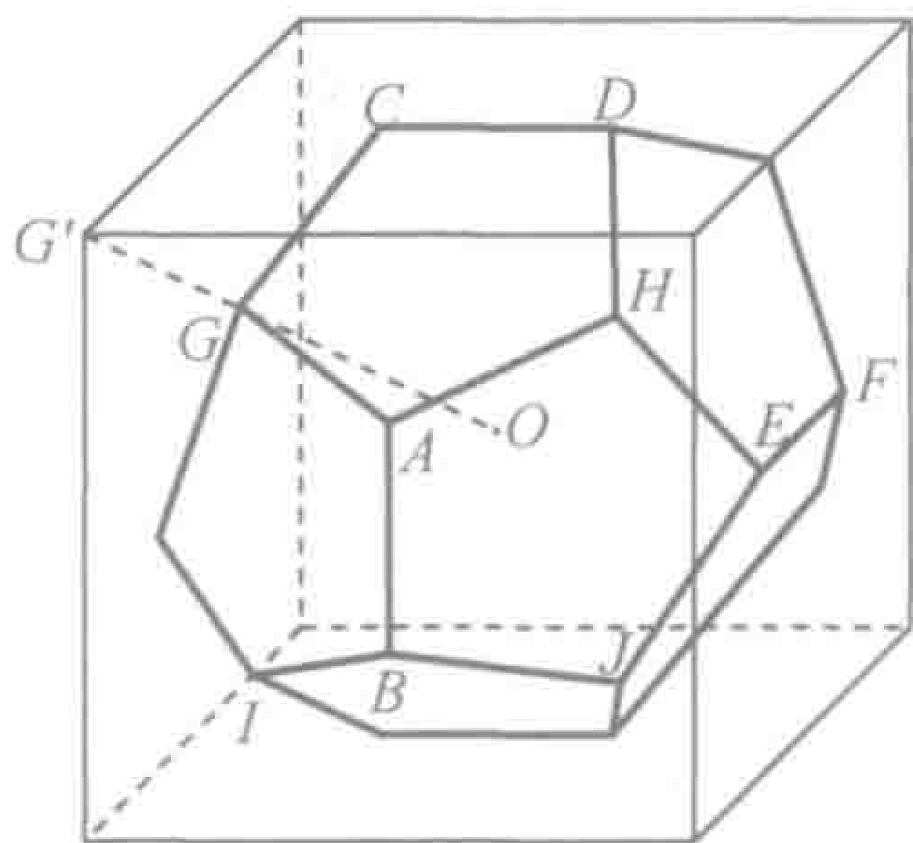


图27-3-7

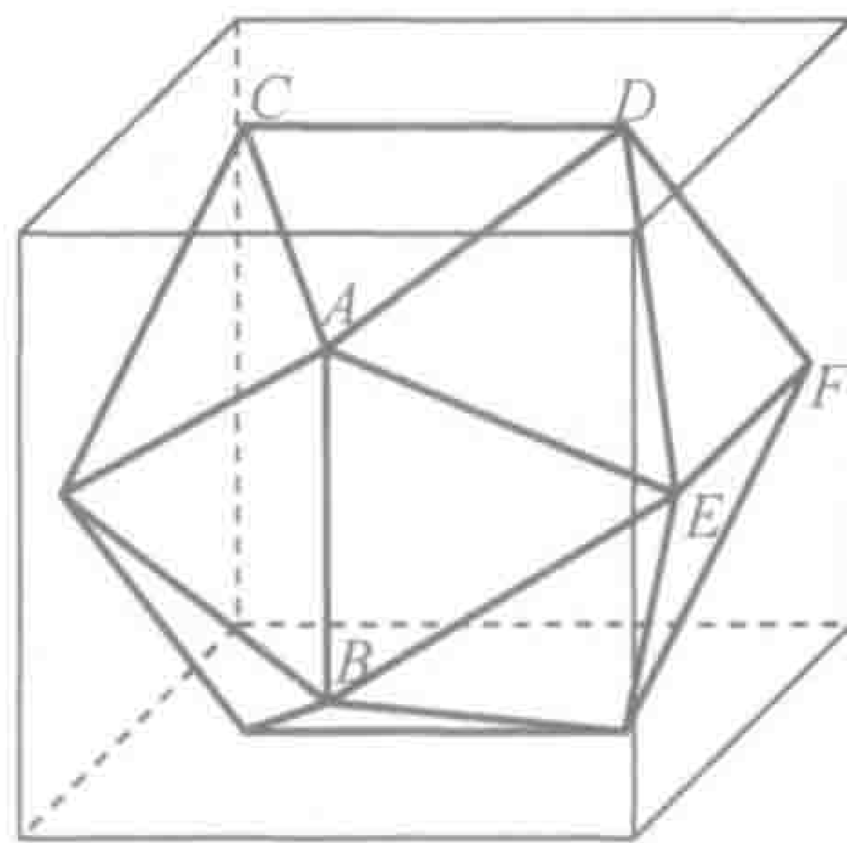


图27-3-8

梅文鼎这两种正多面体的做图法立论正确、步骤简便、直观性非常强，是一项创造性工作①。

① 李迪主编，中国数学史大系·第七卷，北京师范大学出版社，2000年，第441页。

（二）寻勾股析浑圆

梅文鼎在《弧三角举要》中证明了解球面直角三角形的10个公式并讨论垂弧法和次形法的方法。如图27-3-9所示，设球 O 的半径为1，$\triangle ABC$ 是球面直角三角形，C 是直角。作5个辅助直角三角形即 Rt $\triangle ODE$、Rt $\triangle OFG$、Rt$\triangle IHB$、Rt$\triangle KCJ$、Rt$\triangle AML$，使后3个三角形所在的平面皆平行于前两个所在的平面。梅氏称"此五勾股形皆相似，故其比例等。"由 Rt$\triangle ODE \backsim$ Rt$\triangle IHB$，有 $\frac{OE}{ED}=\frac{IB}{BH}$，即

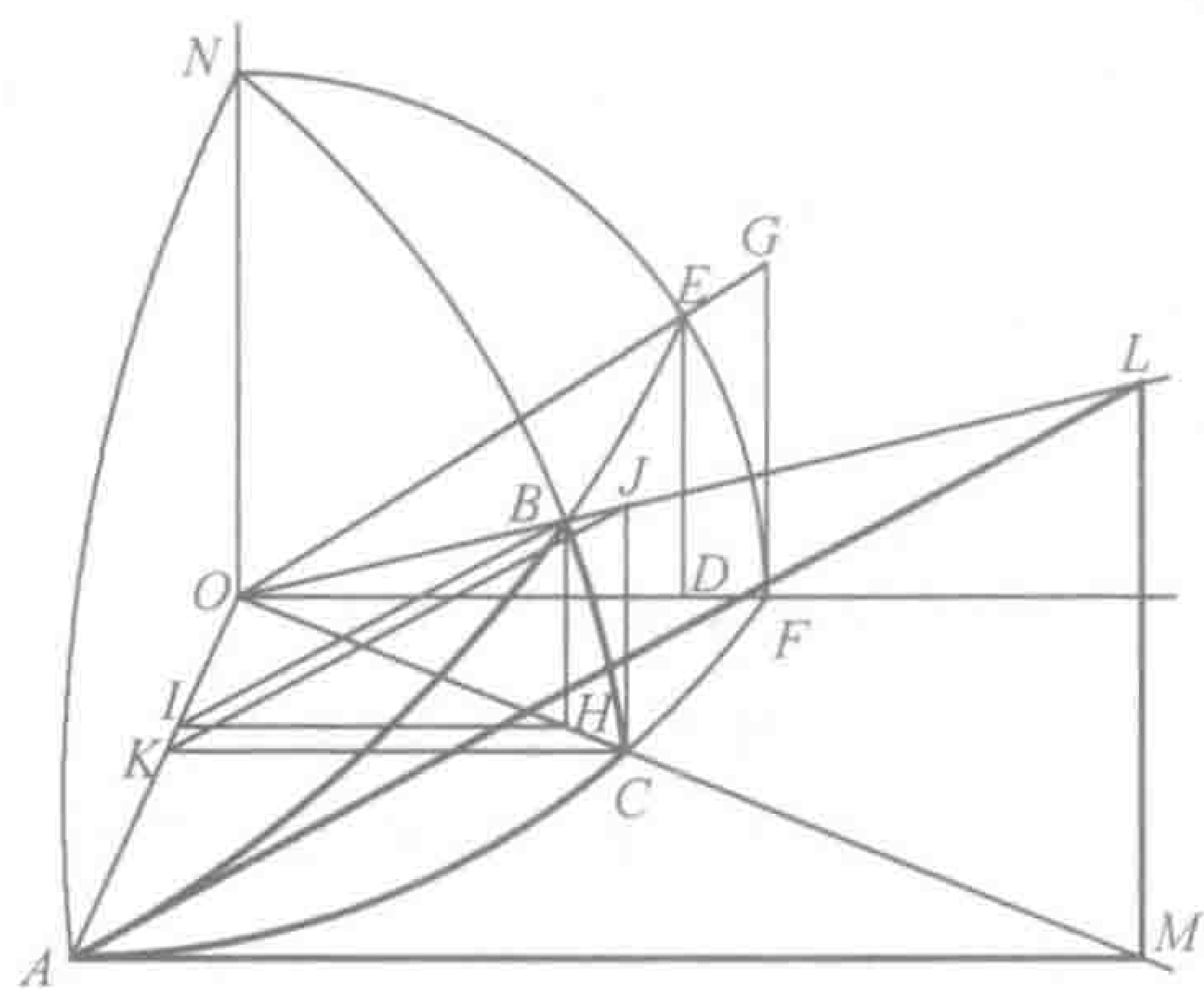


图 27-3-9

$$\frac{1}{\sin A}=\frac{\sin c}{\sin a}$$

或

$$\sin a=\sin A\sin c \tag{27-3-1}$$

同理可得

$$\sin b=\tan a\cot A \tag{27-3-2}$$

$$\cos A=\tan b\cot c \tag{27-3-3}$$

利用次形法，在球面直角三角形 $\triangle BEN$ 中，$\angle E$ 是直角，$\overset{\frown}{NE}=\frac{\pi}{2}-A$，$\overset{\frown}{BE}=\frac{\pi}{2}-c$，$\overset{\frown}{NB}=\frac{\pi}{2}-a$，$\angle BNE=\frac{\pi}{2}-b$，由式（27-3-1），$\sin\overset{\frown}{NE}=\sin B\sin\overset{\frown}{NB}$。即

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin B\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$$

$$\cos A=\sin B\cos a \tag{27-3-4}$$

同理可得 $\sin\overset{\frown}{BE}=\sin\angle BNE\sin\overset{\frown}{NB}$。即

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$$

$$\cos c=\cos a\cos b \tag{27-3-5}$$

由公式（27-3-2）得　$\sin\overset{\frown}{BE}=\tan\overset{\frown}{NE}\cot B$。即

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cot B$$

$$\cos c=\cot A\cot B \tag{27-3-6}$$

由于轮换性，由式（27-3-1）、式（27-3-2）、式（27-3-3）、式（27-3-4）又可导出

$$\sin b=\sin B\sin c \tag{27-3-7}$$

$$\sin a=\tan b\cot B \tag{27-3-8}$$

$$\cos B=\tan A\cot c \tag{27-3-9}$$

$$\cos B=\sin A\cos b \tag{27-3-10}$$

于是《测量全义》卷七球面直角三角形的10个公式得证。

该书又论垂弧法。过球面斜三角形一个顶点作球大圆使与对边垂直，该大圆弧称为垂弧。利用垂弧将斜三角形分为两个直角三角形求解。次形法亦为求解球面三角形的常用方

法。梅氏指出，该法的用处是“易大形为小形”及“易角为弧，易弧为角”，亦即通过变换所给条件使原题易于获解。

（三）三极通机——球面三角形正投影法

梅文鼎《环中黍尺》中的“三极通机”的球面正投影法与古希腊托勒密（Polemy，约85～165）所创“曷捺楞马”法（Analemma）大同小异①。

由正投影法所得投影图，梅氏称为正形。球面的正形有如下的性质：

（1）大圆上的点皆可为球极投影；

（2）纬线的实长等于以纬线为直径的半圆周；

（3）经线的实长等于大圆的半圆周。

如图 27-3-10 所示，纬线 AB 的实长等于半圆周 $\overset{\frown}{ADB}$，$\overset{\frown}{BC}$ 的实长等于 $\overset{\frown}{BD}$，经线 $\overset{\frown}{EGF}$ 实长等于大圆半周 $\overset{\frown}{EBF}$，$\overset{\frown}{EG}$ 实长等于 $\overset{\frown}{EB}$。上述三个性质是梅氏以正投影法讨论球面三角形问题的主要依据。

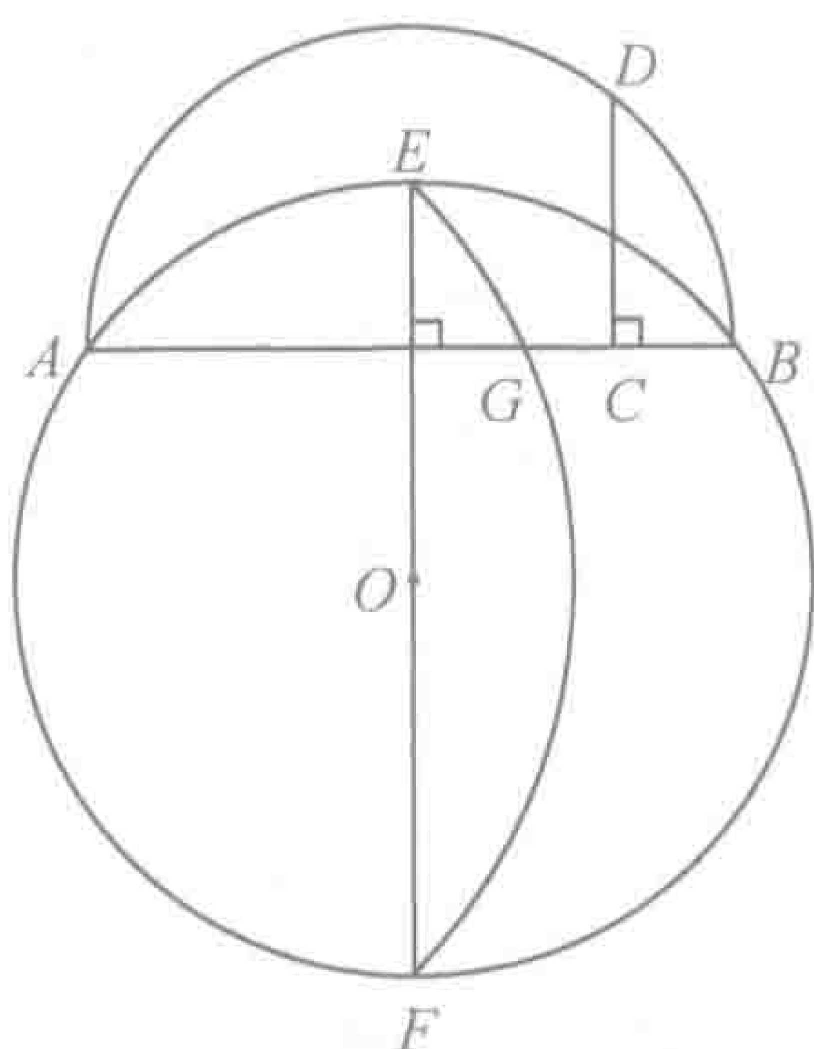


图 27-3-10

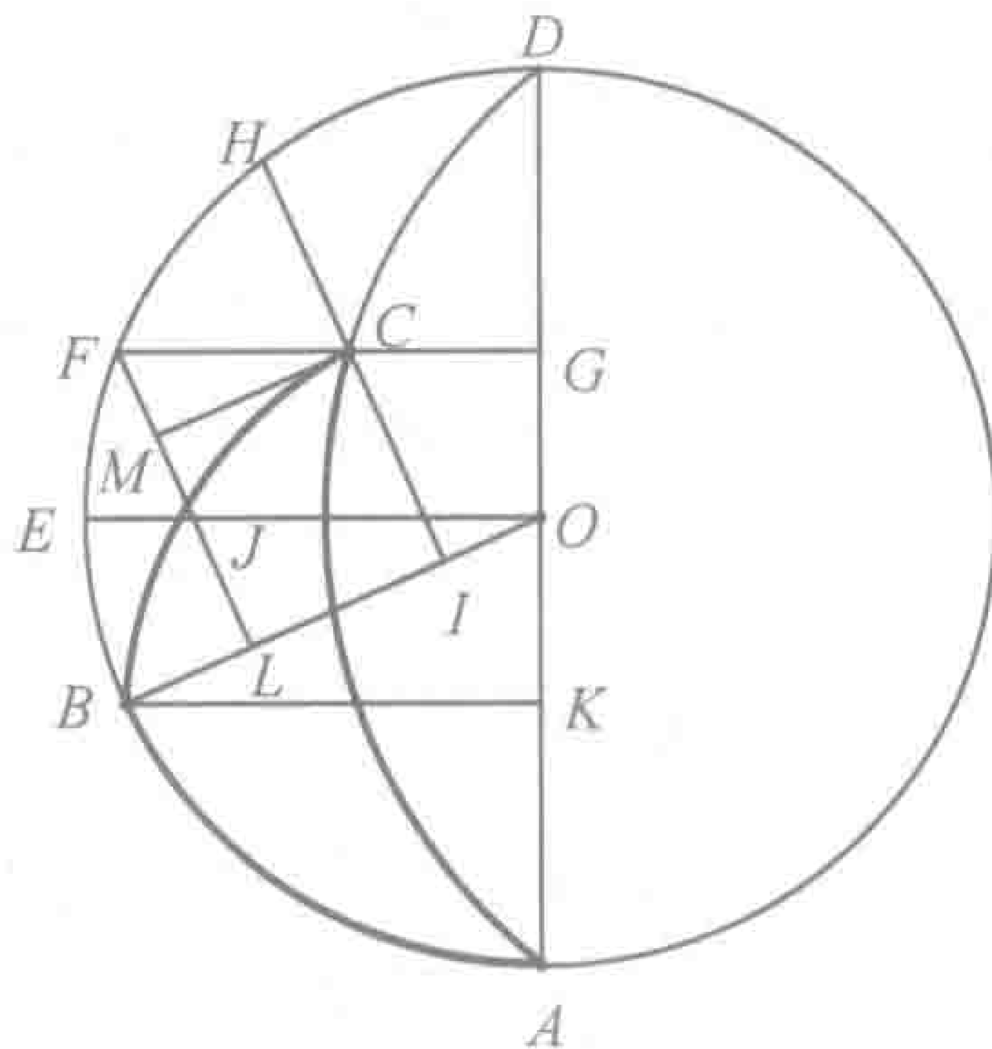


图 27-3-11

梅文鼎以正投影法证明球面三角的余弦定理的过程大致如下。如图 27-3-11 所示，ABC 是球面三角形的正形，A 是锐角，$\overset{\frown}{AC} > \frac{\pi}{2}$，$\overset{\frown}{AB} < \frac{\pi}{2}$，求 $\overset{\frown}{BC}$。作直径 AD，$OE \perp AD$，过 C 作 $FG \perp AD$，以 A 为极，$\overset{\frown}{AC}$ 的实长是 $\overset{\frown}{AF}$。连 OB，过 C 作 $HI \perp OB$，以 B 为极，$\overset{\frown}{BC}$ 的实长是 $\overset{\frown}{BH}$。因 $\frac{OE}{GF} = \frac{JE}{CF}$，而 $OE = 1$，$GF = \sin\angle FOA = \sin\overset{\frown}{AF} = \sin b$，$EJ = \text{vers}A$，故

$$\frac{1}{\sin b} = \frac{\text{vers}A}{CF} \tag{27-3-11}$$

作 $BK \perp OB$，$FL \perp OB$，$CM \perp FL$。因 $\text{Rt}\triangle CMF \backsim \text{Rt}\triangle BKO$，故有 $\frac{CF}{CM} = \frac{OB}{BK}$。而 $CM = LI = BI - BL = \text{vers}\ a - \text{vers}\ (b - c)$，$OB = 1$，$BK = \sin\angle AOB = \sin\overset{\frown}{AB} = \sin c$，故

① 刘钝，托勒密的“曷捺楞马”与梅文鼎的“三极通机”，自然科学史研究，1986，5（1）。

$$\frac{CF}{\text{vers } a-\text{vers }(b-c)}=\frac{1}{\sin c} \tag{27-3-12}$$

由式（27-3-11）、式（27-3-12）消去 CF，得 $\text{vers } a=\text{vers }(b-c)+\sin b\sin c\,\text{vers}A$。即

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

当 A 为钝角，b，c 均小于 $\frac{\pi}{2}$，或大于 $\frac{\pi}{2}$ 时，梅文鼎用同样的方法予以推导，所得结论同上。

以正投影法解球面斜三角形，梅氏主要讨论已知三边、两边一夹角，两边一对角，两角夹一边求解余边余角的情形。兹以第二种情形为例说明之。已知两边 b，c，夹角 A，求 a 边的方法大致如下。如图 27-3-12 所示，在圆周上任取点 A，作直径 AD。取 $\overset{\frown}{AB}$ 等于 c，作直径 BE。取 $\overset{\frown}{AF}$ 等于 b，作 $FG\perp AD$。以 FG 为直径作半圆，取 $\overset{\frown}{FH}$ 等于角 A 的实度。作 $HC\perp FG$，则点 C 为正形的顶点。过 C 作 $IJ\perp BE$，则 BC 边亦即 a 边的实长等于以 B 为极的 $\overset{\frown}{BI}$ 或 $\overset{\frown}{BJ}$。既得 a 边，则问题转化为第一种情形。

梅文鼎又用正投影法导出积化和差公式，以加减代乘除，可以简化球面三角形的数值计算。

（四）天球黄赤坐标变换的堑堵模型

梅文鼎在《堑堵测量》中给出了天球黄赤坐标变换的堑堵模型。他作天球的外切正方体使二至点和二分点各在四个侧面的中心。过球心作一组两两互相垂直的平面剖之，取春分点和夏至点所在的八分之一小正方体。又依黄道面斜截之，得堑堵形。如图 27-3-13 所示，O 为球心，A 是春分点，E 是赤道夏至点，P 是黄道夏至点，$\overset{\frown}{PE}$ 是黄赤大距（约 23°30′），$\overset{\frown}{AE}$ 是赤道象限弧，$\overset{\frown}{AP}$ 是黄道象限弧。设点 B 是太阳所在的位置，过 OB 作平面垂直于堑堵底面，O-AMN 称为勾股锥形，所余部分称勾股方锥。ACB 是球面直角三角形，C 是直角，$\overset{\frown}{AB}$ 为黄经，$\overset{\frown}{AC}$ 为赤经，$\overset{\frown}{BC}$ 为赤纬，过点 C、点 B 分别作平面垂直于 OA，作 PQ 垂直于 OE。由相似勾股形，梅文鼎导出黄经、赤经和赤纬的关系式。

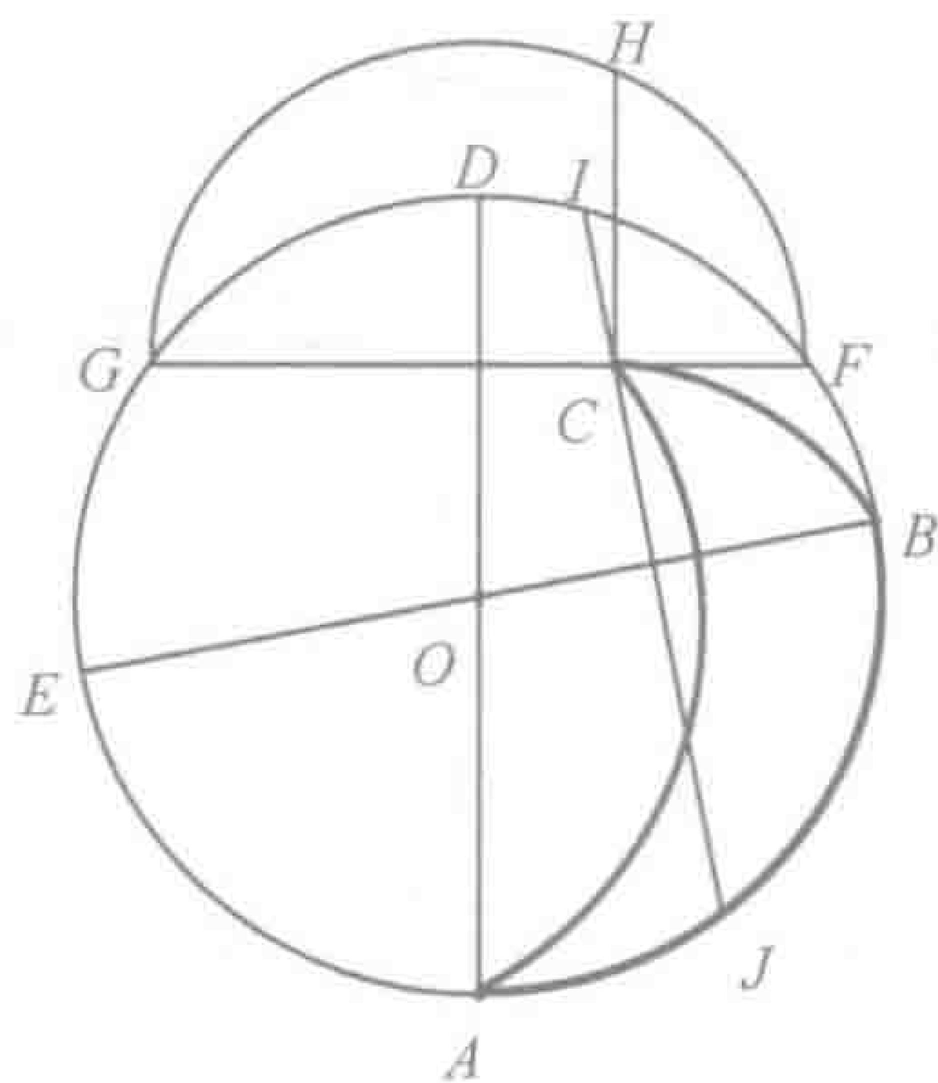


图 27-3-12

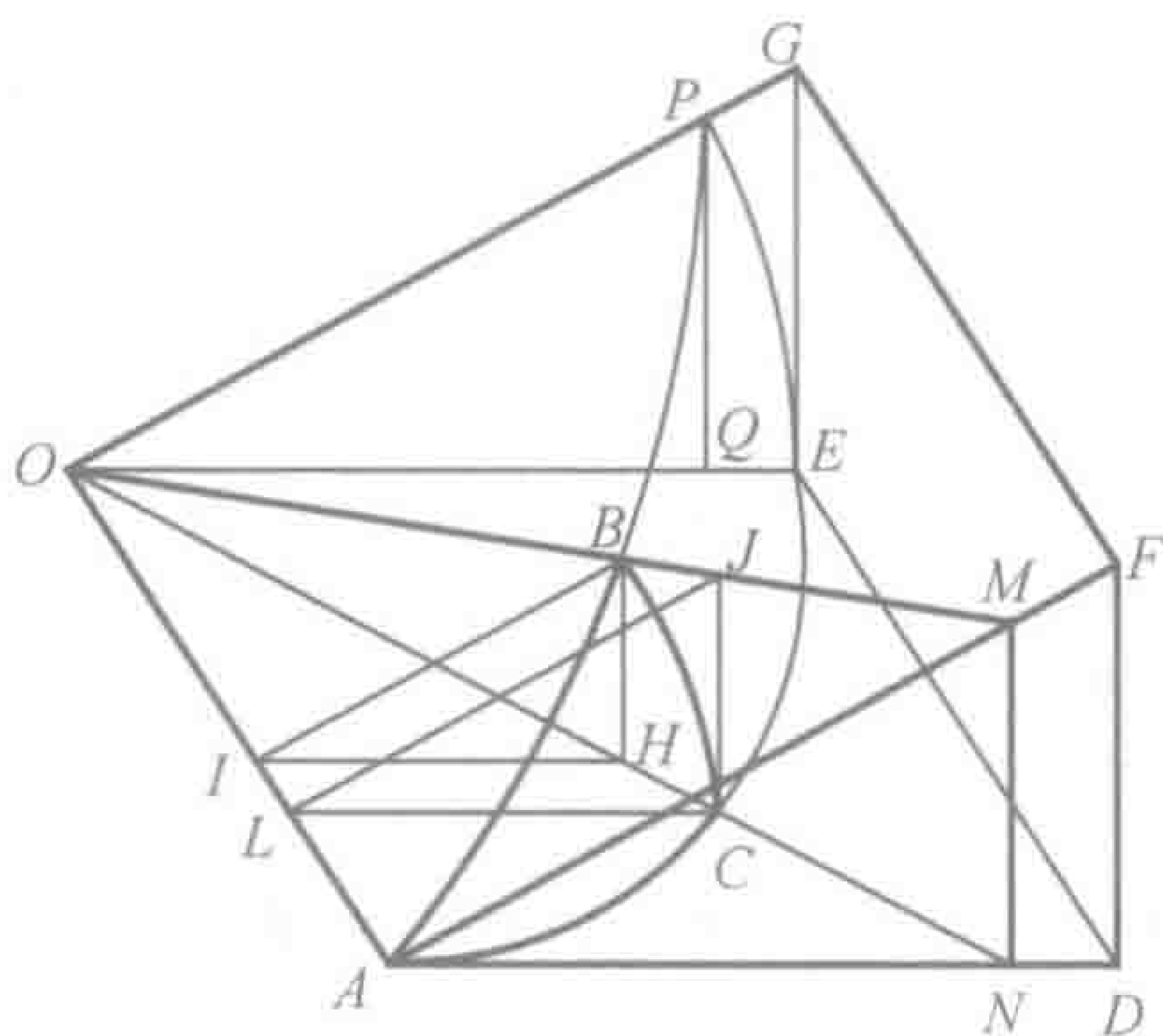


图 27-3-13

由 Rt△ADF∽Rt△ANM，有$\frac{AD}{AF}=\frac{AN}{AM}$，即$\frac{1}{\sec A}=\frac{\tan b}{\tan c}$，或 $\cos A=\tan b\tan c$；

由 Rt△LCJ∽Rt△ADF，有$\frac{LC}{JC}=\frac{AD}{FD}$，即$\frac{\sin b}{\tan a}=\frac{1}{\tan A}$，或 $\sin b=\tan a\cot A$；

由 Rt△IHB∽Rt△OQP，有$\frac{IB}{BH}=\frac{OP}{PQ}$，即$\frac{\sin c}{\sin a}=\frac{1}{\sin A}$，或 $\sin a=\sin A\sin c$；

由 Rt△OAM∽Rt△OLJ，有$\frac{OA}{OM}=\frac{OL}{OJ}$，即$\frac{1}{\sec c}=\frac{\cos b}{\sec a}$，或 $\cos c=\cos a\cos b$。

在上列球面三角的四个公式中，A 为常量。由前三式，任给一个量可得另一个量，而由第四式可得第三个量。当赤经大于45°时，由勾股方锥可得到上述关系式。此时，黄经、赤经由夏至点起算，与《授时历》的起算点相同。勾股方锥和《授时历》的浑圆容方直图相当，即勾股方锥展开和《授时历》的侧视图、平视图相当。

第四节　其他数学家的工作

一　方中通及其《数度衍》

方中通（1633～1698），字位伯，号陪翁，安徽桐城人。他是明末著名哲学家和科学家方以智（1611～1671）的次子。他自幼受家庭影响，对科学发生兴趣，并随波兰传教士穆尼阁学习数学。到康熙初年，他已学有所成，成为有名的数学家，并和梅文鼎多次交流。

方中通数学著作有《数度衍》8 册（1661），各册以八卦之名命名，由于该书各册名录与一般算书目录有一些不同，特将各册内容列出，如表 27-4-1 所示。

表 27-4-1　《数度衍》① 册次目录及内容

册次	册名	内容
1	乾	总目、外序、家序、凡例；卷首之一数原；卷首之二律衍
2	兑	卷首之三几何约、重学解［失稿嗣补］
3	离	卷 1 珠算；卷 2 笔算上；卷 3 笔算下；卷 4 筹算；卷 5 尺算
4	震	卷 6 勾股章［勾股、有积、有率、容方、容圆］；卷 7 测量、器测；卷 8 测圆
5	巽	卷 9 少广章［方圆、弧矢弦］；卷 10 较容；卷 11 递加、外包、倍加
6	坎	卷 12 开平方、开平圆；卷 13 开立方、开立圆；卷 14 开三乘方、广诸乘方
7	艮	卷 15 方田章［丈量、田形］；卷 16 商功章［开筑、垛捆］；卷 17 差分章［两分差、递分差、倍分差、子母差］；卷 18 和较三率、借衰互征；卷 19 均输章［均输］
8	坤	卷 20 盈朒章［借推盈朒、原带盈朒］；卷 21 方程章［方程］；卷 22 粟布章［度、量、衡、互求］；卷 23 九章外法；跋

该书是一部数学百科全书式的著作，书中包括除三角学外的当时所有数学，内容大都取

① 方中通，数度衍，靖玉树编勘，中国历代算学集成，中册，山东人民出版社，1994 年。

材于《几何原本》、《同文算指》、《比例规解》、《算法统宗》等[①]。梅文鼎在《勿庵历算书目》中称："近代作者如李长茂之《算海说详》亦有发明，然不能具九章。唯方位伯《数度衍》于九章之外，搜罗甚富。"从目录可以看出，该书主体仿九章将数学知识分类阐述。卷首之三中的"几何约"是《几何原本》前六卷的缩编和改编本。该卷卷末有识语：

西学莫精于象数，象数莫精于几何。余初三过不解，忽秉烛玩之，竟夜而悟。明日质诸穆师，及蒙许可。凡制器尚象，开物成务，以前民用，以利出入，近乎此矣。故约而记之于此。

卷1中四算指的是：珠算、笔算、筹算和尺算。"尺算"即为比例规，取材于《比例规解》。卷23"九章外法"最后一类"杂收"收录了7个题，其中第5题可称为"中国的约瑟夫问题"[②]，值得关注。该题称：

环二十子，内有二黑子相连。以九数之，止处即除一子，除毕，二黑不动。以从何处起？

该题可理解为：有20个围棋子，排成一圈，其中有2个黑子相连排在一起，其余均为白子。从某子开始九个九个地数棋子，每次将第9子去掉，即"见九去一"，然后接着往下数，往复循环，直到剩下2子止。问：从哪个子开始，可使剩下2子恰是2黑子？

这个题属于约瑟夫问题。约瑟夫问题（Josephus' Problem）是一个十分古老的数学游戏，起源于古罗马军队的一种惩罚习惯，已有两千多年的历史，其基本形式是：

将k个子排成一圈，在这个圈中以某子为起点，m个m个地数，将每次排列的第m子去掉，直到去掉$k-n$子为止。问保留下来的n子在原来的圈中应排在哪些位置上。

显然，方中通题中$k=20$，$m=9$，$n=2$。方中通的答案是：

通曰：五为九子中。左右各四，离黑子四位起可也。

即以黑子前第4子作为见九去一的起点，就可保证二黑子不动。如果把20个围棋子编号，则二黑子应排在5、6号位上。这个答案是正确的。至于"五为九之中"，所以第一个黑子应放在第5位上，则只对本题成立。方中通还把这个问题进行推广：

大凡以九数者，不拘多寡，中必有相连二子不动。七亦如之。惟起处当临时测耳。

设k为任意一个有限的正整数，取k个子，把这k个子排成一圈，记为Q_k，将k个子编号为1，2，…，k，并设见九去一是以1号为起点的。方氏相当给出以下命题。

命题1　对于Q_k，用"见九去一"之法除去（$k-2$）个子后，所余2子的编号必为连续二数；

命题2　对于给定的k，可以通过适当选择起点，使得"见九去一"法除去Q_K中（$k-2$）个子后，所剩2子在给定的位置上；

命题3　命题1和2对于"见七去一"也成立。

方中通没有说明这3个命题的来源和导出方式。经过检验，这3个命题对于一般的k并不成立。命题1对于$k \leqslant 91$成立，命题2对于$k \leqslant 23$成立。

---

① 李迪主编，中国数学史大系·第七卷，北京师范大学出版社，2000年，第133页。

② 郭世荣，方中通《数度衍》中所见的约瑟夫斯问题，自然科学史研究，2002，21（1）。

约瑟夫问题在日本称为“算脱”，也称为“继子立”。日本关孝和给出了一般性讨论。李约瑟《中国科学与文明》第3卷介绍了这个问题在日本的情况后，称：“但我们不能指出在中国的数学著作曾介绍过这种‘继子立’问题的实例。”① 方中通的记述虽然不具有一般性，但它表明中国人在17世纪就接触到约瑟夫问题，李约瑟的巨著中的说法应予修改。

另外，对《数度衍》卷11的内容作一说明。卷11分为“递加，外包，倍加”三部分，属于“少广”内容，原书分别注为“少广之四”、“少广之五”、“少广之六”。它们改编自《同文算指通编》卷五的“递加数”和“倍加数”，略有发展。

“递加”讨论的是等差数列的性质以及相关算法。“外包”是在几何背景下讨论特殊的高阶等差数列。如奇数平方数列

$$1,\ 9,\ 25,\ 49,\ 81,\ 121,\ 169$$

方氏将它们看成边长依次为1，3，5，7，9，11，13的一层包一层的正方形点阵，对于前两个点阵就是“方八包一”。包，即包围之意。依据点阵几何形状不同，还讨论包圆、包三角、包立方、包立圆、包立三角等数列，实际上是各种形数。

“倍加”以公比为2和3，首项均为1的两个等比数列为例，讨论了等比数列的性质及相关算法。其中“倍加隔位合数法”讨论的并不是对数②。这一节共有8条：

(1) 抽中一位前后与后合式。凡倍加数，不论共有几位，但就中抽取一位之数自乘。视所抽之位，至首几位，则自乘之数必与此后几位相同也。

(2) 抽中二位与后合式。于多位之中，前抽一位，后抽一位，相乘，则视前抽之位，去首几位；后抽之位，再去几位，其数必与此相乘之数合也。

(3) 倍抽减一前合后式。不必算其前后之位，但视所抽为第几位，倍其位数，减一后得应合之位，则所抽位数自乘，必与后位数合也。

对于等比数列 $\{a_n\}$，n 从1开始且 $a=1$，(1)~(3)条分别对应：

$$a_k^2 = a_{k+(k-1)} = a_{2k-1}$$

$$a_{k-1} \times a_{k+1} = a_{(k+1)+(k-1-1)} = a_{2k-1}$$

$$a_k^2 = a_{2k-1}$$

(4) 减倍位抽前合后式。先排倍数于右，次排位数于左。须除首位不算，自次位作一位排之，抽第几位倍之，不必减一，即得应合之位，则所抽位之自乘，必与后位数合也。

(5) 减位并抽前合式。抽两位之互乘，则并所抽之两位共为几位，即知互乘之数必与其位数合也。

对于等比数列 $\{b_n\}$，n 从0开始且 $b_0=1$，(4)、(5) 条分别对应：

$$b_k{}^2 = b_{2k}$$

$$b_{k-1} \times b_{k+1} = b_{(k-1)+(k+1)} = b_{2k}$$

(6) 异首减位倍抽即并抽式。若首位不自一起，或二、或三、或四起者，则抽一位抽二位，其自乘互乘之数，皆先去首位之数除之，而后倍位并倍以求合数之

① J. Needham, *Science and Civilization in China*. Vol. 3. Cambridge: Cambridge University Press, 1959. 62.

② 严敦杰先生认为这部分讨论的是对数。见：严敦杰，方中通《数度衍》评述，安徽史学，1960（创刊号），第53~57页。

位也。

“异首”即等比数列 $\{c_n\}$ 首项 $c_1 \neq 1$，这条即 $c_k^2 = c_1 c_{2k-1}$；

(7) 截位合前积式。凡倍一加者，就中随意截取一位，其所截位之数减一，即合所截位以前各位之总积。凡自一起者用之。

(8) 截位合前后积式。(此条只有算例)

“倍一加”即首项为1，公比为2的等比数列 $\{e_n\} = \{2^{n-1}\}$，n 从1开始。(7) 与 (8) 两条即为

$$e_k - 1 = \sum_{i=1}^{k-1} e_i$$

$$(e_k)^2 - 1 = \sum_{i=1}^{2(k-1)} e_i$$

二 李子金的数学工作

(一) 李子金

李子金（1622～1701），原名之弦，号隐山，因避讳改名子金，河南柘城人，是明末清初对于中西历算都有研究的人士之一。他撰有《律吕新法》（1661）、《算法通义》（1676）、《几何易简集》（1679）、《书学慎余》（1682）、《天弧象限表》（1683）、《历范》（1688）、《狂夫之言》（1690）及其他各类著作共12种，二十七卷，三十余万言，总名《隐山鄙事》，内容涉及数学、历法、律吕、声韵、辞赋、周易等研究领域。

在友人笔下，李子金是一个追求仙道、富有天资却终其一生未能有所成就的人①。其实，李子金所追求的仙道并非炼制丹药、贪求长生，而是进行对“内丹”的研究和修习②。他自述“世所重制科之艺，亦未尝刻意为之”③。他在近半百时，断然放弃举业，这成为他专心从事历算研究的重要契机。

李子金在传统数学方面主要参考了明代算家唐顺之和程大位的著作，同时也受到西方历算著作的影响。他对于《同文算指》、《筹算》、《比例规解》、《割圆八线表》、《大测》和《测量全义》等西算著作都有研究或了解。清初王士禛《池北偶谈·谈异》记载有李子金测量楼高水深的事迹④。李子金到过北京，也许那时他接触了当时传入中国的西方历算知识。

(二) 李子金的数学工作

李子金认为“三角形之理非勾股可尽”，他运用三角函数解决一些平面三角形的问题。在“三角形互相推求法”中，李子金集中归纳了求解平面三角形的方法：

勾股之法论边不论角，边有三，非以二求一则不可得；象限之法，论角复论边，合角与边而为六，非以三求三则不可得。三角之形状虽不可胜穷，而推测之大

① 清·李桓辑，《国朝耆献类徵》(初编)，第17册，卷415，广陵书社，2007年。

② 《逸德轩诗集》。

③ 李子金：《隐山鄙事》自序。

④ 清·王士禛撰，《池北偶谈》，中华书局，1982年，第617页。

法则不过二端。其一以一角两边，求余角余边；其一以一边两角，求余边。……又止二法而已，任三角之形，千变万化，但执此二法以御之，则系距之道也。①

他通过题例说明了各种类型求法，主要运用勾股定理、查三角函数表、正弦定理来求解。

在《天弧象限表》中，李子金将三角函数表进行了简化，又将60分一度，改成了100分一度，顺应了中国人的习惯。

值得指出的是，在李子金所处时代，人们认为西洋的圆周率是最精确的②。所以，《大测》直言不讳地批评中国“围径之法”不够精密，而且计算繁难。鉴于此，李子金从割圆术出发，花费了数年功夫，创立了“矢弦求积并求背新法”。《算法通义》卷二云：

愚谓欲以矢弦求背，必先以矢弦求积，而求积之法复自古难之。予沉思数年，于无法中求为有法，始创立一术，虽不敢谓天然巧合，亦庶乎至密而可用矣。③

李子金从传统割圆术出发创立新方法，其用意很大程度上在于回应西学的挑战。在《天弧象限表》文末“附表外算法”中，有“径背求弦法可代象限表”、“径弦求背法可代象限仪”两条。《割圆八线表》文末附有“八线表代勾股开方法”，举出用三角函数表可以代替勾股的计算。《天弧象限表》一书在内容和体例上本是脱胎于《割圆八线表》，而在此处也适成对应：认为自己创立基于弧矢割圆的新方法可以代替三角函数表。

李子金对八线表的优点并没有一概否认。《算法通义》卷五言：

诸法之中惟八线表为最善，但每遇一数，必须携表自随以备查考，未免稍赘。予创立新法布算，虽多曲折而得数亦云近密，较八线表为独巧，较三差法则更切，盖亦于无法中求为有法，不谓之神奇亦不可也。虽然予径背求弦之法，前古所未有，然亦不过迁就其数，以求密合耳，若谓数出天然，确不可易，予又何敢自欺以欺人乎。至于不假算数，展卷即得，则八线表之功为不可没矣。

这段评论，是李子金创立“四差通用法”④，将三种方法做了精度比较⑤之后得出的。

明末清初伴随着西方历算知识的传入，不断出现的中法西法之争给当时的学者很大刺激。西法对中法的批评刺激李子金重新研究中国传统的数学方法，这一方面对于传统中国数学的“复兴”是有益的，但同时也使得研究者过于看重中西方法在实际测量中所表现的优劣结果而忽视了西法的真正特点和优势。从这个意义上，李子金的例子说明西方数学在清初发生的影响或许仍然是片面和肤浅的。

三　陈厚耀对排列组合的研究

（一）陈厚耀

陈厚耀（1660～1722），字泗源，号曙峰，泰州人，康熙丙戌（1706）进士。他和梅文

---

① 见《天弧象限表》卷首“三角形互相推求法”。

② 见李笃培，《中西数学图说》卷2，抄本，藏中国科学院自然科学史研究所图书馆。

③ 清·李子金，《算法通义》。

④ 李俨，“明清算家的割圆术研究”，见：中算史论丛（3），科学出版社，1955年，第254～512页。

⑤ 高宏林，李子金关于三角函数造表法的研究，自然科学史研究，1998，（4），338～347。

鼎关系不错，曾登门拜访，向梅氏请教（至迟在1708年之前），梅氏也曾到苏州学署访问（1710），有“十日快聚”。[①] 因通晓历法，被李光地推荐给康熙皇帝，《召对纪言》记录了他1708～1709年间应召到北京、热河觐见康熙，以及两人有关算学的对话。[②] 后因母亲年事已高，回苏州任教职。陈厚耀请编定步算诸书，以惠天下，此事得到康熙的支持，于是他和梅穀成等被召至蒙养斋修书，康熙赐以《算法原本》、《算法纂要》、《同文算指》、《嘉量算经》、《几何原本》等书。从1711～1712年前后重返北京，到1717年“下值”（1714年因母丧回家守制两年多），和何国宗、何国栋兄弟、梅穀成、方苞等共事约四年[③]，参与了《律历渊源》的编纂。在蒙养斋供职期间（1713），他曾以中书舍人的身份参加在畅春园举行的康熙六十大寿盛典。1716年升为国子监司业，1718年充会试同考官，次年告疾回家，1722年卒于苏州。

陈厚耀所作算书有《算义探奥》、《勾股图解》等。[④] 前者有手稿本，是海内孤本，现藏中国科学院自然科学史研究所。此书有“谦牧堂藏书记”、“谦牧堂书画记”两印。“谦牧堂”是揆叙的堂名，揆叙，字恺功，号惟实居士，明珠子，康熙时官至左都御史。

（二）《算义探奥 · 错综法义》中的排列组合

《算义探奥》分勾股法义、积求勾股法义、勾股容方容圆法义、三角形求中长法义、测量法义、割圆法义、圆求弧背法义、圆容法义、错综法义、推古历法、推授时历法、推授时历法百年消长法等。大多是叙述几何学的内容，受西方的影响（如“勾股法义”），以为“九章之法，惟勾股最精，……通乎勾股之义，则余八章皆可触类而通”。从这些内容可看出，中国数学家学习西方数学的融会过程。

“错综法义”是《算义探奥》中有独到见解的一章，主要讨论排列组合问题。在“错综法义”开头，先指出排列组合的各种不同形式：

> 故有上下颠倒相错而复重叠者（如六十四卦之类），有上下颠倒相错而无重叠者（如串名类），有上与下各错，而无颠倒，亦无重叠者（如六十甲子之类），有不分上下，既无颠倒，而杂糅之中，但有重叠者（如六骰之类），有以全数之中，摘取二三数以为错，而互增互换以错之至尽者（如纸牌之类），其义既不一，则其立算也亦因义而别，然即二字相错以至十字，则其数已逾万，况推而百千字乎？其法隐于九章之中，而未畅厥旨，今略具数端，以俟深思者触类而旁通之。

陈厚耀又举例说明各种类型，实际上，他已指出了：重复排列（如六十四卦之类）、排列（如串名之类）、重复组合（如六骰之类）、组合（如纸牌之类）等的计算方法。对于六

---

① 梅文鼎称：“庚寅（1710）之冬，偶有吴门之游。学山同吾友秦二南拿舟过访于陈泗源学署，出示此书，余亦以《几何补编》相质。约即往二南园亭下榻，为十日快聚。”见：《绩学堂文钞》卷5，“锡山友人历算书跋”，第28页。陈厚耀1708年应召入京，1709～1710年间又回苏州，担任府学教授。

② 韩琦，陈厚耀《召对纪言》释证，载：《文史新澜》，浙江古籍出版社，2003年，第458～475页。

③ 关于蒙养斋的历算活动，参见韩琦：“从《律历渊源》的编纂看康熙时代的历法改革”，载吴嘉丽、周湘华主编，世界华人科学史学术研讨会论文集，淡江大学历史学系、化学系，2001年，第187～195页。

④ 李培业藏有《陈厚耀算书》，除《勾股图解》外，还有《直线体》一册、《堆垛》一册、《算法原本》、《借根方比例》，但后两者并非陈厚耀所著。《直线体》、《堆垛》是否为陈厚耀所著，也有待考证。参见：李培业，《陈厚耀算书》研究，《数学史研究文集》（第三辑），内蒙古大学出版社，1992年，第72～77页。

十四卦之类，即从相异的 n 个元素中（允许重复）选取 t 个排列：${}_n\Pi_r = n^r$。对于串名之类，即为从相异的 n 个元素中选取 r 个排列：

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad (r \leqslant n)$$

对于六骰之类，即为从相异的 n 个元素中（允许重复，且同一元素可反复出现）取 r 个的组合：

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

陈厚耀所举例子（骰子）的情形即为

$${}_6H_6 = {}_{6+6-1}C_6 = {}_{11}C_6 = \frac{11!}{5!\ 6!} = 462$$

对于纸牌之类，即为从相异的 n 个元素中选取 r 个的组合数：

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

陈厚耀已经注意到纸牌和串名法的差别。

此外，在讨论六十甲子、八字及中庸天命章题目问题时，实际已包含了排列组合中非常重要的积除和法则，这些内容大致和现在中学课本排列组合内容相同，在清初陈厚耀就考虑到这些问题，为中国数学史上所仅见，惜此书流传不广，后人也没有进一步研究。①

（三）《勾股图解》

《勾股图解》共两册，署名“翰林院编修臣陈厚耀”（当写于1713年之后），李俨原藏，前附“钦授积求勾股法”，内容分两部分，“以两数求勾股”和“以积求勾股”，第一部分、第二部分分别给出了52种类型、9种类型的题目和解法，根据欧洲几何学，以图解的方式，对传统数学中的勾股内容进行了整理和解说。

就勾股部分内容而言，《算义探奥》、《勾股图解》属于同一个系统，差别只在于题目类型的多少和叙述方式的详略，对同一类型举例也只有数字的变化，方法则完全一样。《算义探奥》成书较早，内容较少。《勾股图解》的类型最完整，包含了《算义探奥》中的所有类型。《数理精蕴》中卷十一、十二部分的内容与《勾股图解》类似，显然吸收了《勾股图解》的大部分成果，但也有很多不同的内容，很可能在编写时参考了其他书籍。

四　陈世仁及其《少广补遗》

（一）陈世仁

陈世仁（1676～1722），字元之，号焕吾，浙江海宁人。康熙乙未年（1715）进士，入翰林院。后辞官返还故里侍奉老母。其叔父陈訏（1650～1722），贡生，曾任浙江省淳安县学教谕，著有《勾股引蒙》5卷和《勾股述》2卷（附《开方发明》1卷）等数学入门著作。陈訏之子陈世佶也是一位数学家，著有《弧矢割圆》1卷，《少广补遗发明》1卷、《勾

① 韩琦，陈厚耀《错综法义》提要，见中国古代科技典籍通汇·数学卷，第二册，河南教育出版社，1993年。

股演段》1 卷和《开方捷法》1 卷等书。受家族环境影响，陈世仁余暇研究数学，对“垛积术”有独到见解，著有《少广补遗》一书。该书成书在 1720 年左右①，没有刊本，《四库全书》以两江总督采进本收入子部六 · 天文算法类中，错漏之处较多。另有几个抄本传世，现藏于南京图书馆、广东中山图书馆和中国科学院自然科学史研究所图书馆（李俨抄本）。南京图书馆藏本影印收入《中国科学技术典籍通汇 · 数学卷》第 4 册。

（二）《少广补遗》

《少广补遗》② 不分卷，讨论高阶等差数列，全书分为三部分。第一部分有 7 节，给出各类数列（主要是高阶等差数列）的求和公式，共 38 个。这 38 个公式以第一节 12 个公式为基础。介绍如下③：

第 1 节“准本章平立方圆开三角及诸尖一十二法”，依次是：

(1) 平尖 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。

(2) 立尖 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)=\frac{m^3-m}{6}$。其中 $n=m-1$。

(3) 倍尖 $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$。

(4) 方尖 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

(5) 再乘尖 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$。

(6) 抽奇平尖 $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$。

(7) 抽偶平尖 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$。

(8) 抽奇立尖 $2(1)+2(1+2)+2(1+2+3)+\cdots+2[1+2+3+\cdots+(n-1)]=\frac{n^3-n}{3}$。

(9) 抽偶立尖 $(1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots+[1+3+\cdots+(2n-1)]=\frac{1}{3}n(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2})$。

(10) 抽奇偶数方尖 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$。

$2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\frac{1}{6}(m^3-m)$④。其中，$m=2n+1$。

(11) 抽偶再乘尖 $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$。

(12) 抽奇再乘尖 $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3=2n^2(n+1)^2$。

这 12 个公式以前 5 个为最基本公式。而之后 6 节依这 12 个公式展开讨论。基本思路是对 12 种基本数列实行变形，变形方式有：a 型，去掉偶数项或奇数项求和；b 型，截取连续若干项求和；$(a+b)$ 型，对某数列实施 a 变形后实施 b 变形；$(b+a)$ 型，对某数列实施 b 变形后实施 a 变形。

---

① 许义夫，《少广补遗》提要，见中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第二册，河南教育出版社，1998 年。

② 陈世仁，少广补遗，见中国科学技术典籍通汇 · 数学卷，第二册，河南教育出版社，1993 年。

③ 李俨，中算家的级数论，李俨钱宝琮科学史全集，第六卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 329 ~ 343 页。

④ 此式原文没有，依意以及第三部分“开尖法覈原”补。

第2节“开抽奇抽偶立尖”，共4式，立尖实施 a 变形后求和；

第3节“准本章带从诸方开三角及诸尖之半积似三角带一钝角形”，共5式，平尖实施 $(a+b)$ 型变形后求和，方尖实施 a 变形后求和；

第4节“开三角即诸减半积”，共5式，方尖实施 $(a+b)$ 型变形后求和；

第5节“开抽偶立尖之半积和尖内奇偶诸层取层内数偶者去之”，共4式，立尖实施 $(a+b)$ 型变形后求和公式；

第6节“开抽奇立尖之半积内奇偶诸层取层内数奇者去之”，共4式，立尖实施 $(b+a)$ 型变形后求和；

第7节“准本章多乘方以立尖形推余类”，共4式，以立尖、抽偶方尖、抽奇方尖、立尖为例说明变形后的数列可类比原数列求和。

《少广拾遗》第二部分为“开尖法设如”，针对第一部分的公式举例说明。摘录两例进行说明。

例1　立尖设法如。原数十。六因数六十，缺一纵立方根四，减一得三。尖之实：一，一二，一二三。

此题即 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)=10$，求 n。其中，10为“原数”。即 $m^3-m=6\times10$，式中 $m-1=n$。开缺一纵立方，得 $m=4$。$m-1=3$，即为 n。所以该立尖为 $1+(1+2)+(1+2+3)$。

例2　方尖设如。原数十四。三因数四十二，立方二十七，平方九，半平方四五，半方根一五。尖之实：一，四，九。

此题即 $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=14，求 n。$$

即 $$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=14,$$

即 $$n^3+n^2+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=14,$$

式中，n^3、n^2、$\frac{1}{2}n^2$、$\frac{1}{2}n$ 依次为立方、平方、半平方、半方根。解得 $n=3$。故方尖为 $1+4+9$。

《少广拾遗》第三部分为“开尖法覈原”，内容为第一部分中的20个公式的简记。选取三例说明。

例3　平尖法。尖一，倍数二，带一纵方根一。

即已知平尖 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)=S$，求 n。由 $n^2+n=2S$ 开方可得。

例4　倍尖。尖一，二除数五，进五作十除得一。

此即已知 $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1=S$，求最末项 a_n。陈世仁针对此数列的特殊性有，$2^n=S+1$，所以 $2\cdot2^{n-1}=S+1$，故 $a_n=\frac{S+1}{2}$。

例5　再乘尖。尖一，二除数五，减实余四，平方根二，复除带一纵方一。

此即已知 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2=S$，求 n。由 $n^2+n=2\sqrt{S}$ 开带一纵平方可得。其中，“平方根二”指的就是 $2\sqrt{S}$。

以上是对《少广拾遗》内容大体介绍。因为该书没有图形说明，加之抄本本身也有一些错误，所以很难说明陈世仁是如何得到这些公式的。但当时，陈世仁在未见到杨辉、朱世杰著作的情况下独立得到这些结果，确实不易。四库馆员称颂该书："虽图说未具，不能使学者窥其立法之意，而于少广之遗法引申触类，实于数学有裨。"钱宝琮评价说："其时宋元算书湮没不传，当代畴人无研治垛积术者，世仁自出机杼，独于此学多有所发明。所撰书虽止一卷，然以少许胜人多许，亦足以自豪矣。"①

① 钱宝琮，浙江畴人著述记，李俨钱宝琮科学史全集，第八卷，辽宁教育出版社，1998 年。

第二十八章　清初西方数学的传入

在康熙时代入华的耶稣会士中，以法国、葡萄牙、德国、比利时人为主。他们在欧洲曾受到良好的科学训练，其中有四位在入华前已是耶稣会学校或大学的数学教授，他们是：安多（Antoine Thomas，1644～1709），比利时人，曾在葡萄牙科英布拉（Coimbra）耶稣会学院任教；洪若（J. de Fontaney，1643～1710），法国人，先后在拉弗莱什（La Flèche）、曾在南特（Nantes）、巴黎任教；傅圣泽（J.-F. Foucquet，1665～1741），法国人，拉弗莱什任教；戴进贤（I. Kögler，1680～1746），德国人，来华前在因戈尔施塔特（Ingolstadt）大学任教。此外，法国耶稣会士白晋（J. Bouvet，1656～1730）、张诚（J.-F. Gerbillon，1654～1707）也有较高的科学素养，他们来华以前已是法国皇家科学院通讯院士。康熙末年担任钦天监监正的德国耶稣会士纪理安（K. Stumpf，1655～1720）、捷克耶稣会士严嘉乐（颜家乐，K. Slavicek，1678～1735）、法国耶稣会士杜德美（P. Jartoux，1669～1720）都具有较高的科学水平。他们的科学素养与教学实践，使得他们能够熟练地应用西方科学满足中国人历算改革的需要，这些人大多与《数理精蕴》的编纂有关。

明末传入的西算著作因为明朝灭亡，除了《几何原本》及笔算数学曾引起明末一些数学家的研究之外，其他著作影响不大。就西学的传入而言，康熙时代（1662～1722）具有特别重要的意义。康熙深受中西历法之争的触动，开始向传教士学习西学（特别是算学知识），并着意培养皇子的科学能力，亲自对他们进行历算训练。本章将分析蒙养斋算学馆的设立、《数理精蕴》的编纂及其传入的西方数学内容，皇帝、皇子和儒臣、文人、传教士以及他们在历算著作编纂中所起的作用，阐述历算编纂活动与政治、社会的复杂关系。①

第一节　康熙帝与西方数学的再次传入

一　康熙的数学学习

康熙即位不久，发生了中西历法之争。康熙三年（1664），杨光先（1597～1669）发难参劾汤若望，汤若望被革职，许多参与编制历法的中国人（大都是教徒）被杀，这就是著名的康熙历狱。康熙七年（1668），南怀仁（F. Verbiest，1623～1688）与回回天文学家共

---

① 关于康乾时期的数学教育制度，参见：李俨，“清代数学教育制度”，《中算史论丛》（四），科学出版社，1955年，第281～287页；Rita Hsiao-fu Peng，“The K'ang-hsi emperor's absorption in Western mathematics and astronomy and his extensive applications of scientific knowledge”，*Li-shih Hsüeh-pao*，1975，3：349～422；王萍，清初的历算研究与教育，中央研究院近代史研究所集刊，第三期下册，1972年，第365～375页；韩琦，康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响，中国科学院自然科学史研究所博士学位论文，1991年；C. Jami，Learning mathematical sciences during the early and mid-Ch'ing，*In*：B. Elman，A. Woodside eds.，*Education and Society in Late Imperial China 1600-1900*. Berkeley：University of California Press，1994，223～256。

同测验天象，南怀仁因测算精确而取胜。次年，这场历狱始得翻案①，年轻的康熙深受震动。在“御制三角形推算法论”中，他指出了学习西学的起因：

康熙初年，因历法争讼，互为讦告，至于死者，不知其几。康熙七年，闰月颁历之后，钦天监再题，欲加十二月又闰，因而众论纷纷，人心不服，皆谓从古有历以来，未闻一岁中再闰，因而诸王九卿等再三考察，举朝无有知历者，朕目睹其事，心中痛恨，凡万几余暇，即专志于天文历法一十余载，所以略知其大概，不至于混乱也。②

他在与皇子的谈话中也说：

尔等惟知朕算术之精，却不知我学算之故。朕幼时，钦天监汉官与西洋人不睦，互相参劾，几至大辟。杨光先、汤若望于午门外九卿前当面赌测日影，奈九卿中无一知其法者。朕思己不知，焉能断人之是非，因自愤而学焉。③

法国耶稣会士白晋所撰《康熙帝传》亦曾谓康熙学习西方天算导因于历法之争。④ 康熙初年，主要由比利时耶稣会士南怀仁传授西方科学，他是康熙的第一位数学老师，主要教授欧几里得几何学。那时，在中国的耶稣会士很少，南怀仁担心这样继续下去会导致传教的失败。1678 年，他发表告欧洲耶稣会士书，希望欧洲派遣更多的耶稣会士来华。

1688 年 2 月，为回应南怀仁的呼吁，法王路易十四派遣洪若、白晋、张诚等首批“国王数学家”到达北京。⑤ 白晋、张诚成为康熙的宫廷教师，传授欧洲数学和解剖学知识。此后康熙时代的历算活动，与法国耶稣会士有密切关系。⑥ 据白晋日记（1689 ~ 1691）记载，他建议使用法国耶稣会士巴蒂斯（I. - G. Pardies，1636 ~ 1673）的《几何原本》（*Elémens de Géometrie*）作为教科书，⑦ 他和张诚把它译成中文和满文，中文翻译后来收入《数理精蕴》。⑧ 安多和徐日升则翻译了算术和代数学著作。为方便传授，他们使用计算器、纳皮尔算筹、比例规等数学工具和立体几何模型，甚至还为康熙特别设计了数学学习桌，这些实物现仍保存在北京故宫博物院。耶稣会士的历算教育使康熙受益匪浅，这段时间相对系统的学习，是他晚年能够进行历算改革的重要基础。

从当时的数学背景看，明末传入的数学已有待更新，为应付天文历法的需要，引进对数表及一些实用的数学方法、数学工具是极为必要的，法国耶稣会士来华，在一定程度上满足了康熙帝与中国数学的需要。

康熙不仅自己学习西方科学，还着意培养皇子的科学兴趣。当他发现“第三个十六七

---

① 《圣祖实录》，卷 28，卷 31。

② 《满汉七本头》，约 1707 年刊本，中国科学院图书馆藏。亦见康熙《御制文集》集三，卷 19。参见：韩琦，康熙时代的数学教育及其社会背景，《法国汉学》（八），中华书局，2003 年，第 434 ~ 448 页。

③ 《庭训格言》，雍正刊本，第 78 ~ 79 页。康熙的训话主要由胤祉和其他皇子所记录。

④ ［法］白晋著、马绪祥译，《康熙帝传》，《清史资料》（1），中华书局，1980 年。

⑤ 韩琦，中国科学技术的西传及其影响（1582 ~ 1793），河北人民出版社，1999 年。

⑥ 韩琦，“耶稣会士和康熙时代历算知识的传入”，载：澳门史新编（三），澳门基金会，2008 年，第 967 ~ 986 页。

⑦ 巴黎国家图书馆西文手稿部，Ms. fr. 17240. Isabelle Landry-Deron，*Les leçons de sciences occidentales de l'empereur de Chine Kangxi*（1662-1722）：*Texte des Journaux des Pères Bouvet et Gerbillon*，Paris，EHESS，1995.

⑧ 韩琦，康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响，中国科学院自然科学史研究所博士学位论文，1991 年，部分内容载：董光璧主编，中国近现代科学技术史（第一篇：数学史部分），湖南教育出版社，1997 年，第 87 ~ 127 页。刘钝，《数理精蕴》中《几何原本》的底本问题，中国科技史料，1991，12（3），88 ~ 96。

岁的孩子，具有一种非常适合于从事这种科学的才能，以及其他一些优秀品质”①，就开始给他讲几何学原理，这里提到的第三子即胤祉（1677～1732），在康熙时代的科学活动中担任重要角色。大约在1690年，胤祉就已开始接受西方科学知识的训练，担任数学老师的有张诚、安多等人，分别教授几何学、算术。② 康熙营造了宫廷研究历算的气氛。

除了数学之外，在皇子年轻时，康熙还亲自带他们在宫中进行日食观测，有时还进行大地测量，后来还让十五子胤禑（1693～1731）、十六子胤禄（1695～1767）与胤祉一起向意大利传教士德理格（T. Pedrini，1671～1746）学习律吕知识。

由于胤祉在历算方面的才能，1713年，康熙发布上谕，让他负责《律历渊源》的编纂工作。为此在畅春园蒙养斋设立算学馆，除教授历算知识之外，还进行许多天文观测，以重新决定黄赤交角的大小。从宫廷文献可看到，胤祉经常向康熙汇报活动的进展。《律历渊源》之所以能够完成，胤祉所起的作用最大。

二　安多和《算法纂要总纲》的编纂

康熙时代科学的传播和社会、宗教诸因素之关系，是清代科学史上最令人感兴趣的课题之一。现以比利时耶稣会士安多和《算法纂要总纲》的编纂为例，说明《数理精蕴》成书的复杂经过。③

（一）安多

安多是康熙时代很重要的人物，曾向康熙传授数学，指导经度测量，在“礼仪之争”时也非常活跃。④ 安多1679年在葡萄牙科因布拉城的耶稣会学院教授数学期间撰写了《数学纲要：由这门科学的不同论著组成，简明、清晰地为初学者和到中国传教的候选人写出》（*Synopsis mathematica complectens varios tractatus quos hujus scientiae tyronibus et missionariis Sinicae candidatis breviter et clare concinnavit P. Antonius Thomas e Societate Iesu.* 1685）⑤。该书凡二册，第一册为算术、初等几何、实用几何、球体、地理、水力学、音乐等八章；第二册为光学、静力学、钟表、球面三角、星盘、历法、天文学等七章，都是基本的科学知识。其目的

---

① 白晋，康熙帝传，清史资料，第1辑，中华书局，1980年，第227页。

② Han Qi，Emperor，Prince and Literati：Role of the Princes in the Organization of Scientific Activities in Early Qing Period，*In*：Yung Sik Kim，Francesca Bray eds.，*Current Perspectives in the History of Science in East Asia*，Seoul National University，1999，209～216.

③ 有关安多的研究有 H. Bosmans，“L'oeuvre scientifique d'Antoine Thomas de Namur，S. J.（*1644－1709*）”，*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.* 1924，T. 44，169～208. Mme Yves de Thomaz de Bossierre，*Un Belge mandarin à la cour de Chine aux XVIIe et XVIIIe siècles*，*Antoine Thomas 1644～1709*，Paris，1977. L. Pfister，*Notices biographiques et bibliographiques.*（Shanghai，1932）、Joseph Dehergne，*Répertoire des Jésuites de Chine de 1552 à 1800.*（Rome：1973，270～271）简单介绍了安多的生平。

④ Han Qi，The Role of the Directorate of Astronomy in the Catholic Mission during the Qing Period，*In*：N. Golvers ed.，*The Christian Mission in China in the Verbiest Era*：*Some Aspects of the Missionary Approach*，Leuven University Press，1999，85～95.

⑤ 原北堂图书馆藏有此书两种：一种有耶稣会士苏汎济（Francesco Maria Spinola，1654～1694）火漆红印，另一种为葡萄牙耶稣会士苏霖（José Suarez，1656～1736）所赠。

是要在中国传播福音并给耶稣会士提供必要的数学和天文学知识。1680年离开里斯本，于1682年7月4日到达澳门。南怀仁由于年老体弱，在1685年推荐当时在澳门的耶稣会士安多接替他的工作。

1685年11月8日，安多到达北京，协助南怀仁，并负责钦天监的工作，他的数学素养使他能很快接替南怀仁，他对能够被选在康熙周围从事数学天文学工作，觉得是一种特别的荣誉。1688年，南怀仁去世。由徐日升、安多在钦天监"治理历法"，一直到1695年由闵明我接替。还与徐日升、白晋、张诚等一起，作为康熙的御前教师，向康熙介绍科学知识。

根据白晋的日记，① 安多曾编写中文的正弦、余弦、正切和对数表，还向康熙介绍算术、三角和代数方面的内容，提供了一个解三次方程根的方便的表。当时他的语言尚未过关，因此在向康熙介绍欧几里得几何时，由徐日升充当翻译。康熙配备了两名精通满、汉文字的官员，为其服务。1691年二月初五日，康熙特谕，"着以后遣监内之马早晚接送"徐日升、安多《数理精蕴》开头说："我朝定鼎以来，远人慕化，至者渐多，有汤若望、南怀仁、安多、闵明我，相继治理历法，间明算学，而度数之理，渐加详备。然询其所自，皆云本中土所流传。"对安多等耶稣会士在宫廷中扮演的角色做了肯定。

（二）《算法纂要总纲》

中国、日本和法国的图书馆均藏有康熙时代编纂的数学著作稿本，其中《算法纂要总纲》中文本有八部：中国科学院自然科学史研究所图书馆藏有两部（分别为安乐堂、扬州汪喜孙孟慈藏书）、北京图书馆藏有一部残本、故宫博物院图书馆藏有两部、日本东北大学馆藏有一部（"惜阴书屋"旧藏）、法国里昂市立图书馆藏有两部②，另有满文本一部，藏巴黎国立图书馆。"安乐堂"为康熙十三子胤祥的藏书室，胤祥对西学很有兴趣，深得雍正信赖，负责与西洋人的交涉。他藏有不少康熙时代编纂的算书，上有"安乐堂藏书记"章，其藏书后归孔继涵，现存北京国家图书馆和中国科学院自然科学史研究所图书馆。

一般以为《算法纂要总纲》是年希尧所撰，③ 年氏"字允恭，广宁人也，以西人测算之切要者，摘录刊布，为《测算刀圭》三卷，一曰《三角法摘要》，一曰《八线真数表》，一曰《八线假数表》；又有《面体比例便览》一卷，《对数表》一卷，《对数广运》一卷"。阮元曾评论道："宁波教授丁君小雅杰，贻余年氏所刻算书数种，因据以立传。又有万数平立方表一种，《算法纂要总纲》一种，末附杂算法及八线表根数页，又一种无名目，俱系写本，字迹图画，并极精美，而不著撰人姓氏，疑亦出希尧家也。"④ 问题是，现存《算法纂

① 《张诚日记》，见：杜赫德，《中华帝国全志》，陈霞飞译，商务印书馆，1973年，第62页。Mme Yves de Thomaz de Bossierre, *Un Belge mandarin à la cour de Chine aux XVIIe et XVIIIe siècles*, *Antoine Thomas 1644~1709*, Paris, 1977, 57. 北京故宫博物院保存有不少的对数、正弦、余弦表，可能就是当时的产物。

② 里昂市立图书馆（Bibliothèque municipale de Lyon）收藏的康熙时代数学著作还有《借根方算法》、《借根方算法节要》、《算法原本》、《比例规解》、《数表用法》、《测量高远仪器之法》、《地平线离地球圆面表》、《推算日影法》、《比例表用法》与《数表用法》、《蒙求各法细草》（1690）、《勾股相求之法》、《数理精蕴》等书。1728年，法国耶稣会士巴多明（D. Parrenin, 1665~1741）给里昂的三一学院图书馆寄回一批中文著作，即有上述数学、天文学的手稿。1765年，耶稣会在法国被解散之后，三一学院图书馆的藏书被移交给市图书馆。除《数理精蕴》之外，其他算书都是稿本，应是宫廷旧藏。

③ 李俨，《中算史论丛》（二），科学出版社，1954年，第135页。

④ 阮元，《畴人传》（卷40），"年希尧"传，商务印书馆，1955年，第505~506页。

要总纲》并未署名，是否是年氏所撰，并无确证。

关于《算法纂要总纲》和《数学纲要》的关系，以前无人注意。实际上，1685 年 11 月 14 日，安多在一封信中就曾提到一位官员已经告诉康熙他在欧洲曾编过数学著作，因此他请求出版者在书印刷之后，赠送几本装帧精美的给康熙帝。[①] 后来安多把《数学纲要》当做教材，向康熙传授，就在情理之中。对《数学纲要》与《算法纂要总纲》加以对比，可以发现两者的对应关系（表 28-1-1）。

表 28-1-1　《数学纲要》与《算法纂要总纲》对应关系

<table>
<tr><th colspan="3">Synopsis Mathematica（《数学纲要》）</th><th>《算法纂要总纲》
Lyon ms 75 - 80A</th></tr>
<tr><td colspan="3">Tractatus Primus：De Arte Numerandi</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">Sectio Prima
Traduntur regulae generales</td><td colspan="2">Articulus Primus：De numeratione：1，2</td><td>第一，定位之法，页 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Articulus Secundus：De additione：2 ~ 4</td><td>第二，加法，页 6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Articulus Tertius：De subtractione：5 ~ 7</td><td>第三，减法，页 11</td></tr>
<tr><td colspan="2">Articulus Quartus：De multiplicatione：7 ~ 11</td><td>第四，乘法，页 16</td></tr>
<tr><td colspan="2">Articulus Quintus：De divisione：11 ~ 15</td><td>第五，除法，页 20</td></tr>
<tr><td colspan="2">Articulus Sextus：Examen：15</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Sectio secunda
Eaedem regulae explicantur in numeris fractis</td><td colspan="2">Articulus Primus：Fractorum numerorum reductio ad numeros minimos：16 ~ 18</td><td>第五，除法，页 22B，“零数大变小之法”（约分）</td></tr>
<tr><td colspan="2">Articulus Secundus：De reductione numerorum fractorum ad eundem denominatorem：18，19</td><td>第二、三、四、五，加法、减法、乘法、除法，“共母数”（通分）</td></tr>
<tr><td colspan="2">Articulus Tertius：De additione & subtractione numerorum fractorum：19，20</td><td>第二、三，加法、减法“奇零数加法”页 8、“奇零数减法”页 13</td></tr>
<tr><td colspan="2">Articulus Quartus：De multiplicatione & divisione numerorum fractorum：21 ~ 23</td><td>第四、五，乘法、除法，“奇零数乘法”页 18、“奇零数除法”页 21</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Sectio Tertio
De regula aurea</td><td colspan="2">Articulus Primus：De regula trium simplici：23 ~ 25</td><td>第六，三率求四率法，单法
顺单法，页 25A ~ 34；逆单法，页 35A ~ 37A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Articulus Secundus：De regula trium composita</td><td>Exemplum regulae directae：25，26</td><td>第六，三率求四率法
顺较法（页 38）</td></tr>
<tr><td>Exemplum regulae eversae：27，28</td><td>第六，三率求四率法
逆较法（页 40）</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Sectio Quarta
De Regula societatis, alligationis & positionis</td><td rowspan="2">Articulus Primus</td><td>Quid sit regula societatis，& quae ejus praxis：29</td><td>第八，合数差分法　单法页 52</td></tr>
<tr><td>Idem aliter propositum：30，31</td><td>第八，合数差分法 较法页 62A</td></tr>
<tr><td colspan="2">Articulus secundus.
De regula alligationis：31，32</td><td>第九，借衰互徵法</td></tr>
<tr><td colspan="2">Articulus tertius. De regula positionis：33</td><td>第十，叠借互徵法</td></tr>
</table>

① Mme Yves de Thomaz de Bossierre, *Un Belge mandarin à la cour de Chine aux XVIIe et XVIIIe siècles, Antoine Thomas 1644 ~ 1709*. Paris, 1977, 36。

续表

Synopsis Mathematica（《数学纲要》）		《算法纂要总纲》 Lyon ms 75－80A
Sectio Quinta De radicum extractione	Articulus primus： De extractione radicis quadratae：pp. 33～36	第十一，开平方法
	Articulus secundus ： De extractione radicis cubicae：pp. 37～39	第十四，开立方法
Sectio Sexta：Solvuntur quaedam problemata per regulas praecedentes，pp. 39～52		
Tractatus secundus：De Geometria Elementari，53～136		
Tractatus Tertius：De Geometria Practica		
Sectio Prima： De resolutione trianguloru rectilineorum	Articulus Primus：Definitiones：pp. 137～139	
	Articulus secundus：Regulae resolutionis triangulorum rectangulorum：139，140	第十二，三角形总法：算勾股单法，页118A～129A
	Articulus tertius：Regulae resolutionis triangulorum reliquorum：140～142	第十二，三角形总法：算各三角形无直角法，页137B～139B
	Articulus quartus：Vsus illarum regularum explicatur	
Sectio Qvinta：De superficierum dimensione	Articulus Primus：De plana superficie metienda：182～191	第十三，算各面积总法
	Articulus secundus：De superficiebus sphaericis：192，193	
	Articulus tertius：De superficierum transformatione：193～198	
Sectio sexta：De dimensione solidorum	Articulus Primus：De solidis regularibus metiendis：198～202	第十五，算体总法
	Articulus secundus：De solidis irregularibus metiendis：202～205	
	Articulus Tertius：De solidorum transformatione：198～202	

通过比较，容易发现两书体例的对应关系。《算法纂要总纲》的题目有的直接译自《数学纲要》（表28-1-2），有的类型相同，只改动了具体数字（表28-1-3）。《算法纂要总纲》并不是《数学纲要》的逐字翻译，具体内容有许多增删。作为教材，为了让康熙易懂，编译者增加了不少算例，但《数学纲要》中的不少题目《算法纂要总纲》并没有采用。

表 28-1-2　《数学纲要》与《算法纂要总纲》题目对照

<table>
<tr><th colspan="2">Synopsis Mathematica：29</th><th>《算法纂要总纲》第八"合数差分法"，页 52</th></tr>
<tr><td colspan="2">Regula societatis sic dicta est，quod mercatoribus societatem commercii ineuntibus deserviat，ejus praxis est talis.
Tres v. g. mercatores inita societate lucrati sunt 4500 aureos：primus exposuit aureos 100，alter 150，tertius 200：quaeritur quantum cuique debeatur ex lucro communi. Primo loco statue summam expositorum aureorum，secundo summam lucri，tertio exposita a singulis sigillatim，ita ut fiat triplex operatio per regulam trium，juxta numerum mercatorum hoc modo.</td><td rowspan="8">设如有三人共得利银四千五百两，第一人出本银一百两，第二人出本银一百五十两，第三人出本银二百两，今欲分每人应得利银若干？
将三人之本银相加，得四百五十两为一率，将利银四千五百两为二率，将每人之本银一人一百两，一人一百五十两，一人二百两各为三率，二率、三率相乘，以一率除之，得每人应得之利一人一千两、一人一千五百两、一人二千两即为四率也。
一率四百五十　三率一百两　一百五十两　二百两
二率四千五百　四率一千两　一千五百两　二千两</td></tr>
<tr><td>Vt summa totalis</td><td>ad lucrum</td></tr>
<tr><td>Exposita</td><td>totale</td></tr>
<tr><td>450</td><td>4500</td></tr>
<tr><td>Ita aurei dati</td><td>Ad lucratos</td></tr>
<tr><td>100</td><td>1000</td></tr>
<tr><td>150</td><td>1500</td></tr>
<tr><td>200</td><td>2000</td></tr>
</table>

表 28-1-3　《算法纂要总纲》《数学纲要》的题目对照

Synopsis Mathematica：25 Articulus secundus：De regula trium composita	《算法纂要总纲》里昂 Ms 75 – 80A 本，第 38 页："三率求四率顺较之法"
Exemplum regulae directae：Quaestio proponatur hoc modo. Mercatores 12 aureis 1000 lucrantur aureos 800：igitur 18 mercatores aureis 1900，quot lucrabuntur aureos? Ubi cognoscuutur termini quinque，ex quibus tres principales sunt，mercatores 12，aurei 800，& mercatores 18：horum duo sunt de eadem re，nempe de mercatoribus，& unus solitarius，qui est de eadem re cum illo，qui quaeritur. Alij duo termini qui adhaerent tanquam comites primo & tertio numero，in illos duci debent，quorum sunt comites. Duc ergo primum numerum 12 in secundum 1000 sibi comitem，& summa 12000 erit primus numerus proportionalis. Deinde secundo loco statue numerum solitarium，nempe 800. Tum duc quartum 18 in quintum sibi comitem 1900，sit summa 34200. Cum illis denique tribus operare juxta dicta de regula trium simplici，productus erit numerus quaesitus，aureorum 2280 quos 18 mercatores 1900 aureis lucrantur.	设如有十二人在一千日内费用米四百石，今有十八人在一千九百日内费用米若干？将十二人与一千日相乘，得一万二千为一率，米四百石为二率，再将十八人与一千九百日相乘得三万四千二百为三率，今用二率与三率相乘，以一率除之，得四率，即知用米一千一百四十石

通过对两者的比较，并以白晋、张诚日记为佐证，可确定《算法纂要总纲》是安多根据自己的著作《数学纲要》编译而成的，有证据表明编纂的具体时间应该在 1689 ~ 1695 年前后。

在进一步对照不同版本的《算法纂要总纲》之后，发现其中有明显差异，例如里昂图书馆所藏《算法纂要总纲》（MS 75 – 80A）和中国科学院自然科学史研究所藏本（汪孟慈

旧藏）、故宫博物院藏本（抄 13276－81）完全相同，① 既没有提到《几何原本》、《算法原本》，也没有提到《借根方算法》；而里昂图书馆藏另一部《算法纂要总纲》（MS 82－90A）则和中国科学院自然科学史研究所另一藏本（安乐堂旧藏）完全相同，大量引用了《几何原本》七卷本中的第六卷，偶尔提及第四、五卷，也经常提到《算法原本》的内容，还有三处提到《借根方算法》。由此可以推测此书编译的时间先后：前者成书最早，当时安多和张诚、白晋分别担当《算法纂要总纲》和《几何原本》七卷本的编译工作，未及互相参考，此后安多可能因需要翻译了《算法原本》，接着才翻译《借根方算法》；和前者相比，"安乐堂"本《算法纂要总纲》增加了不少内容，书中也引用了《几何原本》七卷本、《算法原本》、《借根方算法》等书，并对某些例子进行了仔细编排，因此最为完全。日本东北大学所藏《算法纂要总纲》（"惜阴书屋"旧藏）则只在第十、十一、十三、十四节中引用了《几何原本》、《算法原本》和《借根方算法》，和安乐堂藏本《算法纂要总纲》相关章节所引大致相同，成书时间可能在上述两种版本之间。② 简言之，《算法纂要总纲》的编纂顺序应该如下：汪孟慈本→"惜阴书屋"本→"安乐堂"本。汪孟慈本和"惜阴书屋"本相对来说更接近于安多的《数学纲要》。可以推断，《算法纂要总纲》最初的编译时间比《算法原本》、《借根方算法》要早。③

《数理精蕴》是康熙时代西方数学的集大成之作，其编纂的某些奠基性工作在 17 世纪 90 年代就已经完成。《算法纂要总纲》是《数理精蕴》成书之前的阶段性成果，介绍了不少新的内容，后来被《数理精蕴》采用。④《数理精蕴》下编卷八、卷九讲盈朒、借衰互征、迭借互征，钱宝琮《中国数学史》认为也取材于《算法算法总纲》和李之藻《同文算指》。

值得注意的是，《算法纂要总纲》没有翻译《数学纲要》"基础几何"（De Geometria Elementari）中的内容，其原因何在？我们的推测是，因为张诚、白晋翻译的 Pardies《几何原本》对欧几里得几何学的内容已有系统完整的介绍，因此安多已无翻译的必要。《数学纲要》第一册第二和第三章，分别是"基础几何"和"实用几何"（De Geometria Practica），《算法纂要总纲》不少几何学内容，特别是立体几何知识（如体积计算），主要采自第三章"实用几何"部分。⑤ 不过，《数理精蕴》采纳了 Pardies 的《几何原本》，而舍弃了安多的"实用几何"部分，结果《算法纂要总纲》只以手稿的形式流传，对后世的影响不大。⑥

---

① 故宫藏本影印本载《故宫珍本丛刊》，海南出版社，2000 年。

② 北京图书馆藏本《算法纂要总纲》（藏书号 6523），抄本两册，为残本，内容只有里昂藏本（Ms 75－80A）的第 10、12、13、14、15 节，引用了《几何原本》。故宫藏《算法纂要总纲》（抄 13274～13275；17 项。小本有句读）第十三：算线较法；第十四：算直线内各面积较法；第十五：算平行体较法；第十六：算堆垛之法；第十七：五金用法。

③ 康熙时代宫廷编纂的数学著作互相引用的情况较为常见，如《借根方算法》、《借根方算法节要》（安乐堂藏书）即提到《算法纂要总纲》和《算法原本》，而未引用《几何原本》。《算法原本》、《几何原本》互相引用。

④ 钱宝琮等认为《数理精蕴》始有"定勾股弦无零数法"一篇，国人继起研究整数勾股形造法者颇多，清末数学家更扩充之，见：钱宝琮，中国数学史，科学出版社，1964 年，第 288 页。实际上，相关内容在《算法纂要总纲》中即已出现。

⑤ 与 Pardies《几何原本》（*Elemens de Geometrie*）内容有些类似。

⑥ 韩琦、詹嘉玲，康熙时代西方数学在宫廷的传播——以安多和《算法纂要总纲》的编纂为例，自然科学史研究，2003，22（2）：145～155。

第二节　《数理精蕴》

一　蒙养斋算学馆与《数理精蕴》的编纂

（一）蒙养斋算学馆的缘起

清代的历算教育主要集中在钦天监和国子监，但在康熙时代，除这两个机构之外，宫廷、畅春园蒙养斋算学馆、热河行宫，以及大臣李光地（1642～1718）的府邸、保定直隶巡抚衙门，还有耶稣会士教堂，都曾有历算教学活动。老师当中，有耶稣会士和著名数学家梅文鼎，学生则有皇子、奉教天文学家、李光地及其弟子，而康熙既是耶稣会士的学生，又是皇子和文人的老师。因此，和别的朝代相比，康熙时代的历算教育和编纂活动显得更为复杂。

1692年不仅在宗教方面，而且就科学方面而言，这一年也颇为重要。正月初四日，康熙在乾清门把大学士九卿等召至座前，讲授乐律、算数的关系和"径一围三之法"，"又命取测日晷表，以御笔画示，曰：此正午日影所至之处，遂置乾清门正中，令诸臣候视，至午正，日影与御笔画出恰合，毫发不爽。"半天之内，大凡音乐、数学和天文历法以及河道水流量的计算等，都有涉及。康熙的举动给大臣留下了深刻的印象，他们"仰承圣训，得闻所未闻，见所未见，不胜懽庆之至"。[①] 感叹之余，也感到无形的压力："退而相顾，惊喜深媿从前学识浅陋，锢守陈言，而不自知其迷惑也。"于是向康熙建言，编纂乐律、历算著作，"垂示永久"。[②] 康熙的这场"表演"实际上隐含了重要的政治动机，即借机向大臣炫耀，从文化方面向汉人"示威"，以突显满族君主的才能。值得注意的是，从1689年底开始，经过约两年时间，耶稣会士的历算教育使康熙获益匪浅，使他能够运用欧洲"新知"，来作这场精彩的"演出"。[③]

不幸的是，历算改革的倡议并没有引起应有的反响，究其原因，历算人才的缺乏是最为关键的因素。当时，除梅文鼎之外，擅长算学的年轻人还很少，况且梅氏著作刊刻的也不多。加之1692之后的数年间，康熙亲征葛尔丹，数学教育似乎出现了停顿。

1703年，康熙把《几何原本》、《算法原本》送给李光地，并要他呈送几本他刊刻的书，于是李光地把梅文鼎的《历学疑问》上呈康熙。鉴于康熙的兴趣，李光地特地写信邀请梅文鼎，于是梅文鼎带着孙子梅瑴成（1681～1763）从南方到达保定，在李光地的赞助下教授数学，李光地之子、梅瑴成和其他学生参加听讲。算学人才的养成是康熙后期科学活动能够顺利展开的必要准备，其中一些学生1713年被选入蒙养斋供职，在《律历渊源》编纂中扮演了重要角色。例如王兰生（1679～1737）是李光地的弟子，并由李光地推荐给康

---

① 《圣祖实录》卷154。

② 张玉书《张文贞公集》，乾隆57年镌，松荫堂藏板，卷2，第9～11页，请编次乐律算数疏。

③ 在其他场合，康熙的表演也让儒臣"佩服"得五体投地，恭维不已，康熙为此也沾沾自喜，陶醉其间。凭借自己的博学和科学才能，康熙甚至公然批评汉人"全然不晓得算法"。大臣李光地之所以聘请数学家梅文鼎，和学生一起学习算学，其目的正是为了迎合皇上的兴趣。参见韩琦，"君主和布衣之间：李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响，清华学报（台湾），1996，26（4）：421～445；法文本：Patronage Scientifique et Carrière Politique：Li Guangdi entre Kangxi et Mei Wending, *Etudes Chinoises*，1997，16（2）：7～37。

熙，被授予举人衔，破例参加殿试。1713 年建议编纂律吕算法著作，作用不小。他还为诚亲王服务，参与了《律历渊源》的编纂工作。此外，陈梦雷和陈厚耀都曾建议编纂乐律、历算著作，表明算学馆的建立已经有了一定的舆论基础。

1711 年，康熙"发现"钦天监测量夏至日影有误，于是要求耶稣会士传授欧洲"新的"天文学。1713 年，康熙发布上谕，在蒙养斋设立算学馆，翻译西方历算著作，编纂《数理精蕴》和《钦若历书》（雍正初改为《历象考成》）。从 1692 年开始，到 1713 年真正的历算改革，中间经历了长达 20 年的准备。

（二）蒙养斋算学馆的历算活动

为了编纂《律历渊源》，清廷发布命令，要求地方派送精通历算的学者到京城考试。各省送了三百余位懂算学的人到京城面试，最后录取了 72 人。① 陈梦雷在给陈世明《数学举要》所写的序中也写道：

> （东启）乃复研思周髀、九章、泰西几何之术，而得其精。值圣天子召试，蒙简拔，候阙下者年余，及诚王殿下奉命开馆，以人或冗杂，汰其一二，东启及吴门顾子竟在汰中，欲求一试而不可得，乃与吴门顾子同就谒于余。余叩东启所学，知其涵负经济，自命不苟，吾友杨道声之亚也。道声学究天人，生兰陵都会之地，顾鹿鹿曳裾，寄食于诸公卿大人，无一真赏心者，发种种矣，余极言之于朱邸，乃延之入幕，廪饩数倍于余，宾礼在余之右，幕僚多反为余悒悒，余则以为荣施，私自喜也。②

这表明除了考试录用之外，像江苏武进杨文言（道声）这样的学者还通过陈梦雷推荐，直接为诚亲王服务，而且还获得了较高的待遇。值得注意的是，参与《古今图书集成》编纂工作的一些学者，也同时参加了《律历渊源》的工作，他们都受到胤祉的赞助。

1711 年，宫廷已经有不少算学活动。在研究《易经》的同时，白晋对程大位《算法统宗》的"攒九图"、"聚六图"（卷 17）很感兴趣。③ 此书也引起了康熙的重视，1712 年，康熙谈到《算法统宗》"此书有用"、"书甚佳"。④ 康熙爱好此书的消息从禁廷传出之后，导致了《算法统宗》的重刊。程大位的族孙世绥在重刻《直指算法统宗》序中写道：

> 比来京师，属天子留心律历，开置馆局，修明算法，四方经纬通达之彦云集辐辏，予尝以暇过从诸公游，亟为余称道，以谓此书实集算学大成，极为今上所许可，而名公钜卿辈亦各争相购致以为重。⑤

从 1712 年开始，康熙向年轻人讲授欧洲算学，"《几何原本》、《算法原本》皆已讲完，凡难的测量、三角、勾股等，无不会算者"，⑥ 教学方法非常有效。康熙还教授"借根方"

---

① 黄锺骏，《畴人传四编》卷 7，顾陈垿传，《留有馀斋丛书》本，第 14 页。除中文文献外，法国耶稣会士傅圣泽（J-F. Foucquet，1665～1741）也谈到算学馆的创立以及选拔人员之事，参见：C. Jami，"Learning mathematical sciences during the early and mid-Ch'ing"，in *Education and Society in Late Imperial China 1600－1900*，238～239。

② 陈梦雷，《松鹤山房文集》卷 10，第 147～149 页。《数学举要》有陈世明（东启）1714 年自序，提到"明末泰西氏始入中国，今其流稍盛，海内好学者亦谓其学本出自中国，中国失其传，而泰西氏始得之，其说固无考，然亦不必考也。"对"西学中源"说持保留意见。

③ 梵蒂冈教廷图书馆 Borgia Cinese 439。

④ 《康熙朝满文朱批奏折全译》，中国社会科学出版社，1996 年，第 805～806 页。

⑤ 参见 1716 年（康熙丙申）程大位曾孙程光绅、程钫的重刻本《直指算法统宗》，海阳率滨维新堂藏板。

⑥ 《康熙朝满文朱批奏折全译》，中国社会科学出版社，1996 年，第 806 页。

(代数学)，梅瑴成在《赤水遗珍》"天元一即借根方解"中写道：

> 后供奉内廷，蒙圣祖仁皇帝授以借根方法，且谕曰：西洋人名此书为阿尔热八达，译言东来法也。敬受而读之，其法神妙，诚算法之指南，而窃疑天元一之术颇与相似。复取《授时历草》观之，乃涣如冰释，殆名异而实同，非徒曰似之已也。

1713年是蒙养斋历算活动最为频繁的一年，耶稣会士纪理安、杜德美、傅圣泽、杨秉义（Franz Thilisch，1670～1716）、孔禄食（Luigi Gonzaga，1673～1718）和严嘉乐经常应召，[①]参与数表的编制与原理的解释工作，这些内容应该是《数理精蕴》对数造表法的基础，其中包括英国数学家巴理知斯（Henry Briggs，1561～1630）的《对数术》（*Arithmetica Logarithmica*，1624）和荷兰数学家佛拉哥（Adriaan Vlacq，1600～1667）的对数表[②]，而解高次方程的方法，最有影响的是牛顿和格列高里（J. Gregory）的计算无穷级数的三个公式，由杜德美传授给中国数学家。梅瑴成在他的《赤水遗珍》介绍了这三个公式，蒙古数学家明安图（？～1763？）和藏族喇嘛也曾经向杜德美学习。此外，传教士也传授了一些实用的知识，例如严嘉乐曾介绍了测量北极高度的方法。[③]雍正继位之后，由于政治等原因，蒙养斋算学馆未能继续存在。

（三）《数理精蕴》的编纂

康熙四十四年（1705），李光地向康熙推荐梅文鼎，梅氏颇得康熙赏识。康熙四十五年，"李光地荐苏州府学教授陈厚耀通天文算法，引见改内阁中书，圣祖试以算法……圣祖命入值内廷，授编修，与梅瑴成同修书。"[④]《数理精蕴》的编纂与此有密切关系。

《数理精蕴》从整体上说是一部西方数学著作的编译作品，耶稣会士所起的重要作用不可否认。但康熙帝、皇子、清代官员及其下属的工作也非常重要。在《律历渊源》（包括《数理精蕴》、《钦若历书》、《律吕正义》）的编纂过程中，皇三子诚亲王胤祉主持其事。他之所以被委以重任，一个很重要的原因是他和传教士来往密切，爱好西方科学，在安多、傅圣泽等耶稣会士的书信中，经常提及胤祉。

蒙养斋是一个临时性的修书机构，在此之前，曾在全国征访精通历算、音乐及其他有特长的人才，许多著名学者，如陈梦雷、方苞，都被吸收进馆，江南武进县杨文言，因"颇通才学，兼通天文"，[⑤]被胤祉召到北京。1712年，梅瑴成受征汇编《律历渊源》，[⑥]明安图当时也应参与其事，受征的人聚集在畅春园。康熙五十二年（1713）九月二十日，康熙给诚亲王胤祉、十六阿哥胤禄下旨："尔等率领何国宗、梅瑴成、魏廷珍、王兰生、方苞等编纂朕御制历

---

① 韩琦，康熙时代的历算活动：基于档案资料的新研究，见：张先清编：史料与视界——中文文献与中国基督教史研究，上海人民出版社，2007年，第40～60页。

② 韩琦，《数理精蕴》对数造表法与戴煦的二项展开式研究，自然科学史研究，1992，11（2）：109～119。

③ 载梅瑴成《赤水遗珍》。严嘉乐的天文学修养较高，耶稣会士书信中经常提到他的天文观测。《朱批奏折外交类》曾记载他"会天文，并会弹琴"。

④ 章梫，《康熙政要》，卷18。《清史列传》卷68、《清史稿》卷481，陈厚耀传。参见：韩琦，陈厚耀《召对纪言》释证，载：《文史新澜》，浙江古籍出版社，2003年，第458～475页。韩琦，《错综法义》提要，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第四册，河南教育出版社，1993年，第683～684页。

⑤ 《掌故丛编》，第三辑。

⑥ 《梅氏丛书辑要》，卷62。

法、律吕、算法诸书，并制乐器，著在畅春园奏事东门内蒙养斋开局。”[①] 据西方文献记载，当时应召在蒙养斋编书的人数在百人以上。从传教士的记载中可看出，在《数理精蕴》编纂时，亦即大地测量期间，传教士经常出入畅春园，受康熙召见，并回答康熙的各种问题，因此当时在蒙养斋的梅瑴成、明安图受传教士的指导，应是非常方便的。参加《数理精蕴》编纂的还有王兰生，他以布衣诸生应荐，出入禁闼二十余年，深为三朝所信遇，凡纂辑《律吕正义》、《数理精蕴》、《音韵阐微》诸书皆与焉”。[②]

以1689年底康熙学习《几何原本》为开端，至1722年《数理精蕴》铜活字印刷，其间编译的有《几何原本》（1690年左右，1703年以前）、《算法原本》、《算法纂要总纲》、《借根方算法》、《借根方算法节要》、《勾股相求之法》、《测量高远仪器用法》、《八线表根》、《比例规解》、《对数表》、《度数表》、《数表精详》、《阿尔热巴拉新法》等书。这些著作有的与舆图测量有关，例如《几何原本》采用了Pardies著作的测量例题，有些计算涉及大地测量。这些书是《数理精蕴》编纂的基础。

二　《数理精蕴》的内容及其西方数学来源

（一）《数理精蕴》的《几何原本》与《算法原本》

1.《几何原本》的底本及内容

《数理精蕴》本《几何原本》是依据故宫博物院所藏的满文、汉文本《几何原本》稍作改编而成的。而满文、汉文本又是根据法国耶稣会士Pardies的著作（*Elémens de Géometrie*）翻译、增删而成的。Pardies从1667年至1672年分别在La Rochelle、Bordeaux、巴黎的耶稣会学校任数学教授。[③] Pardies去世后不久，即1676～1685年由后来来华的洪若接任数学教授。因此，法国耶稣会士选择Pardies的书作为向康熙帝进讲的教材，是很自然的事。

1671年，Pardies的《几何原本》在巴黎问世。此后50年内，此书被多次翻印，有十余种版本，并被译成英文、拉丁文、荷兰文出版。问世当年，英国皇家学会的《哲学汇刊》就发表了一篇书评：

> 这本书的博学作者称：本书给出了一个简捷、容易的学习欧几里得、阿基米德、阿波罗尼乌斯和古代、近代数学家的最新发明的必要方法。这些方法中已出版的是前九卷，留下的七卷有待俟诸异日，他说后七卷将解释这门科学更加深奥和崇高的发明，但对那些想开始研究这门学科的人来说，这些发明并不那么必要；为了更方便（读者）起见，他似乎耐心地把精力投入于第一部分，其中他深思熟虑的是十五卷欧几里得几何原本；他对阿基米德所演示的圆求积、对数以及正弦等的原理也进行了论述。他又显示了欧几里得《几何原本》七、九卷中的数

---

① 王兰生《交河集》，卷一“恩荣备载”。

② 《畴人传三编》，卷一。

③ C. C. Gillispie，*Dictionary of Scientific Biography*. v. 10，314～315；C. Sommervogel，*Bibliothèque de la Compagnie de Jésus*. Pardies条。参见：August Ziggelaar，*Le physicien Ignace Gaston Pardies S. J.*（1636～1673），Odense University Press，1971.

的奇妙性质。他断言，已找到一个传授不可度量（Incommensurables）原理的新方法，并以约四至五页的篇幅作了论述，认为新方法很完善，能明白那些摆弄数学的人都难以理解的问题。[1]

从这篇书评及Pardies的自序中均可看出：关于不可度量这节内容是作者的重点之一，又关于对数原理，是根据他自己的研究成果编成的，这两部分内容，耶稣会士没有译出。

《数理精蕴》本《几何原本》一至十二与Pardies原著的关系如表28-2-1所示。[2]

表28-2-1　《几何原本》与巴蒂斯原著关系

<table>
<tr><th>《几何原本》</th><th>Pardies</th><th>《数理精蕴》上编</th></tr>
<tr><td>一</td><td>卷一</td><td rowspan="5">卷二</td></tr>
<tr><td>二</td><td>卷二</td></tr>
<tr><td>三</td><td>卷三</td></tr>
<tr><td>四</td><td>卷四</td></tr>
<tr><td>五</td><td>卷五</td></tr>
<tr><td>六</td><td rowspan="5">卷六</td><td rowspan="5">卷三</td></tr>
<tr><td>七</td></tr>
<tr><td>八</td></tr>
<tr><td>九</td></tr>
<tr><td>十</td></tr>
<tr><td>十一</td><td rowspan="2">卷九</td><td rowspan="2">卷四</td></tr>
<tr><td>十二</td></tr>
</table>

而《几何原本》十（上编卷三，立体几何，主要是椭圆体）是编译者所添加的，Pardies原本没有此节内容。译者增加了许多图示，给读者以很直观的印象。Pardies第7、8卷不可度量、级数、对数没有译入，有关对数与双曲线下面积的关系的讨论也没有翻译。

Pardies从双曲线入手，给出等差、等比级数的关系，来说明与对数的关系。他还讨论了调和级数的性质，并说明调和级数与对数的关系，[3] 这是Pardies的独到之处。这部分内容在西方也是很新的，可惜没有翻译过来。约在1859以后成书，在英国人艾约瑟（Joseph Edkins，1823～1905）和李善兰翻译的《圆维曲线说》中，才介绍了这部分内容。

2.《算法原本》——欧几里得《几何原本》第七卷

从现存《算法原本》抄本看出，[4] 此书已比较完整介绍整数论，实质上包含了欧几里得《几何原本》第七卷的全部内容，[5] 但《数理精蕴》内《几何原本》所附《算法原本》，对整数论内容做了较多删节，故引起了研究者的误解，例如钱宝琮以为《算法原本》“是小学

---

① *Philosophical Transactions*，1671，6：3064～3066.

② 韩琦，康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响，中国科学院自然科学史研究所博士学位论文，1991年，第28页。

③ I. G. Pardies，*Elemens de Geometrie*，1678. Livre Huitieme. Des Progressions & des Logarithmes.

④ 中国科学院自然科学史研究所藏。故宫博物院所藏《几何原本》附《算法原本》与此抄本相同。

⑤ 韩琦，康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响，中国科学院自然科学史研究所博士学位论文，1991年。

算术的理论基础，欧几里得《几何原本》第七、八、九卷则是代表古希腊的‘数论’，它们的性质是不相同的”。① 一直到清末伟烈亚力、李善兰翻译《几何原本》7～15卷时，数论知识才为人所知。

《算法原本》凡分75项，它的整数论内容包括：

（1）第二：奇偶数，分为偶分偶数（如：$32=4\times8$）、奇分偶数（如：$30=6\times5$）、奇分奇数（如：$15=3\times5$）三类。

（2）第三："一外无度尽数"、"数之根"，即素数；"一外彼此无度尽数"，即互素。

（3）第十一："全积数"，即完全数。

（4）第十二：若 $d\mid a_1$，$d\mid a_2$，…，$d\mid a_n$，$n>1$，则 $d\mid(a_1+a_2+\cdots a_n)$。

（5）第十三：若 $a\mid b$，$b\mid c$，则 $a\mid c$。

（6）第十四：$a=a_1+a_2$，若 $d\mid a$，$d\mid a_1$，则 $d\mid a_2$。

（7）第十五：欧几里得算法。

（8）第十六：求两数的公因数。

（9）第十七：求两数的最大公因数。

（10）第十八：若 $d_1\mid a$，$d_1\mid b$，$d_2\mid a$，$d_2\mid b$，…，$d=\max\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$，则 $d_1\mid d$,…，$d_n\mid d$。

（11）第十九：判定 a，b，c 有无公因数。

（12）第二十：求 a，b，c 的最大公因数 (a, b, c)。

（13）第二十一：若 $a_1/b_1=a_2/b_2=c$，则 $(a_1+a_2)/(b_1+b_2)=c$。

（14）第二十二：$a\cdot b=b\cdot a$。

（15）第二十四：$a/b=c$，则 $a/c=b$。

（16）第三十七：$(a, b)=1$，若 $d\mid a$，则 $d\nmid b$。

（17）第三十八：若 $(a, b)=(a, b_1)=(b, b_1)$，则 $(a\cdot b, b_1)=1$。

（18）第三十九：若 $(a, b)=1$，则 $(a^2, b)=1$。

（19）第四十：若 $(a, b)=(c, d)=1$，则 $(ab, cd)=1$。

（20）第四十一：若 $(a, b)=1$，则 $(a^2, b^2)=(a^3, b^3)=1$。

（21）第四十二：若 p 为素数，$p\nmid a$，则 p，a 不能度尽于一数。

（22）第四十三：若 $p\mid d^2$，则 $p\mid d$。

（23）第四十四：已知 a，b，c，求约分后的最小值 a'，b'，c'。

（24）第四十五：若 a，b，互质，则 $[a, b]=ab$。

（25）第四十六：求 $[a, b]$，$[a, b]=ab/(a, b)$。

（26）第四十八：求 $[a, b, c]$。

可见，欧几里得《几何原本》第七卷的整数论内容几乎都已介绍过来。

如果说，明末没有把《几何原本》翻译成中文的原因主要在于耶稣会士，那么，至康熙时代，在耶稣会士已把欧几里得《几何原本》第七卷翻译成中文的情况下，而《数理精蕴》的编者并没有把它收入，则主要归因于国人没有完全理解其中的价值。

至于译者为什么要翻译《算法原本》，李善兰续译《几何原本》序或许能对这一问题

① 钱宝琮主编，中国数学史，科学出版社，1964年，第271页。

作一解释，李序称："卷七至卷九论有比例无比例之理，卷十论无比例十三线，卷十一至十三论体，十四、十五二卷亦论体，则后人所续也。无七八九三卷，则十卷不能读。无十卷，则后三卷中论五体之边不能尽解。是七卷以后皆为论体而作，即皆论体也。"在某种意义上，《算法原本》之译撰即为立体几何而设。而《数理精蕴》本《算法原本》只分二卷60项，除保留欧几里得算法、求最大公因数、最小公倍数的一些实用方法外，其余的数论内容已被删去，这大概是《数理精蕴》的编者觉得这部分内容没有实用价值所致。这说明科学传播不仅需要耶稣会士介绍新的西方科学，同时也取决于中国人对科学的理解。

（二）借根方与方程近似解法

《借根方算法》是最早传入中国的西方代数学著作，主要介绍了代数学的运算法则、方程解法等内容，译者应是安多，其初稿约在1694年10月至1695年12月间编纂，1700年，他可能被请求编辑或完成这一手稿，[①] 傅圣泽曾提到："死于南京主教任上的罗历山（Alessandro Ciceri，1639～1703）神父和安多神父曾经给过他一本旧的代数书（皇上对此很满意）。"[②] 这里提到的"旧的代数书"，即指借根方。西文文献提供了不少安多参与代数学著作翻译的线索，但中文资料很少提到借根方翻译的背景，即使在档案中安多的名字也不常出现。至于哪些人和安多合作，仍然是一个谜。有幸的是，从一本1701年出版的西文著作中，得知有一位翰林院的"徐老爷"，协助了代数学著作的翻译，这是目前所知道的唯一信息。书中曾写道："在这些人中，徐老爷，皇家翰林院的成员之一，一位有非凡学识和智慧的人，为此之故，被皇帝选中，翻译欧洲代数学成中文。"[③] 以上资料都证明，借根方的翻译大约在1700年之前已基本完成。《借根方算法》还有节本，名为《借根方算法节要》，被改编后收入御制《数理精蕴》下编卷31至36《借根方比例》，对清代数学产生了深远的影响。[④]

《借根方比例》所介绍的代数学知识都很简单，在"定位法"中，说明 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$，$a^m / a^n = a^{m-n}$（m，n 为整数）。在"加法"、"减法"、"乘法"、"除法"诸项中，论述多项式的加减乘除法则，又引入了加号、减号、等号、移项的概念，这是新引入的数学知识。卷33为带纵平方、带纵立方的解法。其中，带纵平方为12种：$x^2 + ax = b$，$ax + x^2 = b$，$x^2 = b - ax$，$ax = b - x^2$，$x^2 - ax = b$，$x^2 - b = ax$，$x^2 = b + ax$，$x^2 = ax + b$，$x^2 + b = ax$，$b + x^2 = ax$，$b = ax$

---

① 韩琦、詹嘉玲，康熙时代西方数学在宫廷的传播——以安多和《算法纂要总纲》的编纂为例，自然科学史研究，2003，22（2）：145～155。Mme Yves de Thomaz de Bossierre, *Un Belge mandarin à la cour de Chine aux XVIIe et XVIIIe siècles, Antoine Thomas 1644～1709*. Paris，1977，164. 提到安多著满文本代数学书，但这一说法有误，因为安多的所有信件都提到该书用中文写成。

② 傅圣泽，Relation exacte de ce qui s' est passé a Peking par raport a l' astronomie europeane depuis le mois de juin 1711 jusqu' au commencement de novembre 1716.（罗马耶稣会档案馆 ARSI，Jap. Sin. II154，22）。参见：魏若望（JohnW. Witek），An Eighteenth-Century Frenchman at the Court of the K' ang-hsi Emperor，PhD dissertation，Georgetown University（Washington，D C），1973，513. 魏若望在脚注中指出，罗历山1692～1695年在北京。

③ 韩琦，西方数学的传入和乾嘉时期古算的复兴——以借根方的传入和天元术研究的关系为例，见：祝平一主编，中国史新论：科技与中国社会，联经出版社，2010年，第459～486页。这位"徐老爷"可能是徐元梦。

④ 关于安多和《借根方比例》（载《数理精蕴》）的关系，参见：Han Qi，Antoine Thomas，SJ，and his Mathematical Activities in China：A Preliminary Research through Chinese Sources，*In*：W. F. Vande Walle，ed.，*The History of the Relations Between the Low Countries and China in the Qing Era*（1644～1911），Leuven University Press，2003，105～114.

$-x^2$，$x^2=ax-b$。书中给出方程正根的公式分别是：$x=(-a+\sqrt{a^2+4b})/2$，$x=(a+\sqrt{a^2+4b})/2$，$x=(a\pm\sqrt{a^2-4b})/2$。带从立方分九种：$x^3+bx=c$，$x^3-bx=c$，$x^3+ax^2=c$，$x^3-ax^2=c$，$x^3+ax^2+bx=c$，$x^3-ax^2-bx=c$，$x^3+ax^2-bx=c$，$x^3-ax^2+bx=c$，$ax^2-x^3=c$。并说："其开之法，除第九种外，余俱依立方法定初商，复视所带根方为多号者，其商数须取略小于应得之数，所带根方数为少号者，其商数须取略大于应得之数。"在叙述带从立方的开方法后，编译者说"九种之中，无异述也，即推之多乘方，莫不皆然。总以其累乘之数为主，而以所带根方之积数加减之，与立方无二理也"，最后列举了三乘、四乘、五乘（即四、五、六次方程）的解法。

《数理精蕴》下编"借根方比例"中的"开诸乘方法"（卷32）、"带纵立方、三乘方、四乘方、五乘方"（卷33）是用西方的代数方法求高次方程的解，和Newton-Raphson迭代法相近。Newton-Raphson法的特例是，若令$f(x)=x^n-A$，则：

$$x_{i+1}=x_i-(x_i^n-A)/(nx_i^{n-1})=[(n-1)x_i+A/x_i^{n-1}]/n$$

这是1675年Newton发明的方法，[①] 与"借根方比例"中的"开诸乘方法"完全一致。有人认为借根方比例带从立方为中国古法，似欠妥当。一则Newton-Raphson法完全有可能传到中国来；二则《数理精蕴》的编者称"借根方比例开带纵立方，与常法不同，常法先知各边之和或较，既开得一边之数，以和较加减之，即得各边之数。此法止有根方多少之号，而不问余边。其立法之本意，盖欲借根方以求他数。既得一根之数，则所求之数已得，而方之形体有所不计。且其与根方相等之积数，或为长方体、扁方体形，或非长方体、扁方体形，皆不可知。故不可以带纵之常法求也"。故没有用卷24的图解表示法，而完全用西方的代数式。

在宋元数学重新发现之前，《数理精蕴》介绍的借根方让国人感到它的"新奇"与优点。借根方引入了含有未知数及其幂的等式，介绍了指数概念、多项式的乘除法则，而传统数学等式概念亦欠明确。《数理精蕴》问世后，清代数学家大都乐于使用借根方的表达形式，最早运用借根方方法进行数学研究，并取得独到成就的首推明安图。明安图在《割圜密率捷法》一书中利用了《数理精蕴》的连比例率及几何关系对无穷级数进行运算，这包括无穷级数的加减乘除和两无穷级数的相乘，而且表达式也采用了"借根方比例"的方法，以"多"、"少"表示"+"、"-"，他还熟练运用了借根方中的"定位法"，即指数的运算法则。董祐诚也以借根方演算，汪莱考查方程有几正根之法，大致根据借根方的开带从平立方法，而参以己见，且所记概用借根方术语。《四库全书总目提要》亦称"欧罗巴之借根方，至为巧妙"。乾嘉时期数学家都比较推崇借根方，汪莱曾谈到他当时的情形：大约十之八九的数学家都是从研究借根方入手，来研习算学的。可见借根方影响之大。

（三）从割圆连比例率到级数展开式

《数理精蕴》下编卷十六六宗三要二简法"新增按分作相连比例四率法"，这是为求内容十八边形之一边（已知半径）所设的一种计算方法，方法如下：

---

① H. H. Goldstine, *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, 1977, 65.

如图28-2-1所示，设$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=20°$，则$AD=AO$。$BO$交$AD$于$E$，作$BG$线，使$BG=BE$。容易证明：$\triangle EBG$，$\triangle BAE$，$\triangle AOB$为相似三角形，$AO$，$AB$，$BE$，$EG$成为"连比例四率"，就是说$AO:AB=AB:BE=BE:EG$。设$AO=r$，$AB=x$，则

$$BE=\frac{x^2}{r},\qquad EG=\frac{x^3}{r^2}$$

因$BG//CF$，$FG//BC$，故$FG=BC=AB$。$FE=FG-EG=AB-EG$，$AD=3AB-EG$，即$r=3x-\frac{x^3}{r^2}$。于是$x^3+r^3=3r^2x$

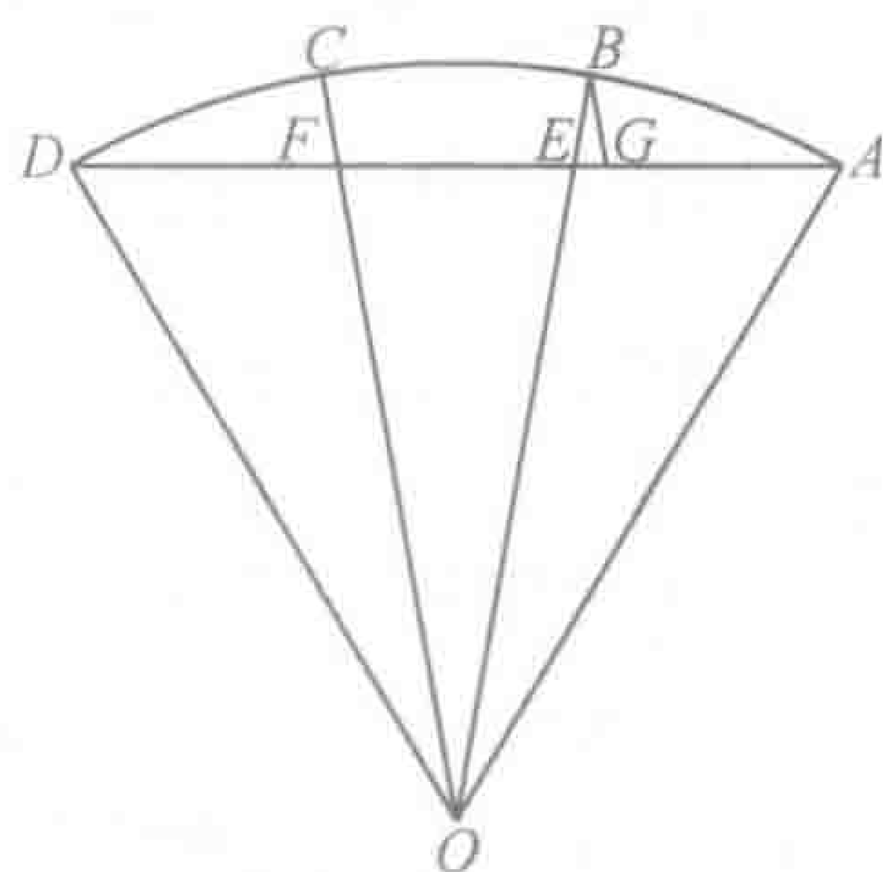


图28-2-1　连比例四率

这相当于求三次方程的解。令$r=100000$，解三次方程得$x=34729$，这就是圆径200000，圆内接正十八边形的一边。该方程解法用的是一种近似解法，它与1600年韦达（F. Vieta，1540～1603）在 *De Numerosa Potestatum* 一书中给出的一种方程近似解法相近。① 在求内容正十四边形的一边时，卷16也运用了上述相同的方法。卷16"六宗三要二简法"开头曾言："尔来西法对数表内，有设连比例四率，以求圆内容七边九边二法，因推广其理，于六宗之外，增求圆内容十八边形之法。"这是受西法影响的。

如果$AD=c$是任意角弧的通弦，则$AB=c_{1/3}$为三分之一弧的通弦。依据上列$AD=3AB-EG$导出$c=3c_{1/3}-\frac{c_{1/3}^3}{r^2}$，又设以$s$为半弧的正弦，$s_{1/3}$为六分之一弧的正弦，则$s=3s_{1/3}-\frac{4s_{1/3}^3}{r^2}$。已知$r$和$s$，解上列三次方程，可求得$s_{1/3}$的数值。这就是"有本弧之正弦求其三分之一弧之正弦"的方法。

《大测》介绍了"六宗三要二简法"，其中，"六宗"介绍了求圆内正六边形、正四边形、正十边形、正三边形、正五边形、正十五边形边长的方法，此为三角函数立表之原，据"六宗三要二简法"，最小只能求出45分之弦，1至44分之弦，则以比例求之，精确度还不高。

鉴于"尔来西法对数表内，有设连比例四率，以求圆内容七边九边二法，因推广其理，于六宗之外，增求圆内容十八边形十四边形之法"，由十八边形十四边形可算出九边七边，并可求"最小者为十五分之正弦"，"又增一法，求十五分之三分之一，五分之正弦，所少者止一分至四分之正弦。较之四十五分为尤密可知矣"，至《数理精蕴》为止，八线造表法已比较完善，且精度也大大提高。割圆连比例率方法虽然简单，但直接导致了明安图、董祐诚等人关于三角函数级数展开式的研究。

明安图的创造性贡献在于把连比例方法用于割圆计算，并首创级数回求法。而连比例方法及多项式（无穷级数）乘除法则受到了《数理精蕴》卷16"六宗三要二简法"的影响，这种方法是《数理精蕴》首次介绍。② 汪莱在接触明安图的著作以前，有全弧通弦求五分之一弧通弦术，也是根据卷16"有本弧之正弦，求其三分之一弧之正弦"一术。董祐诚在《割圜连比例术图解》自序中称："己卯春，秀水朱先生鸿以杜氏九术全本相示，盖海宁张

---

① 韩琦，康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响，中国科学院自然科学史研究所博士学位论文，1991年，第33～34页。

② 在《大测》"六宗三要二简法"内，没有介绍这种方法。

先生豸冠所写者。九术以外，别无图说，闻陈氏际新尝为之注，为某氏所秘，书已不传，乃反复寻绎，究其立法之原，盖即圆容十八觚之术。”清代数学家在无穷级数方面所取得的成就，与《数理精蕴》关系极为密切。

（四）立体几何知识：卡瓦列利公理与旋转椭圆体求积

《数理精蕴》介绍的立体几何知识主要集中于上编卷二、卷三（《几何原本》五、十）及下编卷二十五至卷二十九（体部三至体部七）。

《几何原本》五译自 Pardies 著作的第五卷，需要指出的是 Pardies 书的第五卷插图不多，《几何原本》五的插图都是编译者所加，这大大方便了读者，读者通过图示即能很快理解书的本意。其中，第二十二实际上相当于“卡瓦列利公理”，[①] 另外还介绍了关于“厚角”(l'angle solide)的知识，这些都是欧几里得《几何原本》没有涉及的，反映了16、17 世纪西方熟知的立体几何知识。

《几何原本》十 Pardies 原书未载，因成书在1690 年左右，极可能是传教士写成的。它包括了椭圆的求积，阿基米德著作未曾讨论。从当时情况看，在编《数理精蕴》时几乎没人见过《九章算术》全本，故清初数学家是不会知道“祖暅之原理”的，而 Pardies 著作曾多次强调了“卡瓦列利公理”，因此传教士把它用于求旋转椭圆体体积是很自然的。[②] 另外，从故宫博物院所藏《几何原本》（七卷本）看，卷次编排都是按照 Pardies 原著，在编入《数理精蕴》时则做了调整，看来七卷本《几何原本》都是传教士译解的。

椭圆体体积求法与《测量全义》卷“量椭圆体之容”方法完全不同。《测量全义》的求法是：求出以椭圆短轴为直径，以椭圆长轴为顶点所构成的圆锥体积，则椭圆体积为圆锥的4 倍。而《数理精蕴》则运用了“卡瓦列利公理”求解。

《数理精蕴》上编《几何原本》八（第十二）先讨论了椭圆面积，这部分内容 Pardies 原本未载，也是译者所加的。它的方法是利用了椭圆与大辅圆的关系：“凡圆面径与椭圆面高度等者，其面积互相为比之比例，即同于函两形各作切方形互相为比之比例，而圆形面积与椭圆形面积互相为比之比例，又同于圆形径与椭圆形小径互相为比之比例也。”

《数理精蕴》上编《几何原本》十（第十二）还用“卡瓦列利公理”证明了旋转椭圆体的体积。“凡椭圆大径与圆球体径相等者，其二体积之比例，即同于椭圆体小径所作方面与圆球体所作方面之比例也。”译者的思路是：因椭圆体长轴与球体直径相同，体积之比即等于任意截面圆面积之比。这与“卡瓦列利公理”是一致的。

《数理精蕴》下编卷二十五至卷二十九也论述了立体的体积计算。卷二十五论述直线体，即正方体、长方体、堑堵、刍荛、方底尖体形、阳马、鳖臑、棱台、斜棱柱的体积，给出的公式都是正确的。

卷二十六论述曲线体，包括圆柱体、球体、椭圆体、圆台（圆面积）、椭圆台体、球冠、空心圆球、圆锥的体积与圆球表面积。其中，椭圆台体体积公式是《数理精蕴》首次介绍，求解大致是把台体分成二个椭圆锥体的差。卷二十七为各等面体，给出了正四、正八、正十二、正二十面体公式。下编卷二十五“各体形总论”也曾列出了已知边长，求上

---

① I. G. Pardies, *Elemens de Geometrie*, 1678. Livre Cinquieme. Des Solides. 第 31 条。

② 或以为旋转椭圆体体积是根据中国传统方法推出的。

述体积的近似公式，比梅文鼎在《几何补编》的计算精确值都高，① 在故宫收藏的某些中文数表中，经常可以看到这些近似公式。

卷二十八为球内接各等面体、球外切各等面体。梅文鼎在《几何补编》中已给出了各种关系，但《精理精蕴》的精度比梅文鼎的高，又体例差异大。

卷二十九为各等面体互容、更体形，各等面体互容包括：正方体内接正四、八、十二、二十面体；正四面体内接正方体、正八、十二、二十面体；正八面体内接正方体、正四、十二、二十面体；正十二面体内接正方体、正四、八、二十面体；正二十面体内接正方体、正四、八、十二面体。

比较《数理精蕴》与《几何补编》可知，前者在等面体互容方面比后者全面得多，且图解清晰，是《几何补编》所不能及的。又梅毂成在《几何补编》末所录内廷秘本，已给出了更精确的互容关系，因此《数理精蕴》介绍的知识似与梅文鼎的著作无关。与明末介绍的内容相比，《数理精蕴》的立体几何更接近于现代教科书，与古希腊阿基米德的立体几何知识体例已不相同，这些应是西方16、17世纪的成果。

在明末传入的数学中，徐光启、利玛窦只译了《几何原本》前六卷，未涉及立体几何，“而《圜容较义》、《测量法义》诸书，其引几何颇有出六卷外者，学者因以不见全书为憾。”（曾国藩《几何原本》序）《数理精蕴》已基本补全了这不足的部分。

（五）巴理知斯（Briggs）对数造表法和佛拉哥（Vlacq）对数表

对数发明后，很多数学家致力于对数表的制作，用较便捷的方法编制出精确的对数表是17、18世纪数学家研究的对象。尽管西方数学家对对数造表法给予了很大注意，但由于当时数学发展水平的限制，早期的计算方法纯粹是算术的，也就是完全借助于加减乘除开方，来制成对数表，因而工作量极大，例如纳白尔、巴理知斯以及开普勒的方法均是如此；但到了17世纪40年代后期，J. Gregory（1638～1675）、Alfons A. de Sarasa（1618～1667）、牛顿、N. Mercator（1620～1687）等发现了对数与双曲线下面积之间的关系，从而得出了对数函数的级数展开式，对数计算也渐趋简便，此后有人根据这种方法重新精确地制作了对数表，纠正了初期 Vlacq 对数表沿续下来的错误。在巴理知斯手中，对数研究非常直接地导致了数值分析的开端。②

清初穆尼阁虽传入了对数，但并未言及对数造表法，只简单讲述了对数的原理及对数的插值法。对数传入中国后，完整的介绍对数造表法，始于《数理精蕴》，但并没有引进当时已发明的较简便的对数级数展开法。《数理精蕴》下编卷38为“对数比例”，首次介绍了英国数学家巴理知斯所著《对数术》（*Arithmetica Logarithmica*，1624）中的常用对数造表法。③

“对数比例”卷首曾说：“对数比例乃西士若往纳白尔所作，以假数与真数列成表，故名对数表。又有恩利格·巴理知斯者复加增修，行之数十年始至中国。”巴理知斯即英国数学家 Briggs。

---

① 梅文鼎，《几何补编》，见：《梅氏丛书辑要》，梅瑴成曾录入内廷所藏抄本，看来这些体积近似公式的系数，是新计算或新传入的。

② H. H. Goldstine，*A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*，1977，2.

③ 韩琦，《数理精蕴》对数造表法与戴煦的二项展开式研究，自然科学史研究，1992，(2)。

Briggs 首先采用了以十为底的常用对数，并制成 1 ~2 万、9 ~10 万的常用对数表，在其所著《对数术》一书中阐述了对数造表法，这些方法大多译入《数理精蕴》中。

“对数比例”分“明对数之原”、“明对数之纲”、“明对数之目”三部分，前两部分介绍对数的原理，后者则为对数造表法，这是 Briggs 的独创。

“明对数之目”介绍三种对数造表法：

（1）中比例法：已知 a、b，其几何中项为 N，则 $\log N=(\log a+\log b)/2$。

（2）递次自乘法：设 N^k 很大，其位数为（$m+1$），它的对数的整数部分为 m，故：$\log N^k\approx m$，$\log N\approx m/k$。

（3）递次开方法：“递次开方求假数法之三”介绍了 Briggs 的主要想法，对任何数 $a>1$，$a^{2^{-n}}\to 1$，《数理精蕴》给出的表相当于：若 $a=1+x$（$x\ll 1$），那么 $a^{\frac{1}{2}}\approx 1+x/2$。
他非常有效地利用这个关系，并用来求对数表，“对数比例”的叙述是：“因真数开方，假数折半，其相比之分数不同。若开方至于数十次，则开方之数，即与折半之数相同，故假数即可用真数比例而得。”

Briggs 曾计算 $10^{2^{-n}}$（$n=1, 2, 3, \cdots, 54$），当 n 接近 54 时：

$\log_{10}10^{2^{-n}}=\log_{10}(1+x_n)\approx M\cdot x_n$，（$M$ 为对数根）
为构成对数表，仅需先求出素数的对数值。若 p 是素数，则对某个 n，有

$$p^{2^{-n}}=1+x\ (x\approx 10^{-16})$$

故有

$$\log_{10}p=2^n\log_{10}(1+x)=2^nM\cdot x$$

《数理精蕴》对这部分内容作了叙述。值得注意的是“递次开方求假数法之六”，用差分法介绍了开平方简法，这部分内容后来在戴煦的《对数简法》中有更简洁的表述。乾嘉时期，国人研究对数没有多大成绩。到了 19 世纪中叶，项名达、戴煦、徐有壬、顾观光等人在对数研究方面受到了《数理精蕴》的影响，并做出了独创性的贡献，Briggs 造表法还导致戴煦有关二项展开式（开平方）的研究。

除对数造表法外，清初传入两种 10 万对数表：一是内府套印本，书名题《对数表》；二是《数理精蕴》本。二者微有不同，其中套印本沿袭了 Briggs 1624 年所著表中的错误，而《数理精蕴》本对数表则已纠正。可知耶稣会士在翻译对数表时，随时采用了西方较新的书籍。故《数理精蕴》本对数表实质上是 Vlacq 表的修正本，而不完全是 Vlacq 表。法国耶稣会士傅圣泽受康熙之命，从 1711 年起在北京工作达十余年之久，作为宫廷教师，经常向康熙进讲天文学和数学。康熙在 1711 年前就已接触到 Vlacq 对数表，并要求傅圣泽写几篇文章对此表作一解释，傅圣泽使用的就是 1628 年荷兰出版的 Vlacq 对数表。①

此外，《数理精蕴》还介绍了比例规，与明末罗雅谷的《比例规解》大体相同。假数尺也是新传入的内容。

《数理精蕴》的特点大致有二：一是借用《九章算术》刘徽注的话，就是“析理以辞，解体用图”；二为数学内容采用线面体分类。《数理精蕴》承袭了中国传统数学，采用图解

① J. Witek, *Controversial ideas in China and in Europe: a biography of J. - F. Foucquet (1665 ~ 1741)*. Roma, 1982, 188.

的方式说明数学问题的传统，例如上编《几何原本》五第二十二译自 Pardies 第 5 卷第 31，即相当于"卡瓦列利公理"，原本无图，而《数理精蕴》增加了图示，使读者一目了然，这种例子在《几何原本》中还有很多。

此外，以图示来说明方程的解法，例如下编卷 16"新增按分作相连比例四率法"、"按分作相连比例四率又法"，均采用图来说明三次方程的解法。卷 23 体部立方、卷 24"带纵较数立方"、"带纵和数立方"均用图示说明。卷 31"借根方比例"（乘法），还用图解释多项式乘法的几何意义，这是别具特色的。

《数理精蕴》下编共分首部、线部、面部、体部、末部。首部主要介绍度量衡、命位及乘除、通分、约分法则，末部为借根方比例、对数比例、比例规解。

线部为比例、方程；面部则包括开平方、勾股三角形、割圆、平面形等属于代数二次方程及平面几何等问题；体部主要为开立方、各种立体及互容，属于代数三次方程及立体几何的内容。

曾国藩在《几何原本》序中称："《几何原本》不言法而言理，括一切有形而概之曰：点线面体。点线面体者，象也。点相引而成线，线相遇而成面，面相叠而成体，而线与线、面与面、体与体，其形有相兼有相似，其数有和有较，有有等有无等，有有比例有无比例，洞悉乎点线面体而御之以加减乘除，譬诸闭门造车，出门而合辙也。"《数理精蕴》编者之意，概与此序大致不差。这种方法的缺点是，四次方程以上无法用体来表示。

三　《数理精蕴》的影响

《数理精蕴》冠以御制的名义，影响深远，成为清中晚期研习西方数学的主要书籍。乾嘉学派研究古算与清末数学家关于二项展开式、级数展开式的研究无不受其影响。

清代中晚期许多数学家的著作，如许桂林、罗士琳《比例汇通》、何梦瑶《算迪》、屈曾发《九数通考》、厉之锷《崧纬琐言》、陈杰《算法大成》等都受《数理精蕴》的影响。除《四库全书》中的天算著作以外，清代数学家钻研最多的莫过于《数理精蕴》与梅文鼎、梅瑴成的著作。《数理精蕴》下编卷 12 有"定勾股弦无零数法"，即整数勾股形研究，引起了乾嘉时代数学家的兴趣，例如乾隆时王元启《勾股衍》九卷附录"答友问勾股书"，嘉庆时黎应南曾有求勾股弦无零数捷法。[①] 道光时陈杰《算法大成》上编卷二"定勾股弦三数皆整法"，也受到《数理精蕴》的启发。

清末《数理精蕴》的版本就达十余种，[②] 数学家在学习新传入的西方数学时，《数理精蕴》也是重要的参考书。这一转变时期的数学家，大多是先读《数理精蕴》，后来才转入研习新传入的西方近代数学，从传统数学向近代数学转变，《数理精蕴》起到了承上启下的作用。在采用西方符号代数之前，《数理精蕴》的"借根方比例"，对清末理解代数学是很有帮助的。《数理精蕴》编成后，还传入日本、朝鲜、越南，在越南还作为钦天监的参考书，用于历法计算。[③]

---

① 罗士琳《续畴人传》卷 50"李锐传"。

② 丁福保，《四部总录算法编》。

③ 韩琦，中越历史上天文学与数学的交流，中国科技史料，1991，12（2）。

总之，《数理精蕴》影响了整个有清一代数学的发展，是清代数学取得成就的基础。

第三节　西学中源说与康熙的数学地位

一　借根方即天元术说

清初传入西方的数学，如对数、借根方等，大多是传统数学所缺乏的，这与清朝的大国地位极不相称，因此，当康熙从传教士口中得知“阿尔热巴拉”即“东来法”之意时，《数理精蕴》的编者就在《周髀经解》中引用古史记载设想了古法西传的途径。

梅瑴成《赤水遗珍》“天元一即借根方解”云：

> 后供奉内廷，蒙圣祖仁皇帝授以借根方法，且谕曰：西洋人名此书为阿尔热八达，译言东来法也。敬受而读之，其法神妙，诚算法之指南，而窃疑天元一之术颇与相似。复取《授时历草》观之，乃涣如冰释，殆名异而实同，非徒曰似之已也。

梅瑴成的这一“发现”激起乾嘉时期数学家研究天元术，并为“西学中源”说提供有力证据。梅瑴成等的观点，在宋元数学发现后，更得到重视，嘉庆三年（1798），阮元《重刻测圆海镜细草序》称：“国朝梅文穆公，肄业蒙养斋，亲受圣祖仁皇帝指示算法，始习西人所译借根方，即古立天元一之术流入彼中者，于所著《赤水遗珍》中，论之甚悉。于是立天元术又得彰明。文穆之功，斯为巨矣！”一些数学家由此比较了借根方与天元术的同异。李锐在《测圆海镜细草》一书的注中比较了借根方与天元术的异同，他是第一个全面论述借根方与天元术异同的清代数学家，引起了阮元、焦循、谈泰、骆腾凤等人的极大兴趣。但看法有所不同。例如，骆腾凤在《艺游录》“论《测圆海镜》之法”中对李锐的看法提出异议，在“论借根方法”中，他讨论了筹算与符号代数的差别，因筹算没有明确的等式概念，也没有移项概念（在传统数学中，方程之损益术实际上蕴涵了移项、等式概念），因此在进行多项式的减法运算时，相减过程已用筹码的正负代替，不需再改变符号，这是筹算的优点。而借根方则有明确的等式概念，移项需要改变一次符号，因此借根方“不直捷了当”。

嘉庆道光年间，部分数学家以借根方解释古算，罗士琳在《比例汇通》曾言：“此（按：指借根方）则一切算法无不可以御之，是诚比例之大全，数学之极妙者矣。”①

宋元数学之所以能复兴，与数学家对康熙时代传入的西方数学的深刻理解是分不开的。谈泰在给焦循《天元一释》所写的序中称：“泰于天元算例亦从西人入手，近始知其立法之不善远逊古人，读焦君此编盖焕然冰释矣。夫西人存心叵测，恨不尽灭古籍，俾得独行其教，以自炫所长，吾侪托生中土，不能表章中土之书，使之淹没而不著，而数百年来，但知西人之借根方，不知古法之天元一，此岂善尊先民者哉！”汪莱《衡斋遗书》卷9“张古愚《缉古算经细草》叙”亦称：“算家推见至隐莫善于借根方，本隐之显实始于天元一，近时言借根者十得八九，习天元者十无二三，数典忘祖，兹其一端。”清末刘光蕡在给王章《借根演勾股细草》写的跋称：“天元术大明于元和李尚之氏，盖自借根术入中国，梅文穆以之释《测圆海镜》，于两术之所以异尚不能无疑，至尚之氏则知其所以异，并知其所以同，其

① 罗士琳，《比例汇通》，卷三。

自为天元勾股草，先明术，次演草，次为图解，详哉其示人矣。使中法天元术复明于世，借根之功不可没也。”① 从借根方入手学习天元术，通过比较发现天元术的优点，增强了清代数学家的民族自豪感，宋元数学的复兴与此有很大关系。

二　康熙与符号代数传入的失败

在向康熙进讲天文学、数学的人中，法国耶稣会士傅圣泽起了一定作用。1711 年后有一次傅氏向康熙介绍了“符号代数”，称为新法，以别于原来的“旧法”（即指借根方）。康熙要傅氏以此为题作一说明，以呈御览，这就是《阿尔热巴拉新法》成书的起因。

《阿尔热巴拉新法》，凡二卷，以问答形式解释符号代数，卷一第一节主要解释“阿尔热巴拉新法与旧法之所以异”，以为“新法旧法，其规大约相同，所以异者，因旧法所用之记号乃数目字样，新法所用之记号，乃可以通融之记号，如西洋即用二十二字母，在中华可以用天干地支二十二字以代之”。并说明采用符号的优点：

> 用通融记号之妙，难以枚举，如于算之际，或加减乘除、平方立方等等记号，常常不变，令人一见原号，俱各了然。若用数目字，必随处变换，一变之后，人即难知其原数，并原数所成之诸方，亦莫辨矣；若用通融记号，算之甚简便，观之，省心思目力，斯可以专心于此法，而无他歧之扰，可得所求之理矣；若用数目字成一法，所得之理，只可执定用于本数，若用通融记号，则总括诸数，无所不通。

傅氏在书之开头解释符号代数的优点是很有必要的。当时此书的读者，只有康熙及其皇子们。若康熙对符号代数的优点真正有所了解的话，依赖其独尊的地位，他完全可以在编纂《数理精蕴》时收入此书。可惜康熙对这一代数“新法”完全没有理解。他的一道上谕说：

> 谕王道化：朕自起身以来，每日同阿哥等察阿尔（热）巴拉新法，最难明白，他说比旧法易，看来比旧法愈难，错处亦甚多，鹘突处也不少，前者朕偶尔传于在京西洋人，开数表之根写的极明白，尔将此上谕抄出，并此书发到京里去，着西洋人共同细察，将不通的文章一概删去，还有言者甲乘甲，乙乘乙，总无数目，即乘出来亦不知多少，看起来想是此人算法平平尔，太少二字即可笑也。特谕。②

傅圣泽曾把此上谕译为法文，据法文译文，开数表之根即是对数原理，故康熙对对数已比较欣赏，而对符号代数却不理解。连傅圣泽的数学才能，康熙也抱以怀疑的态度。自然，傅圣泽介绍的“新法”只限于线性方程，他既没有考虑康熙学习西学的中算背景，也没有看到符号位置和位值制之间的关系，特别是它们的不同，这就造成了学习的主要困难。③

清中叶以后，一些数学家将西方的借根方同天元术相比较，从而证明古算的优点，这与符号代数引入中国的历程，都是发人深思的。不同的是，符号代数没有被编入《数理精蕴》就夭折在康熙手中了，而借根方则在清末产生了一定的影响。

---

① 王章：《借根演勾股细草》，见：《味经时务斋课稿丛钞》。

② 《清中前期西洋天主教在华活动档案史料》（第一册），中华书局，2003 年，第 52 页。

③ C. Jami, *J.-F. Foucquet et la modernisation de la science en Chine: la "Nouvelle Méthode d'Algèbre"*, Mémoire de maitrise, Université de Paris VII, 1986. 及詹嘉玲，欧洲数学在康熙年间的传播情况——傅圣泽介绍符号代数尝试的失败，见：李迪主编，《数学史研究文集》第 1 辑，内蒙古大学出版社，1990 年。

三　“西学中源”说及康熙的数学地位

从明末西方科学传入中国之后，如何融合中西科学便自然地成为明清士人考虑的问题。徐光启提出“熔彼方之材质，入大统之型模”之主张，李之藻等人则多次谈到中国和西方的科学与文明的相似性，所谓中学西学“心同理同”，这种观点在明末颇为盛行。但是，到了明清之交，特别是到了康熙时代，这种观点被“西学中源”说所取代。

“西学中源”说在清代所产生的作用具有双重性，正面作用是，在某种程度上提高了民族的自豪感，并为乾嘉时期宋元数学的复兴起到了推动作用。但负面作用是，培养了对中国科学的盲目推崇，使国人不能很好地认识当时中国科学的落后状况，对西方科学技术缺乏了解，影响了中国科学的进程。

“西学中源”说由于康熙的提倡，及一批文人的宣传，成为影响有清一代天文历算研究的重要言论。在“三角形推算法论”中，康熙说：“古人历法流传西土，彼土之人习而加精焉。”在康熙倡言“西学中源”说之前，曾流行“东来法”说，所谓“东来法”是指代数学（algebra），曾音译作“阿尔热巴拉”、“阿尔朱巴尔”、“阿尔热八达”。15世纪初，这门产生于阿拉伯的学科传到了欧洲，Leonard de Pise 曾长途旅行至阿拉伯及其他东方国家，返回欧洲之后，他把阿拉伯代数学介绍给了欧洲人，此后代数学发展迅速。[①] 因此，代数学来自东方的阿拉伯这一事实，来华的耶稣会士是应当熟知的，在向康熙讲解代数学的过程中，他们会把代数学的辞源介绍给康熙。康熙大约在1711年后学习符号代数，傅圣泽向他讲解了《阿尔热巴拉新法》。1711年，康熙曾谕直隶巡抚赵弘燮曰：“夫算法之理，皆出自《易经》。即西洋算法亦善，原系中国算法，彼称为阿尔朱巴尔。阿尔朱巴尔者，传自东方之谓也。”[②] 康熙的西学中源说和《易经》发生了关联，康熙的看法受到了耶稣会士白晋等人的影响。[③]

康熙的三角形推算法论撰成后，梅文鼎奉承拍马，称“御制三角形论言西学实源中法，大哉王言，著撰家皆所未及”，“伏读圣制《三角形论》，谓古人历法流传西土，彼土之人习而加精焉尔，天语煌煌，可息诸家聚讼”，[④] 对康熙的议论已有所发挥。

《数理精蕴 · 周髀经解》云：“我朝定鼎以来，远人慕化，至者渐多，有汤若望、南怀仁、安多、闵明我，相继治理历法，间明算学，而度数之理，渐加详备。然询其所自，皆云本中土所流传。”在这里“西学中源”说已从“东来法”的代数学扩展到算学整门学科。这段话很可能是主编者梅瑴成所加，这是因为其祖曾从《史记 · 历书》的“幽、厉之后，周室微……故畴人子弟分散，或在诸夏，或在夷狄”出发，做过论证，而这正和《周髀经解》的前言相一致。

《数理精蕴》的编者把《周髀经解》放在上编“立纲明体”之首，其用意就是要表明古代中国的算学著作为西学之源，西法基于《周髀》之上，是最基本的“体”。

对康熙帝提倡的“西学中源”说，大多数人随声附和，众口一词，直至乾隆时代仍没

① J. F. Montucla, *Histoire des mathematiques*. T. 1, 536, 1802.

② 王先谦，《东华录》康熙八十七。

③ 韩琦，白晋的《易经》研究和康熙时代的“西学中源”说，汉学研究，1998，16（1）：185～201。

④ 梅文鼎，《绩学堂诗钞》卷四。

有人提出反对意见。嘉庆年间，在《畴人传》编撰完成之后，安清翘大胆地对“西学中源”说提出了质难。在《数学五种》中《推步惟是》卷四，他指出“西法不必传自中土”，称：

> 一谓西法同于周髀，其寒暖五带之说与七衡吻合。……据此数者以为西法传自中土之证，似有合矣，而愚独不敢以为然，何也？……然则西法同于周髀者乃其理同耳。理之至者，不以东海西海而异，今因其理之同而谓西法出于周髀，其果然否耶？……愚谓天无中西之异，言天者不必存中西之见，遵西法而轻诋古人者，妄也；守中法而不知兼收西法之长者，拘也；守中法而并攘西法为己有，其亦可以不必矣。

提出了比较中肯的看法。不过直至晚清，西学中源仍较为流行，影响了西学在晚清的传播，但同时也引起了国人对传统科学的整理和研究。

康熙对数学的兴趣对儒臣产生了很大影响，为了迎合康熙，他们开始学习数学，并培养年轻的算学人才，历算的重要性受到重视，这种认识反过来刺激了科学在中国的发展。在传播历算知识方面，算学馆扮演了重要作用。在历史上，和儒家经典的传授相比，历算的教育并不为人重视。不过随着算学馆的设立，情况有所改变。由于康熙的重视，一些儒臣加入其中，成为宫廷的御用文人，表明算学受到更大的重视。

但是，科学常被康熙用来作为炫耀的工具，他还试图把历算知识占为己有。17 世纪 90 年代，康熙特意召见安多，请他在宫中停留一段时间，以完成代数学著作的翻译，并叮嘱安多不要外传，这种垄断无疑阻碍了科学的传播。康熙时代西学的传播不成功，还在于康熙试图把历算研究和政治考量相结合，把科学当做控制汉官和臣民的工具。在许多情况下，他对汉人缺乏信任，更难推心置腹。作为满族的代表，康熙成功地通过科学提高了满人的威信，并自恃其历算造诣，鄙视汉人的历算才能，他学习西方数学的目的或在于此。

在对待传教士问题上，康熙帝并非知人善用，正如杜德美所说，传教士在中国只是作为一个工匠，当没有危及康熙的统治时，他们可作为科学顾问留在北京，可一当罗马特使来华解决礼仪之争问题时，因触及政权的稳定，康熙对教士表示了强烈不满。康熙是一个有作为的君主，但在对待引进科学这个问题上，还远远不能和他同时代的彼得大帝相比。康熙注重实用，没有把握西方科学发展的趋势，而自我陶醉于西方科学的表层，并任意评判符号代数，这都体现了他的短处。意大利传教士马国贤（M. Ripa，1685 ~ 1745）回忆自己在清宫十三年的生活时说：“（康熙）皇帝自认为是一个优秀的音乐家，甚至是一个更好的数学家；虽然他对这些科学和其他知识总体上有兴趣，但他对音乐一无所知，并几乎不理解数学的最基本内容。”① 对康熙的科学水平有贬低之意，他与康熙接触较多，其判断有一定道理。

第四节 康熙雍正时代传入的其他西方数学

一 对数表的传入

由耶稣会士传入我国的西方有关对数著作尚存 20 余种，② 其中对数发展早期的著作，

① M. Ripa, *Memoirs of Father Ripa during Thirteen Years' Residence at the Court of Peking*. London, 1853, 75.

② 据 H. Verhaeren, *Catalogue of the Pei-T'ang Library*. 一书统计。

如 Vlacq 表、Gunter、Burgi、开普勒的有关著作，都先后传入。其中，最早的对数表当为荷兰数学家 Ezechiel de Decker 所著 *Nievwe telkonst*（1626），① 此书为 Briggs 及 Gunter 表的缩略本，收录一至一万的常用对数表，又有正弦、余弦、正切、余切的对数表。de Decker 1626 年的第一本对数著作，也早就由耶稣会士带入中国。开普勒编制的《鲁道夫星表》（*Tabvlae Rudolphinae*，1627）是一部较早把对数用于天文计算的星表，书中涉及对数内容，1646 年底此书由波兰人卜弥格从澳门发寄北京。② 同时，穆尼阁又把对数传入中国，这二位波兰人介绍西方新知给中国人，功不可没。

清初也有法国对数表传入宫廷，现存故宫博物院。原北堂图书馆亦藏有法文对数表，为法国数学家 J. Ozanam（1640～1717）所编。③ 故宫博物院还藏有《对数表》朱墨写本一册，为正弦、切线、割线对数表及一到一万的常用对数表，精确到小数点后七位，它的底本无疑是上述法文表。④ 此外，清初内府还印制、手抄了许多小型对数表，现存故宫博物院。⑤

二　杜德美与杜氏三术

杜德美在来华法国耶稣会士中科学素养较高，他 19 岁入耶稣会，对数学极感兴趣。法国耶稣会士洪若在一封信中对杜德美给予了很高评价，说他非常"精通解析法、代数学、机械学，以及计时科学"。⑥ 在华期间，杜德美还与德国科学家莱布尼茨通信，讨论数学问题，从信中可看出他对微积分很感兴趣。⑦ 从 1701 年到达中国，1720 年去世，其间他曾给康熙及其皇子讲解数学，并参与了皇舆全览图的测绘与总图拼接工作。

杜德美对清代数学的贡献莫过于传授"杜氏三术"，即牛顿与 J. Gregory 的三个无穷级数公式：

$$\pi = 3 + \frac{3 \cdot 1^2}{4 \cdot 3!} + \frac{3 \cdot 1^2 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 5!} + \frac{3 \cdot 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 7!} + \cdots$$

$$r \sin \frac{a}{r} = a - \frac{a^3}{3!\ r^2} + \frac{a^5}{5!\ r^4} - \frac{a^7}{7!\ r^6} + \cdots$$

$$r\text{vers} \frac{a}{r} = \frac{a^2}{2!\ r} - \frac{a^4}{4!\ r^3} + \frac{a^6}{6!\ r^5} - \cdots$$

《数理精蕴》编纂期间，梅瑴成、明安图均在蒙养斋，杜德美大概是在 1713～1720 年间把"杜氏三术"传授给中国数学家的。梅瑴成曾把杜德美的方法收入《梅氏丛书辑要》的附录《赤水遗珍》中，称为"求周径密率捷法"和"求弦矢捷法"，这为计算圆周率和三角函数值提供了新的算法。

---

① H. Verhaeren, *Catalogue of the Pei-T'ang Library*. 编号为 4057。

② B. Szczesniak, Note on Kepler's Tabulae Rudolphinae in the Library of Pei-T'ang in Peking. *ISIS*, 40, 1949.

③ H. Verhaeren, *Catalogue of the Pei-T'ang Library*. 编号为 533，书名与故宫藏本稍异。北堂藏书 520 至 537 均为 Ozanam 著作。

④ 故宫所藏《对数表》的格式与 Ozanam 表完全相同，此表已纠正了 Briggs 1624 年表中的错误，如 lg2534 为 3.4038066，而 Briggs 表为 3.4038076。

⑤ 韩琦，对数在中国"附录一"清初传入的对数表，中国科技大学硕士论文，1988 年。

⑥ 韩琦，康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响，中国科学院自然科学史研究所博士学位论文，1991 年。

⑦ R. Widmaier ed., *Leibnitz Korrespondiert mit China*, 1990.

三　年希尧《视学》与 Pozzo 原著的关系

《视学》是我国第一部系统全面介绍透视原理的著作，1729 年初版，1735 年增订再版。

（一）年希尧

《视学》作者年希尧（？～1738），康熙末年曾任广东巡抚，雍正初年担任内务府总管，还著有《测算刀圭》三卷，一曰《三角法摘要》，一曰《八线真数表》，一曰《八线假数表》；又有《面体比例便览》一卷，《对数表》一卷，《对数广运》一卷。

据年希尧自序（己酉年），"余曩岁即留心视学，率尝任智殚思，究未得其端绪，迨后获与泰西郎学士数相晤对，即能以西法作中土绘事。"泰西郎学士即为清廷著名画师、耶稣会士郎世宁（J. Castiglioni，1688～1766）。郎世宁是意大利米兰人，年轻时加入耶稣会，由于擅长绘事，曾为教堂作过画，1715 年来华，从此开始了数十年宫廷画家的生涯。当时，年希尧也在宫廷任职，因此他们之间来往密切。[①] 他曾编有《纲鉴甲子图》，介绍中国的纪年法，曾被一些欧洲人所引用，在耶稣会士的书信、著作中，提到同时代中国人的确属凤毛麟角，由此可以想见他和耶稣会士的交往频繁。后来年希尧负责景德镇瓷器的烧造工作，还亲自为瓷器绘过画，大概也是受了郎世宁西方透视画的影响。

（二）《视学》

年希尧于雍正乙卯所作的《视学》序云："视学之造诣无尽也，予曷敢遽言得其精蕴哉。虽然，予究心于此者三十年矣。……至于楼阁器物之类，欲其出入规矩毫发无差，非取则于泰西之法，万不能穷其理而造其极，先是，予粗理其端绪，刊图问世，特豹之一斑，而鼎之一脔，虽已公诸同好，终不免于肤浅，近得数与郎先生讳石宁者往复再四，研究其源流，……予复苦思力索，补缕五十余图，并为图说，以附益之。"由此可见，年希尧受西法影响之大。

《视学》介绍了西方的透视学原理，用较多篇幅介绍平行透视和成角透视，求作正方形、矩形、三角形、多边形的透视图，还用二视图表示长方体和其他立体图形的透视图。[②] 书中还介绍了一些与建筑有关的复杂图形的透视。

耶稣会士著名画家 A. Pozzo（1642～1709）的《绘画与建筑之透视》（*Perspectiva pictorum et architectorum*）一书凡二卷，以论述建筑物的透视图为主，但对于投影的原理介绍不多。该书 1693～1700 年在罗马出版，后曾数次再版。把《视学》与此书作一比较，[③] 可看出前者在很多地方出自后者，例如《视学》前面 29 幅图全部从《绘画与建筑之透视》第 1

---

① *Philosophical Transactions*. 1729～1730，v. 36，397. 参见：韩琦，《视学》提要，见：郭书春主编，中国古代科技典籍通汇·数学卷，第 4 册，河南教育出版社，1993 年，第 709～710 页；韩琦，17、18 世纪欧洲和中国的科学关系：以英国皇家学会和在华耶稣会士的交流为例，自然辩证法通讯，1997，19（3）：47～56。

② 沈康身，界画、《视学》和透视学，《科技史文集》第 8 集，及"从《视学》看十八世纪东西方透视学知识的交融和影响"，自然科学史研究，1985，（3）。

③ 原北堂图书馆藏有此书的 1702～1723 年罗马版，是拉丁文、意大利文对照本。参见：韩琦，康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响，中国科学院自然科学史研究所博士学位论文，1991 年。

卷引录，后面的图也有数幅从第 2 卷引入。因此，《绘画与建筑之透视》是《视学》的底本和来源之一。可能由于刻板复杂之故，《视学》只采用了少量建筑图，后面介绍各种投影的原理，并非采自 Pozzo 原著，它是否有其他西方来源，尚待研究。

年希尧补充的五十余图到底是指哪些图，这是非常重要的问题。《视学》书中凡是译自 Pozzo 一书的内容，没有连续标出图的序号，这部分图多是三视图。有关三视图的内容可能得自郎世宁的传授，而不是年希尧的独创。而给出序号的图加起来共有 50 余图，正好与年希尧的序一致，这部分内容多讨论线法，而无三视图，这应是年希尧本人的工作。

第二十九章　清中叶传统数学著作的整理和研究

自18世纪20年代起，传教士被禁止在内地传教，直至鸦片战争后被迫开埠之时，除仍有少数传教士为钦天监和宫廷工作外，欧洲人一般不能再进入中国内陆。与此相应，西方数学知识的传入基本上中断，并且一直延续到1850年前后。然而，对此前传入的西方数学知识的学习与研究却并未中断。早期编译的《数理精蕴》等中文数学、天文著作成为中国人学习和研究“西方数学”的主要来源和基础。清中早期在数学研究方面做出最大贡献的是梅瑴成与明安图。基于对西方代数方法借根方的认识，梅瑴成重新理解了宋元时期发展成熟的天元术，指出“天元一即借根方”①，换言之，中国传统的天元术与借根方名异而实同。梅瑴成还在《赤水遗珍》（1761）中辑录了耶稣会士杜德美介绍的三个幂级数展开式，并以其法计算了直径为20亿的圆周长及几个三角函数的值，但并没有做进一步的研究。明安图对这三个幂级数展开式进行了深入研究，撰著《割圜密率捷法》，给出了这三个公式的证明，并扩充了六个公式。18世纪后期，随着传统数学的全面复兴，出现了一个数学研究与发展的高潮，中国数学家在故有传统的发展与传入知识的深化方面都做出重大贡献。代数与幂级数展开式为清中叶最活跃及最具成果的两个研究方向。

第一节　清中叶数学概述

一　中国传统数学的复兴

虽然梅文鼎、王锡阐等清初数学家、天文学家已致力于恢复传统及会通中西，但由于他们基本上读不到汉唐宋元算书，不可能完成全面复兴古算的目标，其会通工作亦往往构筑于对传统算法的有限理解甚至臆测的基础上。清代中叶《四库全书》的编辑及乾嘉学派学者对古籍的不遗余力的搜索与研究，使得中国数学史上一些重要著作得以较为广泛地流传，由此，引发了传统数学的再发现及复兴。

1773年，乾隆帝下诏编纂大型丛书《四库全书》，此后大批在社会上很难得见的汉唐算经《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《缉古算经》、《夏侯阳算经》等，宋元算书《数书九章》、《测圆海镜》、《益古演段》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》等被发现、整理出版，引起学者们的强烈兴趣，为他们提供了新的研究课题。18世纪70年代后，校勘、研究新发现的古算书成为当时研究数学的学者的主要课题之一。戴震、李潢、沈钦裴、李锐、焦循、汪莱、孔广森、张敦仁、阮元、谈泰、罗士

① 梅瑴成，赤水遗珍，梅氏丛书辑要本，卷61。

琳、黎应南、董祐诚、徐有壬、戴煦等在校勘古算经，复原古算方法等方面都做出不同程度的贡献。《九章算术》、《海岛算经》、《缉古算经》、《四元玉鉴》都有几个校勘本或阐释本，对《数书九章》、《测圆海镜》等也有深入研究。到 18 世纪末，数学研究已经成为一种风尚。

在全面复原传统数学方法的基础上，清中叶数学家的数学研究取得重大成果，并开辟了新的研究方向。1799 年，焦循出版了《加减乘除释》。焦循认为，《九章算术》中的算法名称，并非是依据各法的数学原理规定的，而是为了实用的目的，这样的命名方式掩盖了这些算法的本质。他在《加减乘除释》以最基本的加、减、乘、除四则运算来重新阐释和归纳《九章算术》及《缉古算经》等其他传统数学著作中的数学方法，以彰显这些算法的原理。焦循还利用抽象的甲、乙、丙、丁等设题，给出关于加法、乘法的交换律、结合律的一般性命题，使全书构成了一个以加、减、乘、除四则运算为基础的一般性的符号运算系统。

李锐、汪莱以传统天元术探讨高次方程正根个数与方程系数变化的关系的研究和李善兰对垛积术与尖锥术的研究是清中叶传统数学研究的最高成果。当然，这两方面的工作与他们对传入的欧洲数学的研究与中、西数学的比较等有着密切联系。

二　西方数学的研究与中、西数学知识的互动

清中早期的中国学者大都认为传入的西方数学知识优于中国传统数学。乾嘉学派学者还将西方的历算方法应用于经史研究，其代表人物惠士奇、江永、戴震、阮元、凌廷堪等都研究西方数学知识。戴震的《勾股割圜记》中虽然以古词创造了一些术语，但全书主体为欧洲三角学知识。焦循撰成《释弧》（1795）、《释轮》（1796）、《释椭》（1796）。《释弧》是在梅文鼎的《弧三角举要》、《环中黍尺》及戴震《勾股割圜记》的基础上，讨论球面三角形的解法；《释轮》分析传入的第谷天文体系中的均轮、次轮；《释椭》解释法国传教士传入的卡西尼（Cassini，1625 ~ 1721）天文学说相关的椭圆问题。凌廷堪等亦撰写专著，探讨三角函数和圆锥曲线问题。清中叶对传入的知识最为重要的两个研究方向是对借根方代数与三角函数幂级数展开式。

中国传统数学在解方程或开方时均满足于求出一个正根。对于负根、虚根，以及有两个或更多解的情况则不予讨论。《数理精蕴 · 借根方比例》中的“开带纵平方”和“开带纵立方”两部分以系数变化分类给出一元二次方程和一元三次方程有正根的方程。汪莱敏锐地从原书简短叙述注意到其重要性，理解其理论意义和论证方法，并进一步深入和完善其研究。汪莱大部分的数学工作均载于《衡斋算学》七册，是汪莱在 1796 年至 1805 年间陆续撰成的。他依高次方程正根有无及是否唯一给出方程分类法，并依三项方程、四项方程以至多项方程分别讨论正根的判别，较《数理精蕴》中介绍的内容更为系统和完备，其成果超出了当时传入的西方数学内容。同时，汪莱一直坚持使用借根方的术语和表述方法，表明他重视欧洲数学中对方程理论的研究结果。汪莱对借根方的态度实际上也是乾嘉学派数学家们实事求是及注重理论研究的学风的一个具体体现。

李锐与焦循也推崇借根方代数，但作为乾嘉学派的学者，他的数学研究并不仅仅是为了得到更有效的数学成果，还要就传统算书与算法“一一究明其所以然，无所疑惑而后快”，

故他们仍对研究宋元算书表现出强烈的兴趣①。在全面理解了传统天元术之后，李锐认为天元术较借根方法更为优越，焦循亦转而倾向于天元术。为此，李锐与坚持借根方法优越的汪莱出现分歧，并进行了激烈的辩论。但在读到汪莱《衡斋算学》第五册后，李锐认识到方程理论研究的意义。他撰著《开方说》以传统天元术的术语和计算方法讨论方程正根个数与系数的关系问题。除未考虑系数序列变号为偶数次时可能没有正根这个问题以外，李锐的这项成果与笛卡儿符号法则几乎是一致的，且其叙述尚较笛卡儿给出的命题更为深刻②。

至17世纪，欧洲数学家们大多还不认为负数可以作为方程的根。但对于中国数学家来说，正、负数只是符号的差别，所以，在得到方程正根个数之后，李锐很自然地提到了负根。他的论述很可能是中国数学史上关于负根的第一次记载。虽然李锐的方程理论研究可以被归入传统数学的发展范畴，但这项工作显然是受传入的欧洲借根方的影响与启发而开始的。清代中叶关于方程理论的研究为中、西数学互动的一个案例。

19世纪20年代之后，函数幂级数展开式研究成为中国数学家探讨的主要课题。明安图认为，杜氏三术没有给出立法的数学原理，他撰写《割圜密率捷法》，试图证明这三个公式，又引申出六个公式。在该书出版之前，董祐诚撰《割圜连比例术图解》，独立地给出这九个公式的另一种证明方法，他试图创立一个一般方法，直接进行弦、矢、弧间的互求计算。值得注意的是，董祐诚将幂级数展开式与传统垛积术联系起来。董祐诚曾撰有《堆垛求积术》（1821）一卷，书中给出了方锥堆和纵方堆的求和公式。董祐诚自称："予释割圜捷法，更得求诸乘方所成之方锥堆术。继复以纵方锥推之，而得诸乘方所成之纵方堆数。"可见，他的垛积术工作正是其阐释和证明割圆公式的副产品。董祐诚并不是有意要以传统数学方法来阐释西方数学内容的，他联系中、西数学的方法是从计算过程中观察得到的。同时，通过对三角函数幂级数展开式的研究，董祐诚又进一步深化了垛积术的研究。

董祐诚之后的数学家多利用垛积成果进行幂级数研究。项名达对董祐诚将函数幂级数展开式与垛积术联系起来的方式感到困惑，因为从表面上看来，这两者之间完全没有联系。经过长期的思考，项名达终于明白了二者之间的关系③。他继承了董祐诚利用三角垛公式研究幂级数展开式的研究方法。在其《象数一原》中，他将贾宪三角形更名为"递加图"，以递加数的原理探讨该图的构成及其与幂级数的关系。他的工作阐明了幂级数研究和垛积术的理论联系。

戴煦继续项名达的工作，从二项式展开式入手，求开方式的幂级数展开式，此后，结合《数理精蕴》中给出的屡次开方求对数法，给出对数及三角函数的对数的幂级数展开式。在三角函数的幂级数展开式方面，戴煦在其《外切密率》中讨论了正切、余切、正割、余割四线与弧度间的相互关系，给出其幂级数展开式。

李善兰在《方圆阐幽》、《弧矢启秘》和《对数探源》对其幂级数展开式的证明中，创造出尖锥术。其理论与微积分学的一些基础理论相类。虽然李善兰对其尖锥术的原理和来源没有做详细的说明，但史学家们普遍认为其尖锥术正是在垛积术的基础上发展而来的。所

---

① 李锐，《致焦循》，引自：郭世荣，《清代中期数学家焦循与李锐之间的几封信》，《谈天三友》，第131页。

② 刘钝，李锐与笛卡儿符号法则，见：谈天三友，第263～284页。朱家生，李锐《开方说》研究，谈天三友，第285～310页。

③ 项名达，象数一原序，象数一原，1888年上海高斋汇刻本。

以，我们可以说，李善兰的幂级数研究方法也是在董祐诚将垛积术和三角函数的幂级数展开式相结合的基础上发展而来的。李善兰亦在垛积术研究中做出重大贡献，其《垛积比类》（1867）是一部系统的垛积术专著。

至19世纪中叶，中算家关于三角函数幂级数的研究已接近完备。从三角函数幂级数展开式研究引发的对数的幂级数展开式研究以及受其影响而更为活跃的垛积术、尖锥术研究还方兴未艾。中算家在证明和发展来自西方的函数幂级数展开式的过程中重新发现了朱世杰所创的脱离具体实物垛类比的垛积术，这也体现了清中叶中、西数学知识会通与互动的特色。

中国传统数学的出色成就清代中期被重新理解，并取得了一定进展，成就了传统数学最后的辉煌。同时，此阶段的数学家在学习、理解与深化由欧洲传入的数学知识方面也取得了很大进展。由于数学史家偏重于对当时数学研究成果及恢复校勘古算书方面工作的整理，这样，他们很自然地认为乾嘉时期的数学研究以古学复兴为标识。亦有学者认为乾嘉学派的泥古倾向影响了欧洲数学在中国的传播。上述观点当然有其合理性，但却忽视了两个方面。其一，乾嘉学派的学者们在其治经的过程中并不只用到传统天文数学成果，欧洲天文学从一开始就是他们的重要工具。正因如此，他们几乎都重视对欧洲历法及与之相关的平面、球面三角学，三角函数等的研究。其二，人们大多忽略了对乾嘉时期数学家研究方法的分析。被视为数学“中学”派代表的李锐总是试图完备、严谨地、一般性地解决他所探讨的数学问题，焦循则发明了符号法，并也像李锐一样坚持一般性的研究方法，虽然他们的证明方法大多来自传统数学，其严谨性的追求也肯定受到考据学及易学治学方法的影响，但同时，这亦都与传入的欧洲数学的方法和特点若合符节。可以说，这两个方面都受到了传入的欧洲数学的影响，又同时影响了欧洲数学后来在中国的传播。从前者来说，很可能正是传教士及其中国学生徐光启等对欧几里得几何学知识的可证明性的赞扬及欧洲宇宙论的引入，使得乾嘉学者们意识到数学的精确性和可验性问题，这很可能对他们将数学用于对儒学经典及史籍的辨伪及对历史史实的断代有启发作用。同时，又使得他们致力于对传入的数学知识的证明和深化研究，这正是清朝学者在三角学和三角函数展开式方面所进行的主要工作。而徐光启等对中国数学没有体系、没有证明的批评也刺激了乾嘉时期的学者如李锐等对传统数学的各个专题做系统的整理，并对传统算法进行证明。通过这样的工作，中国数学研究从算法研究转化为纯粹的学术研究，其研究方法也从对数字运算术的阐述及其应用方法的解释转向理论性的研究，这无疑使得此后传入的符号代数学和微积分学更易被接受和理解。李善兰等清末数学家能够如此顺利地完成《代数学》和《代微积拾级》的翻译，不能不说是基于他先前的研究基础及清代中叶其他数学家的工作①。

第二节 传统数学著作的整理和校勘

一 戴震与《四库全书》、《武英殿聚珍版丛书》中所收算书

中国数学经过明朝的衰落，明末清初西方数学的传入，到清初，汉唐宋元数学著作散佚

① 田淼，中国数学的西化历程，山东教育出版社，2005年。

殆尽。私家藏书虽然保存了几种宋元刻本，然而一般数学家难以读到。梅文鼎听说南京黄虞稷家藏有半部南宋本《九章算经》，登门求读。在黄家人的监督下，只获读第一卷。康熙、雍正年间所编纂的《古今图书集成》于雍正四年（1726）出版，但数学书籍只收了历来被列为天文类的《周髀算经》和带有数术内容的《数术记遗》。乾隆决定开设《四库全书》馆，抢救了一批汉唐宋元算书，对中国传统数学的发掘和研究，对我们了解中国传统数学，其意义怎么评价都不过分。

（一）《四库全书》中的数学著作

乾隆三十八年（1773）三月，乾隆下诏开设《四库全书》馆，他聘用一大批学有专长、名重一时的文人学者参加工作，由纪昀主持其事。乾隆屡下诏谕，命馆臣从《永乐大典》中辑录久已亡佚的先秦至明初的古籍，同时在全国征访图书，前后征集图书数量多至13000余种，几乎囊括了乾隆以前中国历史上的主要典籍，是中国历史上规模最为宏大的一部丛书。

乾隆四十六年（1781）十二月，第一部《四库全书》膳录完毕，藏宫中文渊阁，现藏台北故宫博物院，1986年台湾商务印书馆影印出版。乾隆四十九年，第二、三、四部《四库全书》相继膳录完竣，分贮于圆明园文源阁、承德避暑山庄文津阁、盛京（今沈阳）故宫文溯阁。文津阁本现藏国家图书馆，2005年北京商务印书馆影印出版。文溯阁本抗战前夕移藏甘肃图书馆。乾隆五十二年再增缮三部，分贮于镇江文淙阁、扬州文汇阁和杭州文澜阁。文澜阁本今藏浙江图书馆，另二部咸丰间毁于太平军之役。

乾隆命戴震为天文算法纂修官，此外还有郭长发、陈际新、倪廷梅等。通数学的丁杰虽未被列入四库馆职之中，但应邀助理校勘工作①。《四库全书》子部天文算法类的“算书之属”共收数学著作26部，“推步之属”也有一些含有数学内容的著作13部。这些著作的时代与来源如下：

唐中叶以前10部：《周髀算经》二卷（附《周髀算经音义》一卷，明刻本，戴震亦从《永乐大典》中辑出，不过以前者为底本）；《九章算术》九卷（附《九章算术音义》一卷，辑自《永乐大典》）；《数术记遗》一卷（汲古阁本，两江总督采进本），汉徐岳撰、北周甄鸾注；《海岛算经》一卷（辑自《永乐大典》），晋刘徽撰，唐李淳风等注释；《孙子算经》三卷（辑自《永乐大典》）；《五曹算经》五卷（辑自《永乐大典》）；《五经算术》二卷（辑自《永乐大典》），北周甄鸾撰，唐李淳风等注释；《张丘建算经》三卷（汲古阁本，吏部侍郎王杰家藏本）；《缉古算经》一卷（汲古阁本，吏部侍郎王杰家藏本），唐王孝通撰并自注；《夏侯阳算经》三卷（辑自《永乐大典》）。

宋元5部：《数学九章》十八卷（辑自《永乐大典》），宋秦九韶撰；《测圆海镜》十二卷（李潢家藏本），元李冶撰；《益古演段》三卷（辑自《永乐大典》），元李冶撰；原本《革象新书》（辑自《永乐大典》），元赵友钦撰；重修《革象新书》（天一阁藏本），元赵友钦撰。

明代2部：《测圆海镜分类释术》十卷（浙江范懋柱家天一阁藏本），明顾应祥撰；《弧矢算术》一卷（浙江范懋柱家天一阁藏本），明顾应祥撰。

---

① 任松如，四库全书答问，民国丛书，第7～29页。

明末至康熙末22部：《几何原本》六卷，西洋欧几里得撰，利玛窦译，明徐光启笔受；《测量法义》一卷，徐光启撰；《测量异同》一卷，徐光启撰；《勾股义》一卷，明徐光启撰；《新法算书》一百卷，徐光启等撰；《同文算指前编》二卷、《通编》八卷，明李之藻演利玛窦所译法；《圜容较义》一卷，李之藻撰；《晓庵新法》六卷，清王锡阐撰；《历算全书》六十卷，梅文鼎撰，梅瑴成重定；《勿庵历算书记》，梅文鼎撰；《数学》八卷，《续数学》一卷，江永撰；《御制数理精蕴》五十三卷；《几何论约》七卷，杜知耕撰；《数学钥》六卷，杜知耕撰；《数度衍》二十四卷，《几何约》一卷，方中通撰；《勾股引蒙》五卷，陈訏撰；《勾股矩测解原》二卷，黄百家撰；《少广补遗》一卷，陈世仁撰；《庄氏算学》八卷，庄亨阳撰；《九章录要》十二卷，屠文漪撰。

此外，存目者5部：《算法统宗》十七卷（内府藏本），明程大位撰；《八线测表图说》一卷，清余熙撰；《勾股述》二卷，陈訏撰；《隐山鄙事》四卷，李子金撰；《围径真旨》无卷数，顾长发撰。

上述汉唐宋元算书共13部，辑自《永乐大典》者有9部。戴震等辑出这些算经，并加校勘，贡献极大。由于后来《永乐大典·算》大部分散佚，如果没有他的工作，有些算书，我们就会永远见不到了。但是，戴震从《永乐大典》的辑录工作也有极大的失误。首先是辑录极不认真，衍脱舛误非常多。例如《九章算术》，戴震辑录本与《永乐大典》本的区别远远超过大典本与南宋本的区别，尽管大典本与南宋本的母本在唐中叶就已经不同。其次是戴震或者是认识不足，或者是另有隐衷，将一些重要著作摒弃在外。被戴震摒弃的数学著作最重要的是南宋杨辉的《详解九章算法》①。由于杨辉照录了贾宪《黄帝九章算经细草》的全文。戴震的这一失误使我们永远失去了读到这部宋元数学高潮的奠基性著作以及杨辉这部书的全帙的机会。

《四库全书》算书以戴震辑录校勘本的正本誊抄。有的比较认真，但是有的极不负责。例如《九章算术》，文渊阁本的舛错极多。乾隆五十二年（1787），乾隆发现文津阁本舛错连篇累牍，遂令校阅文津、文渊、文源三阁《四库全书》。四年后乾隆发现文津阁本仍有错误，命再校阅。但有的根本没有修订。出现这种粗制滥造的情况，固然是由于馆臣责任心不强，但主要责任在清朝政府和乾隆本人。盖清朝开《四库全书》馆，固然有发扬中华传统文化的因素，但主要目的是为了销毁不利于清朝统治的典籍，同时为了笼络汉族知识分子，使他们忙于故纸堆，消弭反清思想。看来四库馆臣深谙乾隆用意。

乾隆对《周髀算经》、《九章算术》情有独钟，亲自题诗。例如，《御制题〈九章算术〉有序》（聚珍版亦载入）云：

> 算术由来非所学，不知难强以为知。
> 大成广集钦皇祖②，六艺曾谕愧仲尼。
> 分韵笑他割裂者，补图欣此粹完之。

---

① 钱宝琮认为，戴震在《永乐大典》中必曾见到杨辉的书，他纂次《大典》算书，“取其说以校《九章》亦意中事也”。参见：钱宝琮，戴震算学天文著作考，见：李俨钱宝琮科学史全集，第九卷。

② 乾隆自注：“皇祖讲明算法，钦定《数理精蕴》、《仪象考成》等书，实足为万世算学标准。”皇祖指康熙帝爱新觉罗·玄烨。

时为显晦晦今显，是用摛毫作弁词①。

（二）《武英殿聚珍版丛书》中的算书

《四库全书》拟抄写几部，且藏于皇家书阁，一般读书人不易读到。开办《四库全书》馆不久，乾隆即下诏，由宫中武英殿刊刻从《永乐大典》中辑出的汉唐古本。承办此事的金简建议采用木活字印刷，乾隆帝照准，因“活字版”名称不雅，赐名“聚珍版”②。武英殿刻成枣木活字25万种，自1774年起，根据《四库全书》本底本的副本先后排印成《武英殿聚珍版丛书》138种。乾隆发现《武英殿聚珍版丛书》错误严重，遂命馆臣修订重印。这一部修订重印本藏承德避暑山庄，是为乾隆御览本，今藏南京博物院。

《武英殿聚珍版丛书》有辑自《永乐大典》，由戴震校勘的汉唐数学书七种，分别是：《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《夏侯阳算经》。1993年，乾隆御览本7部算书被影印收入《中国科学技术典籍通汇·数学卷》。

乾隆四十一年（1776），乾隆因武英殿聚珍版印数不多，遂颁发东南各省，令其翻刻。福建影刻了《九章算术》。福建影刻本在同治年间重印过。光绪十九年（1893）又拟重印，但有的雕板烂坏，只好修补。其中，《九章算术》是根据李潢的《九章算术细草图说》修补的。光绪二十五年（1899）广东广雅书局翻刻了福建补刊本。显然，福建补刊本与广雅书局本虽然仍有“聚珍版”之名，但无论是出版方式还是内容，都已经不是真正的聚珍版了。

（三）戴震

戴震，字东原，一字慎修。安徽休宁（今属黄山市）人。清雍正元年十二月二十四日（1724年1月19日）生；乾隆四十二年五月二十七日（1777年7月2日）卒于北京。戴震是清代著名的哲学家、考据学家和数学家。

戴震聪慧异常，喜疑善问，凡读书，每字必求其义，为后来的学术成就打下坚实基础。19岁遇江永（1681～1762），遂师事之。他受江永的品格学术影响极大。1744年著《策算》，次年著《六书论》3卷，1746年著《考工记图注》2卷。1755年，戴震避难入都，著述不辍，完成《勾股割圜记》三篇。纪昀、钱大昕等大学者争相结交，叩其学，听其言，观其书，莫不击节叹赏。1762年戴震中举人，此后10年间五次入都会试，不第。此期间却是他学术创造最为活跃的时期。1763年撰《原善》三卷，1766年撰《孟子字义疏证》三卷，系统阐发了他的唯物主义世界观和认识论。他从事音韵、文字、考据的研究，1766年撰《声韵考》，确立了韵类正转旁转之例。1773年奉诏入《四库全书》馆，为经部和子部天文算法类书籍的纂修官，乾隆赐同进士出身，授翰林院庶吉士。乾隆四十二年（1777）五月二十七日，因庸医误用药，溘然长逝。他自著书二三十部，整理校勘古籍20余部，文集若干卷，孔继涵刻《戴氏遗书》，弟子段玉裁刻《戴东原集》。

戴震在数学上的最大贡献是在《四库全书》馆辑录校勘汉唐十部算经。尽管他有许多

---

① 清·爱新觉罗·弘历，御制题《九章算术》有序。《武英殿聚珍版丛书》本、《四库全书》文渊阁本《九章算术》。参见：郭书春，汇校《九章算术》增补版附录。

② 武英殿聚珍版书。

失误和若干不应该的错误，但总体来说，他的功大于过。①

戴震的《策算》讨论用讷白尔算筹进行乘除、开平方，其方法与梅文鼎同。乘除以《周易》、《汉书》等经史中的有关计算题为例。开平方以《论语》、《考工记》中的有关计算题为例。戴震《勾股割圜记》三篇，上篇言三角八线和平面三角形解法，中篇言球面直三角形解法，下篇言球面斜三角形解法，凡55图，49术，2000余字。内容虽无多大创新，且文字简括，术语又不取约定俗成者，十分难读，但对其数学思想，值得进一步研究。

戴震对中国传统天文学有深刻造诣，并通晓西法。1755年秦蕙田请戴震撰《观象授时》14卷，为古今天文历法分类集成之书。戴震又著《释天》4卷，借六经以释天文。

二　清中叶对汉唐算经的校勘与研究

1776年冬1777年春戴震将收入《四库全书》的十部汉唐算经重加校勘，交孔继涵刊刻微波榭本《算经十书》。《算经十书》之名，自此始②。微波榭本《算经十书》在清朝多次翻刻，影响极大，对复兴古算发挥了有益的作用。孔继涵却将微波榭本冒充为汲古阁本的翻刻本，将刻书年代刻成1773年，即戴震从《永乐大典》辑录诸算经之前，长期蒙蔽数学界和学术界，直到1934年钱宝琮通过将汲古阁本与微波榭本对校，才揭穿孔继涵的骗局。

《算经十书》诸算经的传本有不少错讹文字，经过戴震的校勘，基本可以卒读，贡献极大。戴震对《算经十书》诸算经的整理研究是清中叶古算复兴的开端和基础。下面主要介绍清中叶对《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《缉古算经》的研究。

（一）对《周髀算经》的研究

收入《武英殿聚珍版丛书》和《四库全书》的《周髀算经》是戴震以明胡震亨刻本为底本，以《永乐大典》之戴震辑录本参校而成的。戴震的《周髀算经提要》谈到其校勘情况时说："补脱文一百四十七字，改讹舛者一百十三字，删其衍复者十八字。""书内凡为图者五而失传者三，讹舛者一，谨据正文及注为之补订。"③ 这些校订大多数是得体的。

但是，由于传本舛误严重，戴震失校之处还是很多。道光年间顾观光撰《周髀算经校勘记》，对《周髀算经》本文校正28条。光绪年间孙诒让在《迻记》卷十一校勘《周髀算经》本文及赵、李注16条。钱宝琮认为顾观光、孙诒让的各条校勘"大都通过覃思精勘，深究本原"④。当然，即使如此，《周髀算经》还是有大量漏校。1963年钱宝琮出版校点本，使《周髀算经》的校勘日臻完善，这是后话。

（二）对《九章算术》的研究

戴震对《九章算术》的校勘自1774年至1777年他去世前，仅仅在三年多的时间内，为《九章算术》整理了3个版本，这就是聚珍版与四库本的母本戴震辑录校勘本，以戴震辑录

① 郭书春，戴震，见：杜石然主编，中国古代科学家传记，科学出版社，1992年。

② 郭书春，关于《算经十书》的几个问题，中华科技史学会会刊，2006，(10)。

③ 清·戴震，《周髀算经》提要。《武英殿聚珍版丛书》本《周髀算经》。中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年。

④ 钱宝琮，版本与校勘，见：钱宝琮校点，《算经十书·周髀算经》，中华书局，1963年。

本为底本、前五卷以汲古阁本参校、1776 年由屈曾发刊刻的豫簪堂本，以及微波榭本。戴震用力之勤，非常人可比。关于戴震对《九章算术》的校勘，钱宝琮说："颠扑不破的果然不少，但也有些地方，他师心自用，把原本不错的文字改掉，后来的读者很容易被他蒙蔽而引起误会。"① 钱宝琮的这些评价是中肯的。不过戴震对《九章算术》不误原文的错改，比钱宝琮已经发现的还多得多②。此外，戴震还将他对大典本提出的大量校勘文字在豫簪堂本、微波榭本中冒充原文，又对若干文字做了修辞性加工，进一步造成《九章算术》版本混乱，这都是很不应该的。戴震的这些失误一直影响到 20 世纪 80 年代甚至 90 年代出版的《九章算术》及其研究论著。

李潢撰《九章算术细草图说》，以微波榭本为底本，依照原术作补图演草，是治《九章算术》的必读书。李潢，字云门，湖北省钟祥县人。生于乾隆十四年（1749），卒于嘉庆十七年（1812），清代中期著名学者、数学家。乾隆三十六年（1771）中进士，选授翰林院庶常，次年授翰林院编修。三十八年任《四库全书》总目协纂官③。官至工部左侍郎。博综群书，尤精算学，推步律吕，俱臻微妙④。李潢又著有《海岛算经细草图说》一卷，遗稿中还有《辑古算经考注》二卷，1832 年由刘衡算校刻于南昌，后由吴兰修复校，刻于广州。

《九章算术细草图说》含有"按"、"图"、"说"、"草"四种内容。"按"中提出了若干校勘意见。李潢看过《永乐大典》，指出了戴震的几处误辑，对戴震将方田章圆田术刘徽注中的"弧"改作"觚"，将方程章正负术之"无人"改作"无入"等少数校勘提出异议，但对戴震的其他校勘则都遵从。李潢自己提出的校勘大约有 70 条是正确的，使微波榭本仍然存在的某些舛误不通之处能文从字顺。但是也有相当多的地方他师心自用，将不误的文字改错，或对舛误文字的校改失当。他在卷一、四、五、九这四卷中的补图也大都准确、细致。例如为卷四李淳风等所引祖暅之开立圆术补了 22 幅图，十分得体。李潢的"说"主要是对刘徽注、李淳风等注释逐句阐释，对大量不易理解的文字大都能分析条理，解释清楚。但逐句解释的方式妨碍了他对某些刘徽注的逻辑结构的理解和整体把握。尤其他不能理解刘徽的极限思想和无穷小分割方法，对方田章圆田术刘徽注（即割圆术）、商功章阳马术注、羡除术注等没有看懂，不仅"说"不到位，补图失当，有的甚至提出错校。其"细草"根据《九章算术》术文及其刘徽注列出演算程序，基本上是正确的。

嘉庆十七年（1812），李潢的书甫写定，即一病不起，遗嘱务侯沈钦裴算校，方可付梓。对照骆腾凤《艺游录》⑤ 的记载，沈钦裴对李氏的图说做了相当大的增删。例如李潢的原稿解释了刘徽割圆术中"以一面乘半径，觚（李潢认为当做'角'）而裁之，每辄自倍"这几句十分重要的话，虽不尽准确，却初步认识到刘徽此注的主旨在于证明《九章算术》的圆面积公式，沈钦裴却予以删除。此后 160 余年，谈刘徽割圆术者甚多，却无人注意到这几句画龙点睛的话，恐与沈氏误删李潢之说有关系⑥。

---

① 钱宝琮，版本与校勘，见：钱宝琮校点，《算经十书·九章算术》，中华书局，1963 年。

② 郭书春汇校，汇校《九章算术》增补版，辽宁教育出版社，九章出版社，2004 年。

③ 清·永容，《四库全书总目》，中华书局，1965 年。

④ 清·罗士琳，续畴人传。见：《畴人传》卷四十九。

⑤ 清·骆腾凤，艺游录，卷二，见：郭书春主编，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第五册，河南教育出版社，1993 年。

⑥ 郭书春，九章算术细草图说提要，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第四册。

与李潢大约同时的李锐对刘徽的方程新术做了校勘①，被李潢采入《九章算术细草图说》，后人亦都遵从。此期间汪莱撰《校正〈九章算术〉及戴氏订讹》②，对《九章算术》的校勘绝大多数十分精当。骆腾凤（1770～1841）撰《艺游录》，有关于方田、衰分、方程、勾股的札记若干篇。罗士琳（1789～1853）于1818年撰《比例汇通》四卷，以西人四率比例注解《九章算术》应用问题。稍后的许多数学家，都将《九章算术》作为研究课题。例如，吴嘉善撰《九章翼》，含有《分法》、《今有术》、《开方》、《平方各形术》、《平圆各形术》、《立方立圆术》、《勾股》、《衰分》、《盈不足》、《方程》等篇。

（三）对《海岛算经》的研究

戴震从《永乐大典》中辑录出《海岛算经》，写出8条校勘记。在豫簪堂本与微波榭本中只保留了2条，其余6条校勘尽管都是正确的，却冒充大典本或南宋本原文。

李潢撰《海岛算经细草图说》（沈钦裴补草）一卷，也含有"按"、"图"、"说"、"草"四种内容。李潢提出了6条校勘。1824年沈钦裴撰《重差图说》一卷。李、沈都用"同式形两量相比，所作四率，二三率相乘与一四率相乘同积"（即相似勾股形对应边成比例）的原理证明原术的正确。钱宝琮认为他们的图中"添线过多，恐不能符合刘徽造术的原意"③。

（四）对《缉古算经》的研究

《缉古算经》是《算经十书》中除《周髀》、《九章》外难度最大的。《四库全书》将汲古阁本抄入，没有戴震的校订。微波榭本是翻刻汲古阁本，但南宋本在汲古阁本影钞时最后3页6个题目已经严重烂脱。戴震在微波榭本中校补了第15、16、17问的部分文字。1803年张敦仁（1754～1834）撰《缉古算经补草》，校补了第18、19、20问的题目、答案和术文，但不理会王孝通自注，以天元术解释术文。李潢撰《缉古算经考注》，刊误补阙700余字。钱宝琮认为他对王孝通自注"改字太多，似非原注本意"。骆腾凤《艺游录》卷一之"重订缉古算经仰观台求乙高术"，对第2问自注的误文夺字做了校订，钱宝琮认为"基本能符合作者原意"。陈杰撰《缉古算经细草》一卷，以四率比例阐释术文。后又撰《缉古算经图解》三卷，《音义》一卷，对其讹舛文字"亦有所校订，但数量不多，且多与李潢所校正的雷同"④。揭廷锵于1831年撰《缉古算经图草》二卷，以西法补草。

三　宋元数学书的传刻与研究

《四库全书》中收入的宋元数学著作不多。现在已知存于《永乐大典》而未收入《四库全书》的宋元算书还有：杨辉《详解九章算法》十二卷、杨辉《日用算法》二卷（1262）、《杨辉算法》（1274～1275，三种七卷）、佚名《透帘细草》一卷、丁巨《丁巨算法》八卷（1355）、佚名《锦囊启源》、贾亨《算法全能集》二卷，安止斋、何平子《详明算法》二

① 清 · 李锐，《方程新术草》，见：《李氏算学遗书》，嘉庆二十四年（1819）刻板。
② 清 · 汪莱，《校正〈九章算术〉及戴氏订讹》，见：《衡斋遗书》，1892年刻板。
③ 钱宝琮，版本与校勘，钱宝琮校点《算经十书 · 海岛算经》，中华书局，1963年。
④ 钱宝琮，版本与校勘，钱宝琮校点《算经十书 · 缉古算经》，中华书局，1963年。

卷等。《算学启蒙》、《四元玉鉴》等是否录入《永乐大典》，不得而知。清中叶的学者们为抢救并研究这些著作殚精竭虑，成绩斐然。倘没有他们的工作，宋元数学的许多成就，例如可谓中国筹算数学顶级成就的四元术和招差术，便会石沉大海，永不见天日。

（一）对《数书九章》的研究

关于《数书九章》在清中叶的版本与流传情况，李迪的考证甚为详尽①。清中叶之后《数书九章》主要有两种版本系统：一是辑自《永乐大典》的《四库全书》本《数学九章》。一是1842年的《宜稼堂丛书》本，郁松年依据宋景昌校勘的明赵琦美抄《数书九章》刊刻。

《四库全书》本《数学九章》有大量“馆臣按”，其中有许多中肯的见解和校勘。但是，此馆臣及《数学九章提要》的作者是谁，都不得而知。《提要》云：大衍术“以零数推总数，足以尽奇偶和较之变，至为精妙”，其他各类“皆扩充古法。取事命题，虽条目纷纭曲折往复，不免瑕瑜互见，而其精确者居多”。李潢也藏有《数学九章》，应该抄自《四库全书》或直接辑自《永乐大典》，张敦仁曾借抄一部，曾与李锐共同讨论研究。秦恩复（1760～1843）也藏有《数学九章》，并进行了校证，准备刊刻，为此属顾广圻（1770～1839）复算。书未刻成，顾广圻却抄了一部，这个本子又传到李锐手中。可见李锐见过两种不同来源《数学九章》的抄本。李锐后来与焦循、汪莱对《数书九章》进行了深入研究，成就极大。

以明万历末年的赵琦美抄本《数书九章》为底本的《宜稼堂丛书》是150多年来最为流行的版本。郁松年在叙述其流传刊刻历程时说：“毛君生甫为予言：‘秦道古《数书九章》，思精学博。其中若大衍求一、正负开方两术尤为阐自古不传之秘。第其书转相钞录，讹脱滋多。元和沈广文曾得明人赵琦美抄本于阳城张太守家，订讹补脱，历有年所，以老病未卒业。其弟子江阴宋君景昌能传其学。’余因属毛君索其原本，会广文病甚，不可得。得其副于武进李太史家。毛君又出其家藏元和李茂才所校《四库全书》本，并属宋君为之雠校。嗣广文没，宋君又于其家搜得秦书，刊误残稿数卷。于是以赵本为主，参以各本，其文字互异义得两通者存其旧，其传写错落无乖算术者随条改正；其术、草纰缪或误后学者采众说而折衷之，别为《札记》，以资考证。书成，将署余名。余以未经究心，仍归之宋君，而为之叙其原起以付梓。太守名敦仁，茂才名锐，太史名兆洛，广文名钦裴，皆当世有道之士也。”② 毛生甫即毛岳生（1791～1841），张太守即张敦仁，李茂才即李锐，李太史即李兆洛（1769～1841），沈广文即沈钦裴。宋景昌以李兆洛抄的赵琦美本的副本为底本，主要参考了李锐校本、沈钦裴的校勘手稿，参以己意，完成《数书九章札记》四卷，附刻于《数书九章》之后。

除数学家之外，当时的著名学者如钱大昕、阮元、周中孚、陆心源等对秦九韶与《数书九章》都有论述。

---

① 李迪，《数书九章》流传考。见：吴文俊主编，《秦九韶与〈数书九章〉》，北京师范大学出版社，1987年。

② 清·郁松年，《数书九章》跋，见：《宜稼堂丛书》本《数书九章》，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册。

（二）对《测圆海镜》、《益古演段》的研究

明末徐光启在翻译《几何原本》之后对他了解的中国传统数学不以为然，然而对《测圆海镜》却很重视，甚至欲为之注释。清中叶第一个研究《测圆海镜》的是孔广森。他在《测圆海镜》卷一、二、三、七上做眉批，凡27条。卷七一条眉批末尾有“乙巳九月初七日森识”①，可见批于1785年。他次年去世，没有完成。孔广森眉批本《测圆海镜》原藏上海东方图书馆，1931年毁于日本侵华战火。幸亏李俨此前抄录，于1933年公布于世。孔广森的批注以卷七最多，有的指出原法繁琐，有的提出新法，没有校勘。

《四库全书》中的《测圆海镜》是四库馆臣以李潢家藏本为底本校勘而成的。此馆臣是不是李潢，没有记载。乾隆六十年（1795），阮元在浙江从文澜阁《四库全书》中抄录一部《测圆海镜》，请李锐为之注疏。李锐于嘉庆二年（1797）校毕，其跋云，阮元“以言立天元者莫详于《海镜》，惜其流传未广，将重付剞劂，出所藏旧抄本寄示，命为校勘。爰依术布算，订其算式，间有转写脱漏，设数偶合处，辄因管见所及，是正其讹凡若干条”。②。对于书中缺误秘奥难晓之处，李锐俱加案语注明，计凡百余处；原术有不通之处，别设新术以解之。李锐指出：“杂记数百条，乃是书之纲领，非此不能立算。”然而“其中亦有止合今问正数，而於它率不通者”，于是“依总率名号，新设四率于后，以考较之”③。1798年歙县鲍廷博将李校《测圆海镜》刻入《知不足斋丛书》第二十集。焦循、汪莱对《测圆海镜》都有深刻研究。此后对《测圆海镜》的诸多研究，大都以《知不足斋丛书》本为底本。

19世纪还有许多研究《测圆海镜》的著作，最为突出的是李善兰，他在1867年的《天算或问》中给出了容圆公式的统一表达式，又撰《测圆海镜解》。此外1873年张楚钟的《测圆海镜识别详解》，首次对“识别杂记”逐条证明，1889年陈维祺的《各率和较泛积表》用“泛积”的概念证明全部“识别杂记”④。1896年刘岳云的《测圆海镜通释》采用一般的方法叙述各类问题的解法，1898年叶耀元的《测圆海镜解》采用了近代数学符号，1898年王季同的《九容公式》从理论上说明了《测圆海镜》问题的统一性⑤。

鲍廷博又请李锐校算《益古演段》。李锐于1798年冬月完成付梓。

（三）对《详解九章算法》、《杨辉算法》的校勘

郁松年从毛岳生处得到石研斋抄本杨辉《详解九章算法》，仅存商功卷约半部、均输、盈不足、方程、勾股等卷及纂类卷，嘱宋景昌校勘后，1842年刻入《宜稼堂丛书》。石研斋是秦恩复之父秦黉（1722～?）的书斋，从卷五无委粟的内容看，此本很可能辑自《永乐大典》。因为在《永乐大典》中，委粟类不属于商功类，而是另列。宋景昌以微波榭本《九章

---

① 清·孔广森，测圆海镜批校。见：李俨，《中算史论丛》第四集，科学出版社，1955年。又见：李俨钱宝琮科学史全集，第八卷，辽宁教育出版社，1998年。

② 清·李锐，测圆海镜跋，见：知不足斋丛书本《测圆海镜》，又字见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册。

③ 清·李锐，“识别杂记”案，见：知不足斋丛书本《测圆海镜》，又字见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册。

④ 梅荣照，李冶及其数学著作。钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年。

⑤ 孔国平，测圆海镜提要，见：中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册。

算术》为蓝本校勘其中的《九章算术》本文、刘徽注、李淳风等注释。包括他对贾宪细草和杨辉详解的校勘在内，既有正确的，也有错误的，甚至将不误的文字改错①。

《杨辉算法》包括《乘除通变本末》三卷、《田亩比类乘除捷法》二卷和《续古摘奇算法》二卷凡三种七卷。传入朝鲜、日本，影响巨大。然而在国内至清初，却阙《续古摘奇算法》卷上，多以六卷本流传。明末毛氏汲古阁影抄了宋刻本，亦只有六卷。但到清中叶，这种六卷本也很难见到。1810年阮元从《永乐大典》辑出杨辉的《续古摘奇算法》卷上，1814年由鲍廷博刻入《知不足斋丛书》第二十七集。1842年郁松年索得汲古阁本的转抄本，嘱宋景昌校勘，刻入《宜稼堂丛书》。

朝鲜于宣德八年（1433）重刊明洪武戊午年（1378）刻本（七卷本），日本和算泰斗关孝和（？～1708）于宽文辛丑年（1661）抄写了朝鲜宣德本。李俨请人重抄了关孝和本，1993年影印收入《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册。

（四）对朱世杰《算学启蒙》与《四元玉鉴》的研究

清中叶发现《四元玉鉴》要比《算学启蒙》早。

关于《四元玉鉴》的版本与研究情况，李兆华的论述甚为全面而准确②。1761年梅瑴成（1681～1763）《赤水遗珍》引用过《四元玉鉴》"或问歌彖"2问。不知为什么，《四元玉鉴》没有收入《四库全书》。嘉庆初年阮元抚浙时购得元《四元玉鉴》三卷抄本，并进呈清政府，这就是宛委别藏本，今藏台北故宫博物院。1981年台北商务印书馆影印出版。阮元自己抄录了副本，嘱李锐演算细草。李锐演草未果而殁。今国家图书馆藏王萱铃《四元玉鉴》抄本一册，其卷中"如意混合"门第一题等处有李锐按语数条，均冠以"锐按"两字。王萱铃说系从黎应南处抄得，黎应南本显系李锐演草未果之本。

王萱铃抄本还有沈钦裴写于1820～1821年的按语，当系王萱铃交沈钦裴校订的。这些按语都包含在他的《四元玉鉴细草》中。沈氏细草自序于1829年底，没有刊刻。国家图书馆藏两个抄本，均不分卷。一本题《四元玉鉴细草》，另一部题《四元细草》。李俨藏后者的转抄本，1993年影印收入《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第5册。

约在1818～1822年间，何元锡刊刻了阮元抄录的宛委别藏本副本。此本先后成为罗士琳与戴煦两部《四元玉鉴细草》的底本。罗氏《细草》三卷，完成于道光十四年十二月（1835年1月），有初刊本与改刊本之别。初刊本附易之瀚的《释例》，刊于1837年冬。罗士琳对初刊本进行订正，并撰《补增诸例》，两年之后刊刻，是为改刊本。戴氏《细草》三卷，自序于道光二十四年（1844），没有刊刻，有抄本藏于台湾清华大学历史研究所。沈、罗、戴三家细草均注重对《四元玉鉴》的校勘。他们的校勘重点集中于17个题目，既有颠扑不破的纠误，也有失校或误校。唯沈本径改误文，多数不出注，罗、戴二本一般不改原文而出校勘记。罗士琳提出校改130余处。

清中叶之后对《四元玉鉴》的研究主要集中在两个方面。其一，关于四元消法的研究，可以以沈钦裴、李善兰、陈棠为代表，以沈钦裴对四元消法的解释最为可取。李善兰、陈棠则力求所得方程简易。其二，关于垛积术与招差术的研究，这在第三十二章还要讲。

---

① 郭书春，评宋景昌对《详解九章算法》的校勘，自然科学史研究，1994，13（3）。

② 李兆华，朱世杰及其《四元玉鉴》见：李兆华，四元玉鉴校证，科学出版社，2007年。

《算学启蒙》在自明至清中叶没有记载，却一直在朝鲜、日本流传。罗士琳在完成《四元玉鉴细草》后，从北京得到朝鲜金始振 1660 年的重刊本，详加校勘，1839 年刻于扬州。

（五）其他宋元算书的搜集

鲍廷博在 1814 年出版《知不足斋丛书》第二十七集，收入了《透廉细草》残本和丁巨《丁巨算法》残本一卷，可能是出自阮元的抄本。

此后莫友芝（1811～1871）子绳孙旧藏的《诸家算法及序记》抄本中收有《日用算法》、《丁巨算法》、《透帘细草》、《锦囊启源》残文和《算法全能集》、《详明算法》、《通原算法》等书的部分内容及诸算经序跋。

四　《畴人传》及其续编

《畴人传》四十六卷是清嘉庆年间问世的一部述评历代天文学家、数学家学术活动的传记集。这是最早出现的关于中国天文学家、数学家的传记巨著。道光年间又有《续畴人传》六卷出版。光绪年间编纂的《畴人传》三编、四编一并在这里叙述。

（一）《畴人传》

1.《畴人传》的编纂

《畴人传》题"阮元撰"。《凡例》云："助元校录者，元和学生李锐暨台州学生周治平力居多。"华蘅芳则称："正传成于阮氏，实为元和李氏手笔。"[①]《凡例》署"阮元手订"，也说明正文作者不是阮元。所谓"李氏手笔"实际是就各传的正文而言。各传后面的"论"似乎主要出自阮元之手。"论"中多处有"李尚之云云"，又有"元谓云云"字样，便是明证。

关于李锐的简历后面专门介绍，这里仅谈阮元与周治平。阮元（1764～1849），字伯元，号云台，亦号芸台，江苏仪征人。乾隆五十四年（1789）进士，入翰林院参与编定书画，校勘石经，先后任山东学政、浙江学政，1798 年任满赴京，入直南书房。次年二月充经筵讲官，寻任户部左侍郎，九月兼管国子监算学，后授浙江、河南、江西巡抚，两湖、两广、云贵总督等封疆大吏，最后以体仁阁大学士、经筵讲官致仕。阮元一向提倡朴学，热心培养人才。在各处罗致学者，编书刊印。他本人也亲自动手。他曾说："余无狗马丝竹之好，又不能饮，惟日与书史相近，手披笔抹，虽似繁剧，终不似著书之沉思殚精。"[②]

周治平，字起锋，浙江台州临海县人，生卒年不详。他不擅长八股时文，多年考不上秀才，改学天文、数学。[③] 阮元任浙江学政到台州时，他"握算就试"，得阮元赏识，被"特拔入学"。

《畴人传》是清代重新兴起的古典天文、数学研究热潮的成果。关于《畴人传》的编纂年代，阮元在《凡例》中说："是编创始于乾隆乙卯，毕业于嘉庆己未"，即 1795～1799

---

① 华蘅芳，《学算笔谈》卷十二。
② 阮元，《定香亭笔谈》，卷四。
③ 张寅修、何奏簧纂，《临海县志稿》卷二十二，1935 年。

年。然而，张鉴与阮元之子阮常生所著《雷塘庵主弟子记》卷三云，嘉庆十五年（1810）十月“前与李锐商纂《畴人传》，至是写定。”我们认为，合乎逻辑的编纂过程是：1795 年阮元产生编纂《畴人传》的想法。1797 年初与李锐商妥编纂方法，由李锐动手于 1799 年完成人物传记资料的收集撰写。此后周治平校录，阮元陆续撰写传后的“论”，于 1810 年定稿出版。

2.《畴人传》的内容

“畴人”一词最早见于司马迁的《史记》：“幽、厉之后，周室微，陪臣执政，史不计时，君不告朔，故畴人子弟分散，或在诸夏，或在夷狄。”① 这里的“畴”字，后世注疏很多，诸说纷纭。多数人接受三国魏如淳的说法：“家业世世相传为畴……各从其父学。”“畴”的本义是田地，农人就是世世相传的。《史记》文中“畴人”与“记时”、“告朔”相联系，无疑指的是那些掌握天文历算等专门知识、世世相传的人。不过在后来的很长时间里，畴人一词并没有被人们所习用。只是到了阮元、李锐等编纂这部以历算家传记为基础的巨著，畴人一词才获得明确的含义，作为天文、数学家的称谓广泛流行开来。

《畴人传》初编四十六卷。前四十二卷 233 篇，记载上起传说中三皇五帝时代，下迄嘉庆四年（1799）去世的中国天文历法学家和数学家 275 人。后四卷作为附录，36 篇，记载西洋天文学家、数学家和来华传教士 41 人。

各篇多由传、论两部分构成。传通常在姓名、字号、籍贯、科举出身和主要官职之后，以主要篇幅介绍传主有关天文、数学的“议论行事”，对有关改历的奏章、论文、辩难经过记录颇详。有天文、数学著作的，不论存佚，都列出名目，并常记其摘要，录其序言、凡例等，于研究有关学者的学术思想非常方便。传中对学者的生平和著作问世时间则通常不提及。这些传记都不含编者的推演之词，而是“掇拾史书，荟萃群籍，甄而录之”（阮元《畴人传序》）。编者利用了杭州文澜阁所藏《四库全书》，二十四史的志、传，还有历代的天文、历法、数学原著，学者笔记，文集，以及书目、地方志等 120 余种。年代较近的清代学者传记则包含不少查访所得的材料。西洋人传记取材于明末以后翻译编撰成的介绍西方天文算法的中文书籍，有《新法算书》等数十种。

《畴人传》的宗旨是“综算氏之大名，纪步天之正轨”（《畴人传序》）。书中各传的内容围绕着天文、数学的发展这个“正轨”，连接成一个完整的链条。因此，它并不对人物的生平做全面的记述，而只是介绍其有关天文、数学的言论和事迹。例如，东汉郑玄编注群经，极受清乾嘉学派的推重，而《畴人传》郑玄传对此无一字提及，只介绍他通《三统历》、《九章算术》，注《乾象历》的事，不过寥寥几十字。

在各传后的“论”中，编者或者对人物的思想和工作进行评说，指其得失，予以褒贬，或者对学术的源流沿革进行分析，其中不乏真知灼见。

《畴人传》把历法沿革作为一条重要的线索，特别是在书的前半部对明代以前的部分给予很大的篇幅。《畴人传》中多次说“二千年来术经七十改”，实际书中提到名目的历法便有 90 余种。《畴人传》结合一系列天文历法家的活动，突出介绍了自汉代太初历以后 70 余历的缘起、制定经过、主要数据，评论各历的优劣，对有创新的都明确指出。西汉《太初历》和《三统历》是史书留下制订经过记载的最早两部历法。《畴人传》分别做了较详细的

① 司马迁，《史记·历书》，中华书局，1959 年。

介绍。唐一行等制订《大衍历》，是中国古代历法史上的一座重要的里程碑。一行传全文引载《大衍历议》12篇和关于大规模观测的论文，不惜花三卷的篇幅。元郭守敬组织人力创制仪器，长期观测，精心编制《授时历》，取得空前成就。《畴人传》在传后论中称赞说："简仪、仰仪、景符、阙几之制，前此言测候者未之及也；垛叠、招差、勾股弧矢之法，前此言算造者弗能用也。先之以精测，继之以密算，上考下求，若应准绳，施行于世，垂四百年，可谓集古法之大成，为将来之典要者矣。"（《畴人传》卷二十五）

值得赞赏的是，《畴人传》编者对其不理解、不赞同的东西并不一概抹杀。宋沈括设想的《十二气历》在中国历史上第一次提出以单一的太阳历代替阴阳历的科学主张，但当时无法得到实施，以后也长期没能被人理解。《畴人传》的编者虽然说它"不合经义"，但仍详细地记载了《十二气历》的资料。

《畴人传》编者指出："算造根本，当凭实测；实测所资，首重仪表。"（《畴人传 · 凡例》）认识到观测仪器是天文历法活动的重要条件，因而对历代天文观测仪器的创制、改进资料做了详细摭录。对各种仪器的设计意图、基本形制记载都比较具体。书中明以前部分明确提到发明、改进或制造仪器的就有40余人，约占书中同期人物的四分之一。

中国古代数学与历法关系密切，合称步算或历算。《畴人传》指出："算术者，推步之纲维也，……极乎数之用，则步天为最大。"（《畴人传 · 凡例》）《畴人传》论中关于数学知识源流的分析，有不少精当的见解。在卷五刘徽传后论中，编者谈到刘徽创始割圆术："周三径一，于率尚粗，徽创以六觚之面，割之又割，以求周径相与之率。厥后祖冲之更开密法，仍是割之又割耳。"

可惜《畴人传》初编不谈恒星观测，对有关的天文学家、一些重要观测活动、一些有意义的天文现象基本上不提及。

3.《畴人传》的思想倾向

《畴人传》反对迷信，明确宣布："《新唐书》载李淳风逆知武氏之乱，《宋史》载刘羲叟预知辽主之亡，此类当时传者之过。……并非九数所能推测，……是编一律删除。"（《畴人传 · 凡例》）对《孙子算经》中"计算"生男生女的问题便尖锐指斥道："卷末推孕妇所生男女，鄙陋荒诞。"（《畴人传》卷一）编者在剔除和批判混杂于科学之中的迷信成分的同时，对打着星占一类招牌的东西，更是采取坚决摒弃的态度："是编著录，专取步算一家，其以妖星、晕珥、云气、虹霓占验吉凶，及太一、壬遁、卦气、风角之流涉于内学者，一概不收。"（《畴人传 · 凡例》）。

作为封建官僚，编者阮元的政治思想是保守的，但《畴人传》在评述历史人物和事件时，有不少批判守旧、表彰创新的文字。《畴人传》就东汉熹平四年蔡邕对冯光、陈晃相信图谶的批评评论说："步算之道，惟其有效而已。光、晃执图谶之一言，以疑《四分》，邕以新元有效于今析之。真通儒之论也！'今术之不上通于古，犹古术之不能下通于今'，伟哉斯言，虽圣人无以易也！使不效于今，即合于古，无益也；苟有效于今，即不合于古，无伤也。"（《畴人传》卷四）可谓态度鲜明，议论痛快。

西学中源说作为一种偏见贯穿着《畴人传》的始终。然而《畴人传》并不排斥学习西方先进的科学知识，而是热情赞许"择取西说之长"。

对于在引进西方科学知识方面做出贡献的学者都给予充分肯定。卷三十二李之藻传说：李之藻、徐光启、李天经引进西方历算"其有功于授时布化之道，岂浅小哉！"徐光

启传后论说："自利氏东来，得其天文、数学之传者，光启为最深。洎乎督修《新法》，殚其心思才力，验之垂象，译为图说，洋洋乎数千万言，反复引申，务使其理其法足以人人通晓而后已。……迄今甄明西学者，必称光启。"一部《畴人传》，所记数百学者，得到编者这样高赞赏的，实在寥寥无几。与此形成鲜明对比的是魏文魁传后论："文魁主持中法以难西学，然其造诣较唐宋术家固已远逊，反复辩论，徒欲以意气相胜，亦多见相不知量矣。《畴人传》所收学者中，最受编者激烈批评的，也无过于此了。

（二）《续畴人传》

《畴人传》出版之后，湮没已久的宋元时代的杨辉、朱世杰的数学著作又被重新发现。明安图的《割圜密率捷法》也获出版。几十年间，乾嘉时代有成就的天文、数学家相继谢世。因而，《畴人传》的续补被人们提上了日程。其实，这件事早在《畴人传》出版之前就已经在阮元的设想之中了。道光二十年（1840）罗士琳撰成《续畴人传》，共六卷，包括"补遗"两卷和"续补"四卷。前有阮元的序。

"补遗"两卷介绍宋元时代的和《畴人传》出版前去世而《畴人传》没有收录的学者17人。一个例外是杨辉，《畴人传》中已经有传，《续畴人传》又为他立了传。这是因为在《畴人传》编纂时还没见到杨辉的著作，所以传很简略。过后，阮元从《永乐大典》中抄得杨辉《续古摘奇算法》和《田亩比类乘除捷法》的片段，再后，又访得了《杨辉算法》的其他算书。

编者根据自己的多年研究，对朱世杰的成就做了详细的述评。传二千字，论却达千字。"汉卿在宋元间，与秦道古、李仁卿可谓鼎足而三。道古正负开方，仁卿天元如积，皆足上下千古。汉卿又兼包众有，充类尽量，神而明之，尤超越乎秦、李两家之上。其茭草形段、如像招数、果垛叠藏各问，为自来算书所未及。"

《续畴人传》的"续补"四卷，介绍嘉庆、道光年间去世的学者27人。乾嘉时代的活跃人物基本都在其中。编者收集材料丰富，叙述各学者的经历。所取得的成就，著述情况，都比较翔实。编者对少数民族数学家明安图的述评也很有意义。

《续畴人传》与《畴人传》思想倾向是一致的。在《续畴人传》末尾，罗士琳写道："彼欧逻巴自诩其法之精且密，妄谓胜于中法。究其所恃者，不过三角八线六宗三要，与夫借根方、连比例诸法而已。其实所恃之诸法，又安能轶乎吾中土之天元、四元、缀术、大衍，与夫正负开方、垛积招差诸法之上哉？"事实上，在那个年代，西方数学已进入变量数学时代，远远超过中国，罗士琳一无所知，当然无法超越《畴人传》。

（三）《畴人传三编》与《畴人传四编》

1884年，华蘅芳《学算笔谈》卷十二最后一节"论畴人传必须再续"，其弟华世芳撰《近代畴人著述记》一文，收录阮元至曾纪鸿共33名数学家的数学著作提要。

钱塘（今杭州）诸可宝（1845～1903），上承《畴人传》的体例，续成《畴人传三编》七卷。光绪十二年（1886）其序云："阮先罗后，畴人列传，迄今甲申，垂五十年，聪明才智，我有人焉。"其中，卷一、卷二补清初至道光末年间已故畴人30人，附2人。卷三至卷六续道光末年至光绪十年间已故畴人31人，附27人。卷七附录清代女畴人3人，西洋11人，附见5人。是书记载传主多属平实，惟以"西学中源说"知人论学则免

畛域之见。

湖南澧州（今澧县）黄钟骏由其四个儿子协助编纂《畴人传四编》十一卷附一卷，光绪二十四年（1898）刊入《留有余斋丛书》。是书意在补阮、罗、诸三书遗漏之畴人，收国人247人，附28人。西洋99人，附54人。附录名媛3人，附1人。西洋名媛1人，附3人。是书所收传主，或原无著述，或所著早已无考，传论亦难指实，是已有定评。

第三节　传统数学的研究与发展

一　谈天三友和其他数学家

（一）谈天三友

18世纪末19世纪初的三位数学家焦循、李锐、汪莱不仅数学、天文造诣精深，而且交往密切，感情笃厚，史称“谈天三友”。

焦循（1763～1820），字理堂，号里堂，江苏甘泉（今扬州市）人。嘉庆六年（1801）举人。次年，赴京会试不第。自是，家居读书，不入城市者十余年。能博闻强识且识力精卓。经、史、历算、音韵、训诂等无所不通。所著书多达数百卷。殁后，阮元为焦循作传，称之为通儒，时人以为当之无愧。乾隆六十年（1795），在杭州得读《益古演段》、《测圆海镜》，稍后又得读《数书九章》。焦循自谓：“予幼好九九之学，虽求之古书而不能得其指归。自交吴中李尚之锐、歙县汪孝婴莱，得两君切磋之益，于此艺少有进。而两君亦时时以所得见示，令商论其可否。”其数学著作《里堂学算记》有嘉庆四年刊本，包括《释轮》二卷（1796）、《释椭》一卷（1796）、《加减乘除释》八卷（1798）、《释弧》三卷（1798）、《天元一释》（1800）。另有《开方通释》一卷（1801）有木樨轩丛书本等版本。《乘方释例》五卷（1796），今传稿本。

汪莱（1768～1813），字孝婴，号衡斋，安徽歙县人。少时家贫，曾掘草根以佐食，而力学不辍。年十五入庠。嘉庆十二年（1807），以优贡入都考取八旗官学教习。翌年，入国史馆修天文志、时宪志。嘉庆十四年（1809），授安徽石埭县儒学训导。嘉庆十八年（1813），殁于石埭教职。焦循《石埭县儒学训导汪君孝婴别传》称，汪莱之为人“倔强，不少假借”，为官“公事依例独行，不为利疚威惕”，为学则“天资敏绝，性能攻坚”。乾嘉时期，考据学为当时的学术主流。对此，汪莱持有批评意见，尝言“今世考据家陈陈相因，不过剿袭前言耳，非能发古人所未发也”。江藩《汉学师承记》称汪莱，“十三经注疏皆能背诵如流水，而又能心通其义。”于文字、音韵等亦称精通，而数学成就尤为突出。焦循《别传》评曰：“人所言不复言。所言皆人所未言与人所不能言。”汪莱生前自刻《衡斋算学》七册。殁后八年，门人夏炘（1789～1871）、夏燮（1800～?）检点乃师未刻文稿。至道光八年（1828）编次粗定。夏炘复以胡培翚（1782～1849）所藏“《校正九章算术》及遗文十余首”增入，遂成《衡斋遗书》九卷。咸丰四年（1854），夏燮将算书七册并遗书九卷刊于鄱阳县署，题称《衡斋算学遗书合刻》。此本即汪莱著作最早的完整刻本。

李锐（1769～1817），字尚之，号四香，江苏元和（今苏州）人。少时，从钱大昕（1728～1804）受经学、数学。嘉庆二年（1797）协助阮元（1764～1849）编纂《畴人

传》。嘉庆七年（1802），为张敦仁（1754～1834）校算《缉古算经细草》三卷，《求一算术》三卷。嘉庆十年（1805），又为之校算《开方补记》八卷，《通论》一卷。李锐精于历算，所著书汇刻为《李氏遗书》十一种十八卷。通行的版本是光绪十六年（1890）上海醉六堂重刊本。其中，数学著作包括《弧矢算术细草》一卷（1798），《勾股算术细草》一卷（1806），《方程新术草》一卷（约1808），《开方说》三卷（1814年前成前二卷，1817年黎应南补卷下）。嘉庆二年（1797），李锐完成《测圆海镜》十二卷、《益古演段》三卷的校订工作。其后的各种版本均以李锐校订本为据。

焦循、汪莱、李锐是乾嘉之际三位重要的数学家，其数学成就当时为世人所瞩目。自罗士琳《续畴人传》（1840）之后，论者多推李锐的成就较二者为胜。焦循《加减乘除释》卷首黄承吉序（1798）有更为公允的评论："孝婴之学主于约，在发古人之所未发而正其误，其得也精。尚之之学主于博，在穷诸法之所由立而求其故，其得也贯。里堂则以精贯之旨推之于平易，以为理本自然。"

（二）其他数学家

孔广森、张敦仁、骆腾凤、沈钦裴、罗士琳等也是清中叶的著名数学家。

孔广森（1752～1786），字众仲，又字撝约，号顨轩，山东曲阜人。孔子第六十八代孙，袭封衍圣公。乾隆三十六年（1771）进士，选翰林院庶吉士，散馆授检讨。不久，告归，潜心著述。数学著作有《少广正负内外篇》，内外各三卷。收入《孔顨轩所著书》，有嘉庆十九年（1814）刊本等版本。

张敦仁（1754～1834），字古愚，一字古余，山西阳城人。乾隆四十三年（1778）进士。先后任江西高安知县、江苏松江知府、江西吉安知府等。道光二年（1822），擢云南盐法道。后以老病辞官，寓居江宁。张敦仁与当时的数学家有广泛的交往，与李锐交谊尤深。现传张敦仁数学著作三种均由李锐校算。张敦仁认为，古算"最善者则有二术。一曰天元一，一曰求一。尽方圆之变莫善于立天元一，穷奇偶之情莫善于求一"。数学著作有《缉古算经细草》不分卷（1803），有知不足斋从书本等版本，《求一算术》三卷（1803），有道光十一年（1831）刊本，《开方补记》八卷附《通论》一卷（1805），有道光十四年刊五卷并抄补四卷全九卷本。

骆腾凤（1770～1841），字鸣岗，号春池，山阳（今江苏淮安）人。嘉庆六年（1801）举人。后考取觉罗官学教习。道光六年（1826）授舒城（今安徽舒城）县学训导。未及一年告归，教读乡里。在京期间曾师李潢（？～1812），曾校订乃师《海岛算细草图说》（1820年刊）。著有《开方释例》四卷（1815），《艺游录》二卷（1815），通行的版本是道光二十三年（1843）何锦校刊本。

沈钦裴，字侠侯，号狎鸥，元和（今苏州）人。生卒年月不详。嘉庆十二年（1807）举人。道光三年（1823）授荆溪（今江苏宜兴）县学训导。为李潢《九章算术细草图说》九卷（1820年刊）算校，又为《海岛算经细草图说》补草。著有《四元玉鉴细草》不分卷（1829），今传抄本，六册（题称《四元细草》）。校注《数书九章》（1247），收入宋景昌《数书九章札记》（1842）中。又有《重差图说》不分卷，道光四年（1824）自序，今传抄本。

罗士琳（1789～1853），字次璆，号茗香，甘泉（今扬州）人。贡生，曾考取钦天监天

文生。早年从其舅秦恩复（1760～1843）受举子业。后尽弃之，专力算学。道光二年（1822）到北京应试，始见《四元玉鉴》。翌年，据黎应南抄本与何元锡（1766～1829）刻本研究《四元玉鉴》。历时十二年，成《四元玉鉴细草》三卷（1835）。道光十七年（1837）初刊，十九年（1839）改刊，始成定本。附易之瀚《释例》、罗士琳《补增诸例》。道光十九年（1839），又获朝鲜金始振重刊本《算学启蒙》三卷，即予校正并附《识误》、《后记》各一篇于卷末。自是《算学启蒙》复流传于中土。自嘉庆四年（1799）起，至道光二十年（1840）的数十年间，古算书又有发现，前辈数学家或已逝世。罗士琳编为《续畴人传》六卷（1840）以续《畴人传》之后。此外自著《勾股容三事拾遗》三卷附一卷（1826），《演元九式》不分卷（1827），《台锥积演》不分卷（1837），《三角和较算例》不分卷（1840），《弧矢算术补》不分卷（1843），均收入《观我生室汇稿》。

二　方程论研究

（一）孔广森的研究

孔广森《少广正负内篇》关于高次方程的分类和解法具有新意。其中，论立方列出带从立方：

①$x^3+156x-3600=0$　　②$x^3+13x^2-3600=0$

③$x^3+5x^2+96x-3600=0$　　④$x^3+20x^2-84x-3600=0$

减从立方：

①$x^3-84x-720=0$　　②$x^3-7x^2-720=0$

③$x^3-3x^2-48x-720=0$　　④$x^3-82x^2+900x-720=0$

负隅立方：

①$-x^3+384x-2880=0$　　②$-x^3+32x^2-2880=0$

③$-x^3+15x^2+204x-2880=0$　　④$-x^3+40x^2-96x-2880=0$

⑤$-x^3-7x^2+468x-2880=0$

以上正负方廉共13种。而每种的隅又不限于绝对值等于1。例如，连枝正隅立方（见带从立方第4方程）

$$2x^3+x^2-225x-900=0$$

连枝负隅立方（见负隅立方第3方程）

$$-2x^3+9x^2+255x-900=0$$

以上各方程均有正根 $x=12$。

《数理精蕴》下编卷三十二借根方比例将带从立方分为9种，是有遗漏。孔氏的13种情形较之多出“负隅立方”的第1，第3，第4，第5共四种使之趋于完备。事实上，除去最简单的开立方 $x^3=N$ 的情形之外，上述13种方程是有正根的三次方程的全部情形，无重复无遗漏。类似地还罗列了四次方程的情形。这是《数理精蕴》相应工作的一个补充。从上列各方程的排列情形还可看出，“带从立方”1～4，“减从立方”1～3，共7种方程有且仅有一正根。“减从立方”4有一正根或三正根。“负隅立方”1～5有二正根。这种排列当非偶然。

《少广正负内篇》的方程正根求法的步骤大致如下。设有方程

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx-e=0$$

式中，$a\neq0$，$e>0$，b、c、d 不同时为零。求得初商 x_1 之后，求次商 x_2 的余实 $e-(ax_1^4+bx_1^3+cx_1^2+dx_1)$。再求“右定” $b(x_1+x_2)^2+d$，“左泛” $a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c$，“左定” $(2x_1+x_2)\{a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c+bx_1\}$。由此得

$$x_2=\frac{\text{余实}}{\text{右定}+\text{左定}}=\frac{e-(ax_1^4+bx_1^3+cx_1^2+dx_1)}{[b(x_1+x_2)^2+d]+(2x_1+x_2)\{a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c+bx_1\}}$$

所求的根

$$x=x_1+x_2$$

这种求根的方法也有《数理精蕴》借根方比例解法的影响。设 $x=x_1+x_2$，代入方程

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx=e$$

得

$$a(x_1+x_2)^4+b(x_1+x_2)^3+c(x_1+x_2)^2+d(x_1+x_2)=e$$

整理，得

$$(ax_1^4+bx_1^3+cx_1^2+dx_1)+x_2[b(x_1+x_2)^2+d]+x_2(2x_1+x_2)\{a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c+bx_1\}=e$$

故

$$x_2=\frac{e-(ax_1^4+bx_1^3+cx_1^2+dx_1)}{[b(x_1+x_2)^2+d]+(2x_1+x_2)\{a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c+bx_1\}}$$

若 x_2 不入算，即省略上式等号右端各项中的 x_2，则

$$x_2=\frac{e-(ax_1^4+bx_1^3+cx_1^2+dx_1)}{(bx_1^2+d)+2x_1\{a[x_1^2+x_1^2]+c+bx_1\}}=\frac{e-(ax_1^4+bx_1^3+cx_1^2+dx_1)}{4ax_1^3+3bx_1^2+2cx_1+d}$$

即

$$x_2=\frac{-f(x_1)}{f'(x_1)}$$

所求的根

$$x=x_1+x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

或

$$x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}。$$

此即借根方比例介绍的求根法的表达式。孔氏的方法更以 x_2 入算以致繁琐。自清代骆腾凤《开方释例》批评孔氏的工作，后之论者亦未深察，致使孔氏的这一工作未能引起注意。对于当时传入的借根方法，孔氏的理解比较深刻且有补充。在当时“中西之争”的背景之下，《少广正负内外篇》反映出孔氏认同西算的倾向。

（二）汪莱的贡献

汪莱《衡斋算学》第二册（1798）、第五册（1801）和第七册（1805）专论方程且做出显著贡献。

第二册发现三次方程 $x(p-x)^2=q$，$0<x<p$ 有二正根并给出解法。梅瑴成（1681～1763）在编纂《数理精蕴》时指出，已知勾股形面积 $\frac{1}{2}ab$，勾弦和 $c+a$（或股弦和），求勾

股形，可归结为下列三次方程

$$y^2\left(\frac{c+a}{2}-y\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}ab}{2(c+a)}$$

由此解得 $y=a$，进而可得 c，b。梅氏的方法正确而结果不完整。囿于对方程正根个数的认识，梅氏仅得合题意的一正根而失掉一正根。汪莱指出，已知勾股形面 $\frac{1}{2}ab$，勾弦和 $c+a$（或股弦和），必得两勾弦较 $c-a$，各与勾弦和联立，解得两勾股形。因

$$\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}=(2a)^2(c-a)=[(c+a)-(c-a)]^2(c-a)$$

令 $c-a=x$，则

$$x[(c+a)-x]^2=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a} \tag{29-3-1}$$

即方程（29-3-1）有两个合题意的正根 $x_1=c_1-a_1$，$x_2=c_2-a_2$。

当时尚不了解由方程（29-3-1）直接求出 x_1，x_2 的方法，汪莱从两勾弦较的关系出发另立新法。汪莱指出：

> 两勾弦较两数及两勾弦较相并与勾弦和相减之余数必为连比例三率。两勾弦较两数必为首末二率，两勾弦较相并与勾弦和相减之余数必为中率。

若记 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a_1b_1=\frac{1}{2}a_2b_2$，$c+a=c_1+a_1=c_2+a_2$，则有

$$(c_1-a_1)(c_2-a_2)=\{(c+a)-[(c_1-a_1)+(c_2-a_2)]\}^2$$

或即

$$\begin{cases}x_1x_2=G^2\\x_1+x_2=(c+a)-G\end{cases} \tag{29-3-2}$$

其中，x_1 和 x_2 分别称为首率和末率，G 为中率。公式（29-3-2）是一个重要的关系式，其正确性亦不难证明。既得公式（29-3-2），汪莱进一步给出 x_1，x_2 的解法。建立方程

$$G^2[G+(c+a)]=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a} \tag{29-3-3}$$

$$x\{[(c+a)-G]-x\}=G^2 \tag{29-3-4}$$

由方程（29-3-3）求得中率 G，代入方程（29-3-4）即可求得长阔二根分别为 x_1，x_2。公式（29-3-3）有一正根，公式（29-3-4）有二正根。汪莱此法有且仅有两勾弦较。

方程（29-3-3）的建立是关键。若求得公式（29-3-3）则由公式（29-3-2）即可得公式（29-3-4）。公式（29-3-3）推导的大致过程如下。由公式（29-3-1）可得

$$x_1[(c+a)-x_1]^2=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}$$

$$x_2[(c+a)-x_2]^2=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}$$

两式左右分别相乘，所得等式两端同时开平方，并注意到公式（29-3-2），即得公式（29-3-3）。

汪莱给出例子：已知$\frac{1}{2}ab=210$，$c+a=49$，有两勾股形20，21，29；12，35，37。此例相当于给出方程

$$x\ (49-x)^2=\frac{(4\times 210)^2}{49}$$

合题意的二正根$x_1=9$，$x_2=25$。该方程的另一正根是64，不合题意。

汪莱还指出，已知体积V，高阔和a，求带从扁立方

$$x\ (a-x)^2=V \tag{29-3-5}$$

有两解。其解法同方程（29-3-1）。汪莱给出例子：已知带从扁立方体积900，高阔和19，高有两解9，4。此例相当于给出方程$x\ (19-x)^2=900$合题意二正根$x_1=9$，$x_2=4$。该方程的另一个正根是25，不合题意。

第五册系统讨论有实根的二次方程和三次方程正根的个数，无正根的情形不予讨论。本册依系数之符号列举96条，整理之后共得16个方程。有实根的二次方程和三次方程共23个，除去开平方、开立方的3个，无正根的4个，其余共16个有正根。汪莱的16个方程即此有正根的16个方程，无重复无遗漏。凡方程有一正根者称为可知，有多正根者称为不可知，有一正根或多个正根者称为可知或不可知。其中，指明可知者九个52条，指明可知或不可知者一个8条，指明不可知者六个36条：

$ax^2-bx-c=0$（第一条等八条），$ax^2+bx-c=0$（第二条等八条），$ax^3-cx-d=0$（第三条等四条），$ax^3+cx-d=0$（第四条等四条），$ax^3-bx^2-d=0$（第七条等四条），$ax^3+bx^2-d=0$（第八条等四条），$ax^3-bx^2-cx-d=0$（第四十九条等六条），$ax^3+bx^2-cx-d=0$（第五十条等八条），$ax^3+bx^2+cx-d=0$（第五十二条等六条）。

不可或不可知者：

$ax^3-bx^2+cx-d=0$（第五十一条等八条）。

不可知者：

$ax^2-bx+c=0$（第五条等八条）；$ax^3-cx+d=0$（第九条等四条），$ax^3-bx^2+d=0$（第十一条等四条），$ax^3-bx^2+cx+d=0$（第五十三条等六条），$ax^3-bx^2-cx+d=0$（第五十五条等八条），$ax^3+bx^2-cx+d=0$（第五十七条等六条）。

式中，a、b、c、$d>0$。这一事实已就二次方程和三次方程的情形揭示出笛卡儿符号法则。在可知或不可知的方程（第五十一条）讨论中，汪莱给出可知、不可知的判别方法，其中蕴含着虚根共轭的意义。

上述16个方程经过变换归结为如下的十个基本方程，而后运用或变通《数理精蕴》下编卷十一及下编卷二十四所载开带从和较平立方之法解之。

$$x(p\pm x)=q \qquad x^2(x\pm p)=q$$

$$x(x+p)(x+q)=r \qquad x^2(p-x)=q$$

$$x^2(x+p)\pm qx=r \qquad x^2(x-p)\pm qx=r$$

式中，p、q、$r>0$。

第五册第五十一条及其补法讨论方程

$$ax^3-bx^2+cx^2-d=0 \tag{29-3-6}$$

的解法。汪莱依 $d>\frac{bc}{a}$，$d<\frac{bc}{a}$，$d=\frac{bc}{a}$分别讨论并归结为基本方程求解，如表 29-3-1 所示。

表 29-3-1　方程 $ax^3-bx^2+cx^2-d=0$ 解法讨论

<table>
<tr><th>方程</th><th colspan="4">条件</th><th>归结的基本方程</th></tr>
<tr><td rowspan="7">$ax^3-bx^2+cx^2-d=0$</td><td colspan="4">$d>\frac{bc}{a}$</td><td>$x^2(x-p)+qx=r$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$d<\frac{bc}{a}$</td><td rowspan="5">$x^3-px^2+qx-r=0$
$(p=\frac{b}{a},q=\frac{c}{a},r=\frac{d}{a})$</td><td rowspan="3">$q>(\frac{p}{2})^2$</td><td>$r=\frac{p}{2}[q-(\frac{p}{2})^2]$</td><td>迳得 $y=0$</td></tr>
<tr><td>$r>\frac{p}{2}[q-(\frac{p}{2})^2]$</td><td rowspan="2">$x^2(x+p)+qx=r$</td></tr>
<tr><td>$r<\frac{p}{2}[q-(\frac{p}{2})^2]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$q<(\frac{p^{\,2}}{2})$</td><td>$x(x+p)(x+q)=r$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$q=(\frac{p}{2})^2$</td><td>$x^2(x+p)=q$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$d=\frac{bc}{a}$</td><td>原文略</td></tr>
</table>

兹就表 29-3-1 中的部分情况予以说明，较为明显的情形从略。

若 $d>\frac{bc}{a}$，则令 $x=\frac{y}{a}$，代入方程（29-3-6），得

$$y^2(y-b)+acy=a^2d$$

以基本方程 $x^2(x-p)+qx=r$ 解之，求得正根 y_1。从而得到方程（29-3-6）一正根 $x_1=\frac{y_1}{a}$。

若 $d<\frac{bc}{a}$，将方程（29-3-6）化为

$$x^3-px^2+qx-r=0 \qquad (29\text{-}3\text{-}7)$$

式中，$p=\frac{b}{a}$，$q=\frac{c}{a}$，$r=\frac{d}{a}$。作减根变换 $x=y+\frac{p}{2}$，方程（29-3-7）变为

$$y^3+\frac{p}{2}y^2+[q-(\frac{p}{2})^2]y=r-\frac{p}{2}[q-(\frac{p}{2})^2]$$

当 $q>(\frac{p}{2})^2$，$r>\frac{p}{2}[q-(\frac{p}{2})^2]$ 时，以基本方程 $x^2(x+p)+qx=r$ 解之，求得 $y=y_1$。此时 $x_1=y_1+\frac{p}{2}$为方程（29-3-7）的一正根。从而得方程（29-3-6）的一正根。次解方程（29-3-7）降阶的二次方程

$$x^2-(p-x_1)+\frac{r}{x_1}=0 \qquad (29\text{-}3\text{-}8)$$

当$\left(\frac{p-x_1}{2}\right)^2\geqslant\frac{r}{x_1}$时，方程（29-3-8）有二正根。从而方程（29-3-6）有三正根。当$\left(\frac{p-x_1}{2}\right)^2$

$<\frac{r}{x_1}$时，方程（29-3-8）无实根。从而方程（29-3-6）只有一正根。$d<\frac{bc}{a}$其余情形的讨论从略。[①]

若 $d=\frac{bc}{a}$，方程（29-3-6）有一正根 $x=\frac{b}{a}$。

上述关于方程（29-3-6）正根个数的判别正确。事实上，方程（29-3-6）有一正根或三正根。该方程可变形为

$$\left(x-\frac{b}{a}\right)\left(ax^2+c\right)=d-\frac{bc}{a} \tag{29-3-9}$$

显然，若 $d=\frac{bc}{a}$，则 $x=\frac{b}{a}$。若 $d\neq\frac{bc}{a}$，则开得一正根 x_1，得方程（29-3-6）降阶的二次方程

$$x^2-\left(\frac{b}{a}-x_1\right)x+\frac{d}{ax_1}=0 \tag{29-3-10}$$

注意到 $d>\frac{bc}{a}$时 $x_1>\frac{b}{a}$，而 $d<\frac{bc}{a}$时 $x_1<\frac{b}{a}$以及式（29-3-6）无负根，由判别式 $\Delta=\left(\frac{b}{a}-x_1\right)^2-\frac{4d}{ax_1}$的符号可以决定方程（29-3-6）正根的个数。由此可知，方程（29-3-6）有一正根的充分必要条件是：降阶的二次方程判别式 $\Delta<0$。至于 $d>\frac{bc}{a}$，$d<\frac{bc}{a}$，$d=\frac{bc}{a}$是方程（29-3-6）解法的判别条件，并非正根个数的判别条件。依此分类，方程（29-3-6）容易化为基本方程。

汪莱进一步指出，当方程（29-3-7）有三正根时，三正根 x_1，x_2，x_3 满足

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=p\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q\\ x_1x_2x_3=r\end{cases}$$

因 $p=\frac{b}{a}$，$q=\frac{c}{a}$，$r=\frac{d}{a}$，故

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=\frac{b}{a}\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}\\ x_1x_2x_3=\frac{d}{a}\end{cases}$$

这是三次方程的根与系数关系。

第五册第五十五条及其小变之术讨论方程

$$ax^3-bx^2-cx+d=0 \tag{29-3-11}$$

的解法。其主要步骤如下。

建立方程

$$y^3+cy^2-bdy=ad^2 \tag{29-3-12}$$

① 李兆华，衡斋算学校证，陕西科学技术出版社，1998 年。

以基本方程 $x^2(x+p)-qx=r$ 解之，$y=y_1$。y_1 称为中率。

建立方程

$$z^2-(c-y_1)z+(y_1^2-bd)=0 \qquad (29\text{-}3\text{-}13)$$

以基本方程 $x(p-x)=q$ 解之，得 $z=z_1$，$z=z_2$。

建立方程

$$u^2+\frac{b}{a}u-\frac{z_1}{a}=0 \qquad (29\text{-}3\text{-}14)$$

$$v^2+\frac{b}{a}v-\frac{z_2}{a}=0$$

以基本方程 $x(x+p)=q$ 解之，各得 $u=u_1$，$v=v_1$。由此可得 $x_1=u_1+\frac{b}{a}$，$x_2=v_1+\frac{b}{a}$，为方程（29-3-11）的二正根。

汪莱的解法正确。事实上，方程（29-3-11）有二正根一负根，记为 x_1，x_2，$-x_3$。由根与系数关系

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3=-\dfrac{c}{a} \\ -x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

可得

$$x_1=\frac{b}{a}-x_2+x_3=\frac{b}{a}+u, \quad -x_2+x_3=u, u\left(\frac{b}{a}+u\right)=(-x_2+x_3)x_1=\frac{z_1}{a}$$

$$x_2=\frac{b}{a}-x_1+x_3=\frac{b}{a}+v, \quad -x_1+x_3=v, v\left(\frac{b}{a}+v\right)=(-x_1+x_3)x_2=\frac{z_2}{a}$$

此即方程（29-3-14）

欲得 $ax_1(-x_2+x_3)=z_1, ax_2(-x_1+x_3)=z_2$,需建立方程

$$(z-z_1)(z-z_2)=0$$

或

$$[z-ax_1(-x_2+x_3)][z-ax_2(-x_1+x_3)]=0$$

$$z^2-a[-(x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)-x_1x_2]z+a^2[(x_1x_2)^2-(x_1+x_2-x_3)(x_1x_2x_3)]=0$$

即

$$z^2-[c-(ax_1x_2)]z+[(ax_1x_2)^2-bd]=0$$

$$z^2-(c-y_1)z+(y_1^2-bd)=0$$

此即方程(29-3-13)。

欲得 $ax_1x_2=y_1$,需以 $y_1=ax_1x_2, y_2=-ax_1x_3, y_3=-ax_2x_3$ 为根建立方程

$$(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)=0$$

或

$$(y-ax_1x_2)(y+ax_1x_3)(y+ax_2x_3)=0$$

$$y^3-a(x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)y^2-a^2[x_1x_2x_3(x_1+x_2-x_3)]y-a^3(x_1x_2x_3)^2=0$$

即

$$y^3+cy^2-bdy-ad^2=0$$

此即方程（29-3-12）。开得正根 $y_1=ax_1x_2$，依次可解方程（29-3-13）、方程（29-3-14）。

第五十五条是假定方程（29-3-13）中 $y_1^2-bd>0$，$c-y_1>0$ 时讨论方程（29-3-11）的解法，其他各种情形均在五十五条小变之术中予以讨论。兹将其结果列为表29-3-2。该表所列讨论结果正确。

表 29-3-2　依方程（29-3-13）讨论方程 $ax^3-bx^2-cx^2+d=0$ 解法

条件		方程（29-3-13）变形为	原方程的根
$y_1^2-bd=0$	$c-y_1>0$	$z^2-(c-y_1)z=0$	$x_1=u+\frac{b}{a}$，$x_2=\frac{y_1}{ax_1}$
	$c-y_1<0$	$z^2+(y_1-c)z=0$	$x_1=\sqrt{\frac{c}{a}}$，$x_2=\frac{y_1}{ax_1}$
	$c-y_1=0$	$z^2=0$	$x_1=x_2=\sqrt{\frac{y_1}{a}}$
$y_1^2-bd<0$	$c-y_1<0$	$z^2+(y_1-c)z+(y_1^2-bd)=0$	$x_1=u+\frac{b}{a}$，$x_2=\frac{y_1}{ax_1}$
	$c-y_1>0$	$z^2-(c-y_1)z+(y_1^2-bd)=0$	$x_1=u+\frac{b}{a}$，$x_2=\frac{y_1}{ax_1}$
	$c-y_1=0$	$z^2=bd-y_1^2$	$x_1=u+\frac{b}{a}$，$x_2=\frac{y_1}{ax_1}$
$y_1^2-bd>0$	$c-y_1<0$	由 $z^2-(y_1-c)z+(y_1^2-bd)=0$ 得 z_1，z_2	由 $u^2-\frac{b}{a}u+\frac{z_1}{a}=0$ $v^2-\frac{b}{a}v+\frac{z_2}{a}=0$ 得 $x_1=\frac{b}{a}-u$，$x_2=\frac{b}{a}-v$
	$c-y_1>0$	“法在本条”	
	$c-y_1=0$	“无中率与根数恰合者”	

在本题中，令 $x=-\frac{d}{y}$，代入方程（29-3-11），得方程（29-3-12），解得 y_1。方程（29-3-13）、方程（29-3-14）随之可解。

第五册第五十三条及第五十七条可以类似地给出解释。

汪莱发现，方程可有多正根，而当时尚不了解正负开方术，求根方法迁就《数理精蕴》之成法而未免曲折。然而结果正确则无疑问。在第七册中汪莱改用正负开方术并用以求降阶方程的正根。

在第五册的基础上，第七册讨论有实根的高次方程正根出现的规律和正根的判别条件。无实根的情形不予讨论。结合第五册的内容，可知汪莱的方程分类法如下

- 方程
  - 有实根的（可开）
    - 有正根的（有）
      - 有一正根的（可知）
      - 有多正根的（不可知）
    - 无正根的（无）
  - 无实根的（不可开）

汪莱以举例的方式说明正根出现的规律，其结论有两点。其一，乘积多项式正根的个数等于其相乘诸多项式正根个数之和，即“合而有数皆如本”。例如，

$$(2x-5)(3x-9)(4x+3)=24x^3-114x^2+81x+135=0$$
$$(2x-5)(x-8)(7x-3)=14x^3-153x^2+343x-120=0$$

在前式中，$2x-5$，$3x-9$ 有正根，$4x+3$ 无正根，乘积多项式亦有二正根。在后式中，$2x-5$，$x-8$，$7x-3$ 均有正根，乘积多项式亦有三正根。其二，乘积多项式的系数序列变号次数相同者其正根个数可相差一个偶数，即“同式异理。”例如，

$6x^4-5x^3-x^2-10x+24=0$ “此题无数”

$4x^4-15x^3+5x^2+36=0$ “此题二数，同式异理”

$2x^4-21x^3+78x^2-117x+68=0$ “此题无数”

$x^4-13x^3+58x^2-108x+72=0$ “此题四数，同式异理”

显然，较第五册所讨论的二次和三次方程的情形，上述两例具有更明确的笛卡儿符号法则的意义。同时，较第五册所论“可知或不可知”的情形，虚根共轭的意义亦更明确。

第七册的重点是讨论有实根的方程正根判别条件。汪莱给出，三项方程 $x^n-px^m+q=0$ 有正根的充分必要条件是

$$q\leqslant\frac{n-m}{n}p\ \left(\frac{m}{n}p\right)^{\frac{m}{n-m}} \tag{29-3-15}$$

其中，n、m 是正整数，$n>m$，$p>0$，$q>0$。

上述方程基于三项方程的分类。三项方程的类型有

$x^n+px^m+q=0$　　$x^n-px^m+q=0$

$x^n-px^m-q=0$　　$x^n+px^m-q=0$

显然，第一个方程无正根，第三个方程、第四个方程有一正根。唯第二个方程可能有二正根，或者无正根，需要判别。

汪莱的判别式——公式（29-3-15）正确，而原书不载推导方法。运用方程的减根变换与二项式展开式可以证明之。兹以原书“除真数外皆相连二层”即 $n-m=1$ 的情形之前三式为例说明如下。

方程 $x^2-px+q=0$ 有正根的充分必要条件是 $q\leqslant\left(\frac{p}{2}\right)^2$。令 $x=y+k$（$k>0$），代入原方程，整理得

$$y^2+(2k-p)y+(k^2-pk+q)=0$$

令 $2k-p=0$，得 $k=\frac{1}{2}p$。于是

$$y^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

显然，当 $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geqslant0$ 时，$y\geqslant0$，即 $q\leqslant\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 时，原方程有正根 $x=y+\frac{p}{2}$，反之亦然。

方程 $x^3-px^2+q=0$ 有正根的充分必要条件是 $q\leqslant\frac{p}{3}\left(\frac{2p}{3}\right)^2$。令 $x=y+k$（$k>0$），代入原方程，整理得

$$y^3+(3k-p)y^2+(3k^2-2pk)y+(k^3-pk^2+q)=0$$

令 $3k^2-2pk=0$，得 $k=\frac{2}{3}p$。于是

$$y^3+py^2=\frac{p}{3}\left(\frac{2p}{3}\right)^2-q$$

由根与系数的关系可知，当$\frac{p}{3}\left(\frac{2p}{3}\right)^2-q\geqslant0$ 时，必有 $y\geqslant0$，即当 $q\leqslant\frac{p}{3}\left(\frac{2p}{3}\right)^2$ 时，原方程有正根 $x=y+\frac{2p}{3}$。反之亦然。

方程 $x^4-px^3+q=0$ 有正根的充分必要条件是 $q\leqslant\frac{p}{4}\left(\frac{3p}{4}\right)^3$。令 $x=y+k$（$k>0$），代入原方程，整理得

$$y^4+(4k-p)y^3+(6k^2-3pk)y^2+(4k^3-3pk^2)y+(k^4-pk^3+p)=0$$

令 $4k^2-3pk^2=0$，得 $k=\frac{3}{4}p$。于是

$$y^4+2py^2+\frac{9}{8}p^2y^2=\frac{p}{4}\left(\frac{3p}{4}\right)^3-q$$

由根与系数的关系可知，当$\frac{p}{4}\left(\frac{3p}{4}\right)^3-q\geqslant0$ 时，必有 $y\geqslant0$，即当 $q\leqslant\frac{p}{4}\left(\frac{3p}{4}\right)^3$ 时，原方程有正根 $x=y+\frac{3p}{4}$。反之亦然。

《衡斋算学》第二册独立发现三次方程可有二正根①，结束了中国古代三次及三次以上方程只给出一正根的传统，标志着中国数学的方程论由侧重算法进入理论研究的阶段。第五册、第七册以正确的方程分类为基础，对二次、三次方程正根的个数、解法、根与系数的关系以及三项方程正根的存在条件做出全面的研究，初步揭示出正根个数与方程系数序列变号次数的关系、共轭虚根的存在。上述成就构成清代方程论的重要内容。此外，第二册等积等勾弦和两勾股形的关系式即

$$(c_1-a_1)+\sqrt{(c_1-a_1)(c_2-a_2)}+(c_2-a_2)=c+a$$

是两勾股形等积等勾弦和的充分必要条件。在整勾股形的研究中，晚清数学家多次引用这一关系式。

（三）李锐的贡献

嘉庆七年（1802）春，焦循收到汪莱《衡斋算学》第五册书稿。同年秋，焦循与李锐共同核定之。李锐以方程系数序列的变号次数为根据将汪莱的可知、不可知概括为三条：

> 其一，凡隅实异名，正在上负在下，或负在上正在下，中间正负不相间者，可知。其二，凡隅实异名，中间正负相间，开方时其与隅异名之从、廉皆翻而与隅同名者，可知；不者，不可知。其三，凡隅实同名者，不可知。

上述三条分别与汪莱的可知者、可知或不可知者、不可知者三类方程对应。其意义可做如下的解释。其一，方程系数序列变号一次的，有一正根。其二，方程系数序列变号奇数次但非

---

① 元代朱世杰已经涉及“和数方程”有二正根的问题。《四元玉鉴》卷下“两仪合辙”门所论即此。《四元玉鉴》在嘉庆之初由阮元发现一个抄本。汪莱殁于嘉庆十八年，未能见及该书。

一次者，开出一正根后审其降阶的方程。若降阶的方程各项系数同号则原方程只有一正根；否则，原方程有多正根。其三，方程系数序列变号偶次者有多正根。汪莱的第五册讨论有正根的方程，无正根的方程不在讨论范围之内。李锐的三条仍遵守这一分类不变。

汪莱的第五册第五十一条判别方程

$$ax^3 - bx^2 + cx - d = 0$$

其中，a，b，c，$d > 0$，正根个数的方法与结论原无可议之处。开得一正根后，汪莱以降阶方程的判别式来判定原方程正根的个数。而李锐以降阶方程的系数符号来判定之，所得第二条之“不者，不可知”结论错误。嘉庆八年（1803）秋，汪莱见到李锐的三条后举出反例。方程

$$x^3 - 12x^2 + 100x - 800 = 0$$

即

$$(x - 10)(x^2 - 2x + 80) = 0$$

求得一正根 $x = 10$，得降阶方程

$$x^2 - 2x + 80 = 0$$

该方程各项系数不同号。按李锐第二条“不者，不可知”，该方程应有正根，从而原方程有多正根即“不可知”。事实上，该方程 $\Delta < 0$，无正根，从而原方程只有一正根 $x = 10$，可知。由此，汪莱否定了李锐的第二条“不者，不可知”。此后，李锐继续研究方程论并著《开方说》。

《开方说》三卷（1814 年之前成前二卷，1817 年黎应南补卷下）是一部比较系统的方程论著作。该书的方程分类法与汪莱的分类法全同。而运用的工具是天元术和正负开方术，此与汪莱主要运用借根方法有别。

卷上讨论有正根的方程，无正根的方程不在讨论范围之内。其中罗列一次至四次方程有正根的各种情形。除去开平方、开立方的情形，二次方程和三次方程与汪莱的结果相同。四次方程有正根的各种情形整理如下。其中，有一正根者 20 个，有二正根者 18 个，有一正根或三正根者 7 个，有二正根或四正根者 1 个。式中，p，q，r，$s > 0$。括号内数字表示同类方程的总数。

有一正根者：

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx - s = 0$	（4 个）	$x^4 + px^3 + qx^2 - r = 0$	（3 个）
$x^4 + px^3 + qx - r = 0$	（3 个）	$x^4 + px^2 + qx - r = 0$	（3 个）
$x^4 + px^3 - q = 0$	（2 个）	$x^4 + px^2 - q = 0$	（2 个）
$x^4 + px - q = 0$	（2 个）	$x^4 - p = 0$	（1 个）

有二正根者：

$x^4 - px^3 - qx^2 - rx + s = 0$	（6 个）	$x^4 - px^3 - qx^2 + r = 0$	（3 个）
$x^4 - px^3 - qx + r = 0$	（3 个）	$x^4 - px^2 - qx + r = 0$	（3 个）
$x^4 - px^3 + q = 0$	（1 个）	$x^4 - px^2 + q = 0$	（1 个）
$x^4 - px + r = 0$	（1 个）		

有一正根或三正根者：

$x^4 - px^3 + qx^2 + rx - s = 0$	（4 个）	$x^4 - px^3 + qx^2 - r = 0$	（1 个）
$x^4 - px^3 + qx - r = 0$	（1 个）	$x^4 - px^2 + qx - r = 0$	（1 个）

有二正根或四正根者：

$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$　　（1个）

按照所示方程的类型，不难将类型相同的所有方程写出。例如，有一正根的方程

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx - s = 0$　（4个）

全部写出即

$$x^4 + px^3 + qx^2 - rx - s = 0$$
$$x^4 + px^3 - qx^2 - rx - s = 0$$
$$x^4 - px^3 - qx^2 - rx - s = 0$$

以上四个方程都是完全四次方程且系数序列变号一次。

根据以上的分析，《开方说》的结论是：

> 凡上负、下正，可开一数。
>
> 上负、中正、下负，可开二数。
>
> 上负、次正、次负、下正，可开三数或一数。
>
> 上负、次正、次负、次正、下负，可开四数或二数。

上负、下正的意义是：

> 假令有五位，上二位负、下三位正即是上负、下正。非止谓上一位负、下一位正也。他皆仿此。

这个结论的意义是，方程系数序列变号一次者有一正根，变号二次者有二正根，变号三次者有三正根或一正根，变号四次者有四正根或二正根。依此类推。这个结论与笛卡儿符号法则的意义相同，区别仅在于无正根的方程不在讨论范围之内。

对于正根个数不确定的情形，李锐指出

> 凡可开三数或止一数，可开四数或止二数，其二数不可开，是为无数。凡无数必两，无无一数者。

卷上之末举例说明“凡不可开者为无数。”所举三例是：

$$10x^2 - x + 100 = 0$$
$$x^2 - 190x + 10000 = 0$$
$$x^2 - 24x + 145 = 0$$

显然，这三个方程均无实根。“凡无数必两，无无一数者”指出所缺二根之原因是“无数”的存在。“无数”即虚根，“必两”即共轭。

卷上规定“商常为正”，即所论均为有正根的方程。卷中规定“凡商数为正，今令之为负”。李锐弟子黎应南跋称“中卷，正负互易”。可知卷中所论方程的根可正可负，即有实根的方程。无实根的方程不在讨论范围之内。所得结论是：

> 凡平方皆可开二数，立方皆可开三数或一数，三乘方皆可开四数或二数。

这个结论的意义是，二次方程有二实根，三次方程有三实根或一实根，四次方程有四实根或二实根。依此类推。显然，实根个数不确定的情形，所缺二根是“无数”，卷上已经指出“无数必两”。这一结论与代数基本定理意义相同，区别仅在于无实根的方程不在讨论范围之内。

卷下主要讨论方程变换以及根与系数关系等。

所论方程变换主要有倍根变换与负根变换。设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0 \quad (29\text{-}3\text{-}16)$$

其中，$a_0\neq0$。

凡实、方、廉、隅，如意立一数为母，一乘隅，再乘廉，三乘方，四乘实，每上一位则增一乘，如是累乘讫。如法开之。所得为母乘所求数之数。以母除之得所求。

此相当于令 $x=\frac{y}{k}$（$k>1$），则方程（29-3-16）变为

$$g(y)=a_0y^n+ka_1y^{n-1}+k^2a_2y^{n-2}+\cdots+k^na_n=0$$

凡实、方、廉、隅，如意立一数为母，一除隅，再除廉，三除方，四除实，每上一位则增一除，如是累除讫。如法开之。所得为母除所求数之数。以母乘之得所求。

此相当于令 $x=ky$（$k>1$），则方程（29-3-16）变为

$$g(y)=a_0y^n+\frac{a_1}{k}y^{n-1}+\frac{a_2}{k^2}y^{n-2}+\cdots+\frac{a_n}{k^n}=0$$

凡开方有正商、负商者，以其实、方、廉、隅之正负隔一位易之。如法开之。则所得正商变为负商，负商变为正商。

此相当于令 $x=-y$，则公式（29-3-16）变形为

$$g(y)=-a_0y^n+a_1y^{n-1}-a_2y^{n-2}+\cdots+a_n=0 \quad (n\text{ 是奇数})$$

$$g(y)=a_0y^n-a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}-\cdots+a_n=0 \quad (n\text{ 是偶数})$$

卷下还涉及根与系数的关系。

凡有正负各数，累乘之，即得实、方、廉、隅各数。

其中，“正负各数”是指方程的根，“实、方、廉、隅”是指乘积多项式方程的常数项及各项系数。这一结论包含下述的运算

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)&=x^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}+\cdots(-1)^nx_1x_2\cdots x_n\\&=x^n-a_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^na_n\\&=0\end{aligned}$$

由此易得根与系数关系。

方程可有多正根、负根这一事实被指出之后，求解的方法随之出现。李锐《开方说》举例说明，用正负开方术求解负根与求解正根的过程相同。李锐求解多正根的方法称为“代开法”，包括寄位代开法与较数代开二法，即以正负开方术求解降阶方程的正根。汪莱的第七册有“求次数”一节也给出求降阶方程的方法，惜无算例。汪法虽简洁但不如李法影响广泛。

三　其他研究工作

（一）博启的勾股算术研究

博启《勾股形内容三事和较》是一部重要的勾股算术著作。清代罗士琳既已断言是书

失传，后之论者不得其详。近年来发现有抄本传世遂引起注意①。

博启，亦作伯启，字绘亭，满洲正白旗人。活动于清乾隆年间，具体生卒年代不详。据故宫钦天监档案，乾隆五十年（1785）至五十八年（1793）为五官正，乾隆五十八年（1793）十二月为监副。所著《勾股形内容三事和较》不分卷，有乾隆四十八年（1783）自序。序称，"启幼入算学②，酷好勾股，历经三十余年，粗通其意。"今传道光元年（1821）姚元之抄本，藏国家图书馆善本部。

自《九章算术》以下，均由勾、股、弦及五和五较十三事并勾股相乘积选取其二以求解勾股形。清初，《数理精蕴》下编卷十二设有"勾股形内求中垂线及容方圆形"一节，讨论由勾、股、弦求弦上的高线、内容方边、内容圆径等三事的算法。在此启发之下，博启系统讨论由此三事及其和较求解勾股形的算法

该书不分卷，目录是：总论，总图，（总图式，方边中垂线合图说，圆径中垂线合图说，方边圆径合图说，三事和较全图说），解略篇四则，等积形说八图，六十题总目，前法十，中法三十八，后法十二，绘图分数。其中，四个"图说"指出方边、圆径、中垂线之间的关系。解略篇是术语及其数量关系的汇总。等积形说给出三事恒等式共十个。上述内容构成该书的基础知识。前法、中法、后法则是应用所述基础求解三事，从而可得勾、股、弦。以下简要说明该书大致内容。

总图式如图 29-3-1 所示。在勾股形甲乙丙中，甲乙为勾，甲丙为股，乙丙为弦，甲丁为中垂线，戊己庚为容圆，辛戊等为半径，壬甲癸子为容方，壬甲等为方边。

方边中垂线合图说，如图 29-3-2 所示。在勾股形甲乙丙中，甲丁为中垂线，壬甲癸子为容方。由图 29-3-2 知，方边为弦，中垂线为勾股和。

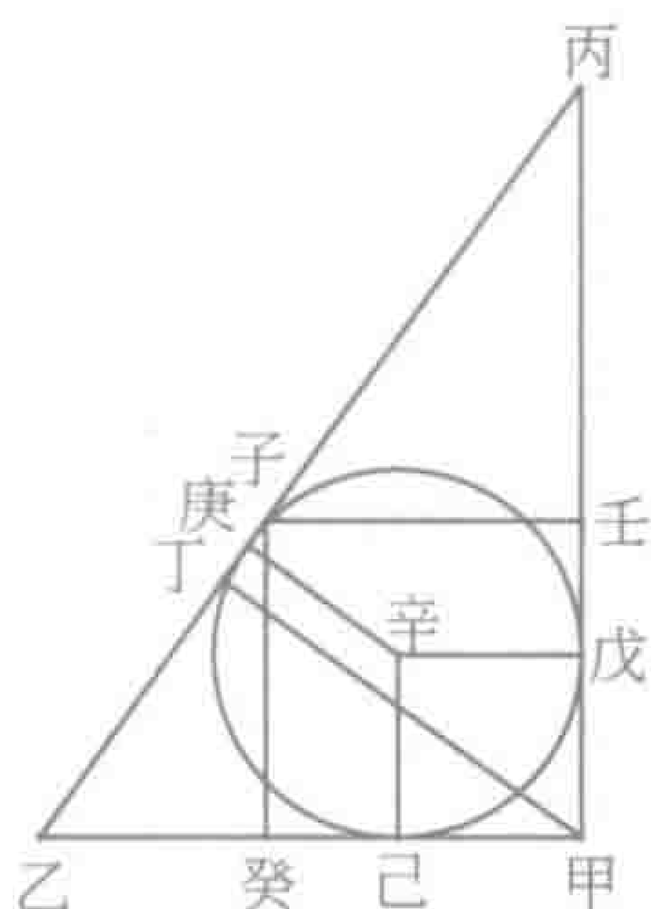


图 29-3-1　总图式



图 29-3-2　方边中垂线合图

圆径中垂线合图说，如图 29-3-3 所示。在勾股形甲乙丙中，午巳平行于乙丙，甲丁为中垂线，辛庚、辛己、辛戊为容圆半径。由图 29-3-3 知，半径为弦，中垂线为勾股弦总和。故圆径为弦，中垂线为半总和。

方边圆径合图说，如图 29-3-4 所示。在勾股形甲乙丙中，壬甲癸子为容方，辛戊、辛

① 李迪，中国数学史简编，辽宁人民出版社，1984 年，第 298 页。

② 雍正十二年（1734 年）八旗官学始设算学，乾隆三年（1738 年）停办，另设算学一所。翌年，定名国子监算学。清末成立学部，裁撤国子监，算学改隶钦天监。

己、辛庚为容圆半径。由图 29-3-4 知，半径为勾股和，方边为勾股弦总和。故圆径为勾股和，方边为半总和。



图 29-3-3　圆径中垂线合图

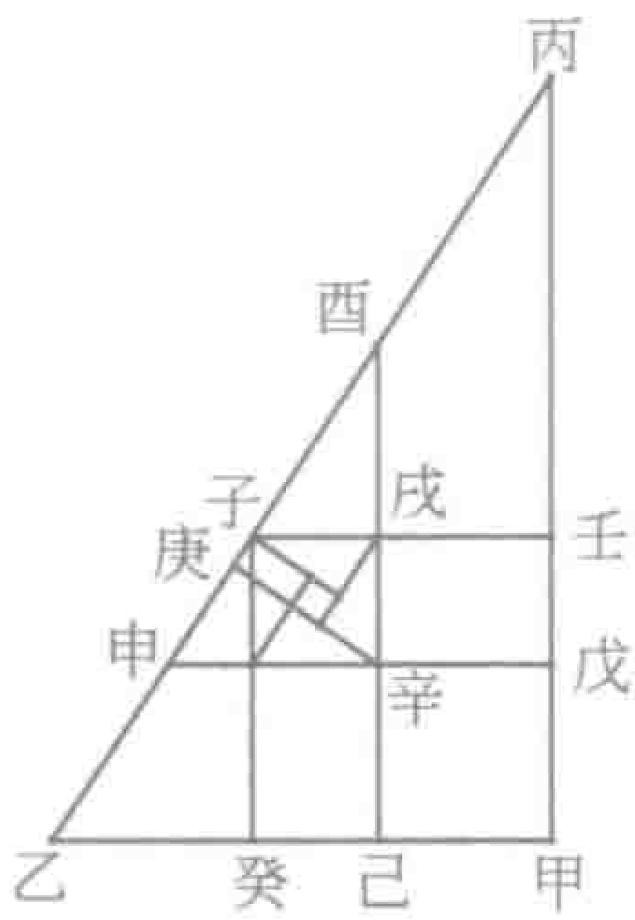


图 29-3-4　方边圆径合图

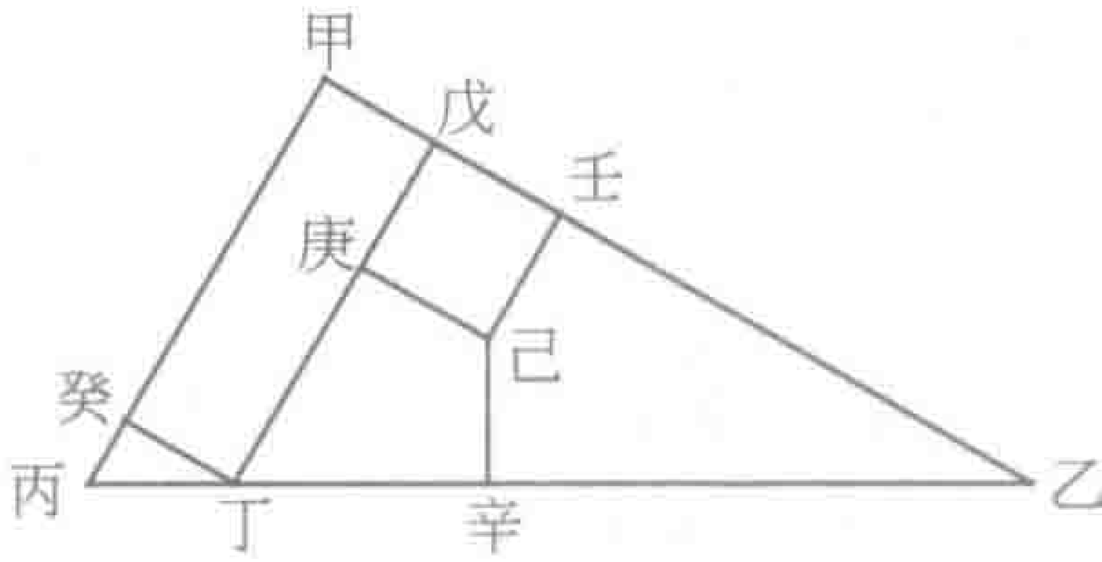


图 29-3-5　三事和较全图

三事和较全图说，如图 29-3-5 所示。勾股形甲乙丙名曰会勾股形，依方边中垂线合图说，方边为弦乙丙，中垂线为勾股和（甲乙 + 甲丙）。勾股形乙戊丁名曰通勾股形，依方边圆径合图说，圆径为勾股和（乙戊 + 戊丁），方边为半总和乙丙。勾股形丁癸丙名曰隅勾股形，

$$\begin{aligned}丁癸+癸丙&=戊甲+癸丙\\&=(乙甲-乙戊)+(甲丙-戊丁)\\&=(乙甲+甲丙)-(乙戊+戊丁)\\&=中垂线-圆径\end{aligned}$$

又，

$$乙丙=\frac{1}{2}(乙戊+戊丁+乙丁)$$
$$2\times乙丙=乙戊+戊丁+乙丁$$
$$乙丙-乙丁=乙戊+戊丁-乙丙$$
$$丁丙=圆径-方边$$

因而，

$$丁癸+癸丙+丁丙=(中垂线-圆径)+(圆径-方边)=中垂线-方边$$

解略篇所述术语及其数量关系见表 29-3-3。

表 29-3-3　《勾股形内容三事和较》基本术语

线段 \ 勾股形	乙丙	乙戊 + 戊丁	甲乙 + 甲丙	丁丙	丁癸 + 癸丙	丁癸 + 癸丙 + 丁丙
	方边	圆径	中长	方圆较	圆中较	方中较
会	会弦		会勾股和			
通	通半总	通勾股和		通半径		通中长
隅				隅弦	隅勾股和	隅总和

在表29-3-3中，会、通、隅是图29-3-5中勾股形的简称，冠于元素名称之前。表29-3-3每列术语的数量相等。例如，在第1列，乙丙、方边、会弦、通半总皆相等。中长即中垂线，方圆较是圆径减去方边所得差。圆中较、方中较类此。通半径是通勾股形的容圆半径，即图29-3-5中己壬、己庚、己辛。显然，

$$通半径 = 己壬 = \frac{1}{2}（乙戊 + 戊丁 - 乙丁）$$

$2 \times 己壬 = 乙戊 + 戊丁 - （乙丙 - 丁丙） = 乙戊 + 戊丁 - 乙丙 + 丁丙$

$= 圆径 - 方边 + 丁丙 = 丁丙 + 丁丙 = 2 丁丙$

$通半径 = 己壬 = 丁丙$

由图29-3-3圆径中垂线合图说，半径为弦，中长为勾股弦总和。今通半径己壬与隅弦丁丙相等，则通中长与隅总和相等。

由图29-3-5可知，会勾股形、通勾股形、隅勾股形是相似勾股形，对应线段成比例。表29-3-3又给出各勾股形之间的相等线段。据此容易导出等积形说给出的三事和较恒等式共十个。

圆中较乘方边，方圆较乘中长，半方中较乘圆径，此三形积等。

此即

$$\frac{方圆较}{圆中较} = \frac{方边}{中长} \tag{29-3-17}$$

因隅勾股形与会勾股形相似，故

$$\frac{隅弦}{隅勾股和} = \frac{会弦}{会勾股和}$$

依表29-3-3将等量代入上式，即得公式（29-3-17）。

又

$$\frac{圆中较}{半方中较} = \frac{圆径}{方边} \tag{29-3-18}$$

因隅勾股形与通勾股形相似，故

$$\frac{隅勾股和}{隅半总} = \frac{通勾股和}{通半总}$$

依表29-3-3将等量代入上式，即得公式（29-3-18）。

方圆较乘方边，半方中较乘方圆较与方边之较，此二形积等。

此即

$$\frac{方圆较}{半方中较} = \frac{方边 - 方圆较}{方边} \tag{29-3-19}$$

由隅勾股形与通勾股形相似，故

$$\frac{隅弦}{隅半总} = \frac{通弦}{通半总}$$

注意到通弦 = 会弦 - 隅弦 = 方边 - 方圆较，依表29-3-3将等量代入上式，即得公式（29-3-19）。

方边乘圆径，方圆较与方边之较乘中长，此二形积等。

此即

$$\frac{方边 - 方圆较}{圆径} = \frac{方边}{中长} \tag{29-3-20}$$

因通勾股形与会勾股形相似，故

$$\frac{\text{通弦}}{\text{通勾股和}}=\frac{\text{会弦}}{\text{会勾股和}}$$

注意到公式（29-3-19）通弦。依表 29-3-3 将等量代入上式，即得公式（29-3-20）

方边乘中长，圆径乘半方中和，此二形积等。

此即

$$\frac{\text{方边}}{\text{圆径}}=\frac{\text{半方中和}}{\text{中长}} \tag{29-3-21}$$

因通勾股形与会勾股形相似，故

$$\frac{\text{通半总}}{\text{通勾股和}}=\frac{\text{会半总}}{\text{会勾股和}}$$

注意到会半总 $=\frac{1}{2}$（会勾股和 + 会弦）$=\frac{1}{2}$（中长 + 方边）= 半方中和，依表 29-3-3 将等量代入上式，即得公式（29-3-21）。

方圆较乘方中较，方圆较与圆中较之较乘方边，此二形积等。附：方圆较自乘倍之，与方圆较与圆中较之较乘方圆较与方边之较等。

此即

$$\frac{\text{方圆较}}{\text{方边}}=\frac{\text{圆中较}-\text{方圆较}}{\text{方中较}} \tag{29-3-22}$$

因通勾股形与隅勾股形相似，故

$$\frac{\text{通半径}}{\text{通半总}}=\frac{\text{隅圆径}}{\text{隅总和}}$$

注意到隅圆径 = 隅勾股和 − 隅弦 = 圆中较 − 方圆较，依表 29-3-3 将等量代入上式，即得式（29-3-22）。

附：

$$\frac{2\times\text{方圆较}}{\text{方边}-\text{方圆较}}=\frac{\text{圆中较}-\text{方圆较}}{\text{方圆较}} \tag{29-3-23}$$

因通勾股形与隅勾股形相似，故

$$\frac{2\times\text{通半径}}{\text{通弦}}=\frac{\text{隅圆径}}{\text{隅弦}}$$

注意到公式（29-3-19）通弦，式（29-3-22）隅圆径，依表 29-3-3 将等量代入上式，即得公式（29-3-23）。

方圆较乘圆径，圆中较乘方圆较与方边之较，此二形积等。

此即

$$\frac{\text{方圆较}}{\text{圆中较}}=\frac{\text{方边}-\text{方圆较}}{\text{圆径}} \tag{29-3-24}$$

因隅勾股形与通勾股形相似，故

$$\frac{\text{隅弦}}{\text{隅勾股和}}=\frac{\text{通弦}}{\text{通勾股和}}$$

注意到公式（29-3-19）通弦，依表 29-3-3 将等量代入上式，即得公式（29-3-24）。

圆中较乘倍方圆较，圆径乘方圆较与圆中较之较，此二形积等。

此即

$$\frac{\text{圆中较}-\text{方圆较}}{\text{圆中较}}=\frac{\text{倍方圆较}}{\text{圆径}} \quad (29\text{-}3\text{-}25)$$

因隅勾股形与通勾股形相似，故

$$\frac{\text{隅圆径}}{\text{隅勾股和}}=\frac{\text{通圆径}}{\text{通勾股和}}$$

注意到公式（29-3-22）隅圆径，通圆径为通半径之倍，依表29-3-3将等量代入上式，即得公式（29-3-25）。

方中较乘中长，圆中较乘方中和，此二形积等。

此即

$$\frac{\text{圆中较}}{\text{方中较}}=\frac{\text{中长}}{\text{方中和}} \quad (29\text{-}3\text{-}26)$$

因隅勾股形与会勾股形相似，故

$$\frac{\text{隅勾股和}}{\text{隅总和}}=\frac{\text{会勾股和}}{\text{会总和}}$$

注意到会总和 = 会勾股和 + 会弦 = 中长 + 方边，依表29-3-3将等量代入上式，即得公式（29-3-26）。

公式（29-3-17）～公式（29-3-26）共10式。其中，公式（29-3-17）、公式（29-3-26）由“隅会相似”导出，公式（29-3-20）或公式（29-3-21）由“会通相似”导出，公式（29-3-18）、公式（29-3-19）、公式（29-3-22）、公式（29-3-23）、公式（29-3-24）、公式（29-3-25）均由“隅通相似”导出。

以上10个三事和较恒等式是求解该书60个题目的基础。解略篇称：“六十题俱以勾、股、弦为问，而法中止答得方边、圆径、中垂线则已。盖有此三线即可互相求而得勾、股、弦也。故不复赘。”在勾股形中，因方边 $=\frac{\text{勾}\times\text{股}}{\text{勾}+\text{股}}$，圆径 = 勾 + 股 − 弦，中长 $=\frac{\text{勾}\times\text{股}}{\text{弦}}$，故已知方边、圆径、中长，据以上三式即可得勾、股、弦。

以下选择二题说明方边、圆径、中长的解法。第一题：

有方边，有圆径与中垂线之较，问勾、股、弦。

由公式（29-3-17）

$$\text{方边}\times\text{圆中较}=\text{中长}\times\text{方圆较}$$

而

$$\text{中长}-\text{方圆较}=\text{中长}-(\text{圆径}-\text{方边})=\text{方边}+\text{圆中较}$$

已知方边为 m，圆中较为 n，设中长为 x，方圆较为 y，则有

$$\begin{cases}xy=mn\\x-y=m+n\end{cases}$$

消去 y，得

$$x^2-(m+n)x-mn=0$$

解得中长 x，随之可得圆径。由方边、圆径、中长可得勾、股、弦。

第十三题：

有方边与圆径之和，有方边与中垂线之较，问勾、股、弦。

由公式（29-3-22）

$$\frac{方圆较}{方边}=\frac{圆中较-方圆较}{方中较}$$

由比例性质可得

$$\frac{方圆较+方边}{方边}=\frac{圆中较-方圆较+方中较}{方中较}$$

即

$$\frac{圆径}{方边}=\frac{2\times圆中较}{方中较}$$

又可得

$$\frac{圆径+方边}{方边}=\frac{2\times圆中较+方中较}{方中较}$$

即

$$(圆径+方边)\times方中较=方边\times(2\times圆中较+方中较)$$

而

$$4\times方边-(2\times圆中较+方中较)=2\times(圆径+方边)-3\times方中较$$

已知（圆径＋方边）为 m，方中较为 n，设方边为 x，（2×圆中较＋方中较）为 y，则有

$$\begin{cases}xy=mn\\4x-y=2m-3n\end{cases}$$

消去 y，得

$$4x^2-(2m-3n)x-mn=0$$

解得方边 x，随之可得圆径、中长。由方边、圆径、中长可得勾股形。

根据已知条件选择三事和较恒等式，进而建立形如

$$\begin{cases}xy=mn\\K_1x+K_2y=K_3m+K_4n\end{cases}$$

的二元方程组，消元后得二次方程，从而使问题获解。这是《勾股形内容三事和较》解题的基本方法。

该书的5图、10式和60题构成一个完整的系统，推理严谨，是传统数学中勾股算术的一个发展。因该书未曾出版，流传不广。罗士琳得知由方边、中垂线求解勾股形一题，据此推广，著为《勾股容三事拾遗》三卷附一卷（1826）。

（二）汪莱的数的进位制研究

汪莱《参两算经》（约1792～1793）系统讨论 p 进制（$2\leqslant p\leqslant10$）的乘法和除法并给出选择进位制的原则。

汪莱指出，选择进位制的原则是“审法与数之宜”。理由是，“乘法因而重之，无难也。”除法“化而裁之”，其结果可能出现“不可终穷”的小数（此指循环小数）。“不可终穷”的小数带来计算与应用的不便。为了避免这一问题，可以采用另一种进位制，使得除法的结果是整数或有限小数。此时，法与实“相宜”。

汪莱指出，各种进位制都遵守“逢身进位”的原则。例如，十进制逢十进一，九进制逢九进一，等等。这是 p 进制算法的大纲。据此，汪莱给出 p 进制的乘法表（十进制的乘法

表即九九表，此表除外)。以九进制和八进制为例，写成阿拉伯数码如下。

九进制：

$8\times2=17$　$8\times3=26$　$8\times4=35$　$8\times5=44$　$8\times6=53$　$8\times7=62$　$8\times8=71$

$7\times2=15$　$7\times3=23$　$7\times4=31$　$7\times5=38$　$7\times6=46$　$7\times7=54$

$6\times2=13$　$6\times3=20$　$6\times4=26$　$6\times5=33$　$6\times6=40$

$5\times2=11$　$5\times3=16$　$5\times4=22$　$5\times5=31$

$4\times2=8$　$4\times3=13$　$4\times4=17$

$3\times2=6$　$3\times3=10$

$2\times2=4$

八进制：

$7\times2=16$　$7\times3=25$　$7\times4=34$　$7\times5=43$　$7\times6=52$　$7\times7=61$

$6\times2=14$　$6\times3=22$　$6\times4=30$　$6\times5=36$　$6\times6=44$

$5\times2=12$　$5\times3=17$　$5\times4=24$　$5\times5=31$

$4\times2=10$　$4\times3=14$　$4\times4=20$

$3\times2=6$　$3\times3=11$

在上述各乘法表中，凡相乘结果相同者，原书均未列出。例如，九进制的乘法表中说明“二三以后，统用前数”，即 2×3 等于前面已经给出的 $3\times2=6$，2×4 等于前面已经给出的 $4\times2=8$ 等。

汪莱还给出 p 进制除法中的相宜的法 a（$1<a<p$），如表29-3-4 所示。十进制的情形是显然的。在其他各种进位制中，除法$\frac{1}{a}$的结果如下。

表 29-3-4　相宜的法

进制	相宜的法
10	2，4，5，8
9	3
8	2，4
7	
6	2，3，4
5	
4	2
3	
2	

九进制：

$\frac{1}{3}=0.3$　　$\frac{2}{3}=0.6$　　$\frac{3}{3}=1$

八进制：

$\frac{1}{2}=0.4$　　$\frac{2}{2}=1$

$\frac{1}{4}=0.2$　　$\frac{2}{4}=0.4$　　$\frac{3}{4}=0.6$　　$\frac{4}{4}=1$

六进制：

$\frac{1}{2}=0.3$　　$\frac{2}{2}=1$

$\frac{1}{3}=0.2$　　$\frac{2}{3}=0.4$　　$\frac{3}{3}=1$

$\frac{1}{4}=0.13$　　$\frac{2}{4}=0.3$　　$\frac{3}{4}=0.43$①　　$\frac{4}{4}=1$

四进制：

$\frac{1}{2}=0.2$　　$\frac{2}{2}=1$

由表29-3-4可见，九进制的相宜的法 $a=3$，故$\frac{A}{3^m}$（A 为整数或有限小数，m 为正整数）均为整数或有限小数。十进制的相宜的法最多，且$\frac{A}{2^m \times 5^n}$（m，n 为非负整数，不同时为零）均为整数或有限小数。

（三）汪莱的组合数学研究

汪莱《递兼数理》是《衡斋算学》卷四的后半卷（约1798～1799）。该书论述组合的某些性质和计算公式。

汪莱所谓递兼即现代的组合。所给定义是：

> 设有物各种，自一物各立一数起，至诸物合并共为一数止，其间递以二物相兼为一数交错以辩得若干数，三物相兼为一数交错以辩得若干数，四物、五物以至多物莫不皆然，此谓递兼之数也。

设有 n 个不同物件（元素），“一物各立一数”即 C_n^1，“诸物合并共为一数”即 C_n^n，“二物相兼为一数”即 C_n^2，等等。

汪莱给出递兼总数即各次组合的和 $\sum_{p=1}^{n} C_n^p$：

> 以所设物数减一数为倍根之次数。乃以一为根，倍之加一得三为一次，又倍之加一得七为二次，如是累倍累加一至如其次数而止。其末得之数即相兼之总数也。

设有2个不同物件，倍根之次数为1，于是

$$C_2^1+C_2^2=2\times1+1=2^2-1$$

设有3个不同物件，倍根之次数为2，于是

$$C_3^1+C_3^2+C_3^3=2\ (2\times1+1)\ +1=2^3-1$$

……

---

① 四一一三，原文误作四一一二。四二命三，原文误作四二二四。四三四三，原文误作四三命三。依李兆华校正。

设有 n 个不同物件，倍根之次数为 $(n-1)$，于是

$$C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = \underbrace{2(2(\cdots 2(2}_{n-1} \times 1 + 1) + 1 \cdots) + 1) + 1 = 2^n - 1$$

汪莱还给出组合的一个性质：

> 中数以后，即同于前，不繁覆算。

“中数”即诸 C_n^1，C_n^2，…，C_n^n 的中间项。与中间项距离相等的前后两项相等，可减少一次运算。此即

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

汪莱也给出中间项序号的判别方法：

> 中数之位，于原设物数减去最大一数，取其余数之中。余数奇则有一中，偶得有二中。

由 1，2，3，…，$(n-1)$，n 这 n 个数中去掉最后一项（即最大一数），再由前 $(n-1)$ 项判别：

$$(n-1)\begin{cases}\text{奇数，有一中间项即第}\dfrac{n}{2}\text{项}\\ \text{偶数，有两中间项即第}\dfrac{n-1}{2}\text{和}\dfrac{n+1}{2}\text{项}\end{cases}$$

对递兼总数 $\sum_{p=1}^{n} C_n^p$ 而言，C_n^p 称为递兼分数：

> 以所设物数即为各立一数之数，减一数为三角堆之根，乃以根数求得平三角堆为二物相兼之数，又减一数求得立三角堆为三物相兼之数，又减一数求得三乘三角堆为四物相兼之数，如是根数递减，乘数递加，求得相兼诸数。……此递兼之分数也。

三角堆即三角垛。如图 29-3-6 所示，贾宪三角形各斜行数字分别构成一个三角垛。当 $p=0$，1，2，3，…时，分别称为元垛，一乘三角垛（平三角堆），二乘三角垛（立三角堆），三乘三角垛，……。汪莱在《递兼数理》中给出三角求和法，即 p 乘三角垛前 n 项的和为

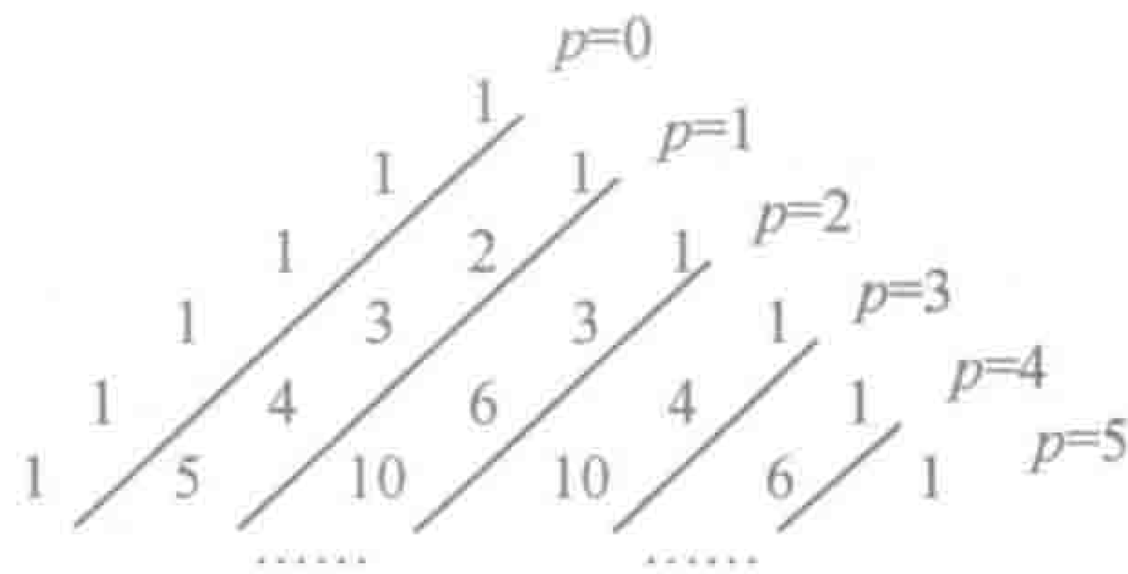


图 29-3-6　三角垛表

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{p!} r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$

$$= \frac{1}{(p+1)!} n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$$

汪莱递兼分数的求法即据此给出：

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^2 = \sum_{r=1}^{n-1} r = \frac{1}{2!}(n-1)n$$

$$C_n^3 = \sum_{r=1}^{n-2} \frac{1}{2!} r(r+1) = \frac{1}{3!}(n-2)(n-1)n$$

$$C_n^4 = \sum_{r=1}^{n-3} \frac{1}{3!} r(r+1)(r+2) = \frac{1}{4!}(n-3)(n-2)(n-1)n$$

“如是根数递减，乘数递加，求得相兼诸数”：

$$C_n^p = \sum_{r=1}^{n-p+1} \frac{1}{(p-1)!} r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-2) = \frac{1}{p!}(n-p+1)(n-p+2)\cdots(n-1)n$$

亦即

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

以上是汪莱关于 p 进制与组合的主要结果。p 进制与组合作为数学问题给予严格的论述，以汪莱的工作为最早。

(四) 汪莱的球面三角研究

汪莱《衡斋算学》第一册（1796）和第四册前半（1799）给出球面三角形次形与垂弧的一般做法、球面三角形的解的个数和有解的条件的系统讨论是梅文鼎之后重要的三角学成果。

明末清初传入的球面三角知识以球面三角的解法为其主要内容。梅文鼎（1633～1721）《弧三角举要》五卷（1684）、《环中黍尺》五卷（1702）及《堑堵测量》二卷（约1703）等三书就明末以来传入的球面三角知识做出全面的总结，并以所创球面正投影法在图形画法和公式证明方面做出突出成就。关于次形和垂弧的作法，梅氏有如下两个限制条件：其一，凡所作的次形须与本形在本形某边大圆的同侧以使次形与本形的正投影皆为可见线。其二，凡所作的球面直角三角形如直角三角形的次形与垂弧的分形须无大边与钝角以使直角三角形求解公式的各函数值皆为正值。由于上述两个限制条件，遂使弧角互易的次形和垂弧作法复杂化并与传入的球面三角知识相矛盾。梅文鼎《弧三角举要》求次形法：三角俱锐或一钝两锐，用二内角一外角弧；两钝一锐或三角俱钝，用三外角弧。作垂弧法：“三角俱锐，垂弧在形内；一钝二锐，或在形内或在形外；两钝一锐或三角俱钝则用次形，其所作垂弧在次形之内之外。”为此，梅文鼎批评所谓旧法：“《历学会通》所谓别算一三角形，其边为此角一百八十度之余。然惟三钝角或两钝角（一锐角）则然，其余则兼用本角之度，不皆外角。”“旧说，……底旁两角同类，垂弧在形内；异类，垂弧在形外。由今考之，殆不尽然。”至于球面三角形解的个数和有解的条件等比较抽象的内容当时未曾传入，梅氏各书亦未深入至此。

汪莱的球面三角工作主要有下列两项。

其一，《衡斋算学》第一册“三角求边用次形”及“斜弧三角用垂弧”等节完善梅氏球面正投影法并运用三角函数符号法则，从而去掉梅氏两个限制条件，给出弧角互易的次形作法和垂弧作法的通法。旧法之不误亦随之得以证实。

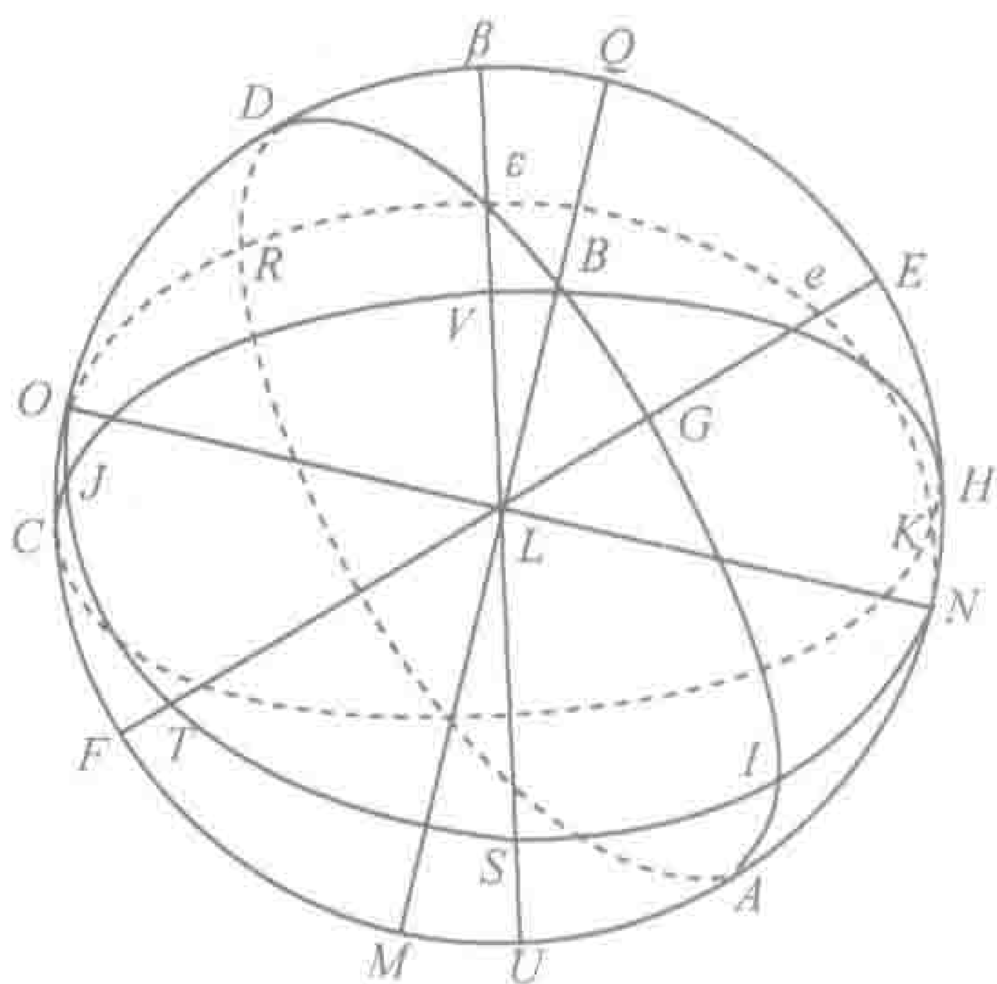


图 29-3-7　斜弧三角求次形图

次形是求解球面三角形常用的辅助图形。因本形与次形的边、角存在相等、互补或互余的关系，故借助次形可解本形。其中，弧角互易的次形最为常用。关于斜三角形弧角互易的次形，汪莱指出，“斜弧（三角）无论何形皆可用三外角亦可任用两内角一外角”求其次形。本形与次形间的度量关系依下法决定：“凡本形之角为次形边，即以其边所对之角为本形角所对之边。凡本形之外角为次形边，即以其边所对之外角为本形角所对之边。”如图 29-3-7 所示，$\triangle ABC$ 的三角皆为钝角，欲求其次形。依梅氏方法，

当用∠A的外角、∠B的外角、∠C的外角求其次形，所得次形为△LST。汪莱指出，取∠A的外角、∠B的外角、∠C的外角得次形△LST，取∠A的外角、∠B、∠C得次形△$L\varepsilon T$，取∠B的外角、∠A、∠C得次形△$L\varepsilon e$，取∠C的外角、∠A、∠B得次形△LSe。又如△ABH有一钝角两锐角，欲求其次形。依梅氏方法，当用钝角∠H的外角、锐角∠A、锐角∠B求其次形，所得次形为△LST。汪莱指出，取∠A的外角、∠B的外角、∠H的外角得次形△LSe，取∠A的外角、∠B、∠H得次形△$L\varepsilon e$，取∠B的外角、∠A、∠H得次形△$L\varepsilon T$，取∠H的外角、∠A、∠B得次形△LST。总之，用三外角或任取两内角一外角皆可求次形。当用三外角时，所得次形为本形的极三角形。斜三角形已知三个角，借助弧角互易的次形即可求出三边。

在球面斜三角形中，过一角的顶点作大圆与该角的对边垂直，所做大圆称为垂弧。垂弧可将球面斜三角形分为或补为两直角三角形。梅文鼎作垂弧法已如前述，显见法无划一。汪莱指出，不论何种球面三角形，皆在本形作垂弧。凡已知一角两边者由它角作垂弧，凡已知两角一边者由它边之对角作垂弧。分形的边之大小与角之锐钝皆以三角函数符号法则判别之。而垂弧的位置，凡底旁两角同类（同钝同锐）则垂弧在形内，异类（一钝一锐）则垂弧在形外。已知两边及其夹角的情形，垂弧的作法为图 29-3-8、图 29-3-9 所示。球面斜三角形已知两角及夹边，两边及夹角，两角及其一对边，两边及其一对角的情形都可借助垂弧法化为直角三角形求解。

其二，《衡斋算学》第一册“弧角比例锐钝大小知不知条目”和第四册“设弧三角形有无定限条目”就球面斜三角形解的个数和有解的条件给出完整的结论。

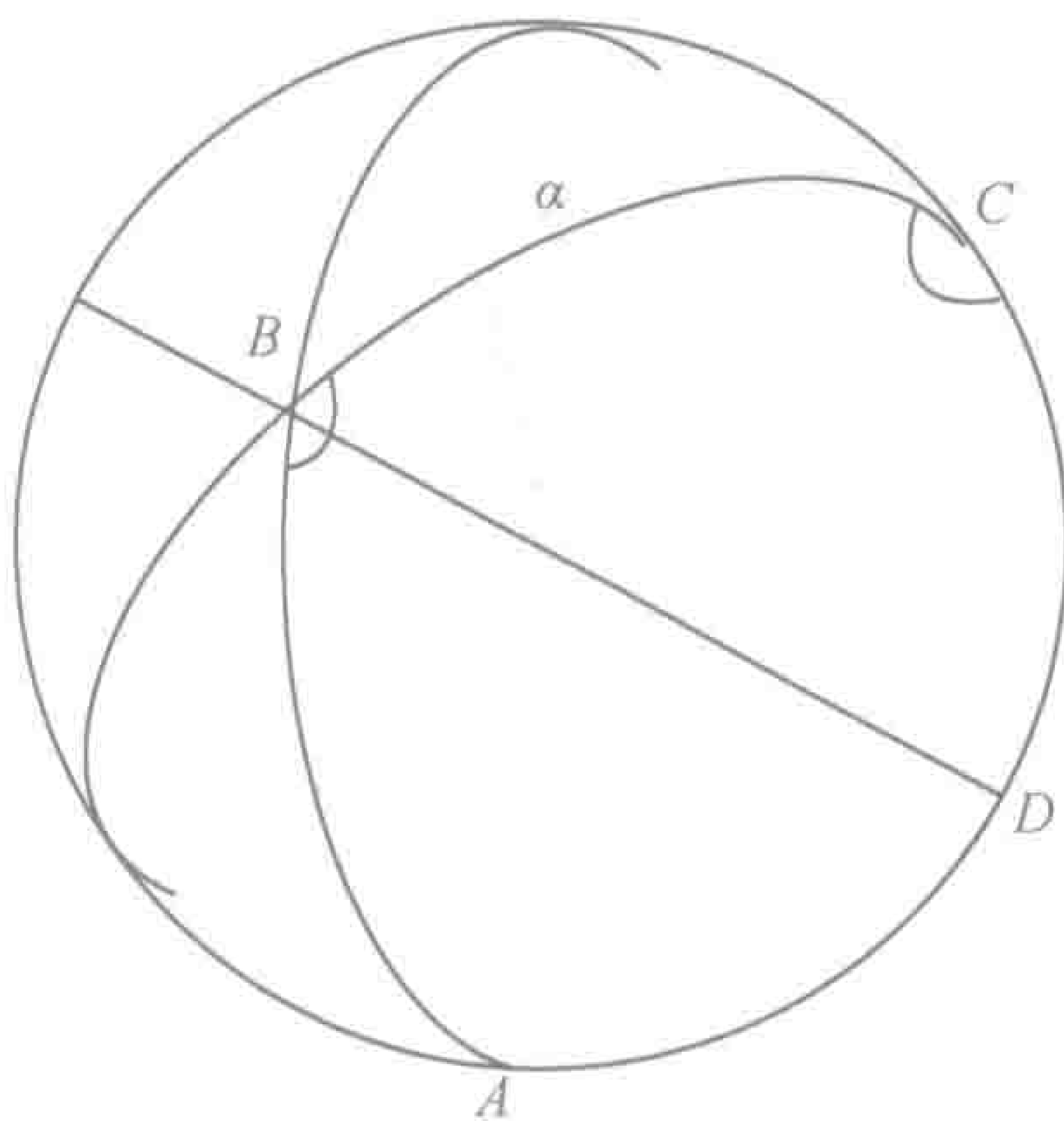


图 29-3-8　垂弧在形内示意图

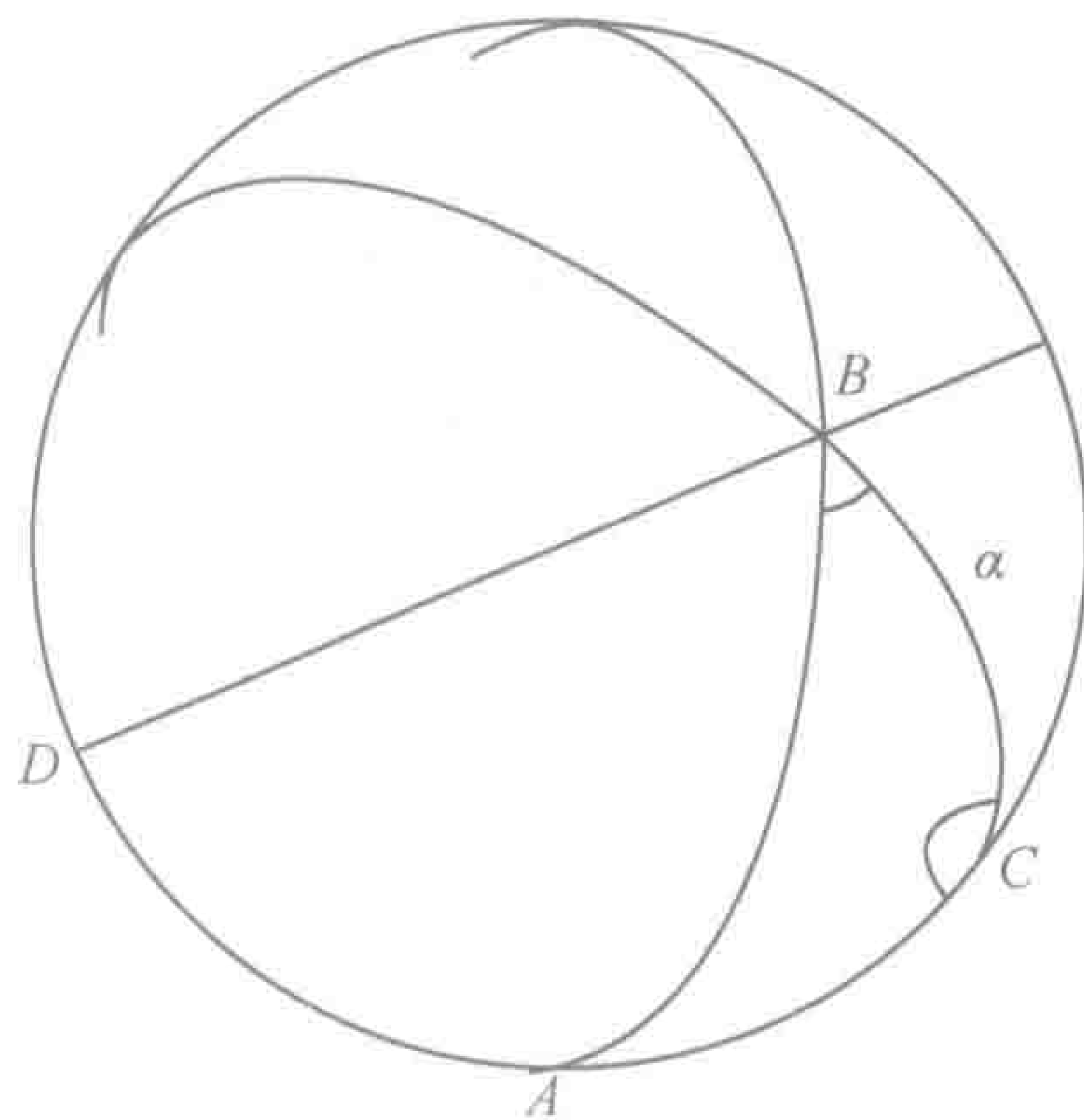


图 29-3-9　垂弧在形外示意图

已知两角及其一对边，两边及其一对角求解球面斜三角形，有解或无解。“知不知条目”给出上述两种条件下有解的各种情形、解的个数和解的范围。无解的情形不予讨论。“知”谓有一解，“不知”谓有两解，“不能定”谓有一解或两解。球面斜三角形已知条件共有六种情形。除了上述两种外，还有已知三边、三角、两角及夹边，两边及夹角等四种。依此六种条件求解三角形有解或无解。“定限条目”给上述六种条件下有解的各种情形和有解的充分条件。凡已知条件即是有解的充分条件无需补充条件的情形称为“无定限”，凡已

知条件不是有解的充分条件需要补充条件使之成为充分条件的情形称为有定限。所补充的条件称为定限。定限是一个有下限或上限的不等式。下限称为定大限，上限称为定小限。在上述六种条件中，两角及其一对边，两边及其一对角是讨论的难点，也是汪莱讨论的重点。其讨论结果分别如表 29-3-5、表 29-3-6 所示①。

表 29-3-5　已知两角及其一对边解的讨论

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">已知</th><th rowspan="2">求得</th><th colspan="3" rowspan="2">定限</th><th colspan="2">序号</th></tr>
<tr><th>一册</th><th>四册</th></tr>
<tr><td rowspan="13">$A<\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$a>\frac{\pi}{2}$</td><td>$B<\frac{\pi}{2}$</td><td>$b<\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="3">$B<A$</td><td>1</td><td>27</td></tr>
<tr><td>$B>\frac{\pi}{2}$</td><td>$b>\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="3">$B>\pi-A$</td><td>2</td><td>28</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a=\frac{\pi}{2}$</td><td>$B<\frac{\pi}{2}$</td><td>$b<\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="3">$B<A$</td><td>3</td><td>29</td></tr>
<tr><td>$B>\frac{\pi}{2}$</td><td>$b>\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="3">$B>\pi-A$</td><td>3</td><td>30</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$a<\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="4">$B<\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$b<\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$B<A$</td><td>$A<a$</td><td>$\sin B<\frac{\sin A}{\sin a}$</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="4">25</td></tr>
<tr><td>$A>a$</td><td>无定限</td></tr>
<tr><td rowspan="2">不能定</td><td rowspan="2">$B>A$</td><td>$A<a$</td><td>$\sin B\leqslant\frac{\sin A}{\sin a}$</td></tr>
<tr><td>$A>a$</td><td>无定限</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$B>\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$b>\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$\pi-B<A$</td><td>$A<a$</td><td>$\sin B<\frac{\sin A}{\sin a}$</td><td rowspan="4">5</td><td rowspan="4">26</td></tr>
<tr><td>$A>a$</td><td>无定限</td></tr>
<tr><td rowspan="2">不能定</td><td rowspan="2">$\pi-B>A$</td><td>$A<a$</td><td>$\sin B\leqslant\frac{\sin A}{\sin a}$</td></tr>
<tr><td>$A>a$</td><td>无定限</td></tr>
<tr><td>$B=\frac{\pi}{2}$</td><td>不能定</td><td colspan="3"></td><td>11</td><td></td></tr>
</table>

① 表 29-3-5、表 29-3-6 中的序号依李兆华《衡斋算学校证》。

续表

已知			求得	定限			序号	
							一册	四册
$A>\frac{\pi}{2}$	$a<\frac{\pi}{2}$	$B>\frac{\pi}{2}$	$b>\frac{\pi}{2}$	$B>A$			6	32
		$B<\frac{\pi}{2}$	$b<\frac{\pi}{2}$	$B<\pi-A$			7	31
	$a=\frac{\pi}{2}$	$B>\frac{\pi}{2}$	$b>\frac{\pi}{2}$	$B>A$			8	36
		$B<\frac{\pi}{2}$	$b<\frac{\pi}{2}$	$B<\pi-A$			8	35
	$a>\frac{\pi}{2}$	$B>\frac{\pi}{2}$	$b>\frac{\pi}{2}$	$B>A$	$A>a$	$\sin B<\frac{\sin A}{\sin a}$	9	34
					$A<a$	无定限		
			不能定	$B<A$	$A>a$	$\sin B\leqslant\frac{\sin A}{\sin a}$		
					$A<a$	无定限		
		$B<\frac{\pi}{2}$	$b<\frac{\pi}{2}$	$B<\pi-A$	$A>a$	$\sin B<\frac{\sin A}{\sin a}$	10	33
					$A<a$	无定限		
			不能定	$B>\pi-A$	$A>a$	$\sin B\leqslant\frac{\sin A}{\sin a}$		
					$A<a$	无定限		
		$B=\frac{\pi}{2}$	不能定				11	
$A=\frac{\pi}{2}$	$a\neq\frac{\pi}{2}$	$B<\frac{\pi}{2}$	$b<\frac{\pi}{2}$	无定限			12	37
		$B>\frac{\pi}{2}$	$b>\frac{\pi}{2}$					
	$a=\frac{\pi}{2}$	$B<\frac{\pi}{2}$	$b<\frac{\pi}{2}$	无定限			12	38
		$B>\frac{\pi}{2}$	$b>\frac{\pi}{2}$					
		$B=\frac{\pi}{2}$	$b=\frac{\pi}{2}$				12	40

表 29-3-6　已知两边及其一对角解的讨论

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">已知</th><th rowspan="2">求得</th><th colspan="4" rowspan="2">定限</th><th colspan="2">序号</th></tr>
<tr><th>一册</th><th>四册</th></tr>
<tr><td rowspan="13">$a<\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$A>\frac{\pi}{2}$</td><td>$b<\frac{\pi}{2}$</td><td>$B<\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="4">$b<a$</td><td>13</td><td>13</td></tr>
<tr><td>$b>\frac{\pi}{2}$</td><td>$B>\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="4">$b>\pi-a$</td><td>14</td><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A=\frac{\pi}{2}$</td><td>$b<\frac{\pi}{2}$</td><td>$B<\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="4">$b<a$</td><td>15</td><td>15</td></tr>
<tr><td>$b>\frac{\pi}{2}$</td><td>$B>\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="4">$b>\pi-a$</td><td>15</td><td>16</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$A<\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="4">$b<\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$B<\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$b<a$</td><td>$a<A$</td><td colspan="2">$\sin b<\frac{\sin a}{\sin A}$</td><td rowspan="4">16</td><td rowspan="4">11</td></tr>
<tr><td>$a>A$</td><td colspan="2">无定限</td></tr>
<tr><td rowspan="2">不能定</td><td rowspan="2">$b>a$</td><td>$a<A$</td><td colspan="2">$\sin b\leqslant\frac{\sin a}{\sin A}$</td></tr>
<tr><td>$a>A$</td><td colspan="2">无定限</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$b>\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$B>\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$\pi-b<a$</td><td>$a<A$</td><td colspan="2">$\sin b<\frac{\sin a}{\sin A}$</td><td rowspan="4">17</td><td rowspan="4">12</td></tr>
<tr><td>$a>A$</td><td colspan="2">无定限</td></tr>
<tr><td rowspan="2">不能定</td><td rowspan="2">$\pi-b<a$</td><td>$a<A$</td><td colspan="2">$\sin b\leqslant\frac{\sin a}{\sin A}$</td></tr>
<tr><td>$a>A$</td><td colspan="2">无定限</td></tr>
<tr><td>$b=\frac{\pi}{2}$</td><td>不能定</td><td colspan="4"></td><td>23</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">$a>\frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="2">$A<\frac{\pi}{2}$</td><td>$b<\frac{\pi}{2}$</td><td>$B<\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="4">$b<\pi-a$</td><td>18</td><td>17</td></tr>
<tr><td>$b>\frac{\pi}{2}$</td><td>$B>\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="4">$b>a$</td><td>19</td><td>18</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A=\frac{\pi}{2}$</td><td>$b<\frac{\pi}{2}$</td><td>$B<\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="4">$b<\pi-a$</td><td>20</td><td>21</td></tr>
<tr><td>$b>\frac{\pi}{2}$</td><td>$B>\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="4">$b>a$</td><td>20</td><td>22</td></tr>
</table>

续表

已知			求得	定限			序号	
							一册	四册
$a>\frac{\pi}{2}$	$A>\frac{\pi}{2}$	$b>\frac{\pi}{2}$	$B>\frac{\pi}{2}$	$b>a$	$a>A$	$\sin b<\frac{\sin a}{\sin A}$	21	20
					$a<A$	无定限		
			不能定	$b<a$	$a>A$	$\sin b\leqslant\frac{\sin a}{\sin A}$		
					$a<A$	无定限		
		$b<\frac{\pi}{2}$	$B<\frac{\pi}{2}$	$\pi-b>a$	$a>A$	$\sin b<\frac{\sin a}{\sin A}$	22	19
					$a<A$	无定限		
			不能定	$\pi-b<a$	$a>A$	$\sin b\leqslant\frac{\sin a}{\sin A}$		
					$a<A$	无定限		
		$b=\frac{\pi}{2}$	不能定				23	
$a=\frac{\pi}{2}$	$A\neq\frac{\pi}{2}$	$b>\frac{\pi}{2}$	$B>\frac{\pi}{2}$	无定限			24	23
		$b<\frac{\pi}{2}$	$B<\frac{\pi}{2}$					
	$A=\frac{\pi}{2}$	$b>\frac{\pi}{2}$	$B>\frac{\pi}{2}$	无定限			24	24
		$b<\frac{\pi}{2}$	$B<\frac{\pi}{2}$					
		$b=\frac{\pi}{2}$	$B=\frac{\pi}{2}$				24	39

兹以表29-3-6序号“一册16四册11”为例将条目的意义说明如下。第一册第16条原文是：

原所知边小，对角锐，又所知边小。审：又所知边小于原所知边则所求对角锐；若大于原所知边则不能定。

第四册第11条原文是：

设一边小，对一角锐，又设一边小。审：先设一边小于所对角度，别以先设一边为对弧，所对角为交角，作上下弧俱小正弧三角形，又设一边定不大此形之上弧；若大于原所对角度则无定限。

在球面三角形ABC中，设所知原边$a<\frac{\pi}{2}$，其对角$A<\frac{\pi}{2}$，又所知边$b<\frac{\pi}{2}$，求角B。由正弦定理有

$$\sin B=\frac{\sin A\sin b}{\sin a}$$

（1）若 $b<a$，则 $0<\frac{\sin b}{\sin a}<1$，$\sin B<\sin A$。由此可得 $B<A<\frac{\pi}{2}$或 $\pi-B<A$ 即 $B>\pi-A>\frac{\pi}{2}$。因 $b<a$，故取 $B<A<\frac{\pi}{2}$。

（2）若 $b>a$，则$\frac{\sin b}{\sin a}>1$，$\sin B>\sin A$。由此可得 $A<B<\pi-A$。若 $B=\frac{\pi}{2}$，一解，若 $A<B<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<B<\pi-A$，二解，即 B “不能定”。故第一册第 16 条结论正确。

在情形（1）中，

①若 $a<A$，则$\frac{\sin A}{\sin a}>1$。为使 $\sin B=\frac{\sin A\sin b}{\sin a}<1$，则 $\sin b<\frac{\sin a}{\sin A}$。

②若 $a>A$，则 $0<\frac{\sin A}{\sin a}<1$。此时常有 $\sin B=\frac{\sin A\sin b}{\sin a}<1$，亦即 $\sin b<\frac{\sin a}{\sin A}$。

在情形（2）中，

③若 $a<A$，则$\frac{\sin A}{\sin a}>1$。为使 $\sin B=\frac{\sin A\sin b}{\sin a}\leqslant 1$，则 $\sin b\leqslant\frac{\sin a}{\sin A}$。

④若 $a>A$，则 $0<\frac{\sin A}{\sin a}<1$。此时常有 $\sin B=\frac{\sin A\sin b}{\sin a}<1$，亦即 $\sin b<\frac{\sin a}{\sin A}$。

由①、②、③、④可知，无论 $b<a$ 或 $b>a$，当 $a<A$ 时，b 有定限 $\sin b\leqslant\frac{\sin a}{\sin A}$；当 $a>A$ 时，b 无定限。故第四册第 11 条结论正确。

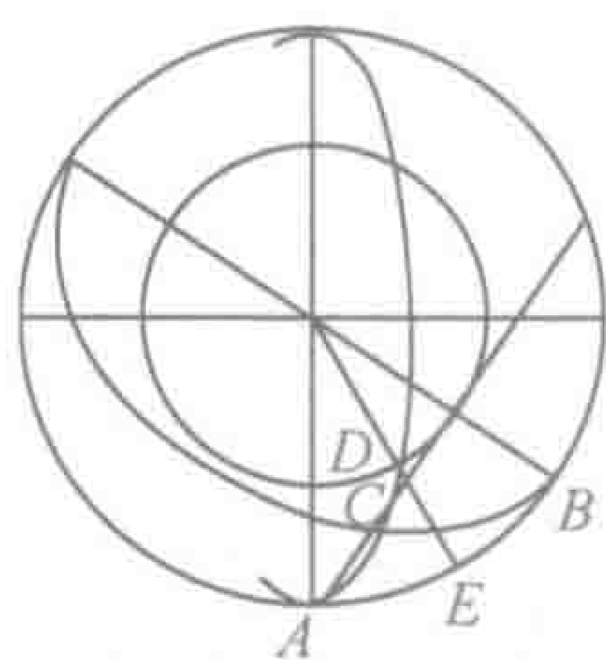


图 29-3-10　第四册第 11 条定限示意图（1）

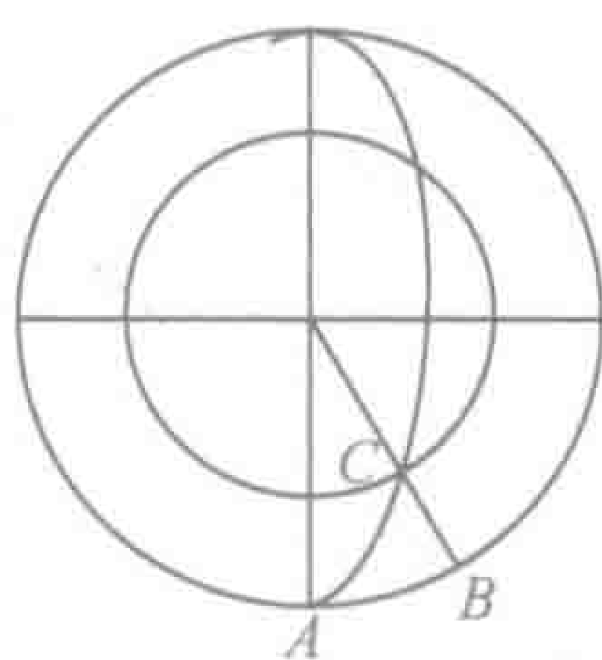


图 29-3-11　第四册第 11 条定限示意图（2）

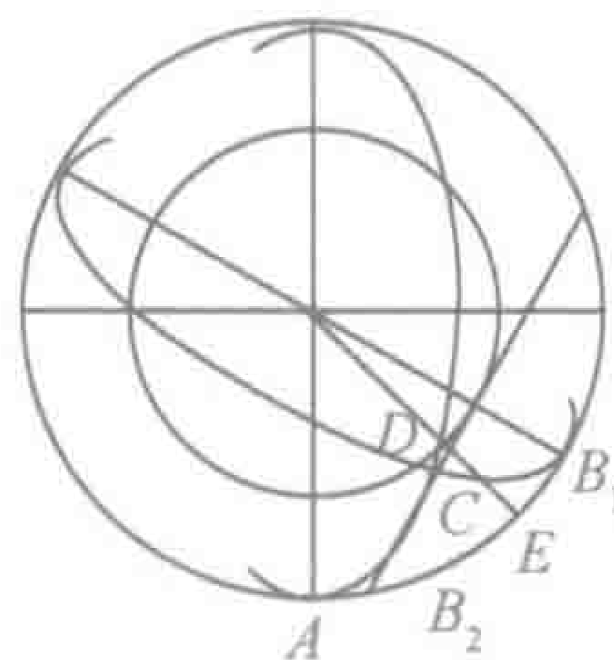


图 29-3-12　第四册第 11 条定限示意图（3）

第四册第 11 条的几何意义如图 29-3-10、图 29-3-11 和图 29-3-12 所示。在图中，设一边$a<\frac{\pi}{2}$，对角 $A<\frac{\pi}{2}$，又设一边 $b<\frac{\pi}{2}$。上述①和③中的定限皆以等价的弧长关系表示。图 29-3-10 表示上述①中的定限。在图 29-3-10 中，$\triangle ABC$ 为所求，其中 $b<a$，$a<A$。$\triangle AED$ 是直角三角形，交角 A，对弧$\overset{\frown}{DE}=a$。图示$\overset{\frown}{AC}=b<$直角 $\triangle AED$ 的上弧$\overset{\frown}{AD}$。由此可得 $\sin b<\sin AD$。在直角 $\triangle AED$ 中

$$\sin AD=\frac{\sin DE}{\sin A}=\frac{\sin a}{\sin A}$$

故 $\sin b<\frac{\sin a}{\sin A}$。图 29-3-11 和图 29-3-12 表示上述③中的定限。在图 29-3-11 中直角三角形 ABC 为所求，其中 $b>a$，$a<A$。其交角为 A，对弧$\widehat{BC}=a$。图示$\widehat{AC}=b$。由此可得 $\sin AC=\sin b$，而 $\sin AC=\frac{\sin a}{\sin A}$，故 $\sin b=\frac{\sin a}{\sin A}$。在图 29-3-12 中，$\triangle AB_1C$ 和$\triangle AB_2C$ 为所求。（$\triangle AB_2C$ 的$\widehat{B_2C}$未画出），其中 $b>a$，$a<A$。$\triangle AED$ 是直角三角形，交角 A，对弧$\widehat{DE}=a$，图示$\widehat{AC}=b$ $<$直角$\triangle AED$ 的上弧$\widehat{AD}$。由此可得 $\sin b<\sin AD$，在直角$\triangle AED$ 中

$$\sin AD=\frac{\sin DE}{\sin A}=\frac{\sin a}{\sin A}$$

故 $\sin b<\frac{\sin a}{\sin A}$。

表 29-3-6 共列二十一种情形。其中条目 24-23 的四种情形与条目 16-11，17-12，18-17，19-18 所论为同一种类型的斜三角形。去掉重复的四种，再去掉直角三角形即 $A=\frac{\pi}{2}$的 7 种，共得 10 种情形。这 10 种情形包括了球面斜三角形的全部 10 种类型。

表 29-3-5 所列条目的意义可比照表 9-3-6 予以说明。

此外，球面直角三角形解的讨论、球面三角形正投影图上不倚外周角的量法等方面，汪莱也有深刻的结果。

上述工作说明，17 世纪初期球面三角知识传入之后，经梅文鼎、汪莱等人的努力，至 18 世纪末期，包括解法、画法以及解的存在性与唯一性等内容的球面三角知识已经形成系统。

（五）焦循的四则运算法则研究

焦循在研究《九章算术》等古代算经和当代算家著译的基础上，完成《加减乘除释》八卷（1798）。是书仿刘徽注《九章算术》之意，试图将各种传统的算法予以会通和概括。焦氏称：

> 同一今有之术用于衰分，复用于粟米，同一齐同之术用于方田，复用于均输，同一弦矢之术用于勾股，复用于少广，而立方之上，不详三乘方以上之方，四表之测，未尽三率相求之例。踵其后者又截粟米为贵贱衰分，移均输为叠借互征。名目既繁，本原益晦。

焦氏又称：

> 然名起于立法之后，理存于立法之先。理者何？加减乘除四者之错综变化也。

据此，焦氏“以加减乘除为纲，以《九章》分注而辨明之。”该书采用甲、乙、丙、丁等汉字表示数量。“论数之理，取于相通，不偏举数，而以甲、乙明之。”该书给出一些定义。例如，

> 以甲加甲为倍之。
>
> 以甲中分为半之。
>
> 三分甲，以二为太半，一为少半。
>
> 受除者为实，所以除之者为法，实如法而一为法除。

以甲乘乙或以乙乘甲为相乘。

以甲乙各为母子，以甲母乘乙子，以乙母乘甲子为维乘。

该书给出运算律有，

以甲加乙或以乙加甲其和数等。

此即加法交换律：$a+b=b+a$。

先以甲乙相加，后加以丙；或先以乙丙相加，后加以甲；或先以甲丙相加，后加以乙，其得数皆同。

此即加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b$。

以甲乘乙犹之以乙乘甲。

此即乘法交换律：$a\times b=b\times a$。

先以乙乘甲，连以丙乘之；或先以丙乘乙，连以甲乘之；或先以甲乘丙，连以乙乘之，其得数皆等。

此即乘法结合律：$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)=(a\times c)\times b$

以甲盈朒分之，各乘以乙，合之，其数等。

设 $a=c+d, c>d$ 则 $a\times b=(c+d)b=c\times b+d\times b$。此即乘法对加法的分配律。

该书将一些名目不同的算法予以分析，指出它们名异理同。例如，“方田、少广、商功、勾股，其原出于自乘。粟米、均输、盈不足、方程，其原出于差分。”因而，“悉于加减乘除之理，随其理以施其算”，名目并可不立。焦循强调算理，“不偏举数”，概括定义与运算律，是一种创见。这些工作反映出中国传统数学向抽象化发展的倾向。

（六）对大衍总数术的研究

秦九韶《数书九章》收入《四库全书》之后，大衍总数术逐引起当时数学家的研究兴趣。张敦仁《求一算术》三卷（1803）、李锐《日法朔余强弱考》（1799）和骆腾凤《艺游录》（1815）卷二衰分补遗节论及大衍总数术均有新意。

1. 张敦仁《求一算术》

秦九韶大衍求一术的计算过程是：

置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数与左上一相生，入左下。然后乃以右行上下以少除多，递互除之，所得商数随即递互累乘，归左行上下。须使右上末后奇一而止。乃验左上所得以为乘率。

设有同余方程

$$3800M'\equiv 1\pmod{27}$$

依上述术文求 M' 即乘率，先化为等价的

$$20M'\equiv 1\pmod{27}$$

据此式作如下的演算即可：

天元 1	$g=20$	1	$g=20$	$P_2=3$	$r_2=6,\ q_2=2$
	$m=27$	$P_1=1$	$r_1=7,\ q_1=1$	$P_1=1$	$r_1=7,\ q_1=1$
(1)		(2)		(3)	

$P_2=3$	$r_2=6$，$q_2=2$
$P_3=4$	$r_3=1$，$q_3=1$

（4）

$P_2=23$	$r_4=1$，$q_4=5$
$P_3=4$	$r_3=1$，$q_3=1$

（5）

由式（1）～式（5）依次辗转相除，递乘递加，至右上角 $r_4=1$ 时，得左上角 $M'=P_4=23$ 即所求乘率。

设 $gx\equiv 1\pmod m$，其中 $g<m$，$(g, m)=1$，则上述辗转相除与递乘递加的计算过程亦可分别进行：

$$\text{求 } q_i\begin{cases}\dfrac{m}{g}=q_1\cdots r_1\\ \dfrac{g}{r_1}=q_2\cdots r_2\\ \dfrac{r_1}{r_2}=q_3\cdots r_3\\ \dfrac{r_2}{r_3}=q_4\cdots r_4\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{r_{k-2}}{r_{k-1}}=q_k\cdots r_k=1\end{cases}\qquad \text{求 } p_i\begin{cases}\text{天元 }1\\ p_1=q_1\times 1\\ p_2=q_2p_1+1\\ p_3=q_3p_2+p_1\\ p_4=q_4p_3+p_2\\ \cdots\cdots\\ p_k=q_kp_{k-1}+p_{k-2}\end{cases}$$

其中，$i=1, 2, 3, \cdots k$。当 $r_k=1$ 时，q_i 计算结束。依次计算 p_i，p_k 即为所求 x。其中，k 为偶数。

大衍求一术可分两步分别进行这一事实，是张敦仁《求一算术》首先给出清楚的说明。《求一算术》卷上载：

> 术曰：列少数于上，多数于下，以上除下，所得为第一数，有余，复以下除上，所得为第二数。如是上下相除，所得以次命之（如第三数，第四数之类）。上位余一（如上位除尽，即减得数一为余一。如上位五，下位一，常法以一除五得五，除尽。此术以一除五，则为得四余一，与常法不同。）即止，不除。
>
> 乃列各得数于左行，立天元一为右行第一数。以左行第一数乘之，得右行第二数（此无上位可加，故即为第二数）。复置右行第二数，以左行第二数乘之，加入右行第一数，得右行第三数。每置右行数，以左行相当之数乘之（谓第一，第二位数相当），以右行上位加之，得右行次位（如右行第三数，即以左行相当第三数乘之，以右行上位第二数加之，得右行次位第四数。它仿此）。其右行最后得数即乘率也（右行位数恒多于左行一位。如左行有四数，右行即有五数，此第五数即乘率也）。

这一术文实即上述求 q_k，p_k 过程的文字叙述。

前例，$20M'\equiv 1\pmod{27}$

依张敦仁的术文计算如下：

$\dfrac{27}{20}=1\cdots 7$	$q_1=1$　　天元 1

$\frac{20}{7}=2\cdots6$	$q_2=2$	$p_1=q_1\times1=1$
$\frac{7}{6}=1\cdots1$	$q_3=1$	$p_2=q_2p_1+1=3$
$\frac{6}{1}=5\cdots1$（止）	$q_4=5$	$p_3=q_3p_2+p_1=4$
		$p_4=q_4p_3+p_2=23$

此时 $M'=p_4=23$ 为所求。

张敦仁的上述说明有助于理解大衍求一术。不足之处是，张氏未能指出：求得 $q_3=1$，$r_3=1$，见左列第 3 式，可得 $p_3=4$，见右列第 4 式。此时更求得 $q_4=5$，$r_4=1$，以及 $p_4=23$ 是否必要。事实上，$-M'=p_3=4$，即 $M'=-4$ 也是所给同余方程的解。这一点由晚清黄宗宪指出，张敦仁尚未深入至此。

2. 李锐《日法朔余强弱考》

李锐的《日法朔余强弱考》运用大衍求一术计算日法的"强数"和"弱数"。设 $\frac{p_1}{q_1}>\frac{p_2}{q_2}>0$，由有理数的性质可知，一定存在分数

$$\frac{p}{q}=\frac{mp_1+np_2}{mq_1+nq_2}$$

满足

$$\frac{p_1}{q_1}>\frac{p}{q}>\frac{p_2}{q_2}$$

其中，m、n 为正整数。设某部历法的朔望月的日数是 $29+\frac{p}{q}$，其中 $\frac{p}{q}$ 不足 1 日，则 q 称为日法，p 称为朔余。如果朔望月的日数满足

$$29\frac{26}{49}>29+\frac{p}{q}>29\frac{9}{17}$$

那么 $\frac{p}{q}$ 可由"强率" $\frac{26}{49}$ 与"弱率" $\frac{9}{17}$ 累加求得。例如，

$$\frac{26\times15+9\times1}{49\times15+17\times1}=\frac{399}{752}=\frac{p}{q}$$

其中，752 与 399 是何承天《元嘉历》(443) 的日法与朔余。当 m、n 满足一定条件，如果某部历法的日法 q、朔余 p 可以表示为如下的形式

$$\frac{p}{q}=\frac{26m+9n}{49m+17n} \tag{29-3-27}$$

那么 $\frac{p}{q}$ 可能得自调日法。根据这种理解，李锐《日法朔余强弱考》检验了五十一部中国古代历法的日法、朔余。其目的在于：说明每部历法的日法，朔余是否可能得自调日法。对于李锐这一工作的评价，目前尚有不同的意见，而其检验方法给出的不定方程的解法确有新意。

李锐的检验方法即“有日法求强弱”术①。由式（29-3-27）有

$$q = 49m + 17n \tag{29-3-28}$$

其中，m、n 分别称为强数、弱数，49、17 分别称为强母、弱母。已知 q，求正整数 m、n，即“有日法求强弱。”具体算法是

> 置日法，以强母去之，余以四百四十二（此数以弱母去之适尽，以强母去之余一）乘之，满八百三十三（此数以强，弱二母去之皆尽）去之，余为弱实，以弱母除之，得弱数。以弱实转减日法，余为强实，以强母除之，得强数。②

将不定方程（29-3-28）化为同余方程组

$$\begin{cases} 17n \equiv R_1 \pmod{49} \\ 17n \equiv 0 \pmod{17} \end{cases}$$

其中，$17n$ 为“弱实”，R_1 是“置日法，以强母去之”的余数。术文前半求弱数即求解同余方程组的 n。由大衍总数术，记 $m_1 = 49$，$m_2 = 17$，$M = 49 \times 17 = 833$，$M_1 = 17$，$M_2 = 49$。由大衍求一术分别求解

$$17M'_1 \equiv 1 \pmod{49}$$
$$49M'_2 \equiv 1 \pmod{17}$$

得乘率 $M'_1 = 26$，$M'_2 = 8$，于是

$$17n \equiv \sum_{i=1}^{2} R_i M_i M'_i \pmod{M}$$

即

$$\begin{aligned} 17n &= R_1 \times 17 \times 26 + 0 \times 49 \times 8 - 833k \\ 17n &= 442R_1 - 833k \end{aligned} \tag{29-3-29}$$

$k = 1, 2, 3, \cdots$。给定 R_1，可得 $17n$，进而可得 n。即得 $17n$，由式（29-3-28）可得 $49m$ 即“强实”，由此易得 m，此即术文末句的意义。m，n 即不定方程（29-3-28）的一组解。显然，术文中的 $442 = M_1M'_1$，$833 = M$，均与大衍总数术有关。式（29-3-29）可化简为

$$n = 26R_1 - 49k \tag{29-3-30}$$

$k = 1, 2, 3, \cdots$。R_1 是余数，显有 $0 < n < 49$。

例如，刘洪《乾象历》（公元206）的“日法1457，朔余773”表示为式（29-3-27）的形式 $\frac{773}{1457} = \frac{26m + 9n}{49m + 17n}$，解不定方程

$$1457 = 49m + 17n$$

先求 R_1。1457 除以 49，得 29 余 36，即 $R_1 = 36$。由式（29-3-30）$n = 26 \times 36 - 49k$。当 $k = 19$ 时，$n = 5$。于是，$m = \frac{1457 - 17 \times 5}{49} = 28$。故强数 $m = 28$，弱数 $n = 5$，即《乾象历》的日法，朔余可以表为式（29-3-27）的形式。根据李锐的算法，该历的日法、朔余可能得自调日法。

---

① 刘钝，大哉言数，辽宁教育出版社，1993，第 280 页。

② 李锐，日法朔余强弱考，薄树人主编，《中国科学技术典籍通汇·天文卷》，影印道光三年刊本。括号内文字系原文夹注。

不定方程（29-3-28）虽属特殊，然李锐的方法具有一般性。

3. 骆腾凤《艺游录》

骆腾凤《艺游录》卷二运用大衍总数术求解百鸡问题。百鸡问题可列为如下的方程组

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$$

消去 z，得

$$7x+4y=100$$

化为同余方程组

$$\begin{cases} 4y\equiv 2 \pmod 7 \\ 4y\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

依大衍总数术，定母 $m_1=7$，$m_2=4$，衍母 $M=m_1m_2=28$，衍数 $M_1=\frac{M}{m_1}=4$。由大衍求一术解

$$4M'_1\equiv 1 \pmod 7$$

得乘率 $M'_1=2$。于是

$$4y \equiv \sum_{i=1}^{2} R_iM_iM'_i \pmod M$$

$$4y = 2\times 4\times 2 = 16$$

$$y = 4$$

由此可得 $7x=100-4y=84$，$x=12$，$z=100-(x+y)=84$。由增减率 4，-7，3 得另两解。

显然，骆腾凤与李锐两者的方法相同。

第三十章　幂级数展开式的研究

18 世纪中叶至 19 世纪中叶百余年间，中国数学家明安图、董祐诚、项名达、戴煦、李善兰、徐有壬、顾观光、邹伯奇等在宋元垛积术的基础上，在清初传入的"杜氏三术"刺激下，对三角函数和对数函数等幂级数展开式的研究自成体系，各具特色。而且，他们的独立研究类似于 17 世纪前微积分时期西方数学家的工作，具有解析几何和微积分初步的思想方法。

第一节　明安图及其《割圜密率捷法》

一　明　安　图

明安图（约 1692 ~ 1763），字静庵，蒙古正白旗（今内蒙古锡林郭勒盟南部）人。我国历史上卓越的少数民族数学家和天文学家。大约在 1710 年，明安图入钦天监当官学生，专习历算。此时康熙帝热心科学，明安图常常以官学生的身份在皇宫听讲，1712 年夏，明安图与梅瑴成、陈厚耀、何国柱、何国宗等两次随康熙帝到热河避暑山庄。康熙"亲临提名，许其问难，如师弟子"。他的学生陈际新也说："明静庵先生自童年亲受数学于圣祖仁皇帝，至老不倦。"明安图在钦天监系统地学习了历算知识。

1713 ~ 1722 年，明安图以"食员外郎俸钦天监五官正"的身份参与《律历渊源》的"考核"工作。他担任钦天监五官正近 40 年。《历象考成》出版几年后便发现误差，明安图等在 1737 ~ 1742 年完成《历象考成》修改本《历象考成后编》十卷。《后编》"尽心考验，增补图说"，特别是在我国历法中第一次正式采用刻卜勒定律。

1744 ~ 1752 年钦天监又完成了编修《仪象考成》三十二卷的工作。该书除了讲天文仪器外，还有各种星表，数学计算任务十分繁重。明安图名列"推算"者之首。

乾隆于 1756 年和 1759 年两次组织新疆地区的测量和绘图工作。第一次由何国宗、明安图带领，到了新疆西北部地区。设点测量各地的经纬度、方向和距离、昼夜长短以及二十四节气日出入时刻，测量队从巴里坤开始分南北两路展开，完成了天山北路及天山南路一小部分地区的测量。第二次则完全由明安图负责，经过近一年的时间，完成了天山南路的测量。测量中一般采用天文测量和三角测量两种方法。经过这两次测量，获得了哈密以西至巴尔喀什湖以东以南广大地区 90 多个点（不完全统计）的测量资料，所测得的绝对位置虽有不精确之处，但其相对位置比较精确。经过实地测量和调查研究，对于当地的山川险易、道路远近、历史沿革，掌握了大量的第一手资料，并且将该地区的节气时刻载入了当时的时宪书。至此，对于我国新疆地区的疆界、地域情况有了更加清楚的了解。《乾隆内府舆图》就是在康熙《皇舆全图》和这两次实地测量的基础上绘制而成的，并成为此后相当长一段时间内我国编绘地图的蓝本。

梅榖成在《赤水遗珍》中记载了杜德美传入的三个无穷级数公式，但没有证明。明安图说："惜仅有其法而未详其义，恐有人金针不度之疑"，明安图穷 30 年研究其证明，还提出并证明了另外 6 个公式。晚年他将上述成果撰成《割圜密率捷法》，未及完成，便与世长辞。临终前嘱其门人陈际新"与同学者多续而成之，则余志也"。陈际新遵嘱同明安图的儿子明新、弟子张良亭等整理了老师的遗著，直到 1774 年才最后定稿。其间，有抄本流传于外，但被误传为"杜氏九术"。

1760 年，年近古稀的明安图升任钦天监监正。1763 年冬，明安图因病辞去了钦天监监正的职务，不久病逝。

二　《割圜密率捷法》

《割圜密率捷法》四卷，明安图著，陈际新等续成，于 1839 年刊刻。卷一"步法"，罗列出所得到的各无穷级数公式；卷二"用法"，系各公式在数学和天文学上的应用；卷三、四为"法解"，阐述各公式的证明方法。

清代的无穷级数研究是一个相当活跃的领域，人才辈出，成果累累。溯本求源，明安图的创始之功无疑应该给予充分的肯定。从研究内容和数学方法上来说，诸如董祐诚、项名达、戴煦、徐有壬、李善兰等数学名家，都受到了他的影响。中国学者在这一领域运用具有传统数学特色的方法，基本上解决了三角函数、对数等初等函数的幂级数展开式问题，为后来的学者顺利接受笛卡儿等创立的解析几何，牛顿、莱布尼茨等创立的微积分等近代数学知识，奠定了重要的思想基础①。

明安图不仅证明了"杜氏三术"，而且得出并证明了"弧背求通弦"、"弧背求矢"、"通弦求弧背"、"正弦求弧背"、"正矢求弧背"、"矢求弧背"等 6 个级数式。

这 6 个公式用现代数学符号表示就是：

（1）弧背求通弦。

$$c=2a-\frac{(2a)^3}{4\cdot 3!\ r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot 5!\ r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\cdot 7!\ r^6}+\cdots$$

（2）弧背求矢。

$$b=\frac{(2a)^2}{4\cdot 2!\ r}-\frac{(2a)^4}{4^2\cdot 4!\ r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\cdot 6!\ r^5}-\cdots$$

（3）通弦求弧背。

$$2a=c+\frac{c^3}{4\cdot 3!\ r^2}+\frac{3^2c^5}{4^2\cdot 5!\ r^4}+\frac{3^2\cdot 5^2c^7}{4^3\cdot 7!\ r^6}+\cdots$$

（4）正弦求弧背。

$$a=r\sin\frac{a}{r}+\frac{\left(r\sin\frac{a}{r}\right)^3}{3!\ r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\left(r\sin\frac{a}{r}\right)^5}{5!\ r^4}+\cdots$$

（5）正矢求弧背。

① 张继梅，明安图及其《割圜密率捷法》，历史教学，2000，(6)：47。

$$a^2=2\left\{r\frac{2r\mathrm{vers}\,\dfrac{a}{r}}{2!}+\frac{1^2\left(2r\mathrm{vers}\,\dfrac{a}{r}\right)^2}{4!}+\frac{1^2\cdot 2^2\left(2r\mathrm{vers}\,\dfrac{a}{r}\right)^3}{6!\ r}+\cdots\right\}$$

（6）矢求弧背。

$$(2a)^2=2\left\{r\cdot\frac{8b}{2!}+\frac{(8b)^2}{4\cdot 4!}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot\ (8b)^3}{4^2\cdot 6!\ r}+\cdots\right\}$$

明安图的证明通过割圆、割弧，“析之至于无穷”，从而“因理以立法”，使曲、直互求，开辟了一条研究变量数学的特殊途径。明安图在证明了9个级数后指出：“以上九法，皆至精至密，任有圆线求直线，有直线求圆线，虽推至无穷，靡不合也。”使曲、直互变，在方法上有所突破。他说：

> 弧，圆线也；弦，直线也，二者不同类也。不同类，虽析之至于无穷而不可以一之也。然则终不可相求乎？非也。弦与弧虽不可以一之，苟析之至于无穷，则所以不可一之故见矣。得其不可一之故，即可因理以立法，是又未尝不可以一之也。何为而不可相求乎？今取百分、千分、万分弧通弦率数比例相较而得弧背求通弦之率数，其法即确然无疑，而其数视求种分弧通弦率数，转为简易①。

第二节　董祐诚、项名达、戴煦等的工作

一　董祐诚及其《割圜连比例术图解》

董祐诚（1791～1823），字方立，江苏阳湖（今常州）人。他“生五岁晓九九数”，正值家道中落，常为衣食奔走。1817年，其兄董基诚中进士，董祐诚随兄客居北京，境遇有所好转。1808年，董祐诚始研治经史、数学，历时二载。1815年，开始地理学的研究。1818年，中顺天乡试。以后则屡试不第，其主要精力遂转向数学研究与著述，数学、历法、地理等方面亦皆有作品传世。董基诚将其遗稿选编为《董方立遗书》9种16卷。今通行者有同治八年董方立之子贻清成都翻刻本等版本，计有《割圜连比例图解》3卷（1819），《椭圜求周术》1卷（1821），《斜弧三边求角补术》1卷（1821），《垛积求积术》1卷（1821），《三统术衍补》1卷，《水经注图说残稿》4卷（约1815），《文甲集》2卷，《文乙集》2卷，《兰石词》1卷。

董祐诚的数学成就主要在两个方面。一是对割圆连比例术的研究，独立地给出了分弧与倍弧的正弦和矢的四个公式，完成了所谓“杜氏九术”的证明。二是对垛积术的研究，探讨了方锥堆和纵方堆的结构，并把它应用于割圆连比例研究中。

董祐诚认为，梅氏所载杜氏三术“语焉不详，罕通其故”，欲另创通法，而“覃精累年，迄无所得”。1819年春，朱鸿以明安图九术出示董祐诚，“九术之外，别无图说”。董祐诚遂“反复寻绎，究其立法之原”，成《割圜连比例图解》3卷②。上卷首列“九术”，次置“弧线表”，末附“以弦求弦、以矢求矢术”。中卷论弧求弦、矢。下卷为弦、矢求弧。

---

① 明安图，割圜密率捷法，卷三。

② 李兆华，董祐诚，杜石然主编，中国古代科学家传记下集，科学出版社，1993年，第1181页。

该书主要结果为“有通弦，求通弧加倍几分之通弦”，“有矢，求通弧加倍几分之矢”，“有通弦，求几分通弧之一通弦”，“有矢，求几分通弧之一矢”等四个展开式。用现代符号可记为

$$l_{2n-1}=(2n-1)\,l-\frac{(2n-1)\,[(2n-1)^2-1^2]}{3!\,4r^2}l^3+\frac{(2n-1)\,[(2n-1)^2-1^2][(2n-1)^2-3^2]}{5!\,4^2r^4}l^5-\cdots \tag{30-2-1}$$

$$b_{2n}=\frac{n^2}{2!}(2b)-\frac{n^2(n^2-1^2)}{4!\,r}(2b)^2+\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{6!\,r^2}(2b)^3-\cdots \tag{30-2-2}$$

其中 l 为通弦，l_{2n-1} 为倍分弦，b 为矢，b_{2n} 为倍分矢，r 为圆半径。

$$l=\left(\frac{l_{2n-1}}{2n-1}\right)+\frac{[(2n-1)^2-1]}{3!\,4r^2}\left(\frac{l_{2n-1}}{2n-1}\right)^3+\frac{[(2n-1)^2-1][9\,(2n-1)^2-1]}{5!\,4^2r^4}\left(\frac{l_{2n-1}}{2n-1}\right)^5+\cdots \tag{30-2-3}$$

$$b=\frac{1}{2!}\left(\frac{2b_{2n}}{n^2}\right)+\frac{(n^2-1^2)}{4!\,r}\left(\frac{2b_{2n}}{n^2}\right)^2+\frac{(n^2-1^2)(4n^2-1^2)}{6!\,r^2}\left(\frac{2b_{2n}}{n^2}\right)^3+\cdots \tag{30-2-4}$$

其中 l 为分弦，l_{2n-1} 为通弦，b 为分矢，b_{2n} 为矢。

董祐诚以连比例四率法并结合中国传统数学的垛积求积术求得前两式，又以级数回求法得后两式，并称以上四式为“立法之原”。由以上四术可得明安图九个展开式。其间对应关系如表 30-2-1① 所示。

表 30-2-1　“立法之原”与九术名称

立法之原	九术名称
有通弦求通弧加倍几分之通弦	通弧求通弦
	弧背求正弦
有矢求通弧加倍几分之矢	通弧求矢
	弧背求正矢
有通弦求几分通弧之一通弦	通弦求通弧
	正弦求弧背
	圆径求周
有矢求几分通弦之一矢	矢求通弧
	正矢求弧背

由式（30-2-1），当 $n\to\infty$ 时，$(2n-1)\,l\to a$，得

$$l_{2n-1}=a-\frac{a^3}{3!\,4r^2}+\frac{a^5}{5!\,4^2r^4}-\frac{a^7}{7!\,4^3r^6}+\cdots$$

此即通弧求通弦式。

由式（30-2-2），注意到 $2b=\frac{l^2}{r}$，当 $n\to\infty$ 时，$2nl\to a$，得

$$b_{2n}=\frac{a^2}{2!\,4r}-\frac{a^4}{4!\,4^2r^3}+\frac{a^6}{6!\,4^3r^5}-\frac{a^8}{8!\,4^2r^7}+\cdots$$

① 吴文俊主编，中国数学史大系，李兆华主编第八卷，北京师范大学出版社，2000 年，第 97 页。

此即通弧求矢式。

由式（30-2-3），与通弧求通弦相同条件下，得

$$a = l_{2n-1} + \frac{1^2}{3!\ 4r^2} l_{2n-1}^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!\ 4^2 r^4} l_{2n-1}^5 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!\ 4^3 r^6} l_{2n-1}^7 + \cdots$$

此即通弦求通弧式。

由式（30-2-4），与通弧求矢相同条件下，得

$$a^2 = 2r\left[\frac{1}{2!}(8b_{2n}) + \frac{1^2}{4!\ 4r}(8b_{2n})^2 + \frac{1^2 \cdot 2^2}{6!\ 4^2 r^2}(8b_{2n})^3 + \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{8!\ 4^3 r^3}(8b_{2n})^4 + \cdots\right]$$

此即矢求通弧式。

由此四式易得其余五式。

《割圜连比例图解》3卷在明安图的工作之后而在项名达与徐有壬的工作之前，有继往开来之功。项名达《象数一原》（1843）将此四术精确化并概括为二术。徐有壬由此四术导出大小弦互求，大小矢互求四术，进而给出大小八线互求十八术，共二十二术，使得三角函数的幂级数展开式大体完备。

二　项名达及其《象数一原》

项名达（1789～1850）原名万准，字步莱，号梅侣，浙江钱塘（今杭州）人。他一生致力于数学研究，在三角函数及函数的幂级数展开式的研究等方面都有突出的贡献，在中国第一个提出求椭圆周长的正确方法。

项名达祖籍安徽歙县，出身于一个比较重视文化素养的盐商家庭，自幼受到良好教育，广读博览，尤好历算。嘉庆二十一年（1816）中举人，考授国子监学正。

道光五年（1825）项名达撰成《勾股六术》一卷。该书讨论直角三角形的勾、股、弦各边互求之法，分有术解和图解两大部分。他对旧术加以变通，将主题相同的并归为一类，共列出六术，共计正题26个，另有附题53个。随后，项名达对其所列六术一一作图详释，图解明晰，比例精简，使繁杂的三角和较诸术变得简洁明了。

道光六年项名达中进士，授知县，但辞官不就，回乡专注于数学研究。这期间他继续推广对三角和较术的研究。当时在钦天监任职的朱筠麓以黄赤大距升度差为题，向项名达请求黄赤道。项名达从无比例中寻得比例线，进而立出平弧三角（平面三角和弧面三角）和较术六种，并作图解，随后寄给朱筠麓。从此，项名达对三角和较术展开了全面研究。

道光十七年，项名达应聘为苕南书院主讲。他最得意的两名弟子是夏鸾翔和王大有，一个是数学家，一个是天文学家。到苕南书院后，项名达对三角和较术的研究获得了重大进展，道光二十三年（1843）撰成《三角和较术》一卷，内容涉及平三角和较相求、正弦三角和较相求、斜弧三角和较相求等问题，论证极其巧妙。

这年初夏，项名达与陈杰共同探讨两边夹一角求夹角对边的方法，后由陈杰的学生丁兆庆、张福僖为其作图解，编成《两边夹角径求对角新法图说》一书，被辑入陈杰《算法大成》。

道光二十五年项名达与戴煦结交。当年，为戴煦《对数简法》作序，称道戴煦的研究对于对数的旧的计算方法既揭示了其本质又加以变通。在戴煦的启发下，项名达撰《开诸乘方捷法》，立出四术，使开平方乃至开任何高次方有了简捷的方法。项名达与戴煦还共同讨论了求

二项式 n 次根的简法，在《开诸乘方捷法》中创立了逐次逼近法以及用来开 n 次方的递推公式。他还提出了幂指数为 $\frac{1}{n}$ 的二项式定理，戴煦后来在此基础上发现了实数指数二项式定理。

项名达在苕南书院也开始了其重要著作《象数一原》的撰述。《象数一原》六卷，其主要内容是论述三角函数幂级数展开式问题。早年项名达在读明安图《割圜密率捷法》、董祐诚《割圜连比例图解》时，认为前者未对方圆率相通之理加以明释，而后者虽立四术，以倍分率、析分率阐明方圆之所以相通，但其中仍有许多问题没有解释清楚，项名达对这些问题一直心存疑问。在去苕南书院的船上又念及此事，苦思冥想，恍然有得，下船后随即将思考所得记录下来，写成图说两卷。

道光二十六年（1846），项名达继续撰写《象数一原》，至道光二十八年（1847），粗成六卷。卷一为整分起度弦矢率论；卷二为半分起度弦矢率论；卷三、卷四为零为起度弦矢率论；卷五为诸术通诠；卷六为诸术明变。另有《椭圆求周术》附于后。

项名达身体体弱多病，无力将《象数一原》最后整理定稿。道光二十八年（1847），他嘱戴煦代为整理。咸丰七年（1857），戴煦向项名达长子索来《象数一原》遗稿，校算增订，补纂完成，并为《椭圆求周术》作图解，列为第七卷，交时任江苏巡抚的徐有壬在苏州刊刻，未及印行，太平军占领苏州，徐有壬兵败身亡。《象数一原》后有 1888 年刻本传世。项名达的侄子项薇桓于光绪十二年（1886）将其所著《勾股六术》、《三角和较术》、《开诸乘方捷术》合刻为《下学庵算术》。

项名达崇尚陆王心学，提倡致良知，淡泊功名利禄，乐于教授生徒，醉心于数学研究。在数学思想上他主张中西结合，提倡创新精神。他所追求的目标是具有一般性和抽象性的结果，这在推导二项展开式、弦矢公式及椭圆周长公式的思路和方法上都有所体现，并在不少方面接近了微积分学。他关于多维几何体的想法，甚至可以说超越了时代。

在《象数一原》中，项名达继承和发展了董祐诚的方法，通过科学分析和逻辑推理，把割圆连比例、三角堆及推广的二项式定理系数表联系起来，成功地解决了董祐诚弦矢公式推导中的堆积有倍分无析分、倍分中弦率有奇分无偶分等问题，获得如下结论：

全弧分为 n 分，不论 n 为奇为偶，它的通弦总可以展开为分弧通弦的幂级数，析分弦矢和倍分弦矢从道理上讲是一致的。他把董祐诚的四术，即求倍分弦、矢，求折析弦、矢概括为二术：

$$c_n=\frac{n}{m}c_m+\frac{n\ (m^2-n^2)\ c^3m}{4\cdot 3!\ m^3r^2}+\frac{n\ (m^2-n^2)\ (9m^2-n^2)\ c^5m}{4^2\cdot 5!\ m^5r^4}+\cdots$$

$$v_n=\frac{n^2}{m^2}v_m+\frac{n^2\ (m^2-n^2)\ (2v_m)^2}{4!\ m^4r}+\frac{n^2\ (m^2-n^2)\ (4m^2-n^2)\ (2v_m)^3}{6!\ m^6r^2}+\cdots$$

其中 c_n 和 c_m 分别为圆内某弧 c 的 n 倍和 m 倍弧长，v_n 和 v_m 分别为相应的中矢，r 为圆半径。由这两个公式可推导出明安图的九个公式和董祐诚的四个公式，其中包括正弦和反正弦的幂级数展开式、正矢和反正矢的幂级数展开式以及圆周率的无穷级数表达式等。

项名达的另一项成就就是得到求椭圆周长的公式：

$$p=2\pi a\left(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4^2}e^4-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6^2}e^6-\cdots\right)$$

其中，p 为椭圆周长；e 为椭圆离心率；$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$，a 和 b 分别为椭圆半长轴和半短轴。这

是中国在二次曲线研究方面最早的重要成果，与近代数学用椭圆积分法所得相同。

项名达还根据椭圆周长公式推出圆周率倒数公式：

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4^2}-\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6^2}-\cdots\right)$$

项名达在微积分传入中国（1857 年李善兰翻译出版《代微积拾阶》）之前，就以其独到的思维方式，达到了微积分的思想。

三　戴煦及其《求表捷术》

戴煦（1805～1860）原名邦棣，字鄂士，一字仲乙，号鹤墅，浙江钱塘（今杭州）人。戴煦出生于士大夫家庭，淡于功名，他读书兴趣非常广泛，数学、音律、文学、古文字、绘画、篆刻乃至堪舆无不精通。戴煦家中藏书很多，他在少年时代便刻苦钻研《九章算术》、《海岛算经》、《辑古算经》、《四元玉鉴》等数学著作，并富有探索创新的精神。当他读了刘徽的《海岛算经》之后，发现李淳风等注释只说明其数据的由来，却未讲明其道理，于是补撰了《重差图说》。道光六年（1826）撰《四元玉鉴细草》若干卷，此外，他还写成了《勾股和较集成》一卷。同年，他整理已故好友谢家禾的遗著《演元要义》、《弧田问率》、《直接回求》合为《谢谷堂算学三种》，于道光十七年刊行。

1840 年鸦片战争后不久，他随兄戴熙到广东。戴熙看到英国的战舰上都装着火轮，希望戴煦能予以研究。他因此悉心考校，著有《船机图说》三卷。该书后来由他的门生王朝荣帮助完成，是我国近代有关轮船制造的最初几部著作之一。

道光二十五年戴煦结识了项名达，一见如故，共同对三角函数的幂级数展开式和椭圆求周术进行研究。项名达故后，他对《象数一原》校算增订，并补写第七卷《椭圆求周图解》，阐明了用椭圆积分法求圆周的原则。

同时，戴煦独立研究对数及三角函数的幂级数展开式，自 1845 年起，撰写了《对数简法》二卷（1845）、《续对数简法》一卷（1846）、《外切密率》四卷（1852）、《假数测圆》两卷（1852），四部书稿合刊为《求表捷术》一书，成为他研究数学的代表作。前两种论对数表造法，第三种论三角函数表造法，第四种论三角函数对数表造法。《求表捷术》的发表，轰动了当时的数学界，被誉为“前人所未曾有”的创获，他的研究成果为中国数学的对数研究的发展奠定了基础。当时，英国传教士艾约瑟（J·Edkins，1823～1905）慕名求见，戴煦以“中外殊俗异礼”①托故辞之。1860 年，太平军攻克杭州，戴煦随其兄戴熙自尽。

戴煦数学上的突出成就在于对数领域的研究。对数及对数表是由英国数学家 J. 耐普尔于 1614 年发明制定，1646 年波兰传教士穆尼阁（1611～1656）将其带到中国。康熙三年（1664），薛凤祚在《历学会通》中第一次向国内学者介绍了对数和对数表。1723 年《数理精蕴》出版，其中阐明了对数概念，介绍了“真数”、“假数”及它们的关系和性质，并介绍了求对数的三种方法：“中比例法”、“真数递次自乘法”、“递次开方法”。如“递次开方法”是由

$$\frac{a^{\frac{1}{2^n}}-1}{\lg a^{\frac{1}{2^n}}}=\frac{1}{M} \tag{30-2-5}$$

---

① 李兆华，戴煦，见：杜石然主编，中国古代科学家传记（下册），科学出版社，1993 年。

得

$$\lg a = 2^n M\ (a^{\frac{1}{2^n}} - 1)$$

其中 M 称为“对数根”（今称为“模数”）。

在式（30-2-5）中，令 $a=10$，$n=54$，即将 10 开平方 54 次，其对数 1 折半 54 次，可得 $M=0.4342944819$。于是对任意 $a>0$，可以求得 $\lg a$。这种方法的严重缺陷是开方运算量浩繁，需将 a 开平方十几次乃至几十次才能求得合乎要求的 $(a^{\frac{1}{2^n}}-1)$ 的值，如戴氏说的计算极为繁杂，这使对数简化计算的优点发挥不出来。戴煦的《对数简法》和《续对数简法》就是针对上述问题寻求对数表造表的简便方法的。在《对数简法》中，戴煦提出了“连比例平方法”，即中国数学史上第一次明确记载的二项式平方根级数展开式，舍弃了计算繁琐的开方法。

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 - r} = (a^2 - r)^{\frac{1}{2}} = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2}{a^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{r^3}{a^5} - \cdots$$

不仅如此，他还得出了当 $|a|<1$，m 为任意实数时，总有

$$(1+a)^m = 1 + ma + \frac{m\ (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^2 + \frac{m\ (m-1)\ (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3 + \cdots$$

求二项式平方根有了级数展开式后，造对数表即可省力得多，但实际上数字计算仍相当繁重。鉴于此，戴煦又提出了由开方表径求对数法，即用以求对数根亦即造开方表，并指出造十二位对数表，将 10 开 21 次方已属敷用。这样无论从开方运算本身还是开方次数上都将造开方表这一步简化了。他先求出表 30-2-2。

设 N 是 99 个数之一，用除法把 N 分解为

$$N = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

其中，a_i（$1 \leqslant i \leqslant n-1$）属于上表中的 21 个真数。因而 $\lg N = \lg a_1 + \lg a_2 + \lg a_3 + \cdots + \lg a_{n-1} + \lg a_n$，其中 $\lg a_i$ 由相应的假数给出，$\lg a_n$ 由公式（30-2-5）给出，这样戴氏就可利用这个表和对数性质求 99 个数的对数，将递次开方法完全抛开不用。

表 30-2-2　真数开方假数折半

假数	次	真数	假数	次	真数
1		10	$\frac{1}{2^8}$	8	1.0090350448414
$\frac{1}{2}$	1	3.1622776601684	⋮		
$\frac{1}{2^2}$	2	1.7782794100389	$\frac{1}{2^{12}}$	12	1.0005623126022
⋮			⋮		
$\frac{1}{2^5}$	5	1.0746078283213	$\frac{1}{2^{18}}$	18	1.0000087837036
$\frac{1}{2^6}$	6	1.0366329284377	⋮		
⋮			$\frac{1}{2^{21}}$	21	1.0000010979587

继开方表径求对数后，戴煦又做了进一步研究；结果发现：不用开方表也可直接求得对数，方法是用假设对数来求定准对数，这比用开方表法更方便。也就是说，他不用开方，以"假设对数"求"定准对数"，具体做法是：先求出72个数的对数，然后其他数的对数"都能由此得到"。这72个数是1～9，11～19，101～109，1001～1009，10001～10009，100001～100009，1000001～1000009，10000001～10000009各数。在演算时，戴煦先求出"假设对数"，再用10的假设对数除之，便得各数的"定准对数"，即各数的常用对数。求到这72个数的对数，就可进一步求出其他数的对数。这就是现代对数中以10为底的常用对数演算法：

$$\lg(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln 10}。$$

在《续对数简法》中，戴煦又进一步阐明10的自然对数与任何整数的常用对数，都可用幂级数来计算，提出了由展开式求对数法，并正确地列出了对数的幂级数展开式：

$$\lg(1+\alpha)=\mu\left(\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha^4+\cdots\right),\ 0<\alpha<1$$

用上列级数计算，就可很快得出各数的对数。

而对于真数为小于1的正数，则有

$$\lg(1-\alpha)=\mu\left(-\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha^4-\cdots\right),\ 0<\alpha<1$$

戴煦的《外切密率》四卷和《假数测圆》二卷是研究三角函数展开式的专著。前者主要讨论正切、余切、正割、余割四线和弧度之间的相互关系，并正确创立了正切、余切、正割、余割四个级数展开式。后者则是结合三角函数和对数函数的幂级数展开式，阐明三角函数对数表的造法。

《外切密率》主要成果为弧背与切割二线互求。即

$$\tan\alpha=\alpha+\frac{2\alpha^3}{3!}+\frac{16\alpha^5}{5!}+\frac{272\alpha^7}{7!}+\cdots$$

$$\alpha=\tan\alpha-\frac{1}{3}\tan^3\alpha+\frac{1}{5}\tan^5\alpha-\frac{1}{7}\tan^7\alpha+\cdots$$

$$\sec\alpha=1+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{5\alpha^4}{4!}+\frac{61\alpha^6}{6!}+\cdots$$

$$\alpha^2=\frac{2^2(\sec\alpha-1)}{2!}-\frac{5\cdot 2^3(\sec\alpha-1)^2}{4!}+\frac{64\cdot 2^4(\sec\alpha-1)^3}{6!}-\frac{1560\cdot 2^5(\sec\alpha-1)^4}{8!}+\cdots$$

《假数测圆》中，还给出了三角函数的对数展开式。

$$\lg\sec\alpha=M\left(\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{2\alpha^4}{4!}+\frac{16\alpha^6}{6!}+\frac{272\alpha^8}{8!}+\cdots\right)$$

其中，$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$。

$$\lg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-M\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}{2!}+\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^4}{4!}+\frac{16\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^6}{6!}+\frac{272\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^8}{8!}+\cdots\right]$$

其中，$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$。

戴氏的上述研究成果，从具体内容来说，晚于欧洲的同类工作。但由于清代乾隆朝推行

闭关锁国政策，中西文化交流受到极大的阻碍和限制，所以戴氏的这些成就，都是在没有受到西方近代数学的启发和影响下，通过自己的独立钻研得到的。他采用自己独创的方法，把开方运算转变为有限次的或无限次的加减乘除运算，二项式展开式和对数展开式是无限四则运算的表现，是戴氏工作的精华。用级数计算自然对数和常用对数，与西方的对数求法不谋而合，取得了殊途同归的结果。

第三节　李善兰及其尖锥术

一　李　善　兰

李善兰（1811～1882），原名心兰，字竟芳，号秋纫，别号壬叔[①]，浙江省海宁县硖石镇人。数学家、天文学家、翻译家和教育家，我国近代科学的先驱者。李善兰“年十龄读书家塾，架上有古《九章》，窃取阅之，以为可不学而能，从此遂好算”[②]，“年十五时，读旧译《几何原本》六卷，通其义”[③]，及“应试武林，得《测圆海镜》《勾股割圆记》以归，其学始进”。1840 年鸦片战争血淋淋的现实，激发了李善兰的爱国思想，遂从事数学和天文历法的研究工作，著《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》、《四元解》（1845）、《麟德术解》（1848）。

1852 年夏天，李善兰到上海墨海书馆，其学识得到了来华传教士的赞赏，从此他开始了与外国人合作翻译西方科学著作的学术生涯。上海墨海书馆是英国传教士麦都思（W. H. Medhurst，1796～1857）于 1843 年建立的。1847 年伟烈亚力来华加入合伙经营。1849 年招聘中国学者王韬（1828～1897）为编辑，准备翻译西方科学书籍。自 1852 年至 1859 年，李善兰与伟烈亚力合译了欧几里得《几何原本》后九卷，棣么甘《代数学》十三卷，罗密士《代徽积拾级》十八卷，侯失勒《谈天》十八卷；又与艾约瑟（J. Edkins，1823～1905）合译了胡威立《重学》二十卷附《圆锥曲线说》三卷；与韦廉臣（A. Williamson，1829～1890）合译了林德利《植物学》八卷。又曾与伟烈亚力、傅兰雅合译《奈端数理》（即牛顿的《自然哲学的数学原理》）四册，未刊。

1861 年秋，曾国藩在安庆筹建安庆军械所，先邀化学家徐寿（1818～1884）和数学家华蘅芳（1833～1902）到内军械分局研制机动船只，后又将李善兰“聘入戎幄，兼主书局”[④]。李善兰一到安庆，就拿出《几何原本》等数学书籍对曾国藩说：“此算学家不可少之书，失今不刻行复绝矣！”[⑤] 于是有 1865 年金陵刊本《几何原本》十五卷问世。

1866 年，曾国藩“邮致三百金”到南京，资助李善兰出版算书，使李善兰能“取箧中

---

① 李心兰，庠名善兰，字竟芳，号秋纫，别号壬叔。《海宁州志稿》、《清史稿》、《畴人传》及其后诸书均作“李善兰，字壬叔，号秋纫”，今据李善兰的族人李翔曾家藏《苞溪李氏家乘》卷六（祠堂藏版，1890 年；现藏浙江省海宁县图书馆）改。

② 李善兰，《则古昔斋算学》自序，独山莫氏刊本（1867）。

③ 李善兰，译《几何原本》序，韩应陛刊本（1857）。

④ 顾观光，《算剩初编》自序，见：《武陵山人遗书》，1883；刘彝程，《简易庵算稿》自序，江南制造局刊本（1900）。

⑤ 曾国藩，《几何原本》序（1865）。

诸书尽刻之"①，于是有1867年金陵刊本《则古昔斋算学》二十四卷问世。同时李鸿章资助李善兰重刻《重学》八卷并附《圆锥曲线说》三卷②。李善兰的《则古昔斋算学》收有他二十多年来的各种天算著作十三种，计《方圆阐幽》一卷、《弧矢启秘》二卷、《对数探源》二卷、《垛积比类》四卷、《四元解》二卷、《麟德术解》三卷、《椭圆正术解》二卷、《椭圆新术》一卷、《椭圆拾遗》三卷、《火器真诀》一卷、《对数尖锥变法释》一卷、《级数回求》一卷、《天算或问》一卷。

1868年，李善兰就任京师同文馆天文算学总教习。直至1882年去世，李善兰教授的学生"先后约百余人，口讲指画，十余年如一日"③，知名者有席淦、贵荣、熊方柏、陈寿田、胡玉麟、李逢春等。李善兰身处新旧交替、中西融合的历史时期，眼光敏锐，思想活跃，既不盲从，又不保守，很有胆略、很有气量。在中国传统数学著作中，他选定了元李冶的《测圆海镜》为教科书，并亲撰《九容图表》附其后。

李善兰在同文馆教学之余，孜孜不倦地从事数学研究工作。1872年夏，李善兰在丁韪良编的《中西闻见录》第2、3、4号上连续发表《考数根法》，题为"《则古昔斋算学》十四"。这是我国素数论上最早的一篇论文。

二 尖 锥 术

李善兰在数学方面的研究成果最重要的当首推"尖锥术"。而由于清政府长期奉行闭关自守政策，中国数学界除了见到少数几个由传教士带进来的三角函数无穷级数表达式和对数计算方法之外，对西方的微积分学则一概不知。在这种情况下，李善兰在中国传统数学中垛积术和极限方法的基础上，发明尖锥术，不仅创立了二次平方根的幂级数展开式，各种三角函数、反三角函数和对数函数的幂级数展开式，而且还具备了解析几何思想和一些重要积分公式的雏形。④李善兰的尖锥术理论和应用主要见于1845年写的《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》三种著作。其基本理论概括在他的《方圆阐幽》十个命题之中。

命题一："当知西人所谓点、线、面皆不能无体。""点者，体之小而徽者也；线者，体之长而细者也；面者，体之阔而薄者也。"

命题二："当知体可变为面，面可变为线。""盈尺之书，由叠纸而得；盈丈之绢，由积丝而成也。"

命题三："当知诸乘方有线、面、体循环之理。""方而因之则长，长而因之则匾，匾而因之则复方。"

命题四："当知诸乘方皆可变为面，并皆可变为线。"

命题五："当知平、立尖锥之形。"

命题六："当知诸乘方皆有尖锥"，"三乘以上尖锥之底皆方，惟上四面不作平体而成凹形。乘愈多，则凹愈甚。"（图30-3-1）

---

① 李善兰，《则古昔斋算学》自序，独山莫氏刊本。

② 李善兰，译《重学》序。

③ 崔敬昌，《李壬叔徵君传》，载《听雪轩诗存》。

④ 王渝生，李善兰的尖锥术，自然科学史研究，1983，2（3）；梅荣照，王渝生，解析几何能在中国产生吗？——李善兰尖锥术中的解析几何思想，见：传统科学与文化，陕西科学技术出版社，1983年。

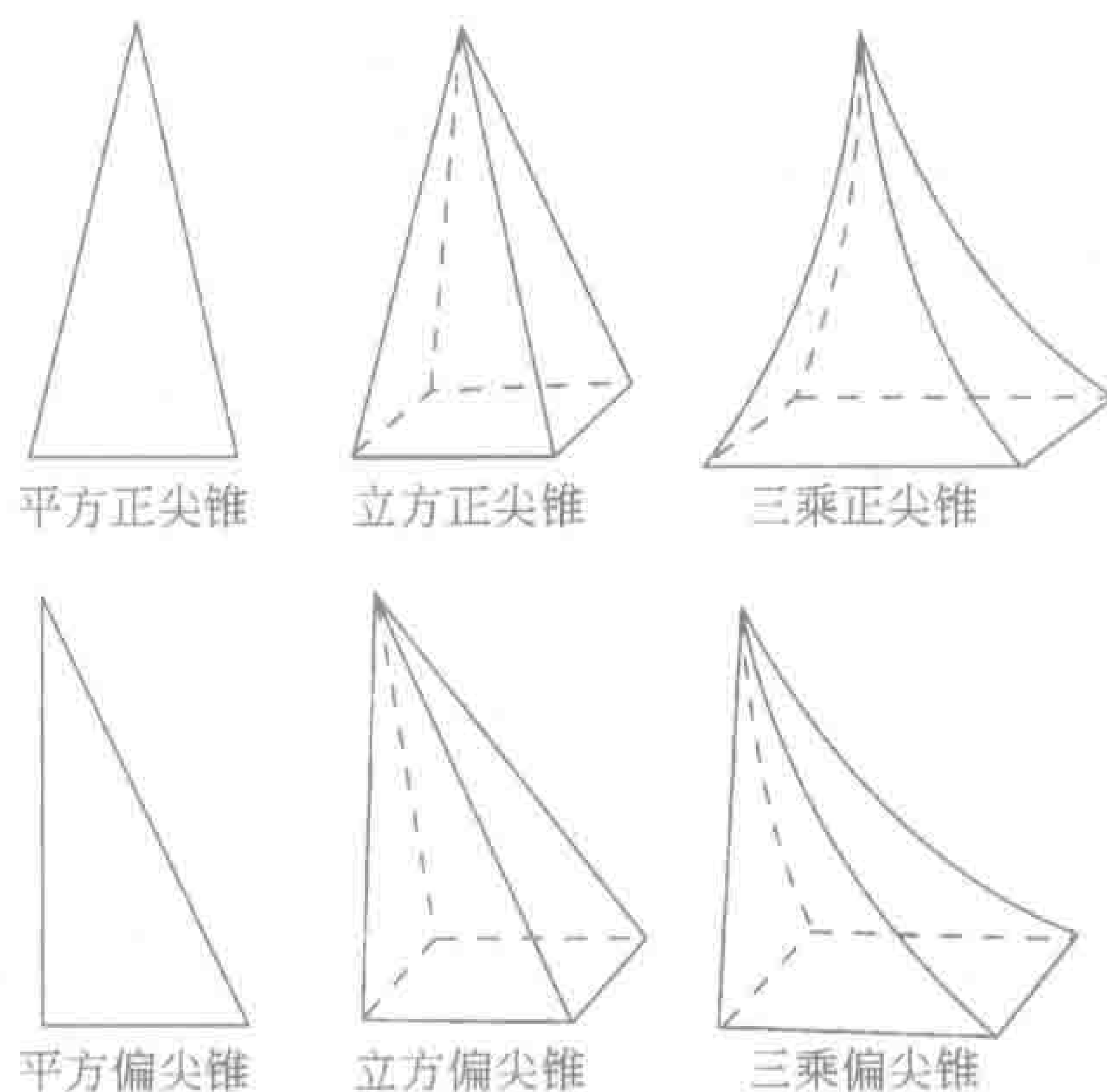


图 30-3-1　尖锥体图

命题七："当知诸尖锥有积叠之理。元数起于丝发而递增之而叠之则成平尖锥，平方数起于丝发而渐增之而叠之则成立尖锥，立方数起于丝发而渐增之变为面而叠之则成三乘尖锥，三乘方数起于丝发而渐增之变为面而叠之则成四乘尖锥；从此递推可至无穷。然则多一乘之尖锥皆少一乘方渐增渐叠而成也。"

命题八："当知诸尖锥之算法：以高乘底为实，本乘方数加一为法，除之，得尖锥积。"

命题九："当知二乘以上尖锥其所叠之面皆可变为线。"

命题十："当知诸尖锥既为平面，则可并为一尖锥。"

李善兰在前面所述的命题四中，已经说明了高次幂 x^n（$n \geqslant 2$）不仅可以用平面积表示，而且可以用线段长来表示。这样，对于一切自然数 n，x^n 都可以用线段长来表示，它们积叠而成的便不是 n 乘尖锥体，而是 n 乘尖锥面了。以后我们可以看到，李善兰在尖锥术的各种应用中，除了有时需要用尖锥体以便直观地推导某些公式外，一般情况下都是使用尖锥面的。也就是说，用平面积来表示相当于定积分值的尖锥积。这样，便很容易由面积相加原理得到逐项积分公式（即命题十）：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^h a_n x^n \mathrm{d}x\right)=\int_0^n\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x$$

与图 30-3-1 的尖锥体相当的尖锥面如图 30-3-2 所示。其中，诸乘尖锥面皆由底线、高线和尖锥曲线组成一曲边三角形，乘数愈多（即幂次愈高），尖锥曲线其凹愈甚。这颇为具有用代数方法讨论几何图形性质的解析几何思想的雏形。

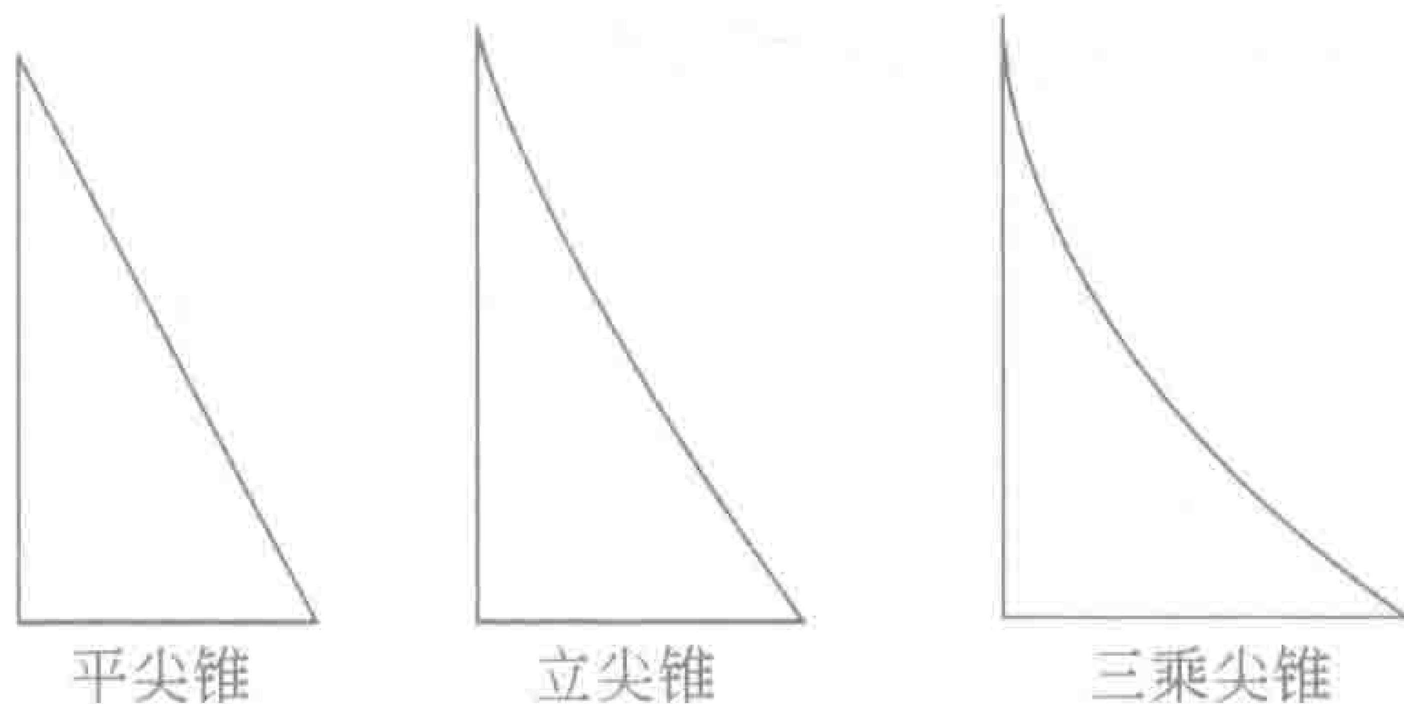


图 30-3-2　尖锥面图

李善兰接着解决了求圆面积从而求圆周率 π 的无穷级数表达式的问题。他指出：

方内函圆，方圆之较即诸乘方之合尖锥也。起再乘，次四乘，次六，次八，次十，……至于无穷。其数有偶而无奇，一阴一阳之道也。再乘尖锥之底，二分半径之一也；以其余四分之，为四乘尖锥之底；又以其余六分之，为六乘尖锥之底；……其尖锥若干乘，则底亦若干分之一焉。如是至于无尽生生不穷之道也。既得诸尖锥之底，依前法（命题八）求其积。既得诸积，四因之，以减外大方积，便见大圆真积也。

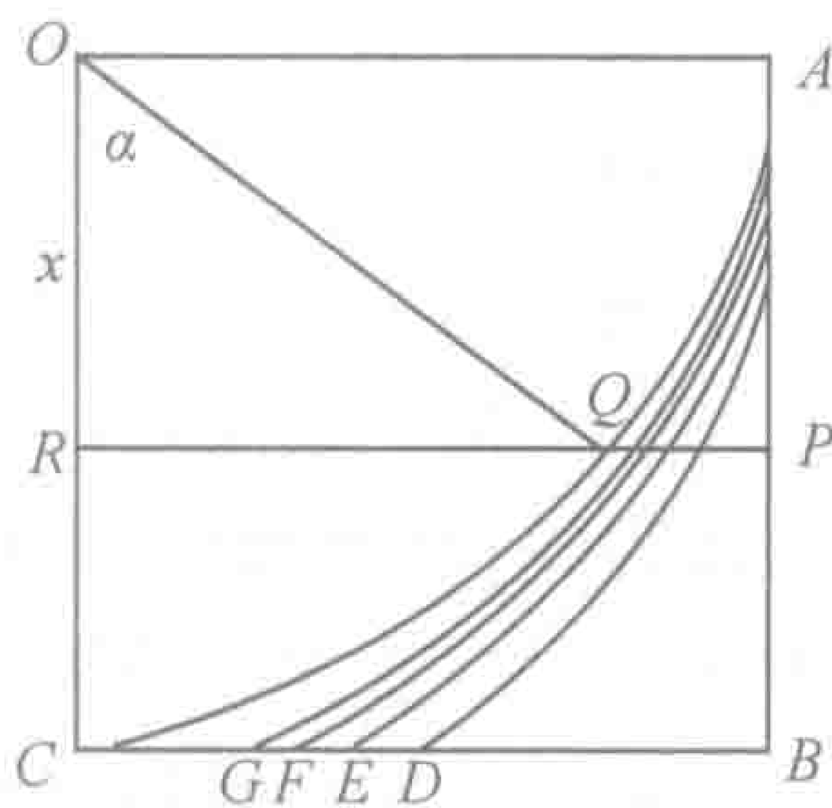


图 30-3-3　方内函圆图

这就是说，在边长为 1 的正方形 $OABC$（图 30-3-3）中，内容圆的一象限 $OAQC$，方内圆外的平面尖锥 ABC 是由二乘尖锥 ABD、四乘尖锥 ADE、六乘尖锥 AEF、八乘尖锥 AFG 等无穷多个平面尖锥合并而成的（依命题十），诸尖锥的底为 $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$，$DE=\frac{1}{4}DC=\frac{1}{4\cdot 2}$，$EF=\frac{1}{6}EC=\frac{3}{6\cdot 4\cdot 2}$，$FG=\frac{1}{8}FC=\frac{5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}$，……类推之，$2n$ 乘尖锥的底

$$b_{2n}=\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\quad (n>1)。$$

由尖锥求积术（命题八），方内圆外的面积为

$$S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4\cdot 2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{6\cdot 4\cdot 2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}+\cdots$$

从而圆面积

$$\pi=4-4S_{\triangle ABC}=4-4\left(\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 4!!}+\frac{3!!}{7\cdot 6!!}+\frac{5!!}{9\cdot 8!!}+\cdots\right)$$

李善兰没有明确指出诸尖锥底 BD，DE，EF，FG，…的由来，但其弟李心梅按，“准八线法，半径幂内减余弦幂，余以平方开之为正弦，用减半径为余矢，余矢者诸尖锥元数之合也”，可知李善兰的思路是取圆心角 $COQ=\alpha$，过 Q 作 $PR/\!/AO$ 令 $OR=x$，即 $\cos\alpha=x$，则

$$\sin\alpha=QR=\sqrt{1-x^2},\ \operatorname{covers}\alpha=PQ=1-\sqrt{1-x^2}$$

展第二式为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$，则诸系数 a_n 即为诸尖锥的底。

李善兰同样没有明确指出他是怎样得到这个幂级数展开式中诸 x^{2n} 的系数 a_n 的。又是其弟心梅按：“然近底之元数难分，近尖之元数易分。今试以半径幂为亿，余弦幂为一，则所得之余矢必近尖而诸元数可分矣”，并列出了相当于如下计算过程的文字说明。

取 $x^2=10^{-8}$，则

$$\begin{aligned}&1-\sqrt{1-10^{-8}}=1-\sqrt{0.99999999}\\&=1-0.99999999499999998749999993749999960937499972656249\cdots\\&=0.00000000500000001250000006250000039062500027343750\cdots\\&=0.5\times 10^{-8}+0.125\times 10^{-16}+0.0625\times 10^{-24}+0.0390625\times 10^{-32}+0.02734375\times 10^{-40}+\cdots\end{aligned}$$

此即

$$1-\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!!}x^4+\frac{3!!}{6!!}x^6+\frac{5!!}{8!!}x^8+\frac{7!!}{10!!}x^{10}\cdots$$

又取 $x^2=2\times10^{-8}$，通过计算同样得到上式。于是 PQ 由上式右端诸项合并而得，依尖锥术，当 x 由 0→1 时，诸项分别积叠成底为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4!!}$，$\frac{3!!}{6!!}$，$\frac{5!!}{8!!}$，…；高为 1 的二乘，四乘，六乘，八乘，……尖锥。此当合于李善兰原来的思路。

李善兰在《弧矢启秘》中，用尖锥术求解三角函数和反三角函数的幂级数展开式，用不同于割圆连此例的方法得到了“杜氏三术”和明安图创造的六术。更进一步，他还得到了正切、正割、反正切、反正割的级数式。

戴煦说：“《弧矢启秘》则用尖锥立算，别开生面。”① 李善兰用自创的尖锥术这种解析的方法，配合还原、商除等代数运算方法，卓有成效地层开了各种三角函数，把自明安图以来对三角函数幂级数展开式的研究工作大大提高了一步。

李善兰尖锥术的应用最有创造性的是对数幂级数展开式。章用认为，《则古昔斋算学》“全集以对数论为中坚，《方圆阐幽》、《弧矢启秘》所必先知，故先焉。”② 是很有道理的。

李善兰在他的《对数探源》里认为对数也可以用诸尖锥的合积来表示，从而创造了他自己的对数幂级数展开式。他首先指出，

> 对数之积，诸尖锥之合积也，与方圆之较同。但“方圆之较自立尖锥起；此则自一长方起. 方圆之较次四乘尖锥，次六乘尖锥，次八、次十，……皆用其偶，去其奇；此则次平尖锥，次立尖锥，次三乘，次四乘，次五，次六，……奇偶皆用。方圆之较诸尖锥之底皆以渐而减；此则诸尖锥之底皆为齐同之数。三者其异也。”

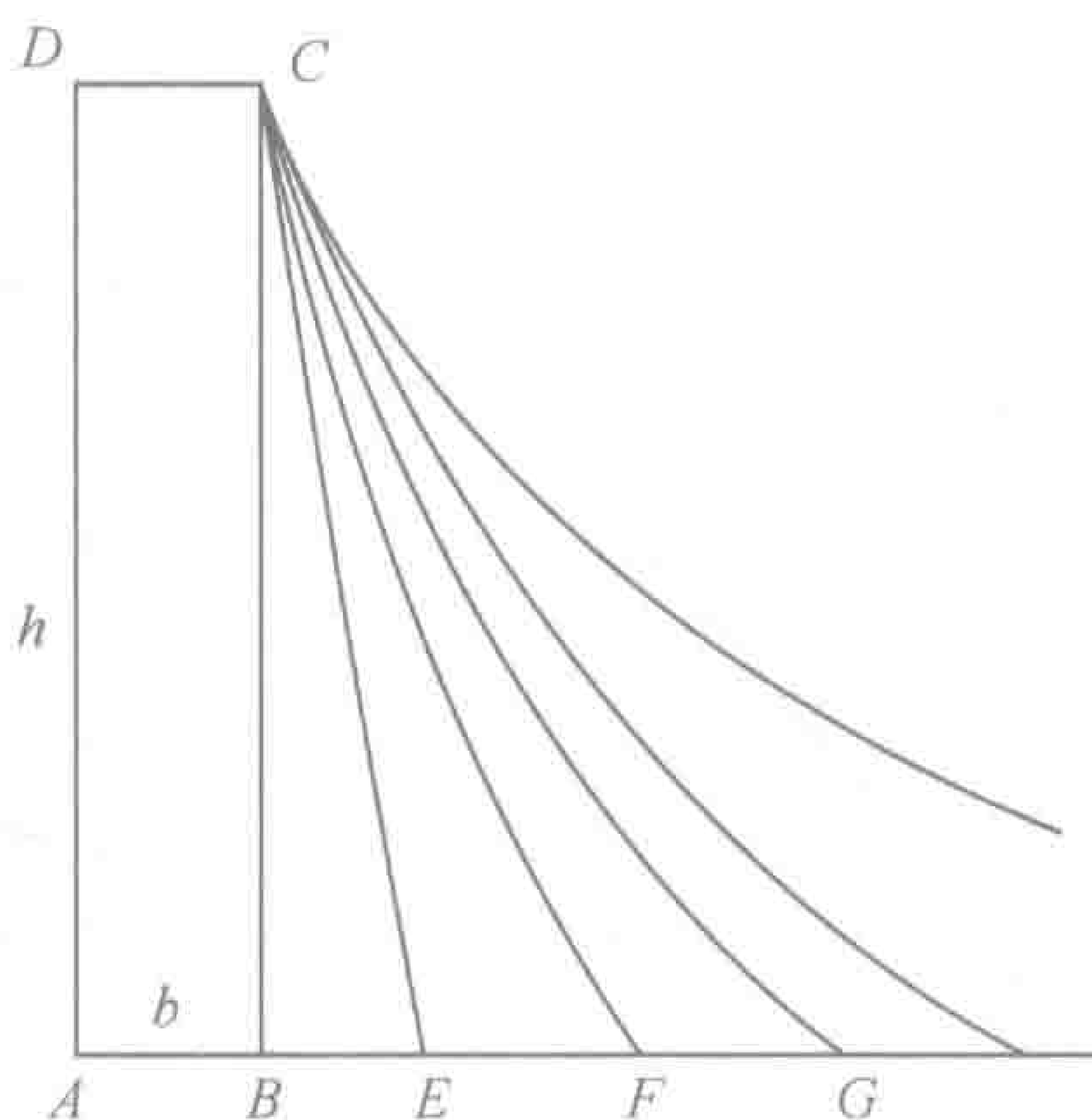


图 30-3-4　对数尖锥合积

具体地说，对数尖锥合积可用图 30-3-4 表示。$AD=h$，$AB=BE=EF=FG=\cdots=b$。而 $S_{\text{长方形}ABCD}=bh$，$S_{\text{平尖锥}CBE}=\frac{1}{2}bh$，$S_{\text{立尖锥}CEF}=\frac{1}{3}bh$，$S_{\text{三乘尖锥}CFG}=\frac{1}{4}bh$，……然后，李善兰列出了十条原理作为用尖锥术求对数幂级数展开式的依据。

为了证明他在《对数探源》中所得到的级数式

$$\ln n=\ln(n-1)+bh\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots\right)$$

与后来他译的《代数学》中的级数式③

$$\ln n=\ln(n-1)+2bh\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3(2n-1)^3}+\frac{1}{5(2n-1)^5}+\cdots\right]$$

相一致，他在《对数尖锥变法释》列出了三条原理作为证明的依据。

第一条是：

> 凡尖锥中截为二层，则下一层有方、廉、隅诸数，上一层惟一隅. 方为方面；

---

① 戴煦，“外切密率”序，《古今算学丛书》本（1898）。又，李严曾藏李善兰遗墨“则古堂算学目录”一纸，内“弧矢启秘”本作“弧矢别径”，见李俨，李善兰年谱，见：中算史论丛（第四集），科学出版社，1955 年。

② 章用，垛积此类疏证，科学，1939，23（11）。

③ 棣么甘著，李善兰、伟烈亚力合译，《代数学》卷十二，上海墨海书馆，1859 年。

第一廉为平尖锥，第二廉为立尖锥，第三廉为三乘尖锥，余可类推；隅为本乘尖锥。有若干廉，每廉若干，视本尖锥底之乘方查廉法表即得。方、廉、隅之底皆相等，即上一层之底也。

如图 30-3-5 所示，所谓“廉法表”即“贾宪三角”（正整指数二项式定理系数表）。

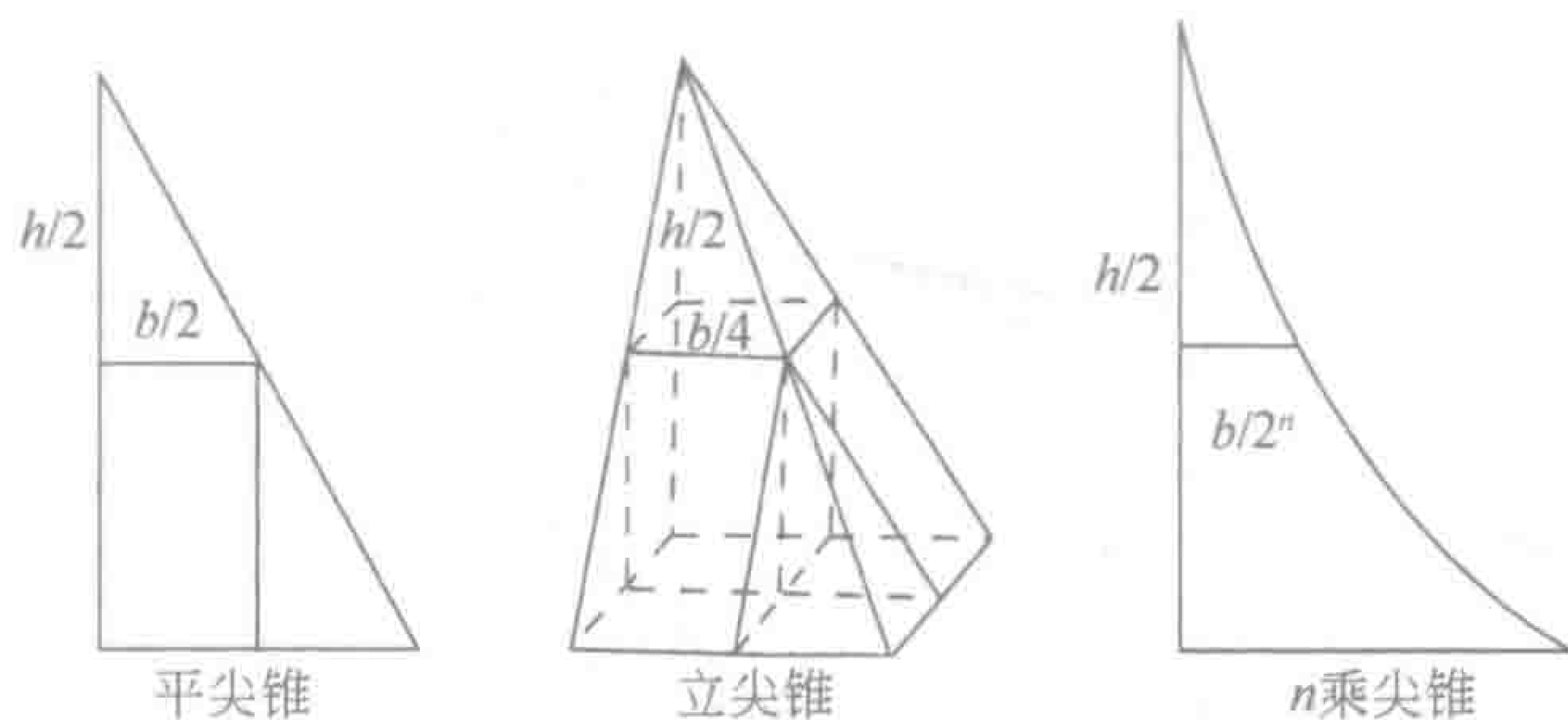


图 30-3-5　各乘尖锥图

李善兰是根据平尖锥，其积 $S_1=\dfrac{bh}{2}$，中截为二，上、下两部分的积分别为 $S_1^{上}=\dfrac{bh}{2\cdot 2^2}$，$S_1^{下}=\dfrac{bh}{2^2}+\dfrac{bh}{2\cdot 2^2}$，而立尖锥 $S_2=\dfrac{bh}{3}$，中截为二，有 $S_2^{上}=\dfrac{bh}{3\cdot 2^3}$，$S_2^{下}=\dfrac{bh}{2^3}+2\cdot\dfrac{bh}{2\cdot 2^3}+\dfrac{bh}{3\cdot 2^3}$；类推至 n 乘尖锥 $S_n=\dfrac{bh}{n+1}$，中截为二，有

$$S_n^{上}=\frac{bh}{(n+1)\ 2^{n+1}}$$

$$S_n^{下}=\binom{n}{0}\frac{bh}{2^{n+1}}+\binom{n}{1}\frac{bh}{2\cdot 2^{n+1}}+\binom{n}{2}\frac{bh}{3\cdot 2^{n+1}}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{bh}{(n+1)\ 2^{n+1}}$$

式中，$\dbinom{n}{m}=\dfrac{n!}{(n-m)!\ m!}$，表示贾宪三角中第（$n+1$）行的第（$m+1$）个数。

第二条是：

凡尖锥变为同底同高之方面，亦有方、廉、隅诸数。方为本乘尖锥，正。第一廉为平尖锥，正；第二廉为立尖锥，负；第三廉为三乘尖锥，正；第四廉为四乘尖锥，负；余可类推。隅为本乘尖锥，乘数奇者正，偶者负。有若干廉，每廉若干，视本尖锥底为几乘方，查廉法表即得。方、廉、隅之底与高皆相等。

如图 30-3-6 所示，李善兰也是由平尖锥积 $S_1=\dfrac{bh}{2}$变为长方，积 $S_1^{方}=bh=\dfrac{bh}{2}+\dfrac{bh}{2}$；而立尖锥积 $S_2=\dfrac{bh}{3}$，变为长方，积 $S_2^{方}=bh=\dfrac{bh}{3}+2\cdot\dfrac{bh}{2}-\dfrac{bh}{3}$；类推至 n 乘锥积 $S_n=\dfrac{bh}{n+1}$，变为长方，积

$$S_n^{方}=bh=\frac{bh}{n+1}+\binom{n}{1}\frac{bh}{2}-\binom{n}{2}\frac{bh}{3}+\cdots+\ (-1)^n\ \frac{bh}{n+1}$$

第三条是：

凡合尖锥截为二层：上层另成一合尖锥，下层方、廉、隅诸积各依类并之亦成一合尖锥。如各方并之仍为方面，各第一廉及平尖锥之隅并之仍为平尖锥，各第二

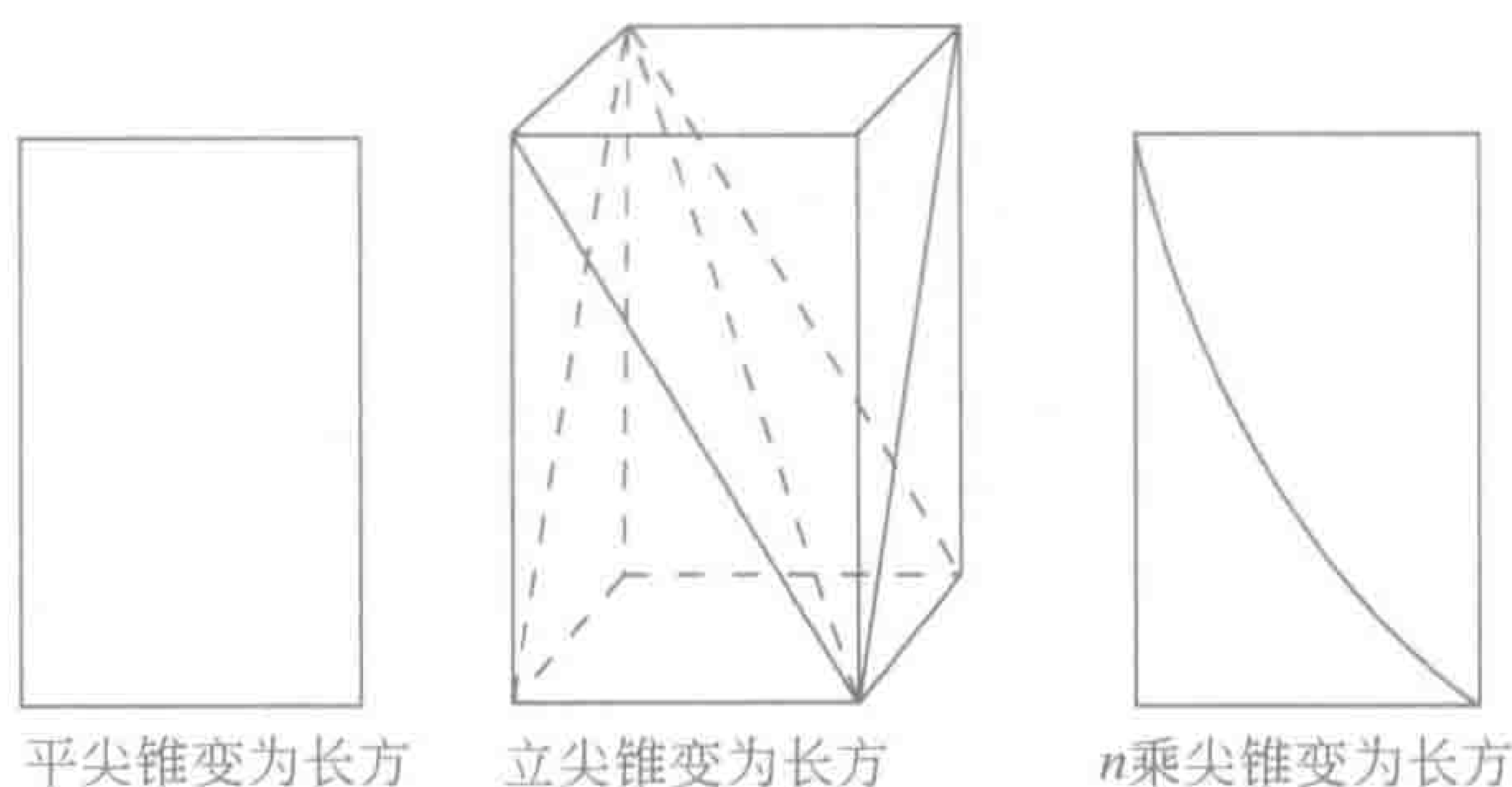


图 30-3-6　各乘尖锥变为长方图

廉及立尖锥之隅并之仍为立尖锥，各第三廉及三乘尖锥之隅并之仍为三乘尖锥，第四廉以上皆如是并之为四乘以上诸尖锥。故下层另成一合尖锥也。

如图 30-3-7 所示，这说明把高为$\frac{h}{p}$的对数尖锥合积 $S = bh\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)p^{k+1}}$ 中截为二，有 $S = bh\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)p^{k+1}}$。而由第一条，有 $S^{下} = bh\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2p)^{j+1}}\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{k+1}\binom{j}{k}\right] = bh\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{(2p)^{j+1}}\binom{j}{k}\right] = bh\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(2p-1)^{k+1}}$

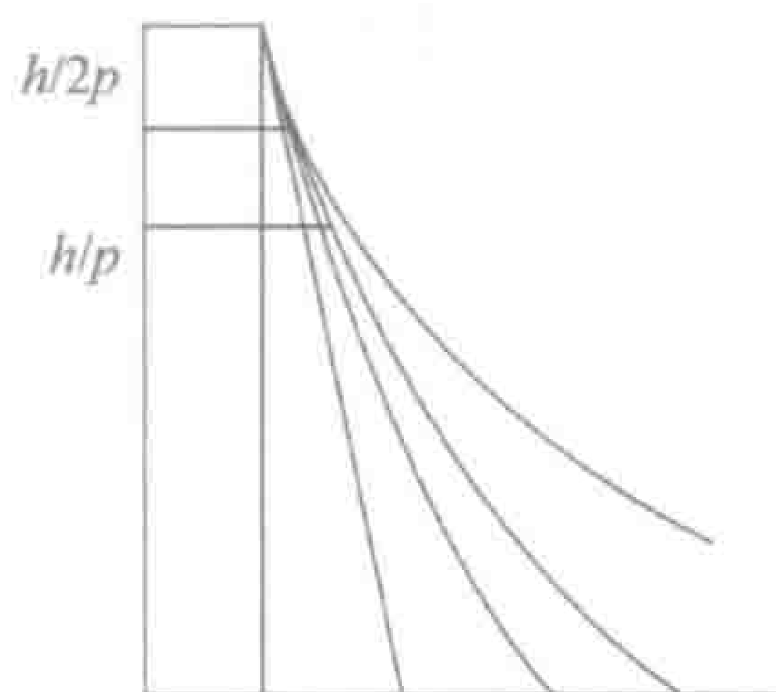


图 30-3-7　合尖锥图

此因

$$S_0 = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2p)^{j+1}}\binom{j}{0} = \frac{1}{2p-1}$$

$$\begin{aligned}S_k &= \sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{(2p)^{j+1}}\binom{j}{k}\\ &= \frac{1}{2p}\left[\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^{j}}\binom{j-1}{k} + \sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{(2p)^{j}}\binom{j-1}{k-1}\right]\\ &= \frac{1}{2p}(S_k + S_{k-1})\end{aligned}$$

故有递推公式

$$S_k = \frac{1}{2p-1}S_{k-1}$$

有了以上这些准备，李善兰便利用第一条和第二条的结论，仿照第三条的证明过程，证明了他的对数级数式同《代数学》中的式子相等：

> 试置各乘尖锥下层之方，依第二条求其同数，乃并置上、下二层诸方、廉、隅，以方加之，以同数减之，则上层消尽，下层方与诸偶乘尖锥皆得倍积，诸奇乘尖锥亦消尽，而全积仍不变。乃依第三条并之，又加入原有之方面，得下层方面及诸偶乘尖锥之倍；故两术不同而得数相合。

这是说在 $S = bh\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)p^{k+1}}$ 中，$S^{上} = bh\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(2p)^{k+1}}$。

由第一条，有 $S^{下} = bh\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2p)^{j+1}}\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{k+1}\binom{j}{k}\right]$。但 $S^{下方} = bh\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2p)^{j+1}}$。

由第二条，又有$S^{下方同数} = bh\left(\frac{1}{2p} + \sum_{j=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2p)^{j+1}}\left[\frac{1}{j+1} + \sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)}\binom{j}{k}\right]\right\}\right)$。故

$$
\begin{aligned}
S &= S^{上} + S^{下} + S^{下方} - S^{下方同数} \\
&= 2bh \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2j+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)^{2j+1+k}} \binom{2j+k}{2j}\right] \\
&= 2bh \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)(2p-1)^{2j+1}}
\end{aligned}
$$

以上是根据李善兰《对数尖锥变法释》中的文字说明借用现代排列组合的通用符号$\binom{n}{m}$所整理出来的证明过程。这些证明过程很像他在《垛积此类》中求解各种高阶等差级数的和时那些证明过程①。

李善兰《对数探源》卷一提出若干原理，今举10条如下：

①此尖锥合积无论截为几段，自最下第二段以上其积皆同。

这是李善兰对数论的基础，是李善兰造对数表的依据。他在《对数探源》卷二的“详法”中，进一步明确指出了截分一合尖锥为等高的p段，自下至上第m（≥2）段的积均为

$$S(m) = bh \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\ m^{k+1}}。$$

②此尖锥合积无论全积、残积，但同截为几段，则自上而下罕最下第二段其逐段之积皆同。

如图30-3-8所示，所谓“残积”，是指以平行于底的直线将全积截去上一段（“截积”）后所剩下的部分。此定理只需将残积补为全积，依①即可立得。

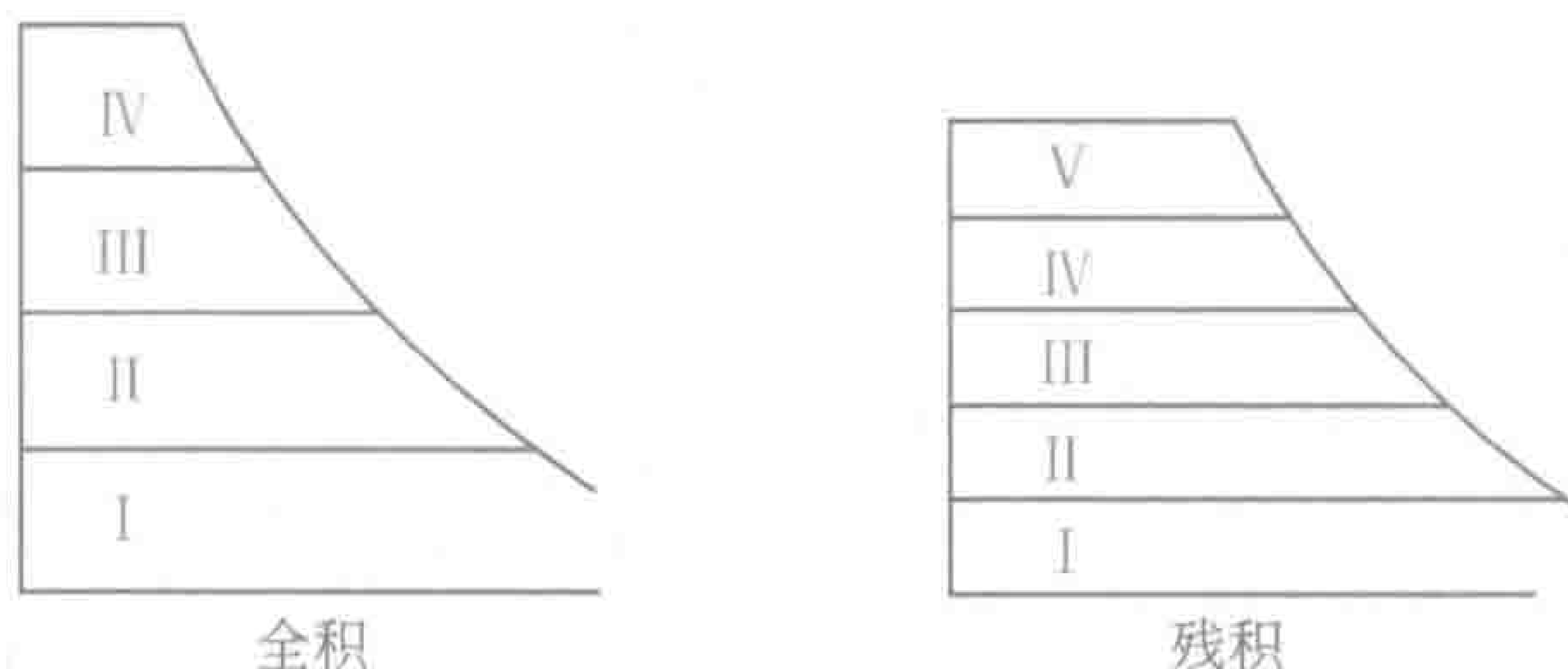


图30-3-8　原理②示意图

③此尖锥合积无论全积、残积，且无论截为几段，自第二段以上其积皆同。

如图30-3-9所示，③是①、②的直接推论。

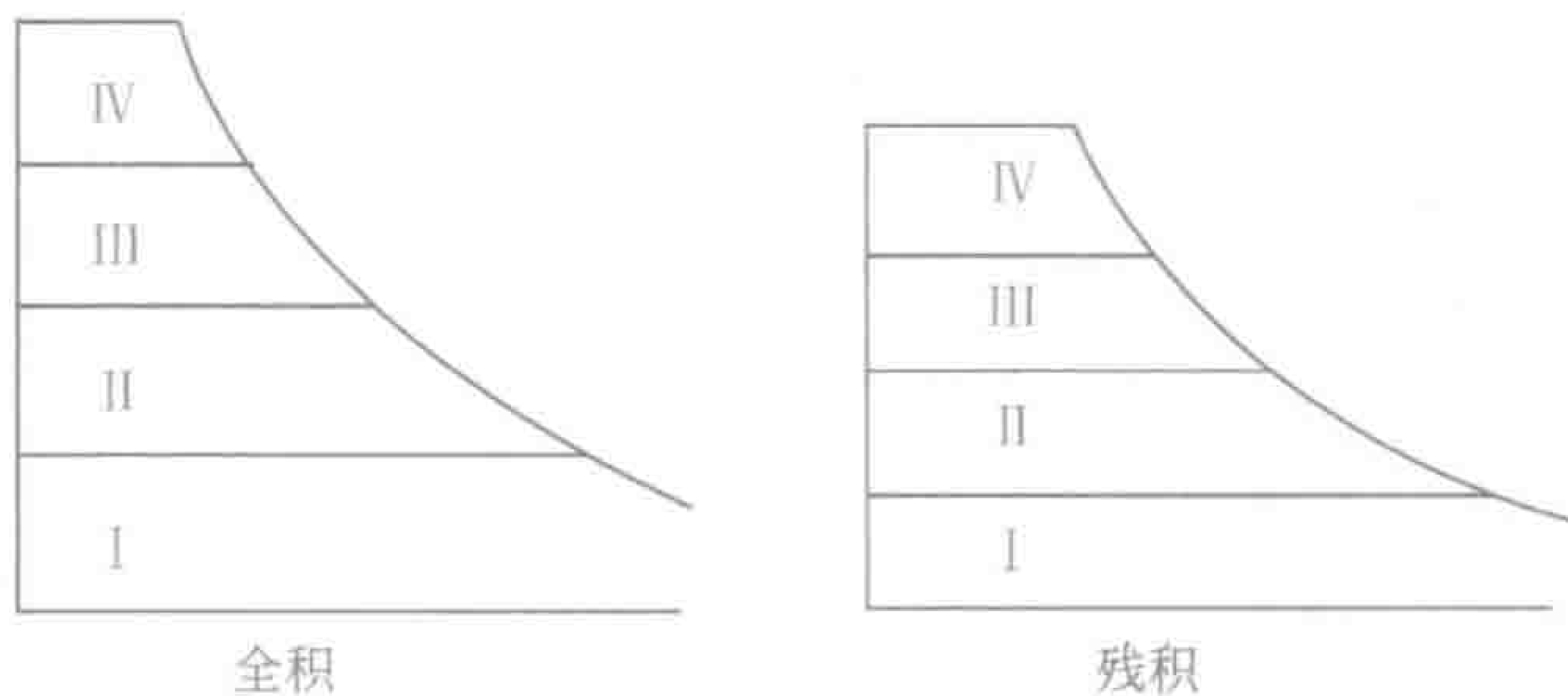


图30-3-9　原理③示意图

① 章用，垛积比类疏证，科学，1939，23（11）。

④此尖锥合积于其直线上作比例四率线，各如其线截其积，则一率截积与二率截积之较，必与三率截积与四率截积之较同；一率截积与三率截积之较，必与二率截积与四率截积之较同。

如图 30-3-10 所示，这是说，取$\frac{h_1}{h_2}=\frac{h_3}{h_4}$，则有 $S_2-S_1=S_4-S_3$，$S_3-S_1=S_4-S_2$。它说明当 h 成等比数列时，对应的 S 成等差数列，所以 S（h）具有对数的性质。

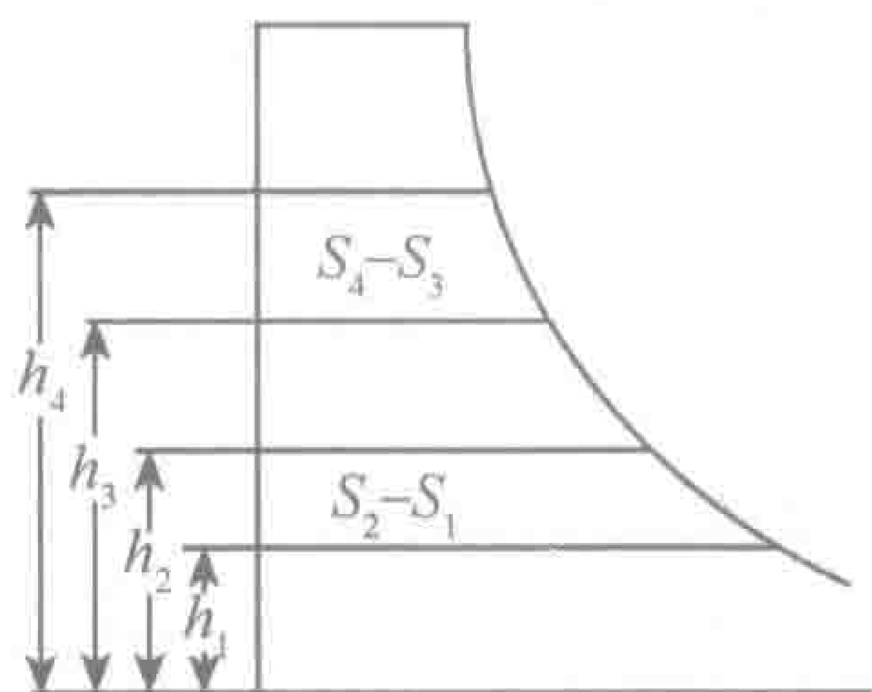


图 30-3-10　原理④示意图

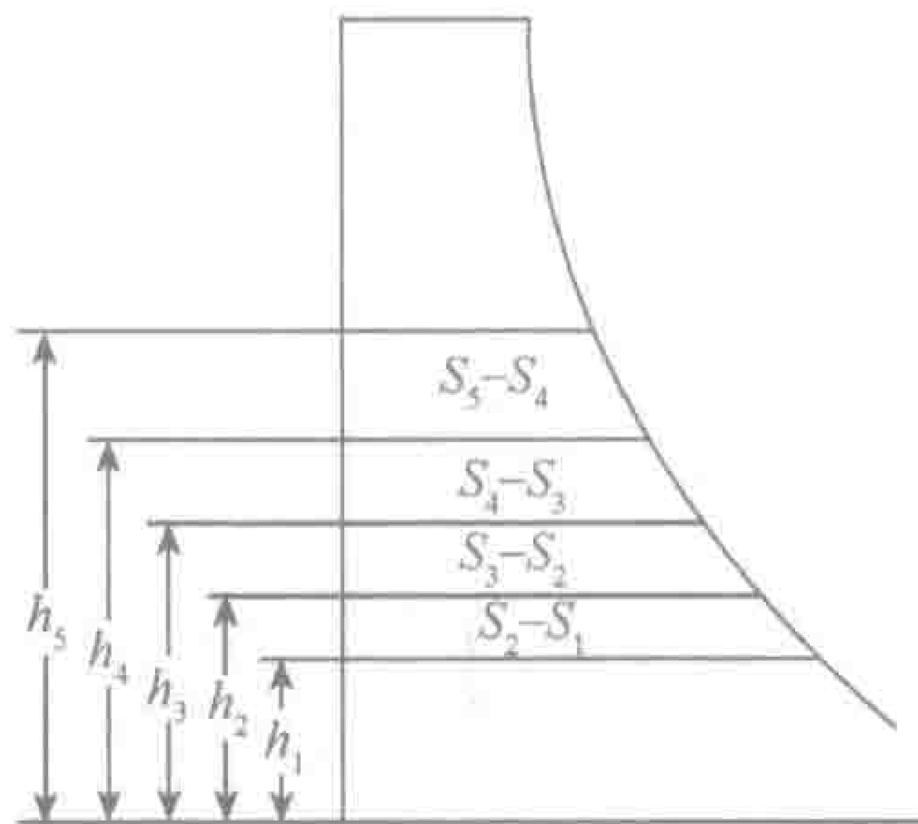


图 30-3-11　原理⑤示意图

⑤若于其直线上作连比例诸率线，各如其线截之，则逐层前率截积与后率截积之较其积皆同也。（图 30-3-11）

此即说明若取$\frac{h_1}{h_2}=\frac{h_2}{h_3}=\frac{h_3}{h_4}=\frac{h_4}{h_5}=\cdots$则有

$$S_2-S_1=S_3-S_2=S_4-S_3=S_5-S_4=\cdots$$

这显然是④的直接推论。

⑥此合尖锥之底为无穷连比例，此合尖锥上任于何处作截线，其截线亦为无穷连比例。

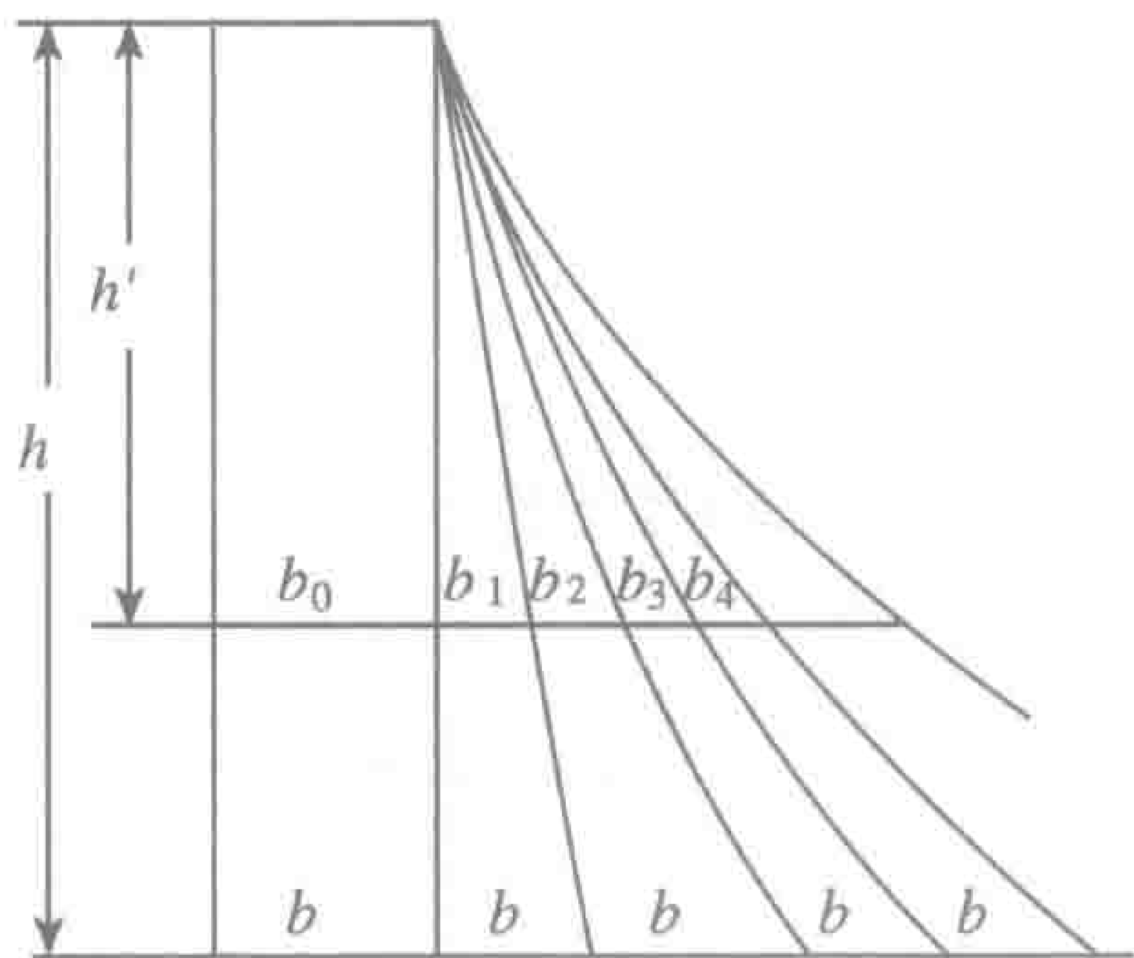


图 30-3-12　原理⑥示意图

如图 30-3-12 所示，很显然，对数合尖锥中诸乘尖锥的底皆等于 b，故其比为 1；而诸截底之比则等于原高与截高之比

$$\frac{b_0}{b_1}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2}{b_3}=\frac{b_3}{b_4}=\cdots=\frac{h}{h'}$$

⑦凡截线皆有尽界，其界皆可求；而底无尽界。

如图 30-3-13 所示，李善兰解释道：

凡截线上之连比例，皆渐小，故必有一尽界。任尔无穷比例，总不能越此界。

这相当于说明了无穷递缩等比数列有界，其和可求。

事实上，

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{h'}{h}\right)^n b = \frac{1}{1-\frac{h'}{h}}$$

李善兰接着说：

底上之连比例皆如首率，而其比例又无尽，则乌得有尽界也。

由此可见，李善兰已经明确提出了正项级数收敛与发散的条件。

⑧凡两截积同者，此截积之高与彼截积之高，彼截线与此截线可相为比例。

如图 30-3-14 所示，这是说：若 $S_1=S_2$，则有 $h_1/h_2=b_2/b_1=b'_2/b'_1$，亦即 $b_1h_1=b_2h_2$，$b'_1h_1=b'_2h_2$。此由④，⑥易证得。

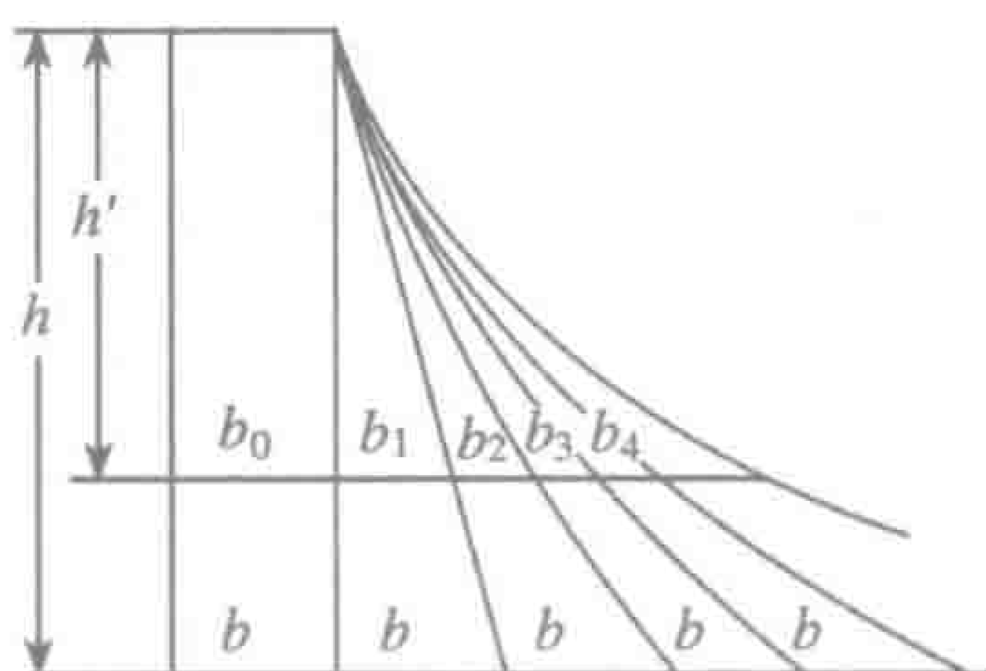


图 30-3-13　原理⑦示意图

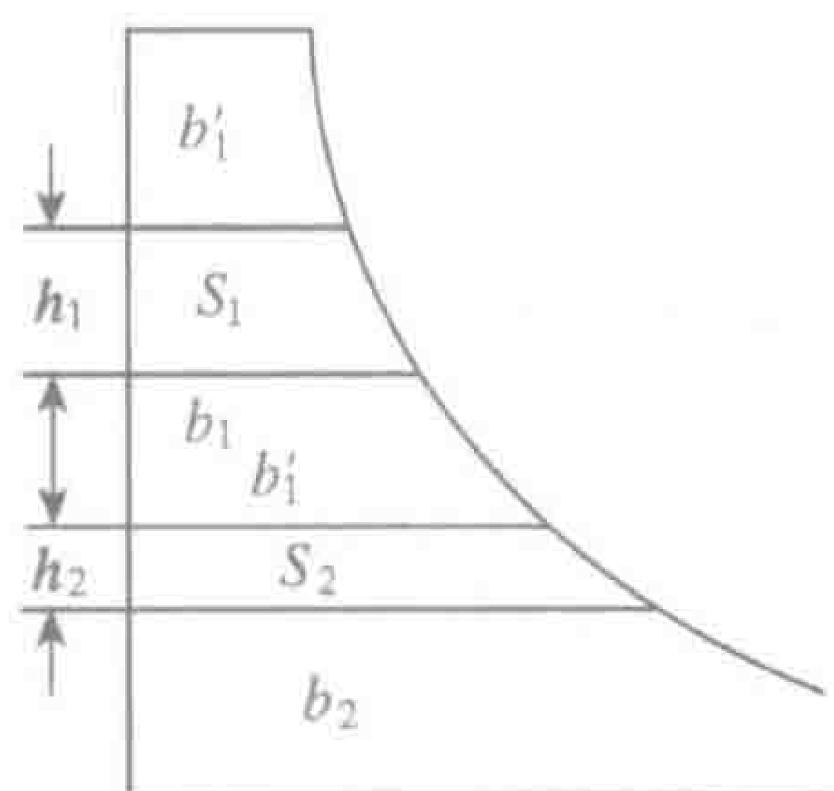


图 30-3-14　原理⑧示意图

⑨凡两残积，此残积之高与彼残积之高，彼截线与此截线可相为比例。”（图 30-3-15）

此可由⑧推得。它指出对数合尖锥具有 $h'/h''=b''/b'$ 亦即 $b'h'=b''h''$ 的性质。这说明，如果分别以对数合尖锥的底、高为横、纵二坐标轴，合尖锥曲线上点的坐标（x，y）满足方程 $xy=bh$。因此，可以认为，李善兰已经指出了对数合尖锥曲线乃是双曲线的一支。再结合⑦，李善兰已经认识到了合尖锥的底是双曲线的一条渐近线。

⑩此尖锥合积无论截为几段，逐段之积皆可求，而最下一段其积不可求，故其总积亦不可求。

李善兰对数论的这 10 条原理，自成体系。其中，①是基础，④是核心，其余各条则从各方面描述对数合尖锥的性质，有几个描述截积或残积的底和高之间的关系式，实质上就是用尖锥曲线上点的横、纵二坐标所满足的代数方程来刻画尖锥曲线的图形性质。至于这些定理的证明，则完全基于我国传统的垛积术，没有发现受过西方微积分学影响的痕迹。

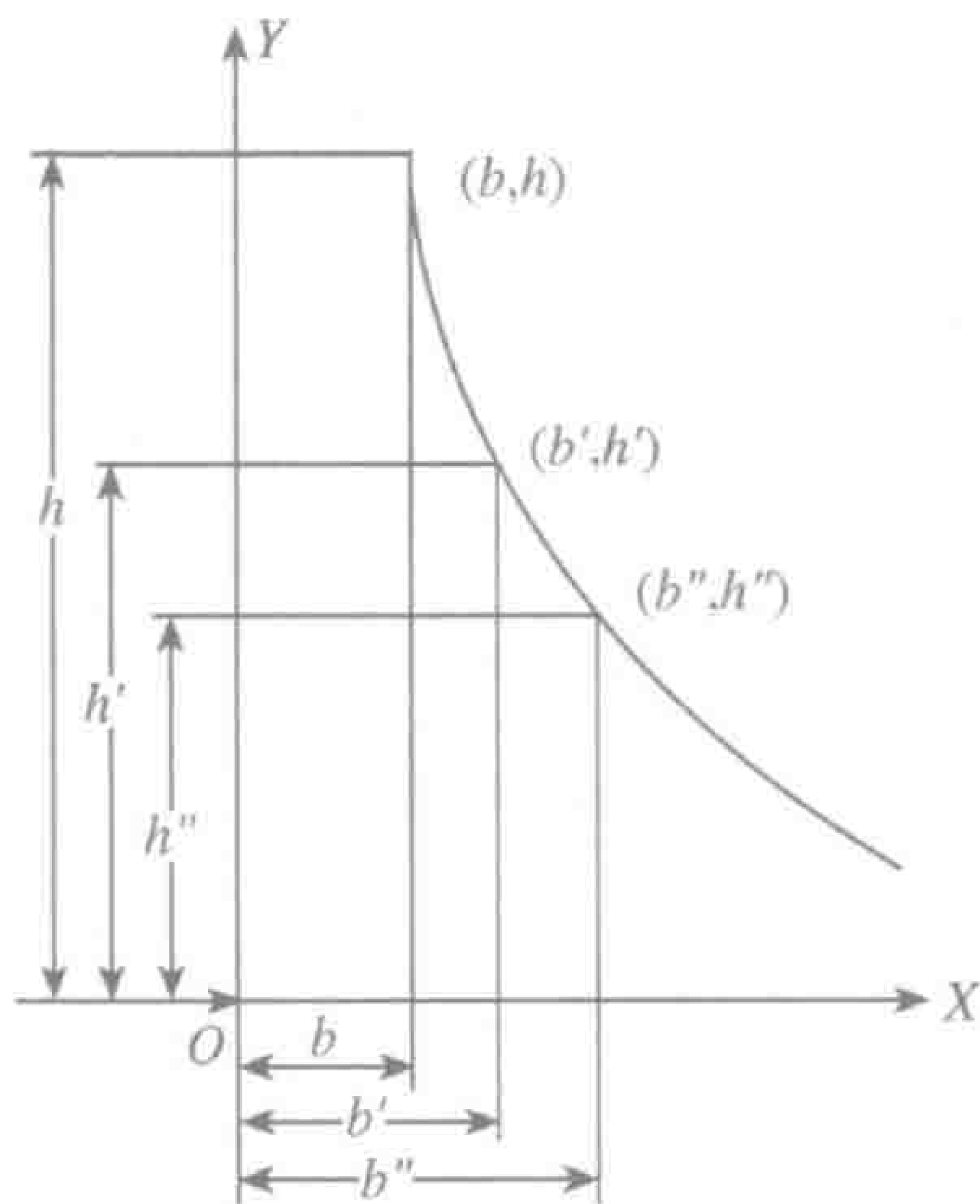


图 30-3-15　原理⑨示意图

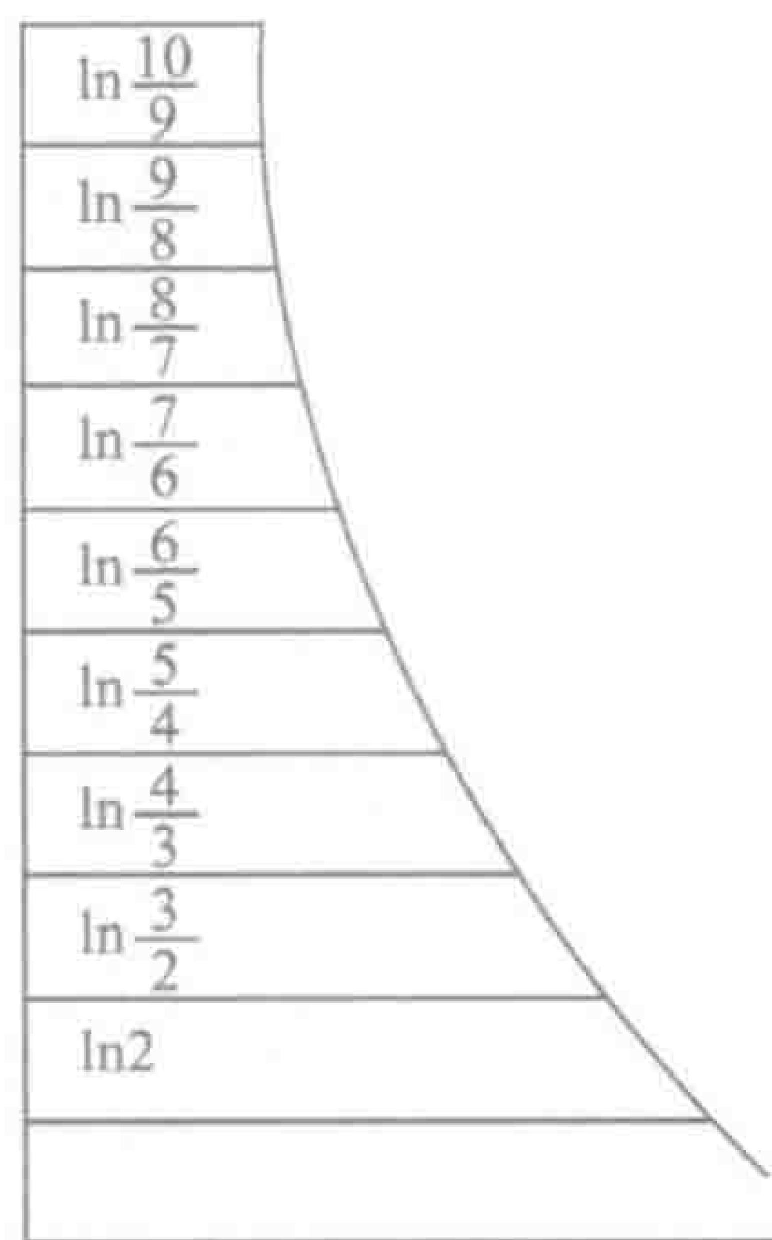


图 30-3-16

有了这一套独特而完备的对数理论，李善兰据此在《对数探源》卷二“详法”中给出了用无穷级数方法求对数的具体步骤（图 30-3-16）。据 k 乘尖锥的“泛积” $\frac{1}{k+1}$ 求 n 的自然对数 $\ln n$。取 $bh=1$，$y=\frac{1}{n}k$，则有

$$\ln n = S\left(\frac{n-1}{n}k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k+1}$$

第四节　徐有壬、顾观光、邹伯奇等的研究工作

一　徐有壬及其《割圆八线缀术》

徐有壬（1800～1860），字君青，又字钧卿，浙江乌程（今湖州）人。其父早亡，徐有壬寄居在北京的叔父家中多年。22 岁，占宛平（今属北京）籍补博士弟子员。道光九年（1829）中进士。道光二十三年任四川成绵龙茂道。道光二十七年署四川按察使，不久，任四川按察使。道光三十年任云南布政使。咸丰三年（1853）三月任湖南布政使。咸丰五年四月回籍守制，与戴煦相识。咸丰八年十二月任江苏巡抚。咸丰十年四月十三日，太平天国军攻克苏州，徐有壬被杀，谥庄愍。

徐有壬先后结识陈杰、沈钦裴、董祐诚、吴嘉善、丁取忠、戴煦等数学家，尤其推重李善兰，两人经常邮递问难讨论数学。徐有壬的数学与天文著作颇丰。其侄徐震翰、侄孙徐树勋陆续刊刻《测圆密率》3 卷，《垛积招差》（又名《造各表简法》）1 卷，《椭圆正术》1 卷，《椭圆求周术》1 卷，《截球解义》1 卷，《弧三角拾遗》1 卷，《表算日食三差》1 卷，《朔食九服里差》3 卷，《割圆八线缀术》4 卷凡 9 种 16 卷，称为《务民义斋算学》。《割圆八线缀术》是其代表作，由吴嘉善述草（1862）、左潜（？～1874）补草（1873）。未刊者有《堆垛测圆》3 卷，《圆率通考》1 卷，《四元算式》1 卷，《校正开元占经九执术》1 卷，《古今积年解源》2 卷，《强弱率通考》1 卷等 6 种 9 卷，今皆亡佚。①

这里的缀术似不同于祖冲之父子的“缀术”，而是徐氏给出的三角函数幂级数表示法。缀术的意义是“求式者连缀而下”。该书以文字叙述的展开式称为术，以缀术书写的展开式称为式。缀术以汉字数目字一、二、三等表示率数，以侧书的汉字数目字表示级数各项系数的分母，以暗码表示分子，并依固定的格式进行运算。例如，弦求矢式的缀术式为

二三−二四五−二四四七=二四四四九δ有奇。其中，侧书与暗码表示 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\cdot 4}$，$\frac{2}{2\cdot 4^2}$，$\frac{5}{2\cdot 4^3}$，而三、五、七、九分别表示由一率半径 r，二率正弦 $r\sin\alpha$，以连比例四率法所得之三、五、七、九诸率，即 $\frac{(r\sin\alpha)^2}{r}$，$\frac{(r\sin\alpha)^4}{r^3}$，$\frac{(r\sin\alpha)^6}{r^5}$，$\frac{r\sin\alpha^8}{r^7}$。故缀术式之弦求矢式亦即

$$r\mathrm{vers}\alpha = \frac{(r\sin\alpha)^2}{2r} + \frac{(r\sin\alpha)^4}{2\cdot 4r^3} + \frac{2\ (r\sin\alpha)^6}{2\cdot 4^2 r^5} + \frac{5\ (r\sin\alpha)^8}{2\cdot 4^3 r^7} + \cdots$$

① 李兆华，徐有壬，中国古代科学家传记下集，科学出版社，1993 年，第 1190～1191 页。

令 $r=1$，即

$$\operatorname{vers}\alpha=\frac{1}{2}\sin^2\alpha+\frac{1}{2\cdot4}\sin^4\alpha+\frac{2}{2\cdot4}\sin^6\alpha+\frac{5}{2\cdot4^3}\sin^8\alpha+\cdots$$

《割圆八线缀术》四卷在诸家研究的基础上，运用比例法、商除法、还原术（级数回求法）、借径术（变换法）等方法给出正弦、正切、正割、正矢等四个三角函数的“八线互求”十二术、“大小八线互求”十八术。

例如，令 $r=1$，切求弦式为

$$\sin\alpha=\tan\alpha-\frac{1}{2}\tan^3\alpha+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\tan^5\alpha-\cdots$$

又如，令 $r=1$，小切求大弦、大切求小弦等八式为

$$\sin n\alpha=n\tan\alpha-\frac{n\ (n^2+2)}{3!}\tan^3\alpha+\frac{n\ (n^4+20n^2+24)}{5!}\tan^5\alpha-\cdots$$

$$\sin\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{n}\tan\alpha-\frac{2n^2+1}{3!\ n^3}\tan^3\alpha+\frac{24n^4+20n^2+1}{5!\ n^5}\tan^5\alpha-\cdots$$

$$\tan n\alpha=n\tan\alpha+\frac{n\ (2n^2-2)}{3!}\tan^3\alpha+\frac{n\ (16n^4-40n^2+24)}{5!}\tan^5\alpha+\cdots$$

$$\tan\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{n}\tan\alpha-\frac{2n^2-2}{3!\ n^3}\tan^3\alpha+\frac{24n^4-40n^2+16}{5!\ n^5}\tan^5\alpha-\cdots$$

$$\operatorname{vers}n\alpha=\frac{2n^2}{2}\tan^2\alpha-\frac{n^2\ (n^2+8)}{4!}\tan^4\alpha+\frac{n^2\ (n^4+40n^2+184)}{6!}\tan^6\alpha-\cdots$$

$$\operatorname{vers}\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{2n^2}\tan^2\alpha-\frac{8n^2+1}{4!\ n^4}\tan^4\alpha+\frac{184n^4+40n^2+1}{6!\ n^6}\tan^6\alpha-\cdots$$

$$\sec n\alpha=1+\frac{n^2}{2}\tan^2\alpha\frac{n^2\ (5n^2-8)}{4!}\tan^4\alpha+\cdots$$

$$\sec\frac{\alpha}{n}=1+\frac{1}{2!\ n^2}\tan^2\alpha-\frac{8n^2-5}{4!\ n^4}\tan^4\alpha+\cdots$$

其中，$\sec n\alpha$，$\sec\frac{\alpha}{n}$有式而无术，即未能找到系数的一般规律而不能用文字表述该式，其余各式皆有术文。由上列各式可见，当 $n=1$ 时，大小八线互求即八线互求，又当 $n=\frac{1}{m}$时，倍角各线即为分角各线。故倍角各线的展开式为其余各式的基础①。

自法国人杜德美将 π、$\sin\alpha$、$\operatorname{vers}\alpha$ 的展开式传入中国之后，很多数学家对三角函数的幂级数展开式以不同的方法予以深入的研究并获得大量的结果，其中有些结果彼此相同或形式不同而实质相同。将这些展开式整理为最简形式，取正弦、正切、正割、正矢等四个函数并以获得先后为序，所得结果如表 30-4-1、表 30-4-2② 所示。其中，杜、明、董、项、李分别指杜德美、明安图、董祐诚、项名达、李善兰。勾识各项为徐有壬所得。

① 吴文俊主编，中国数学史大系，李兆华主编第八卷，北京师范大学出版社，2000 年，第 136 页。
② 吴文俊主编，中国数学史大系，李兆华主编第八卷，北京师范大学出版社，2000 年，第 137、138 页。

表 30-4-1　八线互求

知 \ 求	α	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\mathrm{vers}\alpha$
α		杜	√	李	杜
$\sin\alpha$	明		√	项	项
$\mathrm{tg}\alpha$	√	√		√	√
$\sec\alpha$	李	√	√		√
$\mathrm{vers}\alpha$	明	√	√	√	

表 30-4-2　大小八线互求

知 \ 求	$\sin n\alpha$	$\sin\frac{\alpha}{n}$	$\mathrm{tg}n\alpha$	$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{n}$	$\sec n\alpha$	$\sec\frac{\alpha}{n}$	$\mathrm{vers}nc$	$\mathrm{vers}\frac{\alpha}{n}$
$\sin\alpha$	董	董	√	√			√	√
$\mathrm{tg}\alpha$	√	√	√	√			√	√
$\sec\alpha$	√	√					√	√
$\mathrm{vers}\alpha$	√	√	√	√			董	董

表 30-4-2 所空十格表示有式而无术。《割圆八线缀术》四卷是三角函数幂级展开式传入中国以来该项研究的一个比较系统的总结。所给八线互求十二术，大小八线互求十八术使得三角函数的幂级数展开式大体完备。其所创半符号性质的缀术使得幂级数展开式的表示法和运算过程得以简化，在微积分传入中国之前有积极的意义，并在中国数学史上产生一定影响。

二　顾观光、邹伯奇的研究工作

（一）顾观光

顾观光（1799 ~ 1862），字宾王，号尚之，江苏金山（今上海市金山县）人。顾观光博通经传史子，兼通天文历算，因三试不中，遂承世业为医。著有《武陵山人遗书》12 种。其中，数学著作有《算賸初编》一卷、《算賸续编》一卷、《算賸余稿》二卷、《九数外录》一卷、《九数存古》九卷。

《算賸初编》、《算賸续编》和《算賸余稿》实际上是关于数学的杂记。《九数存古》九卷（1892 年刊）系将中国古代算题及其算法依《九章算术》卷名分类辑录，所引古算有关书籍自《周髀算经》至《河防通议》凡 24 种，明清算书不录。《九数外录》系将西方数学、天文、力学等知识概括为对数记、割圆八线记、平三角记、弧三角记、各等面体记、圆锥三曲线记等十篇。由此二书可见顾氏算学知识之广泛。

《算賸续编》关于对数展开式及其回求的研究有所心得，其中下列三个展开式应用较为方便。

$$\lg\frac{m}{n}=2\lg e\left[\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\right]$$

$$\lg\frac{m}{n}=\lg e\left[\frac{m-n}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3+\cdots\right]$$

$$\lg\frac{m}{n}=\lg e\left[\frac{m-n}{m}-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3-\cdots\right]$$

李善兰的展开式 $\ln\frac{n}{n-1}$用于造表较为方便，而径求对数不如上列各式简便。①

（二）邹伯奇

邹伯奇（1819～1869），字一鹗，又字特夫，广东南海人。邹伯奇自幼习算，后熟读诸经义疏，喜钻研科学技术，积极吸收西方先进的科学技术知识，对天文、数学、测绘等均有研究，尤精于光学、摄影技术和仪器制造。咸丰七年（1857）被聘为阮元于1821年创建的广州学海堂学长，后又被聘为广雅书院教习。同治三年（1864），郭嵩焘于广州府学署设局测绘广东地图，伯奇应聘参加测绘。同治五年，京师同文馆增设天文、算学等科，郭嵩焘又推荐“官生员邹伯奇、李善兰赴同文馆差委”②，但邹伯奇没有到职。同治七年再次请他去同文馆，曾国藩也希望邹伯奇到自己幕府，他都谢绝了，只在广东家乡专心钻研学问。经常与夏鸾翔、吴嘉善、丁取忠、陈澧等学者来往，共同探讨学术问题③。

著作汇刻为《邹征君遗书》（1873），另有《测量备要》稿本一册。其中与数学有关者四种，即《学计一得》一卷、《补小尔雅释度量衡》一卷、《对数尺记》一卷、《乘方捷术》三卷。前二种，系解释儒家经典有关算学的内容，可为读经之助。第三种说明对数尺的构造及用法。现传咸丰三年邹氏自制对数尺实物。《乘方捷术》三卷论二项式展开式及对数展开式等。第一卷讲乘方和开方，第二卷讲对数和对数简史，第三卷为前两卷内容的应用，卷末附有对数尺度表、十亿对数表等。该书所给对数展开式之前三式与上述顾观光所给者相同，其第四术为“连求三数之较”。设 $t=\frac{m+n}{2}$，$n<t<m$，则由前三术可得

$$\ln\frac{t}{n}=\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3+\cdots$$

$$\ln\frac{m}{n}=\left(\frac{m-n}{2t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3-\cdots$$

$$\ln\frac{m}{n}=2\left[\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^5+\cdots\right]$$

$$\ln\frac{t^2}{mn}=2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\frac{1}{6}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^6+\cdots\right]$$

上述各式用于造表较为简便④。

邹伯奇的突出成就是在几何光学方面，曾撰成《格术补》一卷。这是在对沈括《梦溪

① 吴文俊主编，中国数学史大系，李兆华主编第八卷，北京师范大学出版社，2000年，第138～139页。
② 王先谦，《东华续录》卷五八。
③ 林文照，邹伯奇，见：中国古代科学家传记，下集，科学出版社，1993年，第1240页。
④ 吴文俊主编，中国数学史大系，李兆华主编第八卷，北京师范大学出版社，2000年，第139页。

笔谈》中所提出的“格术”问题进行实验研究并吸收前人知识的基础上写成的，是中国晚清几何光学的重要专著之一。邹伯奇还是我国照相术的先驱。

邹伯奇年轻时曾究心于地图的绘制，改我国传统的计里画方的地图绘制法为经纬线绘制法，于25岁时（1844）绘成《皇舆全图》一大册，包括总图1幅，分图66幅（刻版于1874年）。此种绘制地图法在当时中国是很先进的。

邹伯奇对古天文学的许多问题很感兴趣，撰写了10多篇论文，提出了自己的见解。

第三十一章　清末西方数学的传入

1840 年的鸦片战争彻底地改变了中国的命运，也改变了中国科学技术的进程。中国被迫向世界开放，开始了半封建、半殖民地阶段。中国传统的科学技术除中医药学与民间手工业外逐渐中断。在“洋务运动”期间，翻译西方学术著作是引进西学的最主要途径。为了培养翻译人才，1862 年，清政府成立同文馆，1867 年在馆内增设了天文算学馆，专门从事数学著作的翻译与学习。1863 年继墨海书馆之后，上海开设了广方言馆，广州成立了同文馆。1868 年，江南制造局也开设译馆。中日甲午战争（1894）的失败，宣告了洋务运动的破产。戊戌变法（1898）的失败，宣告了封建改革的不可行，酝酿了辛亥革命（1911）的爆发。其间，人们对西学的认识发生了巨大的变化，引进西方科技的热潮一浪高过一浪。据不完全统计，1853～1911 年的近 60 年间，约有 468 部西方科学著作译成中文出版。鸦片战争之后的西学东渐，大致可分为两个阶段。

第一阶段从第一次鸦片战争到中日甲午战争前，传入的西学除宗教外，主要是自然科学及与工业制造有关的应用科学。社会科学知识大都是附带的零星的，西学东渐的主体是外国传教士。他们或单独、或与中国学者合作翻译了不少西方书籍。例如，英国传教士傅兰雅（1839～1928）在任江南制造局翻译馆的译员期间，先后译书 77 种，占全馆译书三分之一以上。其他传教士，如林乐知、丁韪良、李提摩太、伟烈亚力等也译书不少。中国学者，如李善兰、徐寿、华蘅芳等也曾与传教士合作翻译过不少西书，对西学的传播做出过重要贡献。

第二阶段从甲午战争到辛亥革命，传入的西学，除自然科学外，社会科学日益增多，其中主要以政治和法学类为主。西学东渐的主体是一些对西学有一定了解的中国士大夫，特别是洋务运动中派遣的学成归国的留学生。

在这两个阶段中，数学的传入都是最重要的内容。

第一节　清末西方数学传入概况

一　李善兰的数学翻译工作

晚清西方数学的传入以李善兰和伟烈亚力、华蘅芳和傅兰雅贡献最大。1852 年，李善兰与英国伟烈亚力合译了《几何原本》后九卷、《代数学》和《代微积拾级》等，全面介绍了西方古典几何学、近代代数学、解析几何学和微积分学。其后，华蘅芳同英国传教士傅兰雅合译了《代数术》、《微积溯源》、《决疑数学》等十余种数学著作，介绍了西方近代代数学、三角学、微积分学和概率论。这些翻译工作在相当程度上推进了向西方科技学习的潮流。在他们的影响下，翻译工作持续不断，译著日趋增多。

19 世纪 50 年代，李善兰与伟烈亚力、艾约瑟、韦廉臣合作，翻译出版了大量关于数

学、天文学、力学和植物学的西方科学著作：

《几何原本》（*Elements*）后九卷，古希腊欧几里得（Euclid）原著，与伟烈亚力合译，韩应陛刊本，1857 年；金陵书局，1865 年。

《代数学》（*Elements of Algebra*）十三卷，英国德摩根（A. De Morgan）原著，1835 年，与伟烈亚力合译，上海墨海书馆，1859 年。

《代微积拾级》（*Elements of Analytical Geometry and of the Differentail and Integral Calculus*，即《解析几何与微积分初步》）十八卷，美国卢米斯（E. Loomis）原著，1850 年，与伟烈亚力合译，上海墨海书馆，1859 年。

《谈天》（*Outlines of Astronomy*，即《天文学纲要》）十八卷，英国赫歇尔（J. Herschel）原著，1851 年；第五版，1858 年，与伟烈亚力合译，上海墨海书馆，1859 年。

《重学》（*An Elementary Treatise On Mechanics*，即《初等力学》）二十卷，英国胡威立（W. Whewell）原著，附《圆锥曲线说》三卷，与艾约瑟合译，钱氏活字版（仅十七卷），1859 年；金陵书局，1866 年。

《植物学》（*Elements of Botany*，即《植物学基础》）八卷，英国林德利（J. Lindley）原著，与韦廉臣合译，上海墨海书馆，1858 年。

特别值得提到的是，大量的近代科学名词，都没有先例可供参考。本着对后人负责的精神，李善兰仔细思考，反复斟酌，十分贴切恰当地创译了一大批数学、天文学、物理学和植物学中的科学名词，如代数、常数、变数、已知数、未知数、函数、系数、指数、级数、单项式、多项式、微分、积分、轴、切线、法线、渐近线，历元、方位、视差、章动、自行、摄动、光行差、月行差、月角差、二均差、蒙气差、星等、变星、双星、三合星、本轮、均轮、分力、合力、质点、刚体，植物、细胞等。100 多年来，这些科学名词不仅在我国流传下来，而且漂洋过海，东渡日本等国，沿用至今而勿替。

二　华蘅芳及其数学翻译研究

（一）华蘅芳及其数学翻译

华蘅芳，字畹香，号若汀，江苏常州金匮人（今无锡）人。华蘅芳出身于官宦人家，自述道："余七岁读《大学》章句，日不过四行，非百遍不能背诵。十四岁从师习时文，竟日仅作一讲，师阅之，涂抹殆尽。"而"于故书中检得坊本算法，心窃喜之，日夕展玩，尽通其义。"他的父亲见他嗜好数学，就因势利导，每回乡省亲，就给他买来一些古算书，使他在青少年时代就比较系统地学习了中国传统数学知识。

华蘅芳得悉徐寿（1811 ~ 1884）"性好攻金之事，手制仪器甚多"，两人遂结忘年之交。华蘅芳还去上海拜访过李善兰、容闳（1828 ~ 1912）和传教士伟烈亚力、傅兰雅等。

1861 年秋，曾国藩在安徽筹建安庆军械所，邀请华蘅芳和徐寿参与其事。华蘅芳同徐寿一道着手机动船只的研制工作。1863 年底试制了一艘小型木质轮船。1884 年军械所由安庆迁往南京。华蘅芳和徐寿继续研究改进，在 1865 年造成了一艘新的木壳大轮船"黄鹄"号，载重 25 吨，时速 20 余里，除回转轴、烟囱和锅炉所用的钢铁系国外进口以外，其他一切工具和设备，完全自己制造。其"推求动理，测算汽机"，华蘅芳"出力最多"。

1865年，曾国藩、李鸿章于上海创办江南制造局，华蘅芳“经始其事，擘划周详”。局里设龙华火药厂，专门配制火药。华蘅芳主持试制硝酸，几经失败，终于成功。上海江南制造局于1868年开设翻译馆。华蘅芳分工翻译有关数学、地学方面的书。至1877年，华蘅芳与玛高温（D. J. Macgowan，1814～1893）等人合译并刊行了《金石识别》、《地学浅释》等五种关于矿物、地质、军事和气象等方面的书。自1872年至1899年，华蘅芳与傅兰雅合译并刊行了《代数术》、《微积溯源》、《决疑数学》等七种数学书籍。

1876年格致书院成立后，华蘅芳曾来此讲学。同时，华蘅芳还孜孜不倦地进行数学研究工作。1882年，他辑其旧日著述汇刻《行素轩算稿》，1893年、1897年又两次增订，刊行。1886年，李鸿章创办天津武备学堂。次年，华蘅芳到该处担任教习。1892年，年届花甲的华蘅芳远涉湖北武昌，主讲两湖书院的数学课程。1898年，华蘅芳回到家乡，执教于无锡竢实学堂。他在数学普及和人才培养方面贡献殊多，成为晚清数学教育的一代宗师。

弟华世芳（1854～1905）亦是清末知名数学家，著有《近代畴人著述记》和《恒河沙馆算草》等，曾任常州龙城书院山长和上海南洋公学总教习。

在晚清翻译西学活动中，傅兰雅与华蘅芳也是两位有成就的合作者，对于近代西方数学知识的进一步引进，起到十分重要的作用。同华蘅芳的数学著述相比，他对西方近代科学包括近代数学的翻译工作有更大的成就和影响。华蘅芳译书20年，共刊行12种，170卷。

华蘅芳与傅兰雅合作翻译的数学书籍主要有：

《代数术》二十五卷，（英）华里司（John Wallis，1616～1703）撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1873；

《微积溯源》八卷，（英）华里司撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1874；

《三角数理》十二卷，（英）海麻士（J. Hymers，1803～1877）辑，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1877；

《代数难题解法》十六卷，（英）伦德（Thomas Lund）撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1879；

《决疑数学》十卷，（英）棣麽甘（Augustus De Morgan，1806～1871）撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1880；

《代数总法》（《合数术》），傅兰雅口译，华蘅芳笔述，未刊；

《算式解法》十四卷，（英）好敦司、奈开利撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1899；

此外两人还翻译了《相等算式理解》、《配数算法》、《风雨表法》、《海用水雷法》等，均未刊。

（二）华蘅芳的数学著述

华蘅芳在数学方面的研究成果主要见于其所著《行素轩算稿》一书中。该书于1882年初版时收入《开方别术》一卷、《数根术解》一卷、《开方古义》两卷、《积较术》三卷、《学算笔谈》前六卷、计5种十三卷。1893年续成《学算笔谈》后六卷，《算草丛存》前四卷（包括《抛物线说》、《平三角测量法》、《垛积演校》、《盈朒广义》、《积较客难》、《诸乘方变法》、《台积术解》、《青朱出入图说》等八篇零星数学著作）。1897年再续《算草丛存》后四卷（包括《求乘数法》、《数根演古》、《循环小数考》、《算斋琐语》），共计6种二十七卷。此外，华蘅芳的数学著作还有《算法须知》（1887年收入傅兰雅主编的《格致须

知》中）和《西算初阶》（1896 年收入冯桂芬等辑的《西算新法丛书》中）。除数学著作外，华蘅芳尚有《行素轩文存》（收序、跋、杂文 17 篇），《行素轩诗存》（收古体诗 86 首）刊行。现将华蘅芳的一些主要数学著作简介如下：

《青朱出入图说》，刘徽记载了用出入相补原理证明勾股定理的方法，可惜其图已经失传，明清时期的许多数学家补绘了多种图形来，而补绘图形最多的要数华蘅芳。华蘅芳把他绘出的 22 幅图汇集在一起，称为《青朱出入图说》。

《开方别术》，在求解一元高次方程时，一般说来，试商比较困难。华蘅芳经过深入研究，终于找到一种可以较方便的确定试商的范围，有时甚至可以直接求得根。华蘅芳将这一方法加以认真总结，写成《开方别术》（1872）。李善兰给这本书写了序言，对其给予较高的评价，他说："此法并诸商为一商，故无翻积、益积，不特生面独开，而且较旧法简易十倍。"

《开方古义》，华蘅芳早年钻研过《四元玉鉴》的古法七乘方图，后来"演算积较之术"，"始知图中各数乃专为递开一数而设，是古时开方所用之乘数也"，遂作《开方古义》一卷（1880）。

《积较术》三卷。华蘅芳对"有限差分法"做过专门的研究，华蘅芳称为"积较术"。卷一"论积较之理"，论述了有限差分的基本概念和基本公式；卷二"论造表用表之法"，进一步阐明了各种公式立法原理以及使用方法；卷三"论各种垛积"，讨论"积较术"的应用。《积较术》是华蘅芳的主要数学著作。

《学算笔谈》十二卷。是华蘅芳关于数学理论、数学思想和数学教育等方面的著作，也是中国第一部关于如何学习数学的普及读物。为帮助人们学习数学，华蘅芳把自己"已历过之境界，已见到之地步，为学者缕述之，以助其观书之功，而省其枉费之力"，遂撰写了《学算笔谈》。它一面世，就被争购一空。此后重印十几次。"东南学子，几乎家有其书。"许多书院和学堂将它选为教材。该书内容十分丰富。卷一至卷四论算术，卷五、卷十二为"杂论"，卷六、卷七论天元术，卷八、卷九论代数，卷十论微分，卷十一论积分。

华蘅芳在晚年又把自己关于数学思想和数学方法的体会写成《算斋琐语》。《学算笔谈》与《算斋琐语》虽写于 100 多年以前，但很多精辟的论述，我们今天读来仍感到深受启发。

他说：随着事物的发展变化，人们的认识和智慧也不断提高，数学的境界便日益精深。

华蘅芳还强调了数学的广泛应用。他指出"凡天文之高远，地域之广轮，居家而布帛粟菽，在官而兵河盐漕，以至儒者读书考证经史，商贾持筹权衡子母，莫不待治于算，此又算之切于日用，斯须不可离者也"。

华蘅芳正确地阐明了数学理论与方法之间的辩证关系。他说："一切算法，其初皆从算理而出。惟既得其法，则其理即寓于法之中，可以从法以得理，亦可舍理以用法。苟其法不误，则其理亦必不误也。"

关于"演数"与"明理"的关系，华蘅芳阐述道："演数者祇能用法，而明理者则能创法。凡演数者所用之法皆明理所创也。"

华蘅芳强调，学习数学"必循序而及"，所以在《学算笔谈》中，华蘅芳用了较大篇幅阐明数学的基本知识、基本算法，他特别强调加、减、乘、除与开方五种基本算法的重要性。他在《算斋琐语》中指出："加、减、乘、除、开方五法，犹农夫之耒耜，樵子之斧斤，渔人之网罟，匠者之刀锯、锥凿也。若无其器虽明知有可获之利，徒手无能力。忽有其器而不知其用，则亦束手无策也。所以，不习此五法必不能算，既习此五法，而不知其用，

亦不能算各种之题。"①

第二节　几何、代数和三角学著作的翻译

一　《几何原本》

李善兰与伟烈亚力翻译的第一部书是《几何原本》后九卷，内容包括数论、无理数和立体几何等。据伟烈亚力说，原英文"旧版，校勘未精，语讹字误，毫厘千里，所失非轻"，而李善兰"固精于算学，于几何之术，心领神悟，能言其故。于是相与翻译，余口之，君笔之。删芜正讹，反复详审，使其无有疵病，则李君之力居多，余得以借手告成而已"②。这并非谦逊之词。因为翻译的过程是伟烈亚力口述，李善兰笔录。这种笔录对口述的整理、加工乃至创造的比重都是很大的。李善兰自己也说："当笔受时，辄以意匡补"，如此"屡作屡辍，凡四历寒暑，始卒业"③。这次翻译的底本，据考可能是英国数学家巴罗（I. Barrow，1630～1677）的英译本（Elements，The Whole Fifteen Books）。李善兰与伟烈亚力的续译经顾观光、张文虎校阅，于1857年刊行。1865年又由曾国藩资助与前六卷在南京一并付梓，这是我国的第一个《几何原本》足本。

李善兰"笔受"的中文译文秉承徐光启的体例，以求前后一贯。徐光启在前六卷的翻译中，有若干处加上了自己的解说，而李善兰翻译的后九卷，亦加按语一二十处。有些按语是对命题的说明，有些则是他自己的发挥。例如，在卷十第117题"凡正方形之边与对角线无等"下，李善兰以按语的形式把无公度线段推广到无公度面积和无公度体积进行讨论，这种涉及无理数的问题在中国数学史上还是第一次。当然，李善兰的有些按语也有不恰当之处。例如，卷十第11、73题的按语，吴起潜在《无比例线新解》（文明书局，1906）中就曾提出过异议。

李善兰在他自己的数学研究中受《几何原本》逻辑演绎体系影响甚深，但他并不迷信《几何原本》。例如，在《天算或问》中，他认为"《几何原本》作圆内五边形似觉太繁曲"，于是另外提出了一种简捷作法，并给出了一个比较严格的证明。

李善兰之后，对《几何原本》进行研究的还有顾观光的《几何原本六和六较浅解》（1883），吴庆澄的《几何释义》、《几何浅说》（1896），潘应祺的《几何赘说》（1906），吴起潜的《无比例线新解》（1906），周达的《几何求作》、《几何原点论》以及宗森保的《几何原本例题》等。到了20世纪初，废科举，兴学校，中国的中学课程开始采用以《几何原本》为蓝本的几何学教材。

二　《代数学》和《代数术》

《代数学》由伟烈亚力口译、李善兰笔述而成，于1859年由墨海书局出版。该书由卷首

---

① 纪志刚，杰出的翻译家和实践家—华蘅芳，科学出版社，2000年。
② 伟烈亚力，《几何原本》序，1857年。
③ 清·李善兰，《几何原本》序，1857年。

总纲和十三卷构成：卷一论一次方程。卷二论代数与数学记号之不同。卷三论多元一次方程组。卷四论指数和代数式渐变之理。卷五讨论一元二次方程的解，包括其与一次方程的关系、根的判别式、求根公式、根与系数的关系。卷六介绍变量及其极限的概念。卷七论代数式之诸类并约法。卷八论级数和未定之代数。卷九说明代数等式的意义与性质。卷十论记函数法。卷十一介绍二项式定理，包括数学归纳法的证明。卷十二论指数对数之级数。卷十三论用对数为算术之捷法。

该书是我国第一部符号代数学读本，主要是多项式理论、一元二次方程理论以及指数函数、对数函数的幂级数展开式问题，其中还介绍了二项式定理、虚数等初等代数的内容。这些都是首次传入中国的。但译笔不若《代数术》通顺易读①。

《代数术》亦为初等代数教材，共二十五卷，译自英国数学家 John Wallis 的代数教材 *Algebra*，原载《大英百科全书》第八版。傅兰雅口译、华蘅芳笔述，"一日数千言，不厌其艰苦，凡两月而脱稿，缮写付梓，经年告成"②，于 1873 年由江南制造局出版。该书沿用李善兰《代数学》的代数符号。目录及其内容如下：卷首"释号"，叙代数符号的规定与使用规则，以及多项式的一些基本概念。前九卷论代数多项式、一次方程与二次方程。卷十至十六讨论高次方程解法。卷十七介绍代数式的无穷幂级数展开法。卷十八介绍对数的概念与运算性质，以及指数方程求解法与对数的级数展开。卷十九叙述以对数解复利问题。卷二十介绍实数的连分数渐近展开。卷二十一关于求不定方程整数解问题。卷二十二论用代数以解几何之题。卷二十三介绍方程与平面曲线的关系。卷二十四、二十五介绍平面三角知识、三角函数的幂级数展开以及棣莫弗定理、牛顿－丹尼尔贝努利三角级数与欧拉级数。与《代数学》相比，《代数术》的内容更为丰富，水平也较高，包含今天我们中学所学的所有代数学知识，甚至无穷级数等简单的高等数学内容③。

三　《三角数理》及其他

《三角数理》十二卷，是一部系统的三角学著作。傅兰雅、华蘅芳译自英国 J. Hymers 的 *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*（1863）。1877 年江南制造局刊刻。卷一介绍三角函数的定义与基本公式，卷二为两角和公式，卷三给出三角函数与对数三角函数造表法，卷四包括平面三角形及多边形的解法，高远法、佛逆原理与酒准定平法等测量法，测量仪器哈德里纪限仪与更达带尺的介绍，卷五介绍棣莫弗创例，反三角函数，卷六介绍对数概念及性质、指数函数和对数函数的幂级数展开式以及三角函数的对数计算，卷七是关于三角函数公式的 49 道应用，卷八是 51 道解平面三角形的应用题，卷九至卷十二，属于球面三角的内容。

《合数术》十一卷，傅兰雅、华蘅芳译自英国人 Olive Byrne 的 *Dual Arithmetic*（1863）。译稿五册，未刊刻。卷首"总引"叙"合数"定义、各种记号以及合数与常数的互换，并给出六种互换表。卷一至卷三论述合数的基本代数运算。卷四至卷六讨论合数在平面三角、

① 吴文俊主编，中国数学史大系，李兆华主编第八卷，北京师范大学出版社，2000 年。
② 华蘅芳，代数术 · 序，见：江南制造局刊本。
③ 吴文俊主编，中国数学史大系，李兆华主编第八卷，北京师范大学出版社，2000 年。

球面三角中的应用。卷七至卷九是关于合数在各种代数方程求解中的应用。卷十是杂题，内容涉及代数、方程、三角测量、椭圆积分、球面三角以及物理学问题用合数术求解。卷十一，论合数开方术，讨论代数方程求解问题。

华蘅芳和傅兰雅合译的数学书籍还有：

《代数难题解法》十六卷，底本是英国人伦德（T. Lund）《伍德代数指南》，1878年著，中译本1883年出版。内容包括：算术、代数方程、级数、对数、概率论等方面的习题，还附有“冈布理知书院（即剑桥大学）的考试题解”。

《算式解法》十四卷，底本是美国人郝司敦（Houston）与开奈利（Kennelly）1898年合著的《简易数学》，中译本1899年出版。这是一部有关工程数学的入门读物，书中内容除初等数学外，还有简单的微积分和行列式（当时译为“定准数”），卷一至卷十三依次为微分、积分、定准数。卷十四解说数学符号。

华蘅芳与金楷理（C. T. Kreyer）合译的《测候丛谈》，由于其中有关于数字表格和数学计算的内容，后来被收入《华氏中西算学丛书》。

此外，翻译出版的重要数学著作还有：

几何学方面：《算式集要》四卷，傅兰雅口述，元和江衡笔录，此书主要讲图形的面积体积计算；《周幂知裁》一卷，傅兰雅口述，徐寿笔录，此书为实用几何学，鋈金工所用；《运规约指》三卷，傅兰雅口译，徐建寅删述，此书专讲几何作图问题；《器象显真》四卷，也是傅兰雅与徐建寅合译，这是一部内容丰富的画法几何与机械制图著作，在理论和实践上都颇有价值；《代形合参》三卷，美国潘慎文（1850～1924）和中国谢洪赉（1850～1924）合译，内容是解析几何；《形学备旨》十卷，美国狄考文（1836～1908）和中国邹立文合译，为初等几何著作。

算术和代数学方面：《笔算数学》三册和《代数备旨》十三卷，两书均由狄考文和邹立文合译；《数学理》九卷，傅兰雅、赵元益（1840～1902）合译；《弦切对数表》，贾步纬翻译。1909年，顾澄根据美国哈地（Hardy）的一部有关四元数的通俗读物，译成《四元原理》一书，从此向量和四元数理论在中国出现。

据不完全统计，自1853年到1911年，翻译数学著作达168部，占译书总数的三分之一强。西方数学著作的大量翻译，加快了中国数学走向近代的进程。

第三节　微积分和概率论著作的翻译

一　《代微积拾级》

《代微积拾级》十八卷；是西方高等数学传入中国的第一部译著。早在1853年，伟烈亚力就想翻译西方微积分学著作。他在《数学启蒙》（1853）的序言中说：“譬诸小儿，始而匍匐，继而扶墙，后乃能疾走。兹书之成，姑教之匍匐耳，扶墙徐行耳。若能疾走，则有代数、微分诸书在，余将续梓之。”[①] 约从1856年开始，他与李善兰合作翻译《代微积拾

① 伟烈亚力，数学启蒙·序，光绪二十二年格致书室铅印本。

级》，1859 年出版。

《代微积拾级》译自罗密士所写的教材。美国数学家罗密士 1830 年毕业于耶鲁学院，1836 年成为美国西预备役学院数学与自然哲学教授，1844～1860 年为纽约市立大学数学与自然哲学教授，1860 年以后到耶鲁大学任自然哲学和天文学教授。① 他一生著作丰富，除《代微积拾级》外，罗密士的其他一些数学著作也被翻译成中文，如《形学备旨》十卷、《对数表》一卷、《圆锥曲线》三卷、《代形合参》三卷、《八线备旨》四卷、《微积学》（刘光照译，1912）。

《代微积拾级》是面向一般读者的微积分教材，通俗易懂，便于初学者学习。各卷内容如下：卷一至卷九为解析几何，卷十至卷十六是微分学。卷十七、十八为积分学。

该书解析几何方面的内容仅仅局限于平面解析几何，没有涉及立体解析几何。

微积分的严格化是在 1856 年魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass，1815～1897）算术化工作之后才形成的，此前的微积分方法都缺乏极限这一基础而不严密。该书自然也是如此，偏重并不使用极限工具的微积分计算，不考虑函数的连续性、可导以及级数的收敛性等基础问题，对于定理的逻辑关系的演绎也显得薄弱。该书从整体上看属于莱布尼茨系统，在定积分定义的处理上，却偏重于牛顿的传统，考虑积分与微分的逆运算关系，从微积分基本定理出发给出定义，忽视莱布尼茨的传统而没有考虑其几何积度量方面的定义。《代微积拾级》这种偏重计算的代数倾向，符合中国的算学传统，从而可能是它备受中国人欢迎的一个重要原因。②

二　《微积溯源》

《微积溯源》八卷，由傅兰雅、华蘅芳译自英国数学家 John Wallis 的微积分教材《流数》（*Fluxions*），原载《大英百科全书》第八版。同治十三年（1874），江南制造局刊印。关于译此书的动机，华蘅芳在其序言中说：“余既与西士傅兰雅译毕《代数术》二十五卷，更思求其进境，故又与傅君译此书焉。先是咸丰年间，曾有海宁李壬叔与西士伟烈亚力译出《代微积拾级》一书，流播海内，余素与壬叔相友，得读其书，粗明微积二术之梗概，所以又译此书者，盖欲补其所略也。”旨在弥补《代微积拾级》之不足。

《微积溯源》的内容要比《代微积拾级》丰富得多，此书基本属于牛顿系统。卷一为一元函数的导数与微分，卷二内容包括高阶微分、Taylor 级数与 Maclaurin 级数以及偏微分，卷三、四是今日所谓的微分几何的内容，卷五、六属于不定积分的内容；卷七是定积分及其在几何方面的应用；卷八“求双变数微分之积分”即常微分方程求解问题，主要是一、二阶微分方程及伯努利方程，介绍了分离变量法。卷八之末的悬链线，属于变分法的简单例子。

三　其他有关微积分的著作

由于微积分与中国传统数学具有不同的知识体系，所以对于晚清初学西方微积分、代数

① 张奠宙，代微积拾级的原书和原作者，中国科技史料，1992，13（2）：88。

② 吴文俊主编，中国数学史大系，李兆华主编第八卷，北京师范大学出版社，2000 年。

及几何的中国人来说，往往感到困难，故不乏有人对其诠释、重加演证。如梁启超所言："李叔壬初译代数学已佚，其存者《代微积拾级》一依西人文法，不敢稍有变动，故极佶屈难读，冯林一尝以己意重演之，为《西算新法直解》，然不能善也。"[①] 这期间，除冯桂芬与陈旸撰写的《西算新法直解》外，还有以下中国学者编写的微积分学习辅助参考书[②]：华蘅芳的《微积初津》，蒋士栋的《微积释马》（1897），林传甲的《微积集证》（1900），徐异的《积分难题》（1901），凌步芳的《积分详说》，陈志坚的《微积阐详》（1905），杜魁云的《微积集证》，黄启明的《微积通诠》（1905），周藩的《代微积拾级详草》（1905），王世的《微积学答问》（1907），瞿方梅的《积分法浅释》，卢靖的《代微积拾级补草》（未刻）、《微积溯源补草》（未刻）、《叠微分补草》（1902，稿本），王达鲁的《微积新理》（惜分阴斋编印本），杜亚泉的《微积问答》，佚名的《微积互求表》（正学堂印本）。

中国数学家掌握西方微积分后，也开始将其应用于数学研究之中。例如，夏鸾翔"最究心于曲线之术，读《拾级》后，所造益深"[③]，撰《致曲术图解》与《万象一原》，在《代微积拾级》基础上获得诸多积分方面的新成果，如计算旋转椭球体体积、表面积以及球冠积。

四　《决疑数学》

《决疑数学》是一本系统的古典概率论专著。"决疑"是 Probability 的译语，今译做"概率"。华、傅二人当时译做"决疑率"，因此，"决疑数学"即今天的"概率论"。此书的原著为英国人伽罗威（Galloway）所写的"Probability"（载《大英百科全书》第8版）和安德森（Anderson）的"Probability, Chances or the Theory of Averages"载《Chambers 百科全书》。

全书由一个"总引"和十卷计160款构成，都是古典概率论问题。

"总引"介绍了从帕斯卡（B. Pascal，1623～1662）到拉普拉斯（M. Laplace，1749～1827）概率论的发展历史，提到了一大批西方著名数学家和数学著作。例如，"决疑数学之算学之理初为帕斯卡与费马两人所创，略在一千六百与一千七百年之间，有以题问帕斯卡云：两个对局相博，各出钱若干，约定胜三次者，尽得所置之钱，及第一人胜两次，第二人胜一次各愿能罢博，欲依两人能胜之决疑数分其所置之钱，求其比例若何？"这是讲帕斯卡与费马（P. Fermat，1601～1665）在17世纪中叶开始讨论有关概率论的问题。"有以题问"是指1654年，帕斯卡的一位朋友梅累（C. De Mere）向帕斯卡提出的"赌徒问题"。"是时，晦正士亦著一书《论占卜之比例理》，此书初印于斯古敦之习演几何书中，书中有帕斯卡与费马所解之题，并其解法及公论。"这是指惠更斯（C. Huygens，1629～1695）的《论赌博中的计算》（1657），斯古敦（Schooten，1615～1660）是惠更斯的老师，所谓"解法"与"公论"是指惠更斯在该书中对"赌徒问题"给出的一般方法。一般认为，帕斯卡与费马的通信、惠更斯的著作，构成了概率论的发轫。

---

① 梁启超，读西学书法，见：《中西学门径书七种》，光绪二十四年（1898）上海大同译书局石印本。

② 吴文俊主编，中国数学史大系，李兆华主编第八卷，北京师范大学出版社，2000年。

③ 卢靖，万象一原演式．序，光绪二十八年（1902）石印本。

“总引”又介绍了概率论发展的重要时期。“伯努利初言，决疑数之理，不但能用之博戏之事，更有重要之用处，凡天然之事，若非见过多次，宛如凌乱无序，苟将大数考其详细，则能推算以后之事应至如何。伯努利死后七年即一千七百十三年，其书始行事，名曰：《决疑数理》。”这是介绍伯努利（Jacob Bernoulli，1654～1705）对概率论的研究和他的名著《猜度术》（1713）。在这部著作中，伯努利提出的“大数定律”被认为是概率论走向成熟的标志。“总引”又说，“一千八百十二年，拉普拉斯作一书，名曰《决疑数学之理》，为论数理中最奇之书”，系指拉普拉斯的经典名著《分析概率论》（1812）。

卷一“论决疑数之例”，介绍概率基本概念，主要是关于随机事件及其概率的意义以及独立事件的和事件、积事件的概率运算问题。给出了拉普拉斯的概率古典定义：$P(A)=\frac{k}{n}$（n 为基本事件的总数，k 为事件 A 发生的次数）。卷二讨论还原取样试验的二项分布的概率。给出了伯努利公式，同时将二项概率推广到多项概率。卷三讨论非还原取样试验的概率问题。着重讨论了超几何概率。卷四论关景决疑数与不关景决疑数，即数学期望问题。它是由惠更斯在研究如何分配赌注时而最早提出的一个数学概念。该卷第 31 款给出了数学期望的惠更斯古典定义：“将所欲得之利与其所凭籍之事的决疑率相乘所得之积”。该书译做指望，或指望决疑率，并且进一步将数学期望分关景决疑数与不关景决疑数两类。若某人持有本钱 Q，得利 a 的概率为 p，则 ap 为所谓的不关景决疑数；$\frac{a}{Q}p$ 即所谓的关景决疑数。其差别在于随机变量的不同选择，刻画了在赌局中数学期望与所拥有的赌金有关，最初是丹尼尔 · 伯努利和满德未得（P. R. Montmort）在俄国圣彼得堡所研究的一种问题，载于《彼得堡博物会记录》。现代概率论已不再使用关景与不关景的概念，其在数学上的差别并不大，仅是随机变数的取值不同而已。该卷第三十二款证明了赌博对局两人的数学期望相等这一命题。卷五讨论古典型条件概率问题。给出了全概率公式：$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$。卷六是关于人寿保险的概率应用问题。卷七是关于概率在法律诉讼方面的应用问题。卷八讨论概率最大值问题与大数定理。证明了二项分布的最大值定理。在该卷的第八十九、九十款还利用组合论中的斯特林公式讨论多项分布 $(p_1+p_2+\cdots+p_s)^n$ 的概率最大值问题。卷九介绍随机变量及其分布函数问题。卷末附有标准正态概率积分公式。

《决疑数学》是一部学习概率论的入门著作，原是百科全书的一部分，其内容必须是能为多数人理解和接受的。全书取材的标准就是在尽量体现概率论发展水平的前提下，选择最重要、最有代表性的内容，避免篇幅过大和纷杂繁乱，尽量做到简明易懂。由此可见，华蘅芳与傅兰雅选择此书是经过了一番精心考虑的。不过，由于书中涉及西方一些近代数学的重要知识，加之这一学科是第一次介绍到中国来，内容颇为坚深。因此，《决疑数学》译出十几年后，到了光绪二十二年（1896）才首次刊刻出版。这次刊刻，虽然发行量不大，流传也不是很广，但它的意义却是很大的。光绪二十三年（1897），傅兰雅在他所创立的格致书室铅印了《决疑数学》，同年，又有上海飞鸿阁石印本问世。宣统元年（1909），周达又在扬州校刻此书①。

① 纪志刚，杰出的翻译家和实践家—华蘅芳，科学出版社，2000 年。

第三十二章　清末数学研究

清末数学研究工作大致有两个方向。其一，西方数学的传入与研究。其二，中国传统数学研究的继续。就数学知识的构成而言，传入的西方数学内容随时间的推移呈增长趋势。夏鸾翔关于二次曲线的研究，李善兰、华蘅芳关于垛积术、招差术及素数的研究，时曰醇、黄宗宪关于百鸡术和求一术的研究，均为有代表性的工作。

第一节　夏鸾翔、白芙堂诸子和其他数学家

一　夏鸾翔及其数学著作

（一）夏鸾翔生平简介

夏鸾翔，字紫笙，浙江钱塘（今杭州市）人，生于清道光五年十一月十六日（1825年12月25日）[①]，卒于同治三年（1864），是清代后期一位重要的数学家。[②]

夏鸾翔出身于书香门第，自幼性情沉稳，刻苦勤学，酷爱绘画与诗歌。16岁时补博士弟子员，从19岁开始参加科举考试，但多次不第。1845年，夏鸾翔拜项名达为师，开始系统地学习数学和天文学知识，为其今后的研究奠定了基础。1850年前后他完成《少广缒凿》和《视学简法》（已失传）等著作。1857年春，夏鸾翔以输饷议叙的方式得到一个从七品京官的职位，在赴京上任的途中完成了《洞方术图解》。1858年春夏之交，夏鸾翔因母亲过世归家守制，从此再未回京。1860~1861年，他完成了《致曲术》与《致曲图解》。1862年初，为避战乱，夏鸾翔与家人离开家乡南迁，在颠沛流离中完成了最后一部数学著作《万象一原》。到达广州后，夏鸾翔结识了邹伯奇和吴嘉善等学者，得与他们交流学术、切磋研究。1863年底，郭嵩焘到任广东巡抚后筹建同文馆，拟聘夏鸾翔为中文教习，可惜夏氏未及到任便辞世了。

夏鸾翔对中国传统数学中的开方术、贾宪三角形和招差术以及西方传入的解析几何和微积分均有所研究。他使用的方法独特，因而获得了若干有创造性的结果。在西方变量数学传入后，数学在中国的发展呈现出中西融合的特征，夏氏的工作可为代表。

（二）夏鸾翔的数学著作

夏鸾翔死后，吴嘉善和邹伯奇将他的四种数学著作编辑整理成《夏氏算书遗稿》（又称

---

① 刘洁民，关于夏鸾翔的家世及生平，中国科技史料，1990，11（4）：47。

② 关于夏鸾翔详细的生平活动，参见：刘洁民，晚清著名数学家夏鸾翔，中国科技史料，1986，7（4）：27~32。

《夏氏算学》)，包括《少广缒凿》一卷、《洞方术图解》二卷、《致曲术》和《致曲图解》各一卷。邹氏殁后，同治十二年（1873）出版的《邹征君遗书》附刻了《夏氏算学》。

《少广缒凿》就开平方、开高次方及求解一般高次方程给出十四条“捷术”，获得了和牛顿程序等价的结果。

《洞方术图解》二卷。卷一为“演术”，叙述三角函数的造表法，包括术、数表和算例三部分，其中最重要的是利用招差术简化正弦表和正矢表的造法。卷二为“图解”，共12节，阐述“演术”的理论依据，大体可分为图和数表、图解、算例三部分。该卷用招差、垛积和尖锥等方法研究贾宪三角形，得到一系列结果。

在《致曲术》中，夏氏讨论了一些曲线的弧长、旋转体的表面积以及二次曲线的性质。《致曲图解》共分12项，进一步对二次曲线进行研究并附以图解，论述了圆锥曲线与母面的关系、焦点、准线、焦距、切线、法线及双曲函数，其中若干结果是《代微积拾级》等书中所没有的。

《万象一原》九卷，卷首一卷，同治元年（1862）初春序成。卷首为“诸曲线释形”，主要解释16种曲线（其中包括两种直线）的形成或表达方式。卷一为“用术”，即幂函数、指数函数及对数函数的展开式，是后面八卷要用的基本公式。以下各卷分别研究勾股形及由其得到的旋转体、圆、椭圆、正双曲线（等轴双曲线）、斜双曲线（一般双曲线）、抛物线等二次曲线、三次代数曲线及超越曲线，包括曲线的弧长（截弧长）、旋转曲线得到的旋转体的表面积（截面积）和体积（截体积）等内容。其结果是以无穷级数展开式的形式给出的，没有一个问题给出用积分具体导出的过程。[①]《万象一原》中几乎包含了《致曲术》的所有研究成果，而且《致曲术》中有目无术的两题也在《万象一原》中得到了解答。因而，《万象一原》可以看做是夏鸾翔数学研究工作的总结，它代表了中国数学界在19世纪60年代对圆锥曲线研究的水平。[②]

二　白芙堂诸子及其数学著作

（一）丁取忠及《白芙堂算书》

丁取忠（1810年1月9日～1877年4月27日）[③]，字肃存，号果臣，又号云梧，长沙人。丁取忠少年时就“喜步算”，“每持筹凝思，寝食俱废”，“用心于众所不屑之地”。道光十七年（1837）起，丁取忠就学于长沙城南书院，“珠、笔、筹弗离于手，细草、图说弗离于案，今有、之分弗离于心”，将宋元名著以及李潢、张敦仁、李锐、焦循等的力作“罔不搜获而赜究之”。道光二十四、五年间，年过三十的丁取忠再入城南书院，“讲求勾股开方诸法，孜孜不倦，持牙筹、算盘相推较，声丁丁然”。丁取忠与诸算友互相切磋，收益很大。他对《张丘建算经》中的“百鸡术”构想出了“三色贵贱差分解”，这对不定方程的解法是一个革新。丁取忠研究各家数学，有所心得即写成笔记，题称《数学拾遗》，于咸丰元年（1851）汇刻出版。书名有两层含义：一是类似于梅瑴成《赤水遗珍》的做法，丁氏

① 李迪，中国数学通史 · 明清卷，江苏教育出版社，2004年，第456页。

② 中外数学简史编写组，中国数学简史，山东教育出版社，1986年，第506页。

③ 许康，丁取忠和《白芙堂算学丛书》，中国科技史料，1993，14（3）：34～43。

的补充可说是“遗外求遗”；二是这类日常研究心得“意在推广、拾遗”，“后有所得，犹将增入”。①

1860年前后，丁取忠的友人湖北巡抚胡林翼（1812～1861）在湖北设立翘材馆。丁取忠应邀赴鄂，得与时在胡幕的时曰醇经常讨论数学。丁氏的“百鸡术”新解法启发了时曰醇，时氏于数月后写成《百鸡术衍》一书。1861年，翰林院编修吴嘉善来湘，丁取忠抓住机会，“举生平疑义往返研究”，吴则“随笔剖示，久之成帙”。丁取忠将这些草稿整理，对较难的题目加以注解，成《白芙堂算书十七种》。这是一套“津逮初学”的好书，“是书虽参新法，实阐古义”，“所谓熔西人之巧入大统之型模”。1870年前后，丁取忠的数学活动已广为人知，他也物色到几位杰出的助手和弟子，其中首推新化黄宗宪、湘阴左潜和湘乡曾纪鸿等。他们以长沙荷池精舍为活动中心，经常在一起切磋研讨数学，先是增订《算书十七种》为二十一种，接着又筹措资金刊刻自己的研究成果，并且刻印了十数种古典数学名著及时人的新作，是为《白芙堂算学丛书》。

（二）时曰醇及其《百鸡术衍》

时曰醇，字清甫，嘉定（今上海嘉定县）人。清嘉庆十二年（1807）生，光绪六年（1880）卒。时曰醇少时“入监，专治九数”。咸丰十一年（1861），他与丁取忠同在武昌为胡林翼的幕宾。受丁取忠启发，时氏对“百鸡术”的解法“别后数月乃得通之”。同年重九日，他序成《百鸡术衍》二卷，是为其代表作。时氏晚年被聘为广方言馆算学教习，其时虽已“年老聋瞽”，仍为“诸生口讲指画，剖毫析芒”。他的著作还有《今有术申》一卷和《求一术指》一卷。

《百鸡术衍》二卷推广了百鸡问题及其算法，是三色差分算法的一个系统的总结。全书共28个题目，以“旧学商量加邃密，新知培养转深沉”这两句诗共14个字为序，每序又分上下二题。推广后的百鸡问题，所给物数非两两互素，共物数与共值数亦不相等。14个上题讨论形如

$$\begin{cases} x + y + z = M \\ \frac{b}{a}x + \frac{d}{c}y + \frac{f}{e}z = nP \end{cases}$$

的三元一次不定方程组的解法。其中，a，c，e 分别是大物、中物、小物的个数，b，d，f 分别是相应的值钱数，M 为共买物数，nP 是共值钱数，它们都是正整数，且 $(a, b) = (c, d) = (e, f) = 1$，$\frac{b}{a} > \frac{d}{c} > \frac{f}{e}$。14个下题讨论形如

$$\begin{cases} x + y + z = nP \\ \frac{e}{f}x + \frac{c}{d}y + \frac{a}{b}z = M \end{cases}$$

的三元一次不定方程组的解法。其中，f，d，b 为物数，e，c，a 为值钱数，nP 为共物，M 为共值，$\frac{e}{f} > \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$，其余条件同上题。每题均给出全部的正整数解，且对应的值钱数也是正整数。每题用方程术与求一术两法求解，求一法与骆腾凤法相同，方程术为时氏本法。

① 许康、张白影，略论长沙数学学派领袖丁取忠的功业，大自然探索，1997，16（3）：125～127。

（三）黄宗宪及其《求一术通解》

黄宗宪，字玉屏，号小谷，湖南新化人。1871 年拜丁取忠为师，并协助校订《白芙堂算学丛书》。1876 年，随清政府第一任公使郭嵩焘出使英国，后又去法国和西班牙，1882 年回国。于 1862 年著《求一术通解》二卷，收入《白芙堂算学丛书》，1874 年出版。又收入《古琴古砚斋算稿》。该书是自张敦仁、骆腾凤、时曰醇的工作之后，对秦九韶“大衍术”研究十分深入且富有创意的著作。

（四）吴嘉善及其数学著作

吴嘉善，字子登，号竹言，江西建昌府南丰县人，生于嘉庆二十五年（1820）八月初六，卒于 1885 年[①]。道光二十九年（1849）乡试举人，咸丰二年（1852）壬子恩科进士二甲第二十一名[②]，同年获馆选庶吉士，次年四月散馆时授职翰林院编修[③]。1864～1868 年任广州同文馆总教习。光绪五年（1879）三月，吴氏任幼童出洋肄业局委员之职[④]，后由于在管理留美幼童事务上与容闳发生冲突，于光绪七年（1881）五月回国。吴氏与当时数学家徐有壬、李善兰、华蘅芳、丁取忠、邹伯奇及夏鸾翔等均有学术往来。

吴嘉善的数学著作为《算书二十一种》，常见的版本是《白芙堂算学丛书》本。《算书二十一种》首述笔算；次为“九章翼”，包括今有术、分法、开方术、平方术、平圆术、立方立圆术、勾股术、衰分术、盈朒术和方程术等，并于勾股术后论平、弧三角术和测量术；又次则专述天元术和四元术，有释例、草和浅释等。吴氏在勾股和较术、弧三角术、组合数以及对天元术的认识方面均有独到的见解。将书中数学内容按九章翼、天元四元术和西方数学分成三大类，可表示如下[⑤]：

算书二十一种	九章翼	(2) 今有术，(3) 分法，(4) 开方术，(5) 平方术，(6) 平圆术，(7) 立方立圆术，(8) 勾股术，(12) 衰分术，(13) 盈朒术，(14) 方程术
	天元四元术	(15) 天元一术，(16) 天元名式释例，(17) 天元一草，(18) 天元一答，(19) 方程天元合释，(20) 四元名式释例，(21) 四元草，(22) 四元浅释
	西方数学	(1) 笔算，(9) 平三角术，(10) 弧三角术，(11) 测量术

《算书二十一种》结合当时传统数学研究的成果和传入的西方数学知识，总结当时数学学习所必需的基础知识，融入他的研究心得，是一部为数学初学者精心编排的参考书。[⑥]

（五）左潜、曾纪鸿及其数学著作

左潜（？～1874），字壬叟，湖南湘阴人，左宗棠的侄子，“英年绩学，于诗赋文辞无不深纯，而于数学一道尤孜孜不倦，遇有疑难之题必穷力追索，务洞澈其奥窔而后止”[⑦]。

---

① 朱彭寿编著，朱鳌、朱苓珠整理，清代人物大事纪年．北京图书馆出版社，2005 年，第 1156 页。

② 朱保炯、谢沛霖，明清进士题名碑录索引，上海古籍出版社，1980 年，第 853，2809 页。

③ 清实录，卷 92 · 文宗显皇帝实录，中华书局，1986 年，第 253 页。

④ 清 · 李鸿章，李文忠公奏稿卷 42 · 吴嘉善请奖折，海南出版社，1997 年。

⑤ 篇目前的序号表示其在著作中的顺序。

⑥ 高红成，吴嘉善与洋务教育革新，中国科技史杂志，2007，28（1）：20～33。

⑦ 李文铭，清末长沙数学学派的兴衰及其活动概述，西北大学学报（自然科学版），2005，35（2）：244～249。

同治十年（1871）起，常与丁取忠论算，为忘年交。取忠见其心力胜人又年少好学，故将徐有壬的《割圆八线缀术》稿交左潜予以校正、注释，并对各式一一补草。与此同时，左潜还发现戴煦的《求表捷术》、明安图的《割圜密率捷法》与徐氏《割圆八线缀术》理同而法异，且算式繁杂，故采用"缀术"说明戴、明二氏的著作，分别写成《缀术释戴》一卷和《缀术释明》二卷。左潜于1874年秋病故，其遗作于次年出版。

曾纪鸿（1848～1877），字栗诚，湖南湘乡人，曾国藩次子，少年好学，与其兄纪泽并精算术。当丁取忠、李善兰等学者为其父幕宾时，纪鸿常"讲习其间，折中一是，术必尽通而理必尽贯"。[①] 同治六年，曾为李善兰校订《四元解》。同治十一年，纪鸿到丁取忠门下共同研讨数学，丁氏称其"颖悟绝伦，心精力果"。丁取忠认为常用对数与自然对数头绪纷繁，因嘱纪鸿用西方代数方法彰显其理，纪鸿遂于同治十三年初撰成《对数详解》五卷。同年，曾纪鸿又撰《圆率考真图解》一卷。他用几何图形证明了下列二式

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{5}{27} + \arctan\frac{1}{12} + \arctan\frac{1}{13}$$

并利用反正切函数的幂级数展开式

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

计算 π 值。[②]

三　刘彝程及其数学著作

（一）刘彝程生平简介

刘彝程，字省庵，江苏兴化人，生卒年不详。其父刘熙载（1813～1881），字伯简，号融斋，是一位博学的经学家[③]，在天文、数学方面撰有《天元正负歌》四首及《星野辨》一篇。

刘彝程《简易庵算稿序》自述他学习数学的过程云："自弱冠，先大夫中允公授以正负加减乘除诸法，由是纵观天元、四元诸书。后随侍先大夫之粤，过长沙，遇丁果臣先生，籍观董、项、徐、戴诸家算书。又访邹君特夫于粤东，识李君壬叔于沪渎。"[④] 刘彝程1844～1864年随父在京，入太学，对数学产生了浓厚的兴趣。李善兰称他"后生可畏"[⑤]。此后，跟随其父先后至长沙、广东和上海，结识了数学家丁取忠与邹伯奇，读到了项名达等人的著作。刘彝程"悉心于弧矢之学"，并自撰著《割圆阐率》一卷、《开方阐率》、《对数问答》一卷。19世纪70年代，傅兰雅与华蘅芳合译《代数术》、《微积溯源》、《三角数理》，亦由

---

① 李文铭，清末长沙数学学派的兴衰及其活动概述，西北大学学报（自然科学版），2005，35（2）：244～249。

② 钱宝琮，中国数学史，科学出版社，1992年，第340页。

③ 清·萧穆，刘融斋别传，《续碑传集》，光绪九年江苏书局刊本。

④ 清·刘彝程，简易庵算稿，光绪二十六年江南制造局刊本。

⑤ 清·李善兰，致华蘅芳，转引自：严敦杰，李善兰年谱订正及补遗，见：梅荣照主编，明清数学史论文集，江苏教育出版社，1990年，第478页。

刘彝程任校算后方付梓。华蘅芳在《微积溯源序》中称："书中代数之式甚繁，校算不易，则刘君省庵之力居多。"①

刘彝程在中西数学的融合方面进行了一定的尝试。刘彝程能够比较客观地看待中、西数学，既充分认识到传统数学在算法研究中的成果，又能正视西方数学的领先地位。在计算方法上，他经常运用近代数学方法解传统算法古题，并在测圆类问题中加入角度。同时在近代数学解题思想的指导下，常常运用中国传统的勾股术解决近代数学中的解方程等类问题。从刘彝程的解题可以看出，这种中西融合的方法大都是成功的。

1873 年，冯焌光（？ ~1878）邀刘彝程任上海广方言馆算学教习。1876 年，冯氏创办求志书院，延刘彝程兼任其算学斋斋长。1898 年刘彝程以老病辞职，但还在上海广方言馆执教。

刘彝程从事数学教育二十余年，为清末最重要的数学教育家之一。他的弟子徐谦说"方今海内能算之士，半出先生门下"②，虽有夸张之虞，亦可见其成就斐然。经考证，曾在求志书院中求学的清末数学家有华世芳、陈维祺、崔朝庆、叶耀元、冯澂、徐谦等人。另有数学家支宝枏、缪秋澄、汤金铸等也曾应求志书院课试。

刘彝程以西法解中国古题及以中算方法解决西算问题的做法为清末数学家所普遍采用。这不仅是数学研究中的一种趋势，对于传授新知识、新方法也可收到事半功倍的效果，可以激发起学习热情。正如徐谦所说："自先生以题诲人而后，代数虽属西法，而人乃视为已有矣。"

在教学方法上，刘彝程的教学注重启发。他说："余之命题，无论深浅，唯以新颖确实为主。盖凡一物一理，骤观之了无佳趣，及触类旁通，引伸不已，尽有当前易知之境。而古今人从未道及者。故算学诸理，一径推阐，则机关渐启，见解不与众同。"从《简易庵算稿》设题亦可发现，该书虽为一综合性试题集解，而题目则可按学科分为数种。每种题目由浅入深，互为衔接，且有理论，有应用，自成章节。刘彝程常将一难题分为若干小题，为学生理解与掌握新知识提供阶梯，坚持"先抒题理，然后以题合之。遂觉如石投水，浅易明显"。徐谦称刘彝程"不以蕴蓄自秘，不以坚深自文，诲人唯恐不知，语人不厌其详"。同时，刘彝程非常赞赏他的学生在课卷中表现出来创造能力。在垛积课题中，他以陈维祺解法与已不同而颇为赞赏，在《简易庵算稿》中特选陈氏课艺。1896 年，沈善蒸推广刘彝程整数勾股形研究成果，以本勾股较为另形之勾股和，自极小句三股四弦五起分途互求，推得一切整数勾股形。撰表列举，一网无遗。刘彝程欣喜之情溢于言表，称："沈君粒民，推广此术"，余深喜有同志焉"。

（二）刘彝程的数学著作

刘彝程的《割圆阐率》、《开方阐率》、《对数问答》三部著作主要讨论弧矢级数。

刘彝程还著有《上海求志书院算学课艺》一卷，并与沈善蒸合编《广方言馆算学课艺》一卷。后者收录了刘循程、李鸿杭、龚杰、丁国钧等学生的课艺 43 题，书中涉及的数学内容有勾股术、平面几何（包括三角及圆问题）、《测圆海镜》类问题、方程论、整数勾股形、

---

① 清 · 华蘅芳，微积溯源序，见：华里司辑，傅兰雅译，华蘅芳述，《微积溯源》，同治十三年江南制造局刊本。

② 清 · 徐谦，简易庵算稿跋，见：刘彝程，《简易庵算稿》，光绪庚子江南制造局刊本。

割圆、立体几何（球体积问题）、物理等[①]。

1898年，刘彝程收集求志书院历年课题题解及自演之稿编为《简易庵算稿》四卷。刘氏最重要的研究成果主要在此书中。其内容可谓中、西各半，除垛积等课题为纯传统数学内容外，其他课题多是中、西互通。该书按年代顺序编辑，全书245题，其中206题有题、有解、有证。书中涉及的内容很广，有三角、测圆、方程、整数勾股及二次不定方程、垛积、平面及立体几何、幂级数、对数、连比例、勾股术、代数杂题（三题）、衰分、排列组合、物理计算等方面。在整数勾股形、垛积术方面取得了超出前人的成就。在垛积术方面，刘氏在李善兰研究的基础上得出许多新的结论。在整数勾股形的研究中，虽然其成就无法与同期西方成果进行比较，但中国传统数学的研究方法有其自己的特色。

刘彝程另有三部著作：《亥加人开立方解证》、《元程九章算略》（与沈善蒸合编）[②]、《简易庵九章实义》(1901)。《简易庵九章实义》是刘彝程应郭嵩焘、鹿传善的要求，花半年的时间为初学者编写的一部简要的入门著作[③]，分比例，面、体积，方程，勾股四卷，每卷又分上下两部分。上部分讲解主要数学内容及运算方法，下部分以该算法演《九章算术》或《测圆海镜》中原题。

陈维祺编著的《中西算法大成》由刘彝程鉴定，求志书院其他肄业生叶耀元等参与了该书的编辑、校订、绘图等工作，可以说是求志书院师生集体工作的成果。1889～1898年的9年间，“各书坊私用原本缩小翻印，三次行销至七千部之多”[④]。对当时数学知识的传播起到了一定的推动作用。

四　陈志坚、周达及其数学著作

（一）陈志坚及其《求一得斋算学》

陈志坚（1844～?），字思九，号紫简，江苏新阳县（今昆山市）人。光绪己卯科（1879）举人。“学问渊博，于经史性理外，兼精天算之学”。[⑤] 自述读《史记·历书》、《汉书·历律志》等篇，往往不得其解，叹曰：“士人固不可不习算哉！”因而学习《九章算术》等书。光绪十六年（1890）考进士不第，“遂绝意进取，乃得萃中法之天元、西法之借根代数，博览而深探之，渐渐得窥崖略”。[⑥] 光绪二十二年（1896）至宣统三年（1911）任江苏青浦县教谕，并在青溪书院、融斋精舍和南菁高等学堂讲授过数学，晚年曾参与编撰《（民国）崑新两县续补合志》[⑦]。

陈志坚的后半生致力于数学教学和研究，涉及很多数学内容。其数学著作有《求一得斋算学》七种十一卷和《微积阐详》五卷。陈氏兼通中西数学，丰富了清末的数学成果。

《求一得斋算学》包括《李氏勾股术补》一卷、《连分数开方》一卷、《演无定式》三

① 清·刘彝程、沈善蒸，《广方言馆算学课艺》，光绪二十二年刊本。
② 清·丁福保、周云青，四部总录算法编，文物出版社，1984年。
③ 清·刘彝程，九章实义序，见：刘彝程，《九章实义》，光绪二十七年刘氏简易庵石印本。
④ 清·闵廷德，中西算法大成。禁止私自翻刻启示。《中西算法大成》，光绪二十七年铅印本。
⑤ 清·张爔，微积阐详序，见：陈志坚，《微积阐详》，光绪三十二年（1906），松江稽文墨斋刊本。
⑥ 清·陈志坚，求一得斋算学·自序，光绪三十年（1904），松江稽文墨斋刊本。
⑦ （民国）崑新两县续补合志，1923年，刊本。

卷、《三角数理》三卷、《整勾股释术》一卷、《粟布术广》一卷和《杂题类存》一卷。《李氏勾股术补》系对李锐《勾股算术细草》中没有给出详细解答的题目依照天元术补出细草。《连分数开方》对连分数的分类和由此得到的连分数的渐近分数的特点以及连分数的一些性质进行了深入探究。陈志坚着重讨论了循环连分数的性质，给出了“更互变之”的算法及“有前率可求后率之公理”。这些是《代数术》中没有的，而且其理论水平明显地高于徐虎臣所译的《溥通新代数》[①]中关于连分数的讨论。《演无定式》是对不定方程的研究和讨论。陈氏已经认识到二元一次不定方程和一次同余方程是可以相互转化的，他求解二元一次不定方程的方法与现代初等数论教科书中的方法相同。《三角新理》讨论平面三角形中边、角、高线、面积间的互求。其思路是对一任意三角形通过作一边上的高将其化为两个直角三角形后设法求解。《整勾股释术》对整数勾股形问题进行了较全面的讨论，有若干结果有独到之处。《粟布术广》对丁取忠等所撰《粟布演草》中的有些问题做了推广和补充，在解题过程中体现出连比例的妙用。《杂题类存》收录了陈氏认为“稍深奥”的30个题目，涉及球面三角、三角函数、对数、垛积、开高次方等内容。

（二）周达及其数学著作

周达（1879～1949），字美权，安徽建德（今东至县）人。他出身于一个书香门第和官宦世家，其祖父为清末两江总督周馥，其父为著名医学家周学海。[②] 周达自幼喜爱数学，自述称“余束发受书即喜研求历数之学，治之甚勤且笃。家藏古算书，尽发而读之，凡九章、缉古、天元、大衍、海镜、玉鉴诸书，靡不遍观而尽识。复穷搜历代明历观象之作，暨国朝梅、江、王、薛、项、戴、徐、李之书，洞观而知其要，湛思眇虑，思自树异于古昔作者之表已。又得墨海书馆、制造局所译西算读之，通代数、微积，取与古书印证，得其汇通之旨，成法既娴，乃时时出新义著书”。[③] 他早年常向华蘅芳请教。刚20岁时完成《求勾股整数术》，不久又完成《三角和较术解》四卷，华蘅芳为后者作序。他主张积极学习西方先进数学，与江都张剑虹等五、六位学者共同研讨西方数学，组织了中国现代最早的数学团体——扬州知新算社，并被推选为社长。[④] 从1902年到1925年，周达曾4次访日，与日本数学界人士有广泛的交流，其数学成果东传日本后，在日本数学界产生了重要影响。他长期致力于推动中国近现代数学的发展的工作，堪称“数学活动家”，对中国科学社和中国数学会的相关工作也有所建树。周达所处的时代正值中国数学向近现代过渡的时期，他早期对数学的研究多融汇了中国传统数学的方法，后期的工作则转向西方数学。

周达在几十年中先后发表了许多数学论文和文章，完成了不少著作，积极在中国推行西方近代数学。据李俨统计，他在清末以前的著作有下列各种[⑤]：《三角和较术解》四卷，光绪二十五年（1899）石印本。《平圆互容新义》，亚泉杂志本（1900～1901）。《周美权算学》十种，即《数之性情》、《九九支谈》、《几何求作》、《几何原点论》、《勾股三角公

① 清·徐虎臣译，溥通新代数，光绪二十九年（1903）江楚书局刊本。

② 胡炳生，周达的家世和业绩述略，中国科技史料，1994，15（1）：22～26。

③ 周达，福慧双修馆算稿·自叙，1909年。

④ 李迪，中国现代数学的先驱者周达，见：李迪主编，中国科学技术史论文集（一），内蒙古教育出版社，1991年，第255～275页。

⑤ 李俨，中算史论丛（第二集），中国科学院，1954年，第165～166页。

式》、《曲线新理》、《顺序组合及等次积》、《开六乘方奇法》、《孔球解》、《弧角脞录》。普通学报本（1901~1902）。《知新算社课艺初集》，光绪二十九年（1903）石印本。《调查日本算学记》，光绪二十九年（1903）石印本。《巴氏累圆奇题解》一卷，光绪三十年（1904）石印本。《福慧双修馆算稿》四种，即《垛积新义》、《垛积余义》、《循环小数性情考》、《圆理奇侅》（此种缺，另出单行本），宣统元年（1909）维扬刊本。《勾股三角求整数术》，《增版东西学书录》著录。《数根性情考》一卷，约成书于光绪二十五年（1899），石印本。《求勾股整数术》，华蘅芳《行素轩文存》内有"书周美权《求勾股整数术》后"一文。《司忒林公式解正》，宣统元年（1909）作为《决疑数学》附录刊行。他在1906年翻译过日本数学家长泽龟之助的几何学著作《新几何学教科书》，由东亚公司于当年分别在东京和上海出版。1907年，他又与包荣爵合译了长泽龟之助的算术著作《新数学教科书》，也由东亚公司出版。

第二节　数论的研究

一　素数的研究

所谓"数根"，就是素数。素数理论在中国传统数学中比较薄弱。清初《数理精蕴》中的《对数阐微》给出了一个素数表，将素数译为"数根"。李善兰在翻译《几何原本》后九卷时，采用了"数根"的译法。此后，李善兰开始研究素数的判定方法。

1873年夏，李善兰发表《考数根法》①，提出判别一个自然数是否为素数的方法。此文副题为"《则古昔斋算学》十四"，以续《则古昔斋算学》十三种（1867）。这是我国关于素数的最早论文。李善兰说："任取一数，欲辨是数根否，古无法焉"，他得到四种方法，即"屡乘求一"法、"天元求一"法、"小数回环"法和"准根分级"法。设 $(a, N) = 1$，对于给定的自然数 N（本数），必定存在一个最小指数 d，使 a^d-1 能被 N 整除。李善兰假定 a（用数）等于2或3，然后去确定 d，再判定 N 是否为素数。确定 d 的方法有4种。至于辨别 N 是否为素数的条件，李善兰指出，如果 a^d-1 能被 N 整除，而 N 是一个素数，那么 $N-1$ 必能被 d 整除。但又指出，N 不是素数时，d 也可能整除 $N-1$。这就证明了著名的费马素数定理（1640），并且指出它的逆定理不真。他进一步指出，在 N 不是素数而 d 能整除 $N-1$ 的情况下，N 的因数必定具有 $kp+1$ 的形式，式内 p 为能除尽 d 的数，k 为一自然数。只有在任何具有 $kp+1$ 形式的数都不能除尽 N 时，N 才是一个素数②。

早在1869年5月，英国传教士伟烈亚力从李善兰那里得到了一个判定素数的方法，便把它译成英文，寄给了香港的一家英文杂志。《有关中国和日本的札记和答问》（*Notes and Queries On China and Japan*）称："它是由中国数学家李善兰发明的，他的名字在欧洲公众面前出现过不止一次。我会毫不迟疑地说：'这是他的一个独立的发现，故我认为借贵刊一角以公诸于世是值得的。贵刊的一些科学读者也许能指出欧洲书中是否也有类似的规则。'"

---

① 李善兰，考数根法，见：《中西闻见录》第2、3、4号（1873年5月、6月、7月）。

② 严敦杰，中算家的素数论，数学通报，1954年，4、5月号。

结果，该杂志便以“中国定理”（Chinese Theorem）为标题发表了李善兰关于判断任何数是否为素数的方法：

以2的对数乘给定的数，求出其真数，以2减同数，以给定数除余数，若能除尽，则给定数的素数；若不能除尽，则不是素数。

将此“中国定理”稍作变换，即若 $(2^P-2)/P$ 能除尽，则 P 为素数。此乃费马定理的逆定理。

1869年9月，李善兰把“中国定理”交给了京师同文馆的德国人教习方根拔①。方根拔公开批评了“中国定理”，从而引起了一些争论。1872年，李善兰在艾约瑟（J. Edkins，1823～1905）编辑的《中西闻见录》上发表的《考数根法》，纠正了“中国定理”的错误，使李善兰的素数论成为清末素数研究的重要成果。

在李善兰之后，华蘅芳也证明了若 p 为素数，则 $2^{p-1}\equiv 0 \pmod p$，但却没有像李善兰那样，指出这并非 p 为素数的充分条件，即没有认识到费马素数定理的逆定理不真。②

在李善兰《考数根法》之后，方士镰《数根丛草》又给出新的素数判别法。例如，第十一术给出 N 为素数的充要条件是

$$(N-1)!+1\equiv 0(\bmod N)$$

这是著名的威尔逊定理③。研究结果认为，方士镰是独立得到这一结果的。方士镰所著包括二十术，其中有二术重复了华蘅芳的错误。

二　整数勾股形的研究

（一）刘彝程的整数勾股形研究

勾股是中国传统数学的重要研究课题。在《周髀算经》和《九章算术》中都有以整数为解的勾股问题算例。《九章算术》更使用了勾股数组的通解。3世纪，刘徽还给以证明。13世纪，秦九韶利用另一通解公式推导出“遥度圆城”问的10次方程。但明清两朝无人知晓前人的这些成就。有清一代关于整数勾股形，即根据一定条件求解勾股形三边整数解的专题研究成为重要课题，则始于《数理精蕴》（1723）下编卷十二的“定勾股弦无零数法”篇，盖源于西算。汪莱、骆腾凤、罗士琳、陈杰、李善兰、刘彝程等都致力于整数勾股形的研究，而以刘彝程的成绩最为突出。

刘彝程《简易庵算稿》中有28个整数勾股形及二次不定方程方面的问题。其中，着墨最多的整数勾股形问题乃是同积、同勾弦和的整数勾股形解法问题。

刘彝程以西方代数学方法研究这一问题。1883年，刘彝程在求志书院设考题“甲乙幂相加又加甲乙相乘开平方得整数法”，即研究不定方程 $x^2+xy+y^2=z^2$ 的解法。他的解题过程中采用《代数术》介绍的解二次不定方程的方法，得出此方程的解系为 $x=\dfrac{y^2-u^2}{2u-y}$，$y=$

---

① 韩琦，李善兰“中国定理”之由来及其反响，自然科学史研究，1999，18（1）。

② 华蘅芳，数根术解，见：《行素轩算稿》（1882）。

③ 张祖贵，《数根丛草》研究，自然科学史研究，1992，11（2）：127～138。

y，$z=\frac{y^2-uy+u^2}{2u-y}$的解。式中，$u$为任意数。为了保证方程的解为整数，他取二整数$m$、$n$，令$x=m^2-n^2$，$y=m\ (2n-m)$，$z=m^2-mn+n^2$，式中$\frac{1}{2}m<n<m$。这可以看做原不定方程的一组特殊解系。此后，他将此不定方程的解法与解同积、同勾弦和的整数勾股形问题联系起来，给出已知一勾股形求与其具有同积、同勾弦和的勾股形的方法。利用上题结果，他在《简易庵算稿》卷一给出二勾股形的一个解系：

任取偶数为前数，又取奇数大于前数，而小于倍前数者为后数，以前后二幂相减为实，倍前数内减后数为法，法除实得甲，乃命后数为乙，前数为丙，若实不受除，则径命实为甲，除法乘后数为乙，除法乘前数为丙，次以甲乙各自乘为勾弦较，两勾弦较相加，又以甲乙相乘加之，为勾弦和，以甲乙各乘甲丙和为各股，则诸数皆得整数。

即取二整数m、n，其中m为偶数，n为奇数，且$m<n<2m$，则

$$x=\frac{n^2-m^2}{2m-n},\ y=n,\ z=m$$

因x可能不是整数，故令$x=n^2-m^2$，$y=n\ (2m-n)$，$z=m\ (2m-n)$，则

$$c_1-a_1=(n^2-m^2)^2,\ c_2-a_2=[n(2m-n)]^2,$$

$$c+a=(n^2-m^2)^2+[n(2m-n)]^2+(n^2-m^2)[n(2m-n)]$$

刘彝程对此解法提供了解释性的证明。此后，刘彝程还利用数题给出该题的一些其他解系。

《简易庵算稿》中还包括造一般整数勾股形五法、同勾弦和同弦和较之勾股形及解勾股较为1的勾股形等其他解整数勾股形的问题。刘彝程还利用中国传统勾股术解决了一些西方不定方程问题，如$x^2+y^2=u^2+v^2$类型问题。刘彝程在解题过程中很自然地结合了中西数学的研究方法。虽然以勾股术解不定方程往往只能得到一些特殊解系，但其构思巧妙，为解不定方程提供了一种新颖的方法。① 从《简易庵算稿》中的内容可以看出，刘彝程无疑是整数勾股形研究方面最杰出的中国数学家之一②。

（二）陈志坚的整数勾股形研究

陈志坚对于整数勾股形的研究集中在《求一得斋算学》的第九卷——《整勾股释术》中。陈氏在该卷对整数勾股形问题进行了较全面的讨论，在清代诸多对整数勾股形的研究中，其若干结果有独到之处。

第一题为求整勾股各三事公式，系讨论整数勾股形的造法。陈志坚用连比例三率法给出五术。

一术：任取大小二数（无论奇偶），各自乘，相减为勾（或股），相加为弦，二数相乘，倍之，为股（或勾），求得三事必俱为整数。若三事俱偶，则半之为得数。若仍为俱偶，则再半之，以弦得奇数为止。以下准此③。

---

① 田淼，刘彝程《简易庵算稿》研究，天津师范大学硕士论文，1992年，第10～35页。

② 田淼，清末数学家与数学教育家刘彝程，见：李迪主编，数学史研究文集（第三辑），内蒙古大学出版社，九章出版社，1992年，第117～122页。

③ 清·陈志坚，求一得斋算学，光绪三十年（1904），松江嵇文墨斋刊本。

记大数 $=m$，小数 $=n$，勾 $=a$，股 $=b$，弦 $=c$，规定 $b>a$，则术文给出公式：

$$a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2 \tag{32-2-1}$$

二术：

$$a=m^2+2mn, b=2n^2+2mn, c=m^2+2mn+2n^2 \tag{32-2-2}$$

由连比例三率式

大差 : 和较 = 和较 : 倍小差

即　$$(c-a):(b+a-c)=(b+a-c):[2(c-b)]$$

令 $m=a+b-c$，$n=c-b$，则 $\frac{m^2}{2n}=c-a$，各以 $2n$ 乘，得

$$m^2=c-a,\quad 2n^2=c-b,\quad 2mn=a+b-c$$

由此得

$$a=2n^2+2mn,\quad b=m^2+2mn,\quad c=m^2+2n^2+2mn$$

为使 $b>a$，依陈氏术文，取

$$a=m^2+2mn,\quad b=2n^2+2mn,\quad c=m^2+2n^2+2mn$$

依照类似的方法，陈氏给出：

三术：　$$a=2mn-n^2,\quad b=2m^2-2mn,\quad c=2m^2+n^2-2mn \tag{32-2-3}$$

四术：　$$a=m^2-2mn,\quad b=2mn-2n^2,\quad c=m^2+2n^2-2mn \tag{32-2-4}$$

五术：　$$a=n^2+2mn,\quad b=2m^2+2mn,\quad c=2m^2+n^2+2mn \tag{32-2-5}$$

陈氏给出的五术可以化成相同的形式，可以认为它们是互相等价的。①

以这五术为基础，陈氏着重讨论了有公共量的两个整数勾股形的构造，其中对同积同勾弦和两整勾股形的求法分析透彻，是当时其他数学家没有做到的。

本卷第十四、十五题对同积同勾弦和两整勾股形的求法进行了详细讨论。第十四题为：

> 问：求同积同勾弦和（或股弦和）两整勾股形，衡斋汪氏但用带纵立方明理，而求法未著；海宁李氏、长崎加悦氏（见《圆理括囊》）著有法矣，而法所从立未详，学者懵焉。亦可如前数题造立公式且释其术所由著乎？曰：可。

此问题李善兰在《天算或问》中给出求两形的方法：令首率 $=4m^2n^2$，末率 $=\left[\frac{m^2-n^2}{2}+(m-n)m\right]^2$，中率 $=[m(m^2-n^2)+2(m-n)m^2]n$，首率、末率分别为二勾弦较，首、中、末三率和为公勾弦和，此时即可求出两形的弦与勾，则两股可求，于是两形之各三事俱得。

日本人加悦俊兴所著《算法圆理括囊》一书的附录第三题亦论此问题，他直接给出求两整勾股形各事的公式。陈志坚对于此问题又给出了五术，并且五术均给出了解释。

一术（术文略）公式为

$$a_1=(m^2+mn+n^2)^2-(m^2-n^2)^2$$
$$b_1=2(m^2+mn+n^2)(m^2-n^2)$$
$$c_1=(m^2+mn+n^2)^2+(m^2-n^2)^2 \tag{32-2-6}$$

① 侯钢，清末数学家陈志坚数学成果讨论，见：李迪主编，数学史研究，第七集，内蒙古大学出版社，九章出版社，2001 年，第 88 ~ 100 页。

$$a_2 = (m^2 + mn + n^2)^2 - (2mn + n^2)^2$$
$$b_2 = 2(m^2 + mn + n^2)(2mn + n^2)$$
$$c_2 = (m^2 + mn + n^2)^2 + (2mn + n^2)^2$$

二术公式为

$$\begin{aligned} a_1 &= [n^2 + n(m+n) + (m+n)^2]^2 - [(m+n)^2 - n^2]^2 \\ b_1 &= 2[n^2 + n(m+n) + (m+n)^2][(m+n)^2 - n^2] \\ c_1 &= [n^2 + n(m+n) + (m+n)^2]^2 + [(m+n)^2 - n^2]^2 \\ a_2 &= [n^2 + n(m+n) + (m+n)^2]^2 - [2n(m+n) + n^2]^2 \\ b_2 &= 2[n^2 + n(m+n) + (m+n)^2][2n(m+n) + n^2] \\ c_2 &= [n^2 + n(m+n) + (m+n)^2]^2 + [2n(m+n) + n^2]^2 \end{aligned} \tag{32-2-7}$$

三术公式为

$$\begin{aligned} a_1 &= [(m-n)^2 + m(m-n) + m^2]^2 - [m^2 - (m-n)^2]^2 \\ b_1 &= 2[(m-n)^2 + m(m-n) + m^2][m^2 - (m-n)^2] \\ c_1 &= [(m-n)^2 + m(m-n) + m^2]^2 + [m^2 - (m-n)^2]^2 \\ a_2 &= [(m-n)^2 + m(m-n) + m^2]^2 - [2m(m-n) + (m-n)^2]^2 \\ b_2 &= 2[(m-n)^2 + m(m-n) + m^2][2m(m-n) + (m-n)^2] \\ c_2 &= [(m-n)^2 + m(m-n) + m^2]^2 + [2m(m-n) + (m-n)^2]^2 \end{aligned} \tag{32-2-8}$$

四术公式为

$$\begin{aligned} a_1 &= [n^2 + n(m-n) + (m-n)^2]^2 - [(m-n)^2 - n^2]^2 \\ b_1 &= 2[n^2 + n(m-n) + (m-n)^2][(m-n)^2 - n^2] \\ c_1 &= [n^2 + n(m-n) + (m-n)^2]^2 + [(m-n)^2 - n^2]^2 \\ a_2 &= [n^2 + n(m-n) + (m-n)^2]^2 - [2n(m-n) + n^2]^2 \\ b_2 &= 2[n^2 + n(m-n) + (m-n)^2][2n(m-n) + n^2] \\ c_2 &= [n^2 + n(m-n) + (m-n)^2]^2 + [2n(m-n) + n^2]^2 \end{aligned} \tag{32-2-9}$$

五术公式为

$$\begin{aligned} a_1 &= [m^2 + m(m+n) + (m+n)^2]^2 - [(m+n)^2 - m^2]^2 \\ b_1 &= 2[m^2 + m(m+n) + (m+n)^2][(m+n)^2 - m^2] \\ c_1 &= [m^2 + m(m+n) + (m+n)^2]^2 + [(m+n)^2 - m^2]^2 \\ a_2 &= [m^2 + m(m+n) + (m+n)^2]^2 - [2m(m+n) + m^2]^2 \\ b_2 &= 2[m^2 + m(m+n) + (m+n)^2][2m(m+n) + m^2] \\ c_2 &= [m^2 + m(m+n) + (m+n)^2]^2 + [2m(m+n) + m^2]^2 \end{aligned} \tag{32-2-10}$$

式（32-2-6）~式（32-2-10）可以化成相同的形式，它们是相互等价的。

三　百鸡术和大衍总数术的研究

（一）时曰醇的百鸡术研究

丁取忠《数学拾遗》中的“三色贵贱差分解”篇系讨论“百鸡问题”。他径设一物为

零，以二色差分为基础求解三色差分。但在求解二色差分时，可能出现得到的物数不是整数的情况。为了解决这个问题，丁取忠在计算中就不得不取物数的整数部分，而这样的做法就带有试算的性质，实际上还没有给出一般的方法。

时曰醇的《百鸡术衍》吸收了丁取忠设一物为零的方法并借用方程术求解二色差分，创立加较减较法以调整答数使成正整数。现以"知"上题为例说明其解法，见表 32-2-1。

表 32-2-1 "知"上题原文和解法今译

原　文	今　译
设甲物大二十八，值五。中六十三，值八。小二十一，值二。共物一千四百六十三，共值一百八十七。问物大、中、小各几何。答曰：（略）	设大、中、小物数分别为 x，y，z，依题意得 $\begin{cases} x+y+z=1463 & (1) \\ \frac{5}{28}x+\frac{8}{63}y+\frac{2}{21}z=187 & (2) \end{cases}$
物率：大二十八约为四。中六十三约为九，小二十一约为三（以等七相约得）。 值乘率：中、小物率九、三相乘得二十七，约为九；大、小物率四、三相乘得一十二，约为四；大、中物率九、四相乘得三十六，约为一十二（以等三相约得）	物数之等除物数 $d_1=(28,63,21)=7$ 物率：4，9，3 值乘数之等除值乘数 $d_2=(27,12,36)=3$ 值乘率：9，4，12
约率：大小较二十一，中小较八，中大较一十三（以乘率九乘大值，乘率四乘中值，乘率一十二乘小值，相减而得） 通率：大小较四百四十一，中小较一百六十八，中大较二百七十三（以三物之等七，三值乘率之等三，通约率得之）	值乘率：9，4，12　值率：5，8，2 相乘：45，32，24 大减小，中减小，大减中得 约率：大小较 21，中小较 8，中大较 13 $d_1=7$，$d_2=3$，相乘得 21，分别乘约率三较得 通率：大小较 441，中小较 168，中大较 273
如方程，用大数求（原文算式略）	设 $z=0$，则 $\begin{cases} x+y=1463 & (3) \\ \frac{5}{28}x+\frac{8}{63}y=187 & (4) \end{cases}$ 令 $x=28u$，$y=63v$，则 $\begin{cases} 28u+63v=1463 & (右) \\ 5u+8v=187 & (左) \end{cases}$
以左行首位大值五遍乘右行。右行首位大二十八遍乘左行。两两相减，上余九十一为法，下余二千〇七十九为实	$\begin{cases} 140u+315v=7315 & (右) \\ 140u+224v=5236 & (左) \end{cases}$ 相减，得 $91v=2079$
法九十一与中分母六十三求等得七。约六十三得九为乘率，亦约法九十一为一十三。以除实二千〇七十九，得一百五十九，不尽一十二。分母子无等不约，仍通内为二千〇七十九。以乘率九乘，得一万八千七百一十一为通分中物	$91\times\frac{y}{63}=2079$，$13\times\frac{y}{9}=2079$， $\frac{y}{9}=\frac{2079}{13}$，$y=\frac{18711}{13}$ 18711 为通分中物

续表

原　文	今　译
亦以法一十三通总物一千四百六十三为一万九千〇一十九，而以所通中物减之，余三百〇八为通分大物	由（3），得 $x=1463-y=\frac{19019-18711}{13}=\frac{308}{13}$ 308 为通分大物
复以法除通分中物，得中物一千四百三十九，不尽四。分母子无等不约，仍通内为一万八千七百一十一。依法求中数减较。置大小较二十一，先去其四，递加至七较而除之适尽	$y=\frac{18711}{13}=\frac{13\times1439+4}{13}$不得整数。 求减较次数：因$\frac{13\times1439+(7\times21-4)}{13}$得整数，故$\frac{13\times1439-(7\times21-4)}{13}$得整数。 减较 7 次
乃七因大小较二十一得一百四十七，以减中；七因中小较八得五十六，以加大；七因中大较一十三得九十一，以加小；得通分中物一万八千五百六十四，通分大物三百六十四，通分小物九十一	$y=\frac{18711-7\times21}{13}=\frac{18564}{13}$ $x=\frac{308+7\times8}{13}=\frac{364}{13}$ $z=\frac{0+7\times13}{13}=\frac{91}{13}$ 通分中物 18564，通分大物 364，通分小物 91
复以法各除得中物一千四百二十八，大物二十八，小物七	$y_0=1428$，$x_0=28$，$z_0=7$
验小物七不应小分母二十一，依法求加较。以小加率中大较一十三递加至十四较而应分母	将这组值代入（2），y、z 项都不得整数。用 z 项求加较次数：因$\frac{7+14\times13}{21}$为整数，故加较 14 次
乃以一十四乘大小较二十一得二百九十四，减中；乘中小较八得一百一十二，加大；乘大中较一十三得一百八十二，加小；得中物一千一百三十四，大物一百四十，小物一百八十九，为一答	$\begin{cases}y_1=y_0-14\times21=1134\\x_1=x_0+14\times8=140\\z_1=z_0+14\times13=189\end{cases}$ 为一答
又以通率大小较四百四十一减中，中小较一百六十八加大，中大较二百七十三加小，而得又答	$\begin{cases}y_2=1134-441=693\\x_2=140+168=308\\z_2=189+273=462\end{cases}$ $\begin{cases}y_3=693-441=252\\x_3=308+168=476\\z_3=462+273=735\end{cases}$ 为又答

作为三色差分的最早记载的百鸡问题中所给的物数两两互素且共物与共值相等，时曰醇去掉了这些限制而使问题一般化。时氏算法的关键是正确地求出约率与通率，其在求减较次数与加较次数时，实即求解形如$\frac{c+ax}{b}=y$的不定方程。时氏以试算解之，方法失之简捷。

这个问题由黄宗宪在《求一术通解》中解决了。

（二）黄宗宪的大衍总数术研究

对于求解同余方程组：$N \equiv R_i \pmod{A_i}$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，秦九韶的“大衍总数术”解法分为将诸问数化为两两互素的定母，用“大衍求一术”求诸乘率，求用数，并用“孙子定理”求答案三个步骤。黄宗宪在《求一术通解》中，对秦九韶的程序做了三方面修正，其例言称：

> 一求定母，旧术极繁，至《求一术指》，稍归简捷，而约分之理，仍不易明。今析各泛母为极小数根，瞭如指掌，遇题有多式者，一索无遗。
>
> 一求乘率，旧术先以奇定相求，得奇一，再立天元累乘累加，亦觉眩目。今以定母衍数对列，辗转相减，递求寄数，即为乘率，不立天元。
>
> 一旧术有借用数之法，赘设，删之。

其化问数为定母的方法是：

> 求定母法，前法析泛母毕，乃遍视各同根（如三与三、五与五之类）。取某行最多者用之，余行所有，弃之不用。再视本行所有异根（如三与五之类），或少于他行，则弃之（因他行已用，则此行必弃）；抑或多于余行，亦用之。或与他行最多者等，则此两行随意用之（用此则弃彼，用彼则弃此）。以所用数根连乘之，即得本行定母。若某行各根皆少于他行者，则此位无定母。

这正是我们今天所用的素因数分解求定数方法。此法最早出现于高斯（Guass）的《算术研究》（1801）一书中。黄宗宪用素因数分解的方法对秦九韶化问数为定数的算法进行改进，是受西学的影响。这种改进，从今日数学的角度来看，使定数计算原理较为清晰，理论臻于完善，但是从算法的角度来看，秦九韶方法因其机械性则更富有实用价值。①②

对于求乘率 k_i 的求一术，就算法程序而言，秦九韶“立天元一”的目的主要是布筹定位，标志循环演算程序的起点，完全是可有可无的。③ 因此，黄宗宪《求一术通解》主张删去，法曰：

> 列定母于右行，（左角上预寄一数），辗转累减，（凡定母与衍数展转累减，则其上所寄数，必展转相加），至衍数余一即止，视左角上寄数为乘率。

即以 m_i 与 a_i 入算，事实上 $g_ik_i \equiv m_ik_i \equiv 1 \pmod{a_i}$ 。演算程式与秦九韶基本一致，秦九韶以奇居右上，须使右上末后奇一为止，而黄宗宪以奇左下，故须使左下末后奇一而止。

黄宗宪又设“求反乘率”一法。所谓反乘率，即指满足 $g_ik'_i \equiv m_ik'_i \equiv -1 \pmod{a_i}$ 的 k'_i 黄宗宪求反乘率的方法也与大衍求一术大致相同，以衍数 m 与定母 a 作辗转相除，演算程序如表 32-2-2 所示。

---

① 袁向东、李文林，《数书九章》中的大衍类问题及大衍总数术，《秦九韶与〈数书九章〉》，北京师范大学出版社，1987 年，第 159 页。

② 李继闵，关于“大衍总数术”中求定数算法的探讨，《秦九韶与〈数书九章〉》，北京师范大学出版社，1987 年，第 220 页。

③ 李继闵，“大衍求一术”溯源，《秦九韶与 < 数书九章 >》，北京师范大学出版社，1987 年，第 144 页。

表 32-2-2　黄宗宪反乘率

寄数		衍数	定母		寄数
$c_0=1$	q_0	m aq_0	A r_0q_0	q_1	$c_1=1$
$c_2=q_2c_1+1$	q_2	r_0 r_1q_2	r_1 r_2q_3	q_3	$c_3=q_3c_2+c_1$
$c_4=q_4c_3+c_2$	q_4	r_2 r_3q_4	r_3 r_4q_5	q_5	$c_5=q_5c_4+c_3$
⋮					
$c_{2t-2}=q_{2t-2}c_{2t-3}+c_{2t-4}$	q_{2t-2}	r_{2t-4} $r_{2t-3}q_{2t-2}$	r_{2t-3} $r_{2t-2}q_{2t-1}$	q_{2t-1}	$c_{2t-1}=q_{2t-1}c_{2t-2}+c_{2t-3}$
$c_{2t}=q_{2t}c_{2t-1}+c_{2t-2}$	q_{2t}	r_{2t-2} $r_{2t-1}q_{2t}$	r_{2t-1} $r_{2t}q_{2t+1}$	q_{2t+1}	$c_{2t+1}=q_{2t+1}c_{2t}+c_{2t-1}$
		$r_{2t}=1$	$r_{2t+1}=1$		

黄氏求反乘率在秦氏程序求得余数 $r_{2t-1}=1$ 基础上再演算一步，至右边定母下余数 $r_{2t+1}=1$ 而止，从而归算寄数得到反乘率，$k'=c_{2t+1}=q_{2t+1}c_{2t}+c_{2t-1}$。事实上，若令 $d_2=q_2,d_3=q_3d_2+1,d_4=q_4d_3+d_2,\cdots,d_{2t}=q_{2t}d_{2t-1}+d_{2t-2},d_{2t+1}=q_{2t+1}d_{2t}+d_{2t-1}$，则有

$$r_1=a-gq_1=a-c_1g$$
$$r_2=g-r_1q_2=g-(a-c_1g)q_2=c_2g-d_2a$$
$$r_3=r_1-r_2q_3=r_1-(a-c_1g)-(c_2g-d_2a)q_3=d_3a-c_3g$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{2t-1}=r_{2t-3}-r_{2t-2}q_{2t-1}=\cdots=d_{2t-1}a-c_{2t-1}g$$
$$r_{2t}=r_{2t-2}-r_{2t-1}q_{2t}=\cdots=c_{2t}g-d_{2t}a$$
$$r_{2t+1}=r_{2t-1}-r_{2t}q_{2t+1}=\cdots=d_{2t+1}a-c_{2t+1}g$$

当 $r_{2t+1}=1$ 时，$c_{2t+1}g=d_{2t+1}a-1$，即 $c_{2t+1}g\equiv -1\pmod a$，从而 $k'=c_{2t+1}$。这就证明了黄氏的“反乘率”也是符合数理的。

黄宗宪还利用反乘率概念自创求总数 N 之新法，法曰：

先取题中减数最大者命为甲，其本位剩数为子。又取略小于甲之减数为乙，其本位剩数为丑。乃以甲乙求等，以等约乙，无等不约，或以等约乙，得数，与甲仍有等者，则不约乙而约甲。或任约甲约乙俱有等者，则用析根法求之。后仿此。甲乙相乘得甲，以乙累减子，余丙。又以乙累减甲，余丁。于丙内减去一丑不足减者，加一乙以减之，下同。余戊。以乙、比定母丁比衍数对列两行，求得反乘率，以乘戊，得己。甲乙相乘得庚。并子庚得辛，以甲累减辛，余子。

以上为一次求法。对于求解同余方程组：

$$N\equiv R_i\pmod{A_i}\ (i=1,2,3,\cdots,n), \tag{32-2-11}$$

黄氏反乘率新术分以下几个步骤：

（1）将问数 A_i 从大到小地排列，不妨为 $A_1>A_2>A_3>\cdots>A_n$。

（2）做子算法，求解：

$$N\equiv R_1\pmod{A_1}\equiv R_2\pmod{A_2} \tag{32-2-12}$$

①将其化为等价的同余方程组：$N \equiv R_1 \pmod{a_1} \equiv R_2 \pmod{a_2}$。式中，$(a_1, a_2) = 1$，并且 $[a_1, a_2] = [A_1, A_2] = a_1 a_2 = p_1$。

②再求出 B 及 C，使 $R_1 \equiv B \pmod{a_2}$，$a_1 \equiv C \pmod{a_2}$，要求 $B < a_2$，$C < a_2$。

③求 D: $D = B - R_2 > 0$，若 $B < R_2$，则 $D = (B + a_2) - R_2 > 0$。

④以 a_2（比定母）与 C（比衍数）入求一术，求反乘率 k'_1，使 $k'_1 C \equiv -1 \pmod{a_2}$。

⑤求同余方程组（32-2-2）的解 r_1：

$$Dk'_1 = E,\ E\,a_1 = F,\ F + R_1 = G,\ 则\ r_1 \equiv G \pmod{p_1}$$

（3）作叠代，求解同余式组：$N \equiv r_1 \pmod{p_1} \equiv R_3 \pmod{A_3}$，再用子算法（2）得其解。$r_2 \equiv G_1 \pmod{p_2}$。式中，$p_2 = [p_1, A_3]$，继续做以下叠代演算：

$$r_k \to R_1, p_k \to A_1, R_{k+2} \to R_2, A_{k+2} \to A_2 \quad (k = 1,2,3,\cdots,n-2)$$

式中，$r_k \equiv G_{k-1} \pmod{p_k}$，$p_k = [p_{k-1}, A_{k+1}]$，最后得到同余方程组（32-2-1）的解为 $N \equiv r_{n-1} \pmod{p_{n-1}}$。

可以证明，黄宗宪的这一新法是合乎数理的，与 Euler 的解法同理。[①]

《求一术通解》对秦九韶的“借用”也有研究。秦氏称 $s_i = k_i m_i$ 为“泛用数”，且称满足 $\sum_{i=1}^{n} s_i = M + 1$ 的 s_i 为正用。而实际上总有 $\sum_{i=1}^{n} s_i \equiv 1 \pmod{M}$，故正用乃其特殊情形。同时，对于泛母 $\sum_{i=1}^{n} s_i = tM + 1$，秦九韶引入“借数”方法而化泛用为正用。称

①“或泛母多衍母倍数者，验元数奇偶，同类者，损其半倍（或三处同类，以三约衍母，于三处损之）各为正用数。”即当 $t \geqslant 2$ 时，若 A_i 与 A_j 同偶（有公因子），则将其相应的泛用 s_i 和 s_j 改为 $s_i - \frac{M}{2}$ 与 $s_j - \frac{M}{2}$。若 A_i，A_j，A_k，…，A_l 同偶（有公因子 d），则选取 h_i，h_j，h_k，…，h_l，使 $h_i + h_j + h_k + \cdots + h_l = hd$，而将其相应的泛用 s_i，s_j，s_k，…，s_l 改为 $s_i - \frac{h_i M}{d}$，$s_j - \frac{h_j M}{d}$，$s_k - \frac{h_k M}{d}$，…，$s_1 - \frac{h_l M}{d}$。

②“或定母得一而衍数同衍母者，为无用数。当验元数同类者，而正用至多处用之，以等约衍母为借数，以借数损有以益其无，为正用。或多处无者，如意立数为母，约衍母，所得以如意子乘之，均借补之。或欲从省勿借，任之为空可也。”即若 $a_i = 1$ $(s_i = 0)$，且 A_i 与 A_j 有公因子 d，则将其相应地泛用 s_i 和 s_j 改为 $0 + \frac{M}{d}$ 和 $s_j - \frac{M}{d}$。

若 $a_i = a_j = a_k = \cdots = a_l = 1$，且 A_q 与 A_i，A_j，A_k，…，A_l 有公因子 d，则将其相应的泛用 s_i，s_j，s_k，…，s_l；s_q 改为 $\frac{h_i M}{d}$，$\frac{h_j M}{d}$，$\frac{h_k M}{d}$，…，$\frac{h_l M}{d}$，$s_q - \frac{(h_i + h_j + h_k + \cdots + h_l)\ M}{d}$。

容易证明上述改造的用数完全满足同余方程组，然而就同余式组求解的算理而言，正用概念是毫无用处的，秦九韶赘设此化泛用为正用的“借数”方法，可能是讨论同余式组可解条件的尝试。[②] 黄宗宪也认识到秦氏“借用”内容的多余性，主张删去。

---

① 王翼勋，一次同余式组的欧拉解法和黄宗宪反乘率新术，自然科学史研究，1996，15（1）：40。

② 莫绍揆，论秦九韶大衍总数术，《数学史研究文集》第四辑，内蒙古大学出版社，九章出版社，1993 年，第 29 页。

在《求一术通解》中，黄宗宪还对求一术与孙子定理给出了不十分严密的证明。这是孙子定理与大衍求一术在中国发明以后中国数学家的首次理论证明。① 同时还讨论了求一术在解二元一次不定方程方面的应用。黄宗宪关于同余方程组求解的研究，丰富和深化了中国传统数学的不定分析方法，在其理论化方面具有一定的意义。

第三节　垛积术与招差术的研究

一　李善兰的垛积术

李善兰的《垛积比类》四卷，分述三角垛、乘方垛、三角自乘垛、三角变垛以及它们的支垛，其系统如图 32-3-1 所示。

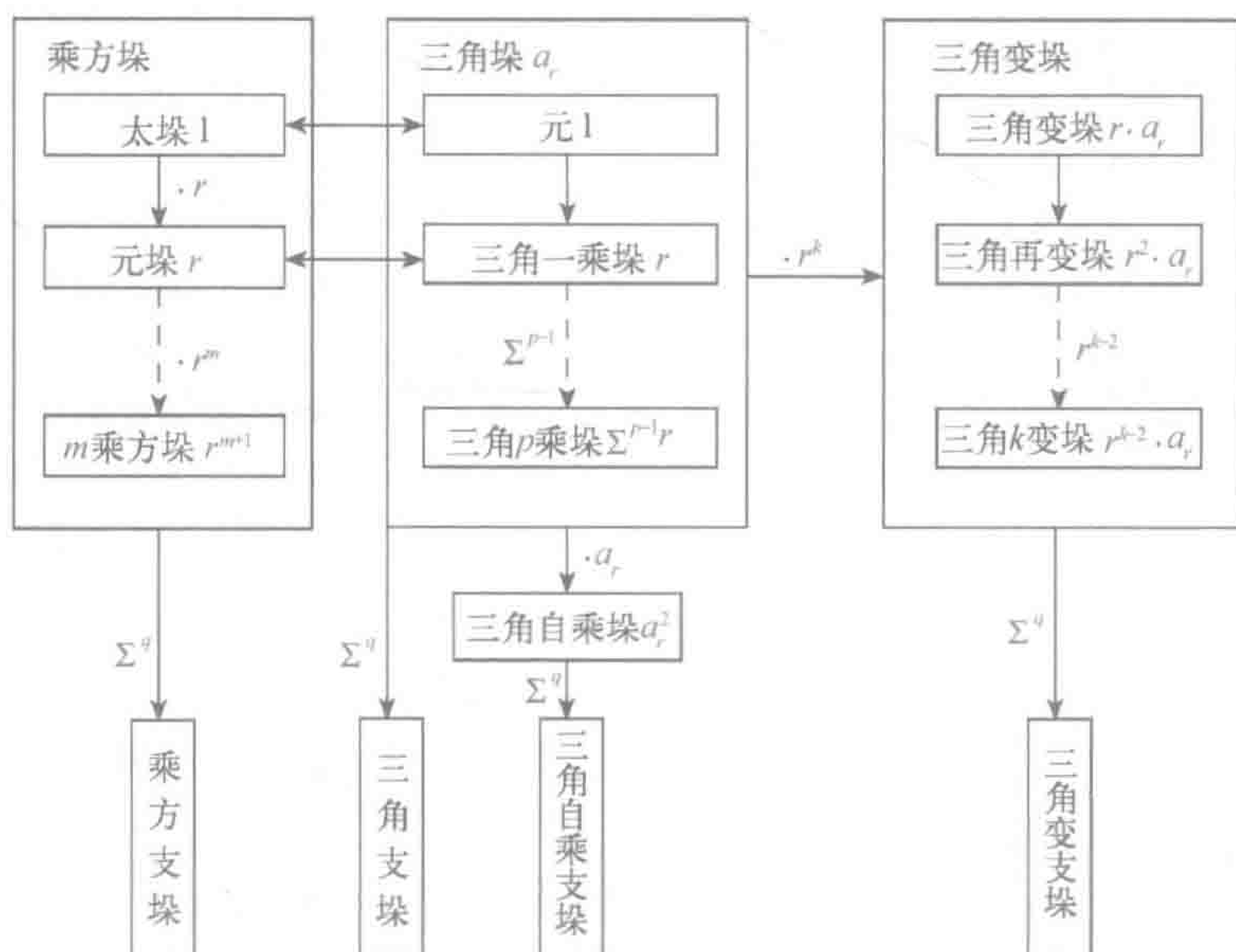


图 32-3-1　垛积系统

由此可见，李善兰的垛积体系的出发点同朱世杰的落一垛一样，是三角垛，其余支垛、变垛、乘方垛、自乘垛，都是从三角垛推广而来。其垛积的计算也最后归结于三角垛，而三角垛及三角垛积的性质已为贾宪三角所反映。因此，李善兰从贾宪三角出发，对各类的垛都事先给出了表格，可谓“垛积本源图”也。

（一）三角垛

李善兰将贾宪三角画到 13 层，把它作为最基本的垛积表置于卷首第一页。从三角一、二、三乘支垛表造表法，我们不难以右 1 左 $m+1$ 为表根，将它推广到 m 乘支垛的情形，并

① 李文铭，黄宗宪对孙子定理和求一术的预备性证明，《数学史研究文集》第三辑，内蒙古大学出版社，九章出版社，1992 年，第 112 页。

可归纳出以下结论：三角 m 乘支垛第一垛是 $m+1$ 阶等差级数，其各阶首差顺次是相应横行上的各数，特别地，$m+1$ 阶公差 $=m+1$。这是因为三角 m 乘支垛是三角 m 乘垛的发展，而 m 乘垛已是 m 阶等差数列了，故 m 乘支垛之第一垛应为 $m+1$ 阶等差数列，以后各垛的阶数随垛数递次增 1。m 乘支垛内 $m+1$ 阶以下的等差数列可视为"预备垛"或"准垛"，应另名之。正如李善兰自己所说："曰方垛、甲垛……者，乃垛之萌芽尚未成垛，不得谓之第一、第二垛，故异其称也。"

第二层右 1 左 2 为表根，三层以下如三角垛表法。一乘支垛表见图 32-3-2。

第二层右 1 左 3 为表根，三层以下如三角垛表法。二乘支垛表见图 32-3-3。

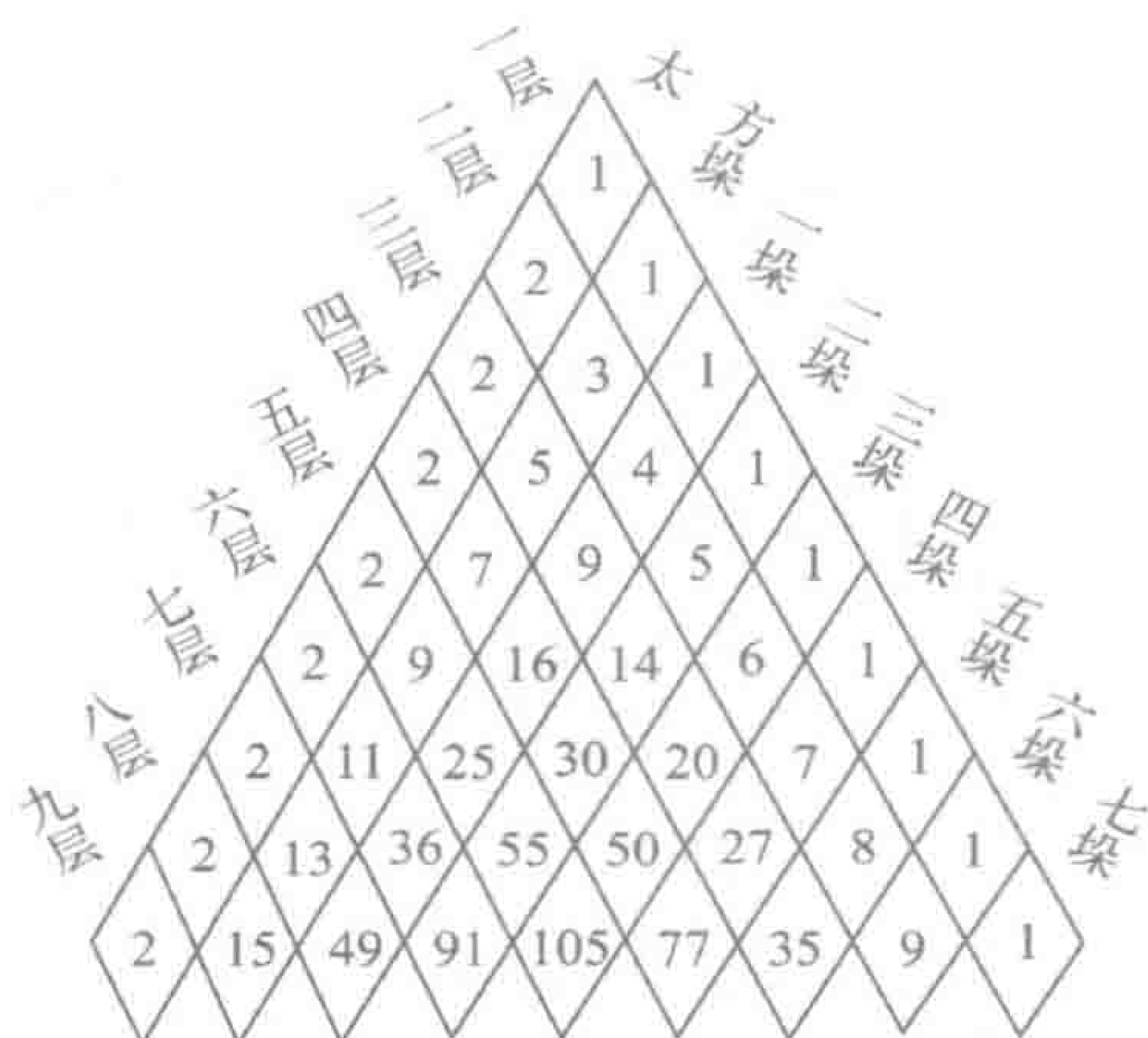


图 32-3-2　一乘支垛表

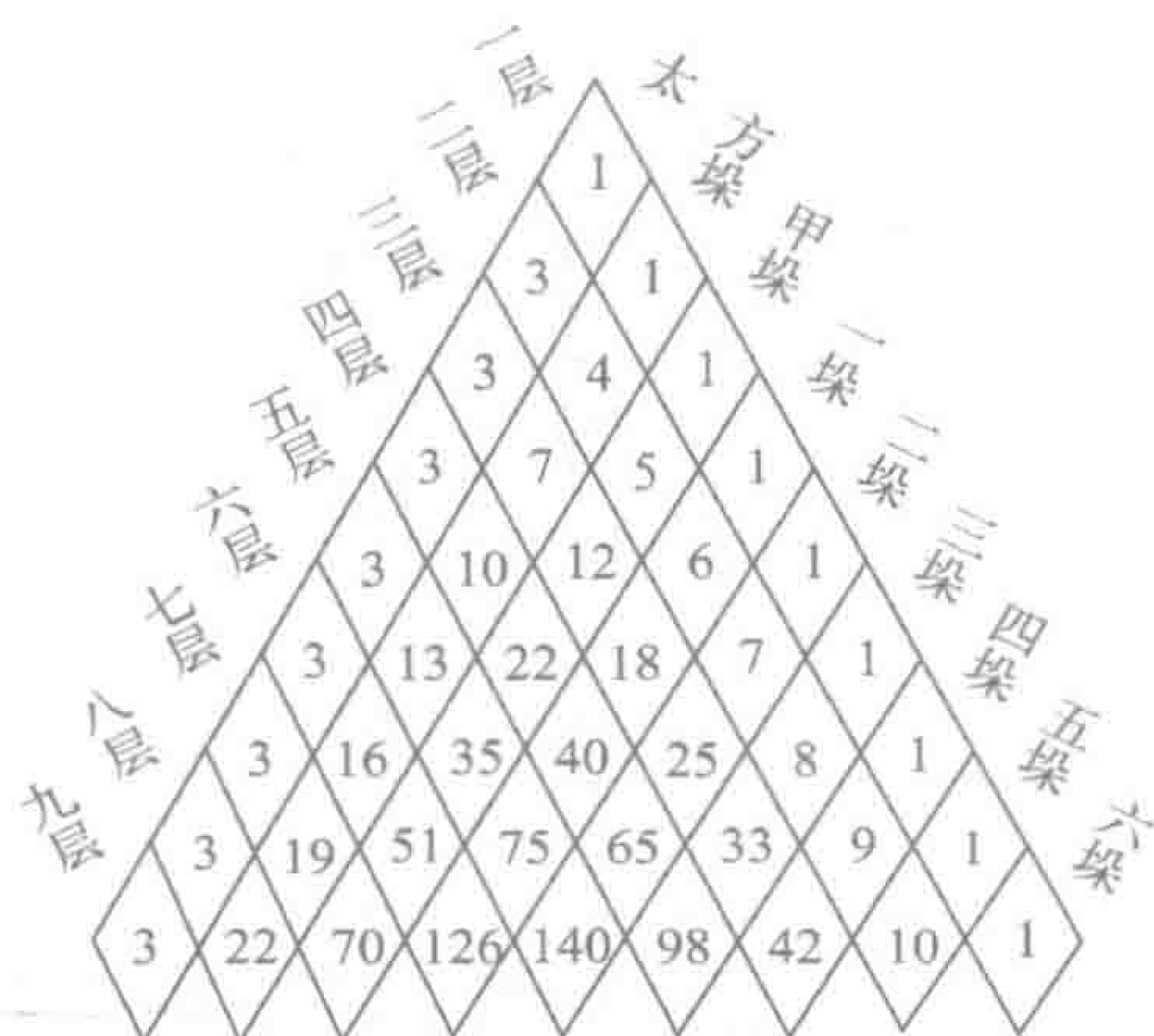


图 32-3-3　二乘支垛表

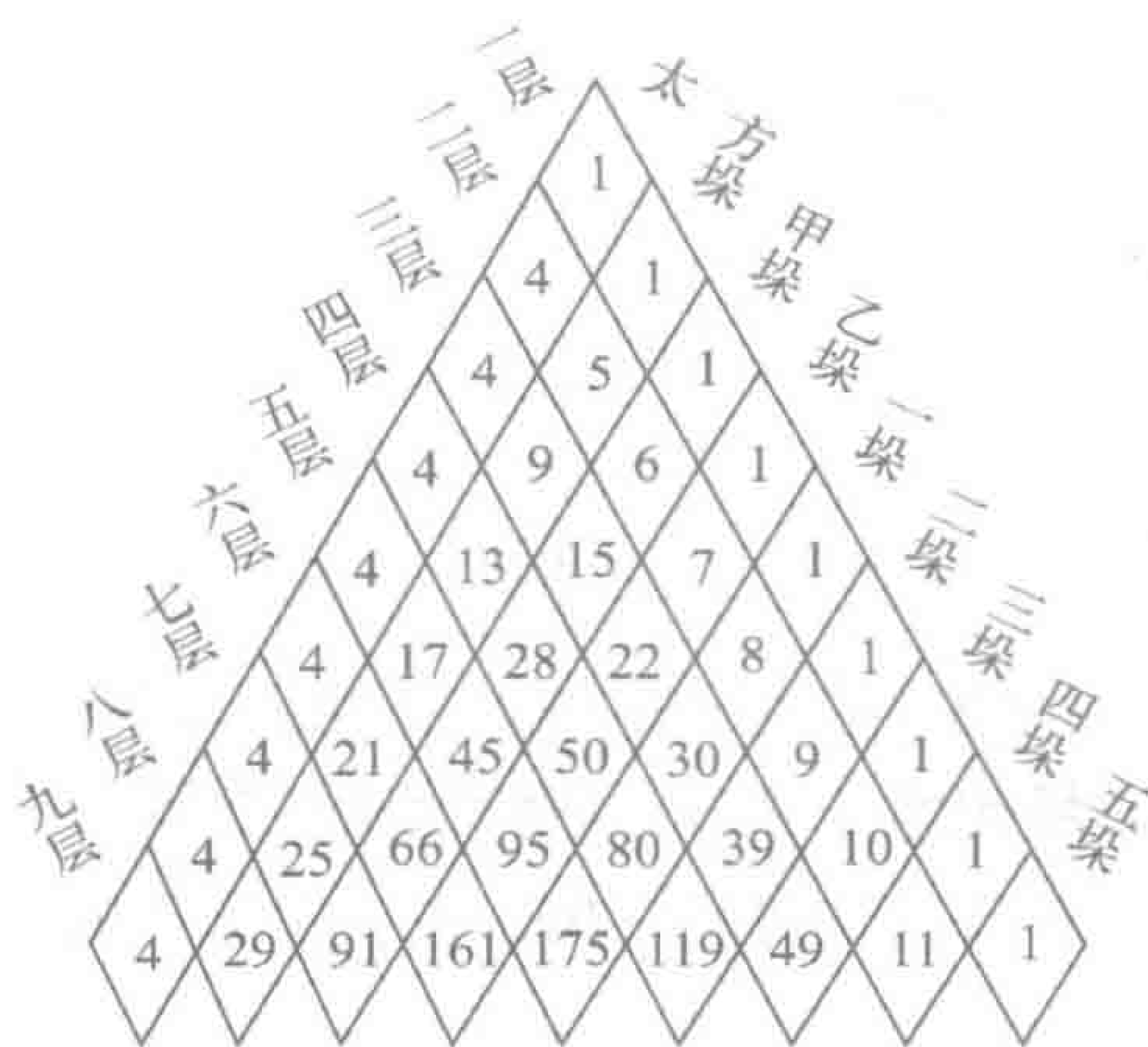


图 32-3-4　三乘支垛表

第二层右 1 左 4 为表根，余如三角垛表法。三乘支垛表见图 32-3-4。

由三角支垛表的造法，并与三角垛表相比较，容易看出，m 乘支垛乃是合 $m+1$ 个相应的三角垛而成。其中，1 个自一层起，m 个自二层起，即

$$C_{p+1}^{r+p}+mC_{p+1}^{r+p-1}=C_{p}^{r+p-1}\frac{(m+1)r+(p-m)}{p+1}$$

根据累加性，可得 m 乘支垛积公式为

$$\sum_{r=1}^{n}C_{p}^{r+p-1}\frac{(m+1)r+p-m}{p+1}=C_{p+1}^{n+p}\frac{(m+1)n+(p-m)+1}{p+2}$$

特别地，取 $m=1$，2，3，使得一、二、三乘支垛积公式

$$\sum_{r=1}^{n}C_{p}^{r+p-1}\frac{2r+p-1}{p+1}=C_{p+1}^{n+p}\frac{2n+p}{p+2}$$

$$\sum_{r=1}^{n}C_{p}^{r+p-1}\frac{3r+p-2}{p+1}=C_{p+1}^{n+p}\frac{3n+p-1}{p+2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} C_p^{r+p-1} \frac{4r+p-3}{p+1} = C_{p+1}^{n+p} \frac{4n+p-2}{p+2}$$

必须指出，各 m 乘支垛之第一垛恰好组成三角变垛，即朱世杰“岚峰”垛。但在该支垛列中，这个“岚峰”垛前还有 m 个名曰方，甲，乙，…的“准”垛，后还有第二、三、四…诸垛，朱世杰只是横向考虑了“岚峰”垛即变垛，并未纵向考虑“落一”垛即支垛，只有李善兰才明确了它们在构造上的本质区别与联系：“支垛之法，逐垛递减一层，皆从底起，自下而上；变垛之法，逐垛递减一层，皆从顶起，自上而下。”①

这张表的构成方式与前两类表不同。它没有递加性，但有递推性，因而不能累加却能累推。它的用途也与前两类表不同，它不表示垛层和垛积，而是表示已知垛积 S，根据垛积公式（19-1-1）反求高（即层数）n 时所须解方程：

$$\prod_{r=0}^{p}(n+r) = (p+1)! \cdot S$$

其中，n^r 的系数 k_r，实际上就是 $\prod_{r=0}^{p}(n+r)$ 展开式系数表，它是三角垛表即二项式 $(a+b)^p$ 展开式系数表的变种。

（二）乘方垛

1. 乘方垛表

该表仅用来表示各乘方垛诸层，不具有递加性，不能表示垛积数；也没有递推性，不能表示垛积的构造。垛积的构造和计算必须靠另表如“李氏数表”所述（图 32-3-5）。

2. 乘方垛各廉表

根据对乘方垛构造的分析，李善兰得到如下结论：$m-1$ 乘方垛系合 $m!$ 个三角 m 乘垛而成，其中自 1 层、2 层，…，m 层起的个数分别为本表中相应的横行各数。因该表系李善兰所创，故有人称它为李氏数表②，表内各数称为李氏数，为了与组合数 C_n^m 相比较，以 L_n^m 表示之。这样，造表法即可表示为递推公式：

$$L_n^m = (n+1)L_n^{m-1} + (m-n+1)L_{n-1}^{m-1}$$

同组合数的情形类似，亦须补充定义 $L_0^0=1$ 以及 $L_n^m=0$，当 $m<n$，组合数有对称性，李氏数也有；组合数有递加性和累加性，李氏数则有递推性和累推性；组合数表各横行之和：

图 32-3-5　乘方垛表

$$\sum_{k=0}^{m} L_k^m = 2^m$$

① 李善兰，垛积比类（卷四），《则古昔斋算学》。

② 章用，垛积比类疏证，科学，1939，23（11）。

李氏数表各横行之和：

$$\sum_{k=0}^{m} L_k^m = (m+1)!$$

组合数表各横行之和分别是前一行的 2 倍：

$$\left(\sum_{k=0}^{m+1} L_k^{m+1} = 2\sum_{k=0}^{m} C_k^m\right)$$

李氏数表各横行分别是前一行的本行数倍：

$$\left(\sum_{k=0}^{m+1} L_k^{m+1} = (m+1)\sum_{k=0}^{m} L_k^m\right)$$

现在撇开李氏数表不谈，回到乘方垛的构造上来，有

$$r^m = \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} C_m^{r+m-k-1}$$

于是，求乘方垛积也化为三角垛积的问题：

$$\sum_{r=1}^{n} r^m = \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} C_{m+1}^{n+m-k}$$

乘方垛各廉表见图 32-3-6。

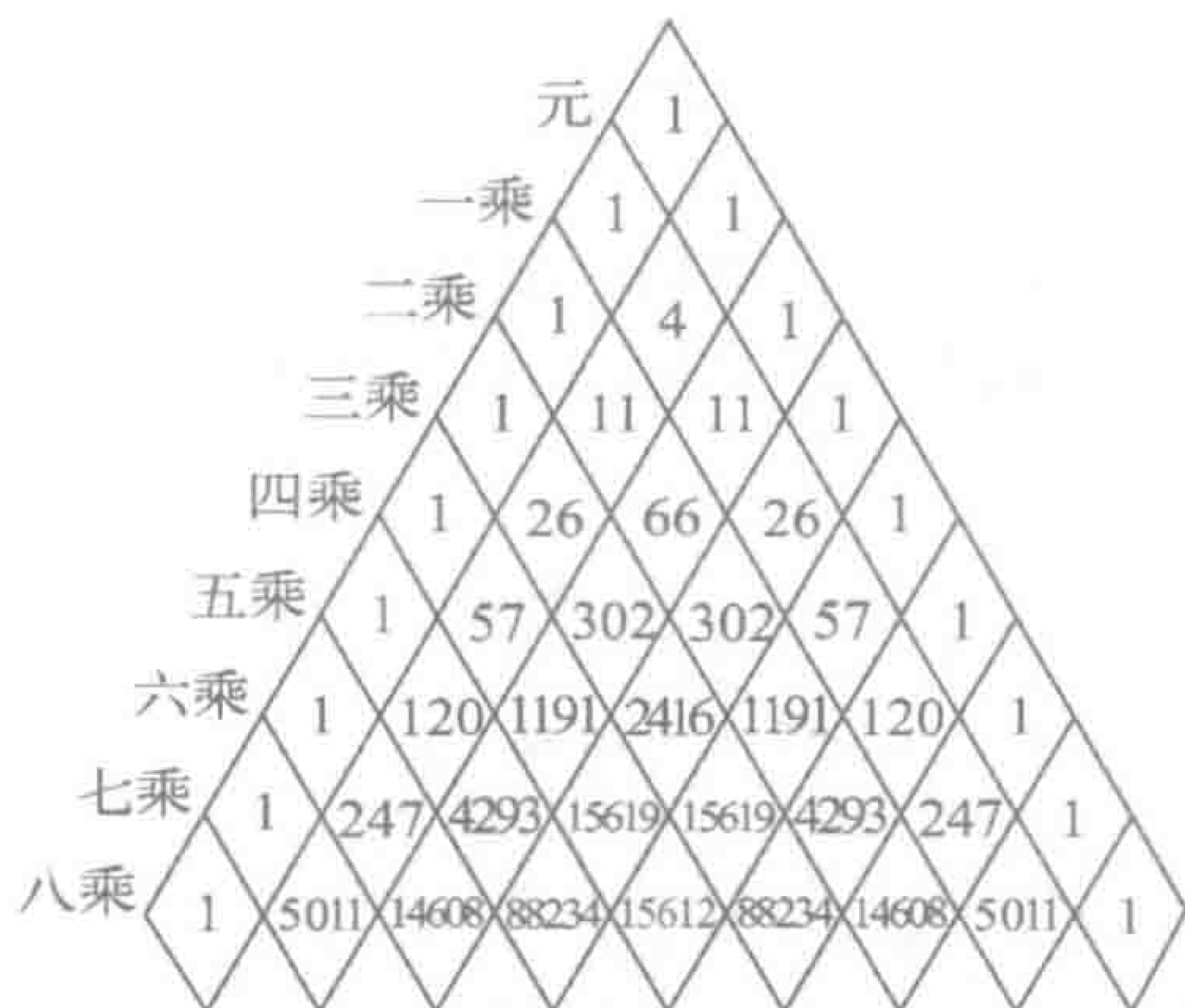


图 32-3-6　乘方垛各廉表

（三）三角自乘垛

三角自乘垛表兼有乘方表和乘方各廉表的功能：既能表示垛层，又能反映垛的构成以达到求垛积的目的。

李善兰分析了子垛①，乃是合两个三角二乘垛而成，一个自一层起，一个自二层起：

$$(C_1^r)^2 = C_2^{r+1} + C_2^r$$

丑垛合六个三角四乘垛而成，一个自一层起，四个自二层起，一个自三层起：

$$(C_2^{r+1})^2 = C_4^{r+3} + C_4^{r+2} + C_4^{r+1}$$

这些系数恰好为本表中相应的横行各数，即组合平方数，于是，便有

$$(C_p^{r+p-1})^2 = \sum_{k=0}^{p} (C_k^p)^2 C_{2p}^{r+(2p-k)-1}$$

这样，三角自乘垛积也归结为三角垛积的计算了：

$$\sum_{r=1}^{n} (C_p^{r+p-1})^2 = \sum_{k=0}^{p} (C_k^p)^2 C_{2p+1}^{n+(2p-k)} \tag{32-3-1}$$

这便是著名的李善兰恒等式和三角自乘垛积公式。

① 之所以叫子，丑，寅，卯，…，而不叫一，二，三，四，…，是因为三角 p 乘垛的自乘垛是 $2p$ 阶等差数列，而不是 $p+1$ 阶等差数列．若按自然数列序号名之，与前述阶数随垛数递次增 1 的命名法相悖，故按子、丑、寅、卯名之，此亦足见李善兰垛积体系之谨严。

对于一般的三角 k 自乘垛 $(C_p^{r+p-1})^k$ 的问题，李善兰未做进一步的研究，有人做了补充①。这样，k 乘方垛即为 $p=1$ 的 k 自乘垛，卷二即可包含于卷三之中了。

三角自乘垛表见图 32-3-7。

一层 元 1
二层 子垛 1 1
三层 丑垛 1 4 1
四层 寅垛 1 9 9 1
五层 卯垛 1 16 36 16 1
六层 辰垛 1 25 100 100 25 1
七层 巳垛 1 36 225 400 225 36 1
八层 午垛 1 49 441 1225 1225 441 49 1
九层 未垛 1 64 784 3136 4900 3136 784 64 1

图 32-3-7　三角自乘垛表

（四）三角变垛

三角变垛、再变垛、三变垛表，同乘方垛一样，都是只能表示垛层，欲求其垛积或垛积构成，须分析变垛与三角垛之间的构造关系，得出新表。李善兰没有造新表，但却得到如下以三角垛表示变垛的垛积公式：

$$\sum_{r=1}^{n} rC_p^{r+p-1} = C_{p+2}^{n+p+1} + pC_{p+2}^{n+p}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2C_p^{r+p-1} = C_{p+3}^{n+p+2} + (3p+1)C_{p+3}^{n+p+1} + p^2C_{p+3}^{n+p}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3C_p^{r+p-1} = C_{p+4}^{n+p+3} + (7p+4)C_{p+4}^{n+p+2} + (6p^2+4p+1)C_{p+4}^{n+p+1} + p^3C_{p+4}^{n+p}$$

并指出了这些公式中系数的变化规律。据此，可以列出三角 m 变垛积公式：

$$\sum_{r=1}^{n} r^mC_p^{r+p-1} = \sum_{k=0}^{m} L_k^m(p)C_{p+m+1}^{n+p+m-k}$$

其中 $L_n^m(p)=(n+1)L_n^{m-1}(p)+(m-n+p)L_{n-1}^{m-1}$ 叫做李善兰多项式②（$L_0^0(p)=1$；$L_n^m=0$，当 $m<n$）。

三角变垛即朱世杰“岚峰”垛，求积公式只是求积的途径不同而已。

综上所述，李善兰在朱世杰等的基础上，利用贾宪三角，根据需要按照不同的格式有规律地变化，创造了多种形形色色的垛积表，从而将垛科学分类（支垛与变垛），使垛积计算有方（全部归结为三角垛积的计算），并创造出李善兰恒等式（32-3-1）、李善兰数表和李善兰多项式，将我国古代传统的垛积术提高到了一个新的水平，为后人研究增广贾宪三角和垛积比类广义以及从整数论、级数论、组合数学等不同角度总结中国古代垛积术成果提供了丰富的内容。

二　夏鸾翔的垛积招差研究

（一）夏鸾翔的垛积术研究

在《洞方术图解》的“论整根递加图”中，夏鸾翔指出：“算学之递加图犹农夫之耒耜、渔人之网罟也，亦犹璇玑回文，纵横反复皆成文也。数虽至约，理则无穷。凡算法之精

① 章用，垛积比类疏证，科学，1939，23（11）。
② 章用，垛积比类疏证，科学，1939，23（11）。

深者，皆不外乎是。梅氏《少广拾遗》演为图，而未详加诠释。春池骆氏谓是图专为天元一而设，其论亦似囿一隅。盖诸乘方之廉率方隅亦只属递加数之一端，乌足尽递加数之妙乎？是图求法有斜、横、直、侧四种。自左上斜求至右下，自右上斜求至左下，曰斜行。自左横求至右，自右横求至左，曰横层。自上直求至下，曰直行。自右下斜求至左上，自左下斜求至右上，曰侧行。以上四种相为错综，算法皆有条不紊，亦数之赜而理之正者也。”①他详细讨论了贾宪三角形的性质，给出了许多恒等式。

（1）斜行求法有以下几种：

①以单一为一率，根为二率。根加一，以乘二率，二除之，得三率。根加二，以乘三率，三除之，得四率。根加三，以乘四率，四除之，得五率。此求斜行第一法也。

这里的“单一”就是数字1，将“根”记为n，依照术文，有

$$C_{n+1}^{2}=\frac{n+1}{2}C_{n}^{1},\ C_{n+2}^{3}=\frac{n+2}{3}C_{n+1}^{2},\ \cdots$$

一般地，有

$$C_{n+k}^{k+1}=\frac{n+k}{k+1}C_{n+k-1}^{k} \tag{32-3-2}$$

②以单一为一率，根为二率。根减一乘二率，二除之，加入二率，为三率。根减一乘三率，三除之，加入三率，为四率。根减一乘四率，四除之，加入四率，为五率。此求斜行第二法也。

这相当于给出了

$$C_{n+1}^{2}=C_{n}^{1}+\frac{n-1}{2}C_{n}^{1},\ C_{n+2}^{3}=C_{n+1}^{2}+\frac{n-1}{3}C_{n+1}^{2},\cdots$$

一般地，有

$$C_{n+k}^{k+1}=C_{n+k-1}^{k}+\frac{n-1}{k+1}C_{n+k-1}^{k}$$

此即式（32-3-2）。

③以后行求前行。本根之一率、二率相减，为减一根之二率。本根之二率、三率相减，为减一根之三率。本根之三率、四率相减，为减一根之四率。此求斜行第三法也。

这相当于给出公式：

$$C_{n-1}^{k}=C_{n}^{k}-C_{n-1}^{k-1} \tag{32-3-3}$$

④以前行求后行。取本根一、二率并之，为加一根之二率。取本根一、二、三率并之，为加一根之三率。取本根一、二、三、四率并之，为加一根之四率。此求斜行第四法也。

我们可将此条术文一般地表示为

$$C_{n}^{0}+C_{n+1}^{1}+C_{n+2}^{2}+\cdots+C_{n+k}^{k}=C_{n+k+1}^{k} \tag{32-3-4}$$

此式实为式（32-3-3）的推广。

① 清 · 夏鸾翔，洞方术图解，见：戴念祖主编，中国科学技术典籍通汇 · 物理卷，第一册，河南教育出版社，1993年。

（2）横层求法有以下几种：

①以单一为一率，根为二率。根减一，以乘二率，二除之，得三率。根减二，以乘三率，三除之，得四率。根减三，以乘四率，四除之，得五率。此求横层第一法也。

依照术文，有

$$C_n^2=\frac{n-1}{2}C_n^1,C_n^3=\frac{n-2}{3}C_n^2,\cdots$$

一般地，有

$$C_n^k=\frac{n-(k-1)}{k}C_n^{k-1} \quad (32\text{-}3\text{-}5)$$

②以单一为一率，根为二率。根加一乘二率，二除之，内减二率，得三率。根加一乘三率，三除之，内减三率，得四率。根加一乘四率，四除之，内减四率，得五率。此求横层第二法也。

依照术文，我们有

$$C_n^2=\frac{n+1}{2}C_n^1-C_n^1,C_n^3=\frac{n+1}{3}C_n^2-C_n^2,\cdots$$

一般地，有

$$C_n^k=\frac{n+1}{k}C_n^{k-1}-C_n^{k-1}$$

此即式（32-3-5）。

③以上层求下层。本根之一率、二率相加，为加一根之二率。本根之二率、三率相加，为加一根之三率。本根之三率、四率相加，为加一根之四率。此求横层第三法也。

这相当于给出公式：

$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$$

此即式（32-3-3）。

④以下层求上层。取本根一、二率，递减之，为减一根之二率。取本根一、二、三率，递减之，为减一根之三率。取本根一、二、三、四率，递减之，为减一根之四率。此求横第四法也。

依照术文，我们可以得到

$$C_n^1-C_n^0=C_{n-1}^1,C_n^2-(C_n^1-C_n^0)=C_{n-1}^2,\cdots$$

一般地，可以将此术以下式表示

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_n^{k-m}=C_{n-1}^k$$

此外，夏鸾翔还给出了“求斜行总数术”和“求横层总数术”的方法。

求斜行总数术曰：凡斜行，知有其根，又知有第几率，则以知率第几乘知率之数，根除之，于上。另置知率之数，根除之，以减上位。又加入所知率，即一率起至知率止之总数也。

此即

$$C_{n-1}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n+1}^{2}+\cdots+C_{n+k}^{k+1}=\frac{k+2}{n}C_{n+k}^{k+1}-\frac{1}{n}C_{n+k}^{k+1}+C_{n+k}^{k+1}$$

整理后我们发现，此即式（32-3-4）。

求横层总数术曰：根为几者，置单一加倍几次得本层总数也。

"单一加倍"也就是 $1+1=2$，设层数为 n，则有

$$C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n}^{2}+\cdots+C_{n}^{n}=2^{n}$$

上面给出的那些式子中，虽然有的两两形式相同，意义却不尽相同。夏鸾翔还指出："合观求斜行诸法与求横层诸法，其乘除之例，此加则彼减，此减则彼加。故三角堆之与廉率，如消息盈虚之不容偏废矣。"这表明夏氏发现求斜行法与求横行法的加减运算相反，并认为在这个意义上二者是互逆的。而斜行即三角垛，横行即廉率，因此三角垛与廉率二者同样重要，不可偏废。可见，夏氏对贾宪三角形的理解已经十分透彻了。

（二）用招差术造正弦、正矢表

在《洞方术图解》中，夏鸾翔还创设了一种利用招差术造正弦、正矢表的方法。设正弦表的间隔为 α 弧度，则诸角的正弦值可由

$$\sin n\alpha=n\alpha-\frac{1}{3!}(n\alpha)^{3}+\frac{1}{5!}(n\alpha)^{5}-\cdots \qquad (32\text{-}3\text{-}6)$$

求出，式中 n 为正整数。使用此法，乘除计算量很大。夏氏以招差术预先求得正弦值的逐次差，然后仅以加减计算即可造正弦表。要求出 $\sin n\alpha$ 的逐次差，首先要求的 n^{p} 的逐次差数 Δn^{p}，$\Delta^{1}n^{p}$，$\Delta^{2}n^{p}$，…，$\Delta^{p}n^{p}$。夏氏算至 $p=12$，所得结果列为"单一起根诸乘方诸较"（表 32-3-1）（仅录至 $p=7$ 时的情形）。

表 32-3-1　单一起根诸乘方诸较

Δ^{k} / D_{k}^{p} / n^{p}	Δ^{0}	Δ^{1}	Δ^{2}	Δ^{3}	Δ^{4}	Δ^{5}	Δ^{6}	Δ^{7}	…
n^{0}	1								
n^{1}	1	1							
n^{2}	1	3	2						
n^{3}	1	7	12	6					
n^{4}	1	15	50	60	24				
n^{5}	1	31	180	390	360	120			
n^{6}	1	63	602	2100	3360	2520	720		
n^{7}	1	127	1932	10206	25200	31920	20160	5040	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

记 D_{k}^{p} 为表中第 p 行第 k 个数，夏氏给出造表法为

$$D_{k}^{p}=kD_{k-1}^{p-1}+(k+1)D_{k}^{p-1}$$

由 $\{n^{p}\}$ 的逐次差容易得到

$$n^{p}=\sum_{k=0}^{p}C_{n-1}^{k}D_{k}^{p}$$

令 $p=1, 3, 5, \cdots$，得到 n，n^3，n^5，…各式，代入 $\sin n\alpha$ 的展开式中，整理，得

$$\sin n\alpha = \sum_{k=0}^{p} C_{n-1}^{k} \sum_{t=[\frac{k}{2}+1]}^{\infty} (-1)^{t+1} \frac{D_k^{2t-1}}{(2t-1)!}\alpha^{2t-1}$$

求此式的逐次差，可得“求正弦诸较术”（原作只给出前若干项）：

$$\Delta^{n-1}\sin n\alpha = \sum_{t=[\frac{n}{2}+1]}^{\infty} (-1)^{t+1} \frac{D_n^{2t-1}}{(2t-1)!}\alpha^{2t-1} \qquad (32\text{-}3\text{-}7)$$

例如，

$$\Delta^0\sin\alpha = \alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 - \frac{1}{7!}\alpha^7 + \cdots$$

$$\Delta^1\sin2\alpha = \alpha - \frac{7}{3!}\alpha^3 + \frac{31}{5!}\alpha^5 - \frac{127}{7!}\alpha^7 + \cdots$$

$$\Delta^2\sin3\alpha = -\frac{12}{3!}\alpha^3 + \frac{180}{5!}\alpha^5 - \frac{1932}{7!}\alpha^7 + \cdots$$

$$\Delta^3\sin4\alpha = -\frac{6}{3!}\alpha^3 + \frac{390}{5!}\alpha^5 - \frac{10206}{7!}\alpha^7 + \cdots$$

将这些值用招差术列出。

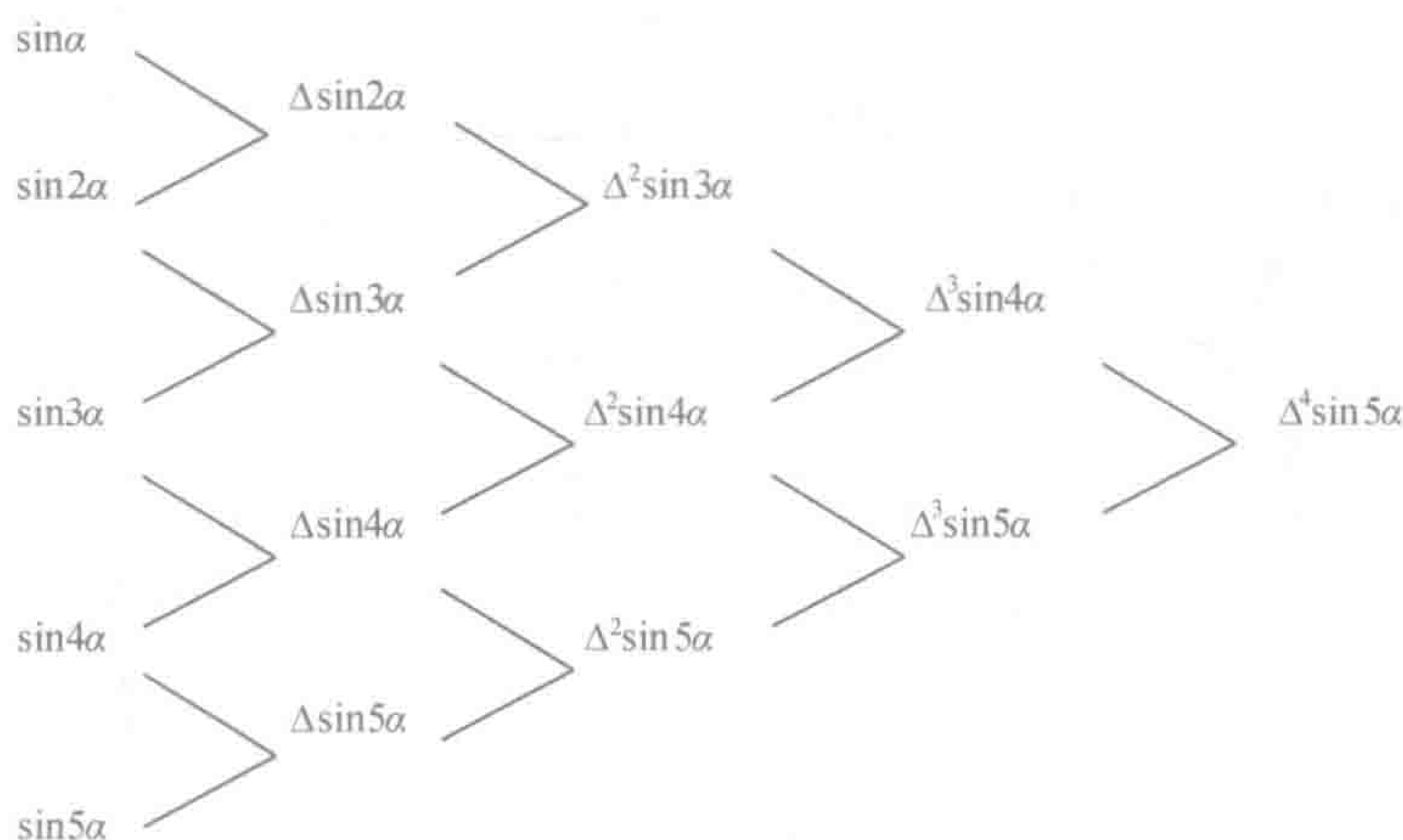


图 32-3-8　正弦诸较图

依表加减即可求出 $\sin2\alpha$，$\sin3\alpha$，…，$\sin n\alpha$ 的值。在实际计算中，式（32-3-7）只取有限几项，故 n 较大时，$\Delta^{n-1}\sin n\alpha$ 只有不多几项，这就省去了式（32-3-6）中逐项计算之繁，算法有所改进。至于因使用差分法造成的误差，夏鸾翔在书中以“补尾术”予以修正。这一点涉及插值公式的余项问题。同样的方法还可以用来造正矢表。夏鸾翔用意在算法研究，所以并未给出具体的数表。

三　刘彝程的垛积术研究

1890 年，刘彝程进一步推进了李善兰的工作，给出了两个一般三角垛乘积的求和公式。这是当时最先进的成果。他在《简易庵算稿》卷三说：

假如三角寅垛与三角卯垛相乘，求乘得之寅加卯减一垛高递减一诸倍数。设卯小于寅，法以一为一级，卯减一为二级，置二级，以卯减二乘之，二除之，为三级，置三级，以卯减三乘之，三除之，为四级，下皆如是。至卯减尽而止。列左幅。次以一为一级，寅减一为二级，乃以同理求得诸级，至与左幅同级而止。列右幅。乃以左右二幅，一级与一级，二级与二级，逐级相乘为乘得式。此乘得式，一级即寅加卯减一垛同高之倍数，二级即高减一之倍数，三级即高减二之倍数。以下类推，有此简法，则《则古昔斋》自乘诸法可废。即李君所未思及之相乘诸法亦可该。试证其理。

这段文字相当于给出算题的题目和答案。所谓三角寅垛与三角卯垛相乘，是指一个寅乘三角垛和一个卯乘三角垛逐乘相乘。刘彝程的问题是求乘得的新垛的求和公式。令寅为 p，卯为 q，二垛的高为 n，这个问题可以表述为

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(p-1)!}r(r+1)\cdots(r+p-1)\cdot\frac{1}{(q-1)!}r(r+1)\cdots(r+q-1)=?$$

刘彝程的答案为：二垛相乘所得的结果为一组阶数不同的 $p+q-1$ 乘垛的不同倍数和。刘彝程颇费笔墨地描述了这些系数。首先设 q 小于 p（乘法满足交换律，所以，令 p 小于 q 并不会使其结果失去一般性），以 1 为一级，$q-1$ 为第二级，$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ 为第三级，$\frac{1}{3\cdot 2}(q-1)(q-2)(q-3)$ 为第四级，如此递推，至 q 被减尽，列于左侧。再以 1 为 1 级，$p-1$ 为二级，然后按前面的方法求到与左侧项数相同为止。列于右侧。两侧的数字逐级相乘，得到的一组数字，第一个数字即所得的 $p+q-1$ 乘垛高为 n 的项的系数，第二个数字即 $p+q-1$ 乘垛高为 $n-1$ 的项的系数。以此类推。这相当于给出公式：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(p-1)!}r(r+1)\cdots(r+p-1)\cdot\frac{1}{(q-1)!}r(r+1)\cdots(r+q-1)$$
$$=\sum_{i=1}^{n+1}l_i^p\sum_{r=1}^{n-i+1}\frac{1}{(p+q-1)!}r(r+1)\cdots\cdots(r+p+q-3)$$

其中，$l_i^p=b_{p,i}\cdot b_{q,i}$，$i\leqslant\min(p,q)$；否则，$l_i^p=0$。

其中 $b_{p,i}$ 是贾宪三角形第 p 横行的第 i 个数字。通过证明，我们知道这个公式是正确的。[①]

此式为刘彝程数学研究中最精彩的成就之一。利用这一公式，刘彝程还给出了任意两截积乘积求和公式及一些其他的新垛公式。

刘彝程在其《简易庵算稿》中所给出的垛积运算方法也是值得史学家充分重视的。朱世杰、李善兰等都没有留下关于垛积运算方法的叙述。刘彝程则较为详细地给出了其演算步骤。他的垛积方法可称为斜线分割法。求志书院 1885 年冬季试题的第一题为：

三角平垛倒置之，与他垛逐层相乘，所得为他垛之增一乘积。

刘彝程将此题收入《简易庵算稿》。他的结果为，三角平垛倒置与任一 p 乘垛逐层相乘，所得的结果为一 $p+1$ 乘垛，即《四元玉鉴》中的撒星形垛。我们可以把刘彝程的结果整理成如下公式：

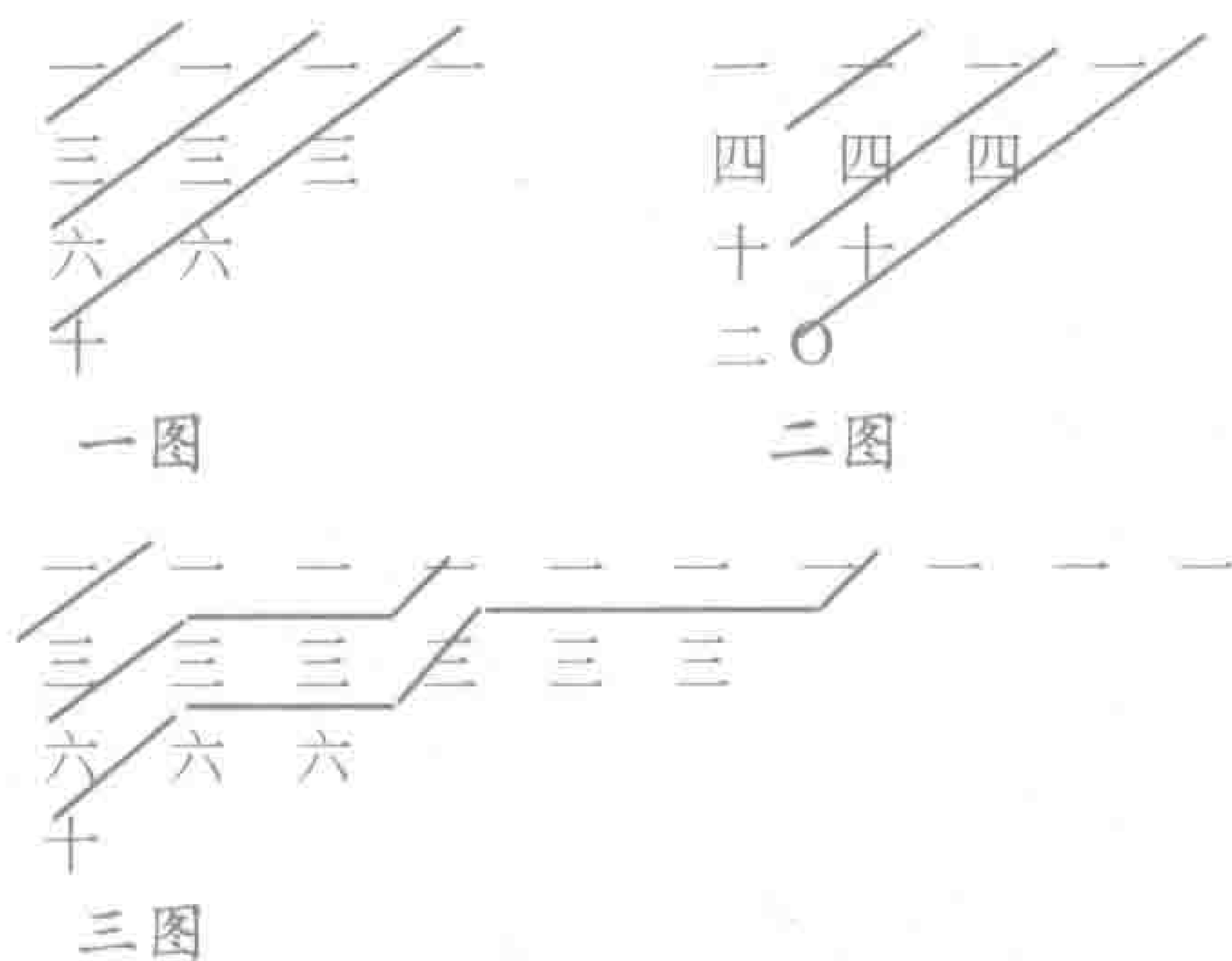
---

① 田淼，刘彝程垛积术研究，李迪主编，《数学史研究文集》第五辑，内蒙古大学出版社，九章出版社，1993 年，第 70 ~ 81 页。

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\frac{i(i+1)(i+2)\cdots(i+p-1)}{p!}=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{(p+1)!}$$

这是刘彝程新发现的一组新的垛积公式。我们更关心他得到及解释或说明该公式的方法。刘彝程《简易庵算稿》（卷二）称：

绘图明之：



设以四层之平垛倒乘立垛，如一图，倒乘三乘垛，如二图，各以斜线分之，则一图为一、四、十、二十，即三乘垛。二图为一、五、一五、三五，即四乘垛，皆为原垛之增一乘积。又以立垛倒乘立垛，如三图，以斜线分之，得各层为一、五、一五、三五。即四乘垛。亦即原立垛之增二乘积。如以立垛更与别垛倒乘，则亦依三图作斜线分之，显见有条不紊。故三图外无庸再证。

高为四的倒置平垛与立垛逐层相乘，即 $4\times1+3\times3+2\times6+1\times10$。刘彝程将其绘成一图的形状，以斜线作如图所示的划分，斜线上的每行数字各构成一个立垛，而立垛的和构成一个三乘垛。因为三角 P 乘垛的 n 阶和 $P+1$ 乘三角垛的第 n 个元。乍看之下，刘彝程所做的分割似乎匪夷所思，且没有理论根据。但经过进一步研究，我们发现，该划分可以被一般性地证明。任设三角垛的高度为 n，乘数为 P，我们以 $d_{p,i}$，$i=1$，$\cdots n$ 表示该垛的第 i 个元。倒置的平垛各数值为 n，$n-1$，$n-2$，$\cdots$，1，这样，两垛逐层相乘，便是

$$n\times d_{p,1}$$
$$(n-1)\times d_{p,2}$$
$$\vdots$$
$$1\times d_{p,n}$$

其和可以表示为：$\sum_{i=1}^{n}d_{p,i}+\sum_{i=1}^{n-1}d_{p,i}+\sum_{i=1}^{n-2}d_{p,i}+\cdots+\sum_{i=1}^{2}d_{p,i}+d_{p,1}$。这正是刘彝程划分的数学意义，这个和构成一个 $p+1$ 乘 n 阶垛。将一个未知体积的物体分解为多个已知体积公式的物体，进而推导出所求物体的体积公式，是中国传统数学中的一种常用方法。不仅如此，在《四元玉鉴》中，朱世杰正是利用斜线将一个贾宪三角形分解成三角垛的。刘彝程与李善兰素有交往，此法极有可能与李善兰的垛积运算方法是一致的。刘彝程的分割垛积的方法很有可能是中算家普遍采用的方法。

刘彝程的垛积工作是在李善兰工作的基础上进行的，并得到了较为突出的成果。不过，他虽力求详细、全面地阐述其计算和证明方式，但其对垛积公式的证明却还停留在不完全归纳法。尽管如此，其所表达的垛积运算思想却为研究垛积术的研究方法提供了宝贵的线索，

且其研究中多有独到之处，是值得表彰的。

第四节　开方术的研究

一　夏鸾翔对开方术的研究

夏鸾翔对开方术的研究体现在《少广缒凿》一书中。该书就开方术给出十四条“捷术”，获得了和牛顿程序等价的结果。其中包括“开平方捷术”两条、“开诸乘方捷术”四条和“天元开诸乘方捷术”八条。

> 开平方捷术一：小初商为一借根。以一借根除本积得二借根。并一、二借根，半之，为三借根。以三借根除本积得四借根。并三、四借根，半之，为五借根。以五借根除本积得六借根。下皆如是，求至借根小者渐大、大者渐小，与方根密合而止。

我们记本积为 A，小初商为 a（$a<x$），考虑方程 $f(x)=x^2-A=0$，$f(a)<0<f(a+1)$。又记一借根为 x_1，二借根为 x_2，…，依照术文，有

$$x_1=a,$$
$$x_2=\frac{A}{x_1}\left(=x_1-\frac{x_1^2-A}{x_1}=x_1-\frac{2f(x_1)}{f'(x_1)}\right),$$
$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}\left(=x_1-\frac{x_1^2-A}{2x_1}=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right),$$
$$x_4=\frac{A}{x_3}\left(=x_3-\frac{2f(x_3)}{f'(x_3)}\right),$$
$$x_5=\frac{x_3+x_4}{2}\left(=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}\right),$$
$$\cdots$$

一般地，我们可将其写为

$$x_1=a,$$
$$x_{2k}=\frac{A}{x_{2k-1}}\left(=x_{2k-1}-\frac{2f(x_{2k-1})}{f'(x_{2k-1})}\right),$$
$$x_{2k+1}=\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2}\left(=x_{2k-1}-\frac{f(x_{2k-1})}{f'(x_{2k-1})}\right),\quad k=1,2,\cdots$$

值得注意的是术文的最后一句：“下皆如是，求至借根小者渐大、大者渐小，与方根密合而止。”书中每条“捷术”的术文之末均有类似的话。这表明夏鸾翔已经认识到一般情况下的开方可能是一个无穷过程，所得的逐次近似值（诸借根）$x_k(k=1,2,\cdots)$ 从大、小两个方向逼近方程的根。“密合”一词表明夏氏认识到这一逼近过程是一个极限过程。

> 开诸乘方捷术一：小初商为一借根。以略大于本积之积为外积，其根为外根。以外积与外根加一之积相减，又减一，为递次除法。一借积减本积，余以除法除之，得数加一借根为二借根。二借积减本积，余以除法除之，得数加二借根为三借

根。下皆如是，求至借根渐大，与方根密合而止。或置外根降一乘积，本乘乘数加一乘之，为递次除法，更捷。

记本积为A，小初商为a，考虑方程$f(x)=x^n-A=0$（$n>2$，是正整数）。设T略大于A，且其n次方根t容易求得（即$T=t^n$），则取T为外积，t为外根（$t>x$）。令$D=(t+1)^n-t^n-1=f(t+1)-f(t)-1$为递次除法，再记$x_k$为诸借根，$x_k^n$为诸借积（$k=1,2,\cdots$），依照术文，有

$$x_1=a,$$

$$x_2=x_1+\frac{A-x_1^n}{D}\left(=x_1-\frac{f(x_1)}{D}\right),$$

$$x_3=x_2+\frac{A-x_2^n}{D}\left(=x_2-\frac{f(x_2)}{D}\right),$$

$$\cdots$$

一般地，设$f(x)=x^n-A=0$，$f(a)<0<f(t)\leqslant f\left(a+\frac{1}{2}\right)$，令$D=(t+1)^n-t^n-1$，则

$$x_1=a,$$

$$x_{k+1}=x_k+\frac{A-x_k^n}{D}\left(=x_k-\frac{f(x_k)}{D}\right),\quad k=1,2,\cdots$$

术文所述“更捷”的办法是取$(n+1)t^{n-1}$为递次除法。

开诸乘方捷术三：小初商为一借根。以略小于本积之积为内积，其根为内根。以内积与内根加一之积相减，又减一，为递次除法。一借积减本积，余以除法除之，得数加一借根为二借根。二借积内减本积，余以除法除之，得数减二借根以下逐数皆一加一减相间为三借根。下皆如是，求至借根小者渐大、大者渐小，与方根密合而止。

记本积为A，小初商为a，设$f(x)=x^n-A=0$，诸借根、借积记法如前。设T略小于A，且其n次方根为t，则取T为内积，t为内根（$a\leqslant t<x$）。令$D=(t+1)^n-t^n-1$为递次除法，依照术文，有

$$x_1=a,$$

$$x_2=x_1+\frac{A-x_1^n}{D}\left(=x_1-\frac{f(x_1)}{D}\right),$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2^n-A}{D}\left(=x_2-\frac{f(x_2)}{D}\right),$$

$$\cdots$$

$$x_{2k}=x_{2k-1}+\frac{A-x_{2k-1}^n}{D}\left(=x_{2k-1}-\frac{f(x_{2k-1})}{D}\right),$$

$$x_{2k+1}=x_{2k}-\frac{x_{2k}^n-A}{D}\left(=x_{2k}-\frac{f(x_{2k})}{D}\right),\quad k=1,2,\cdots$$

事实上，可将此术统一表示为

$$x_1=a,$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{D}, \quad k = 1,2,\cdots$$

开诸乘方捷术二与四分别和一与三基本相同，只是从“大初商”做起。因而开诸乘方的四个“捷术”道理相同，只是逐次近似值（诸借根）x_k 逼近方程的根的方向和速度不同。

“天元开诸乘方捷术”讨论一般高次方程的求根问题，其方法是“开诸乘方捷术”的推广。例如：

天元开诸乘方捷术一：小初商为一借根。以略大于本积之积为外积，其根为外根。以外积与外根加一之积相减，又减一，为递次除法。一借积凡天元借根求借积法：以借根乘隅，加减长廉，以借根乘之；加减平廉，又以借根乘之；加减立廉，又以借根乘之；至加减方后，又以借根乘之，即借积也。外根之于外积亦然。减本积，余以除法除之，得数加一借根为二借根。二借积减本积，余以除法除之，得数加二借根为三借根。下皆如是，求至借根渐大，与元数密合而止。

记本积为 A，小初商为 a，外根为 b，诸借根为 x_k，$k=1, 2, \cdots$，设

$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x - A = g(x) - A = 0$，$f(a) < 0 < f(b)$。

令 $D = g(b+1) - g(b) - 1 = f(b+1) - f(b) - 1$ 为递次除法，则

$$x_1 = a,$$

$$x_2 = x_1 + \frac{A - g(x_1)}{D}\left(= x_1 - \frac{f(x_1)}{D}\right),$$

$$x_3 = x_2 + \frac{A - g(x_2)}{D}\left(= x_2 - \frac{f(x_2)}{D}\right),$$

$$\cdots$$

一般地，有

$$x_{k+1} = x_k + \frac{A - g(x_k)}{D} = x_k - \frac{f(x_k)}{D}, \quad k = 1,2,\cdots$$

“天元开诸乘方捷术三”与此相同，只是从“大初商”算起，“捷术二”和“捷术四”都是讨论 x^n 的系数为 -1 的情形。其中，$f(x)$ 一为递增，一为递减。“捷术五”讨论 x^n 的系数不是 ± 1 的情形并给出通过改进“除法”提高逐次近似值（诸借根）x_k 的精确度的方法。“捷术六”和“捷术七”是夏鸾翔对一般高次方程迭代解法的初步探索。“捷术八”将牛顿法和秦九韶法（霍纳法）结合使用求解一个一般的一元二次方程。

开方各捷术中的递次除法 $D = f(t+1) - f(t) - 1$ 即多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x - A$ 的 $f'(t)$。①因此，我们可以认为夏氏对高次方程解法的讨论，达到了与牛顿法相同的效果。

二 华蘅芳的数根开方术与积较开方术

（一）数根开方术

华蘅芳提出的数根开方术借助素数概念给出了整系数方程有理根的求法。华氏将整系数

---

① 李俨，中算家的方程论，见：李俨，中算史论丛（第一集），中国科学院出版，1954 年，第 298 ~ 299 页。

方程依其首项系数的绝对值为1和不为1分为两类。对前一种情形分别求其正整根和负整根，对后一种情形则通过倍根变换归结为前一种情形求其整根，进而求原方程的根。其立法依据是："凡正负诸乘方式无论如何杂糅，其实之诸根中必包有元之诸根。"它的主要思想是将方程的常数项作素因子分解，从中选取方程的整根。该方法依以下四步进行。①

第一步，求根的个位数。用1，2，…，9（求负根则用-1，-2，…，-9）代入方程含x的各项计算其个位数。若此个位数与常数项的个位数互为相反数，则所代入之数为根的个位数。

第二步，求根的位数。用李锐《开方说》廉隅超步之法，"异名相步得正商之位，同名相步得负商之位。"

第三步，求可能的整根。将方程的常数项作素因子分解，从中选择满足上述两步条件的因数为可能的整根。

第四步，试根。用综合除法试除可能的整根以确定方程的根。

华蘅芳的数根开方术将素因数分解引入中国传统数学的增乘开方法中，使整系数方程有理根的求法大为简化。当方程的整根有多位数时，用正负开方术求解需反复运用综合除法作减根变换直至常数项为零，而且每次减根变换又要辅以倍根变换，运算比较复杂。华蘅芳以可能的整根作试除则使上述运算一次完成并直接得到降阶的方程。

现代求解整系数方程有理根的方法依据下列定理：

若整系数方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$（$a\neq0$）的一个有理根是$\frac{p}{q}$（$p$，$q$互素），则$p$整除$a_n$，$q$整除$a_0$。由此定理求出方程可能的有理根，经综合除法试除后即可确定方程的有理根。华氏数根开方术的原理及方法与此相当。

（二）积较开方术

在《积较术》卷一的开篇，华蘅芳就明确地阐述了"积较"的意义："积较者，列各积相较，复列各较相较，复列各较之较相较，必至无较乃止。"他还说："凡列各数，或自小而大，或自大而小，皆可。""凡求较数，其各数或以小减大，或以大减小而别以正负，俱可。"由此可知，"积较"二字的意义如下：用作动词时是"作和、作差"的意思，即进行加、减法运算；用作名词时，"较"指"较数"，即数字间进行减法运算后得到的"差"，而"积"的意义也很明确，即指列出的"各数"，它可以是方程各项的系数，也可以是代数式的值，而并不仅限于是"幂积"。②

积较的各数，都"自右向左横列之"，且"以右数减左数，书其减余之数于左下"。现以"立方之积有三次较数"为例：

125	64	27	8	1	（n^3）
61	37	19	7		（一次差）
24	18	12			（二次差）
6	6				（三次差）

---

① 李兆华，正负开方术札记二则，见：李兆华，古算今论，天津科学技术出版社，2000年，第229~236页。

② 侯钢，华蘅芳《积较术》注记，见：李兆华主编，汉字文化圈数学传统与数学教育，科学出版社，2004年，第96~103页。

对于"积较"，华蘅芳给出一个限制条件："凡求较之诸积"，"其底边之长率必为相等之数"。这也就是说，对于列出的诸数$\{f(n)\}$，n取值的间距相等。

此外，还有一条积较术的规律：

"相连之两行[①]，每以左下之数与右上之数相加，则得左上之数；每以左下之数减左上之数，则得右上之数。"又由于"末次之较数各行必相同"，所以"有任一行之数，可求得其左右各行之数"。

华蘅芳用此算律求方程的根，兹以卷一的一个例子来说明。

如有平方式$x^2+3x-18=0$，欲求其元之各同数，则用商0之余实-18，商1之余实-14，商2之余实-8，求其左右各行之数。

0	[-8]	[-14]	[-18]	-20	-20	-18	-14	-8	0
8	[6]	[4]	2	0	-2	-4	-6	-8	-10
2	[2]	2	2	2	2	2	2	2	2
左3行	左2行	左1行	首行	右1行	右2行	右3行	右4行	右5行	右6行

至左3行、右6行其积皆为0，则知其元之正同数为3，负同数为6。

华蘅芳的方法是将$f(0)=-18$，$f(1)=-14$，$f(2)=-8$三数列出，按照积较算律计算（表中数字用□标出），得到两个一次差$f(1)-f(0)=4$和$f(2)-f(1)=6$，一个二次差$6-4=2$。由于"凡较数之次数，恒如其方之指数"，而此方程的最高次项是二次项，所以只求两次较数（作两次差）即可，故知此积较表各行的二次差都是2，则依积较算律可将表中其余数字都计算出来。由$f(3)=0$，知$x=3$是方程的一个根，由于此方程的实（常数项）是负数，知道方程还有一个负数根，所以算至左3行即停止向左计算转而向右计算，直至求得另一个根$x=-6$。

华蘅芳用积较术求方程的根的方法在理论上对于所有的整系数一元高次方程都是适用的，但是有其弊端。华蘅芳自己说："用以上之法以求左右各行之数，必依次而得。若求至数十、百行，则不胜其繁。"所以他要"必设一法可径求其第某行之各数乃适于用"。他列出如表32-4-1所示的一幅积较表，并给出公式。

表32-4-1　积较表

a_n	…	a_3	a_2	a_1	a	a_{-1}	a_{-2}	a_{-3}	…	a_{-n}
b_n	…	b_3	b_2	b_1	b	b_{-1}	b_{-2}	b_{-3}	…	b_{-n}
c_n	…	c_3	c_2	c_1	c	c_{-1}	c_{-2}	c_{-3}	…	c_{-n}
d_n	…	d_3	d_2	d_1	d	d_{-1}	d_{-2}	d_{-3}	…	d_{-n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
左n行	…	左3行	左2行	左1行	首行	右1行	右2行	右3行	…	右n行

① 古时"行"、"列"的概念与今相反。

$$a_n=a+nb+\frac{n(n+1)}{2}c+\frac{n(n+1)(n+2)}{2\times 3}d+\cdots$$
$$b_n=b+nc+\frac{n(n+1)}{2}d+\frac{n(n+1)(n+2)}{2\times 3}e+\cdots$$
$$c_n=c+nd+\frac{n(n+1)}{2}e+\frac{n(n+1)(n+2)}{2\times 3}f+\cdots$$
$$d_n=d+ne+\frac{n(n+1)}{2}f+\frac{n(n+1)(n+2)}{2\times 3}g+\cdots$$

各至含末较之项而止

⋮　⋮

至末较而止　初项为末较

华蘅芳言明“用此式之法求左行则 n 令为正数，求右行则 n 令为负数”，并计算了 a_{-n}，a_{-2n}，a_{-3n}，a_{-4n}，…的值，且令

$$A=a$$
$$B=a-a_{-n}$$
$$C=a-2a_{-n}+a_{-2n}$$
$$D=a-3a_{-n}+3a_{-2n}-a_{-3n}$$
$$E=a-4a_{-n}+6a_{-2n}-4a_{-3n}+a_{-4n}$$
$$\vdots$$

进而计算出：

$$A=a$$
$$B=nb-\frac{n^2-n}{2}c+\frac{n^3-3n^2+2n}{2\times 3}d-\frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{2\times 3\times 4}e+\cdots$$
$$C=n^2c-\frac{6n^3-6n^2}{2\times 3}d+\frac{14n^4-36n^3+22n^2}{2\times 3\times 4}e-\cdots \qquad (32\text{-}4\text{-}1)$$
$$D=n^3d-\frac{36n^4-36n^3}{2\times 3\times 4}e+\cdots$$
$$E=n^4e-\cdots$$
$$\vdots$$

华氏给出式（32-4-1）后，因其中的 n 可以取不同的值，这就改变了行距，去掉了“求左右各行之数，必依次而得”的限制，简化了计算。下面以卷一第三题为例阐明华蘅芳的方法。

有平方式 $x^2-39x-172=0$，求其元之两同数，则用商 0 之余实 -172，商 10 之余实 -462，商 20 之余实 -552，求其各行（表 32-4-2）。

表 32-4-2　间距为 10 的积较表

378	-132	-442	-552	-462	-172	$f(x)$
510	310	110	-90	-290	-490	
200	200	200	200	200	200	
50	40	30	20	10	0	x（边数）

由 f（40）<0 而 f（50）>0，知道方程有根介于 40 和 50 之间，此时就需要将 x 的取值间距从 10 缩小为 1。于是在式（32-4-1）中，令 $n=\frac{1}{10}$，且取 $a=-132$，$b=310$，$c=200$，得到 $A=-132$，$B=40$，$C=2$，用这三个数作为第 40 行，求间距为 1 的其余各行（表 32-4-3）。

表 32-4-3　间距为 1 的积较表

0	-46	-90	-132	f（x）
46	44	42	40	
2	2	2	2	
43	42	41	40	x（边数）

因为 f（43）=0，所以方程的一个根是 43，那么方程的另一个根是负根。在式（32-4-1）中，令 $n=-\frac{1}{10}$，且取 $a=-172$，$b=-490$，$c=200$，得到 $A=-172$，$B=38$，$C=2$，用这三个数作为第 0 行，求间距为 -1 的其余各行（表 32-4-4）。

表 32-4-4　间距为 -1 的积较表

0	-46	-90	-132	-172	f（x）
46	44	42	40	38	
2	2	2	2	2	
-4	-3	-2	-1	0	x（边数）

由此积较表可知方程的另一个根是 $x=-4$。

虽然用式（32-4-1）可以改变 x 取值的间距，但是在方程的次数高、系数大的情况下，这样仅由诸 f（x）的值依积较算律通过累次求差计算方程的根还是很麻烦的，因而华蘅芳在《积较术》卷二中构造了“诸乘方正元积较表”和“诸乘方负元积较表”，通过用方程的各项系数“乘表相加”的算法可以直接求出积较表中边数为 0 的一列并且控制 x 取值的间距，这就简化了计算。在求出方程的一个根后，为了求方程其余的根，华氏还给出了“积较减层表”和“积较还原表”，用来求减层积较和降阶方程。由于本部分内容主要讨论以积较术为工具求解整系数一元高次方程的方法，对这些数表的构造和相关理论的探讨此处从略。

第五节　对圆锥曲线和微积分的研究

圆锥曲线是在明末清初传入中国，与当时的历法改革有很大关系，其中又以椭圆知识为主，从数学角度而言，主要是椭圆基本定理、面积公式以及椭圆切线定理。同时也只有椭圆知识得到中算家的重视，研究较为深入。清末在这方面的研究突出表现在两个方面：圆锥曲

线作图与轨迹问题和二次曲线求积问题。前一问题反映出当时对综合几何的研究和把握，后一问题则反映出当时数学家对微积分的早期的理解与运用。

一　圆锥曲线作图

（一）李善兰的圆锥曲线作图

李善兰有关椭圆的著作有三部，分别为《椭圆正术解》、《椭圆新术》和《椭圆拾遗》（均收入《则古昔斋算学》）。其中，《椭圆拾遗》卷二共9款，讨论9个求焦点位置的作图问题。这些问题均为已知椭圆的一个焦点及其他一些条件，用尺规作图（或不完全尺规作图）的方法求作另一个焦点。并且李善兰在每个作图之后均简要讨论了已知曲线为抛物线和双曲线的情形，因此，实际上他给出了已知圆锥曲线的一个焦点及其他一些条件，用尺规作图的方法求作另一个焦点的问题，并给出了证明。解决这类问题，需要综合应用圆锥曲线及其切线的性质以及几何作图方面的知识。可以说，李善兰是研究圆锥曲线作图问题的第一位中算家。[①] 这9个作图题依次为：

（1）有一心，有最卑点，有椭圆周一点，求余一心；
（2）有一心，有最高点，有椭圆周一点，求余一心；
（3）有一心，有椭圆周二点，其一点并知切线，求余一心；
（4）有一心，有椭圆周三点，求余一心；
（5）有一心，有最卑点，有椭圆周的一切线，不知切点，求余一心；
（6）有一心，有最高点，有椭圆周的一切线，不知切点，求余一心；
（7）有一心，椭圆周三切线俱不知切点，求余一心；
（8）有一心，有椭圆周一点，有二切线，俱不知切点，求余一心；
（9）有一心，有椭圆周二点，有一切线，不知切点，求余一心。

其中，“心”指的是焦点；“最卑点”指的是离焦点最近的点，如相对于左焦点的最卑点是长轴的左端点；“最高点”指的是离焦点最远的点。

兹以第1题为例说明李善兰的作图方法。此题是已知椭圆一焦点 F_1、距 F_1 最近的点 A 以及另外一点 P，求作另一焦点 F_2。

李氏的做法如图32-5-1所示，连结 AF_1 和 PF_1，并过 P 作 $PD\perp AF_1$ 的延长线于 D，由有比例式[②]

$$\frac{PD-(PF_1-AF_1)}{PF_1-AF_1}=\frac{2AF_1}{2c}\left(=\frac{2a-2c}{2c}\right)$$

于是可以做出 $2c$（c 为椭圆的焦半径，a 为椭圆半长轴），这样 F_2 就确定了。

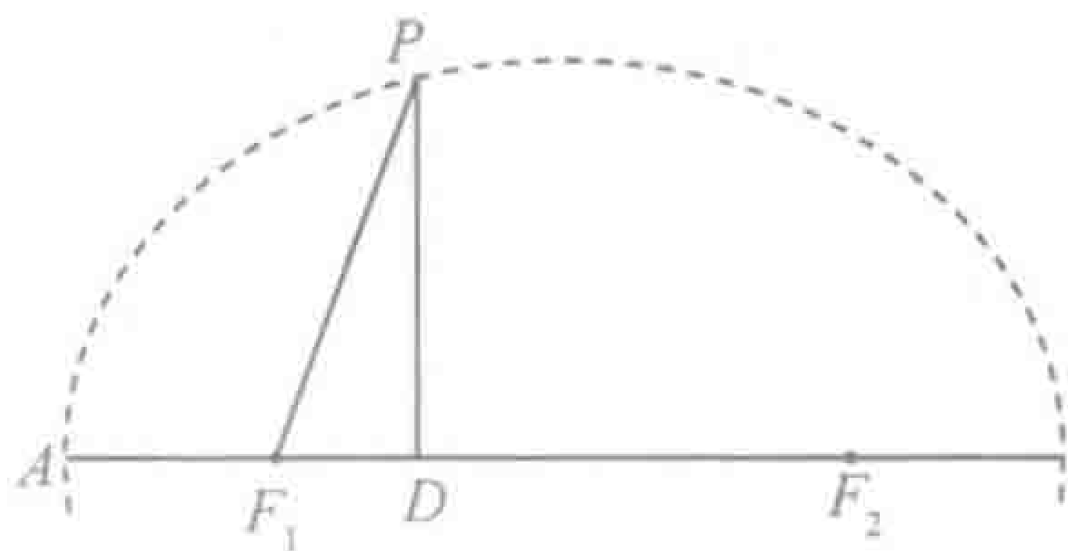


图32-5-1　求椭圆焦点图

同时，李善兰指出“若卑径较与矢相等，则为抛物

① 冯立昇，牛亚华，李善兰对椭圆及其应用问题的研究，李迪主编，《数学史研究文集》，第三辑，内蒙古大学出版社、九章出版社，1992年。

② 该结论为李善兰《椭圆拾遗》卷1第14款结论的推论。

线；卑径较大于矢，则为双曲线”，即如果 $PF_1 - AF_1 = AD$，则表明原曲线为抛物线；如果 $PF_1 - AF_1 > AD$，则表明原曲线为双曲线。此即表明李善兰实际给出已知任一圆锥曲线一焦点、一卑点和其他任一点，求作另一焦点的做法。

李善兰主要利用圆锥曲线向径与轴之间的关系以及切线性质行进作图。

（二）杨兆鋆的圆锥曲线作图

杨兆鋆对圆锥曲线焦点作图也有研究，他是李善兰任京师同文馆算学教习时的学生。杨兆鋆在其《须曼精庐算学》卷一“椭曲同诠”中讨论了4个求椭圆焦点的作图问题，李善兰《椭圆拾遗》卷二均有讨论，但在具体的做法上，杨兆鋆有些创新。

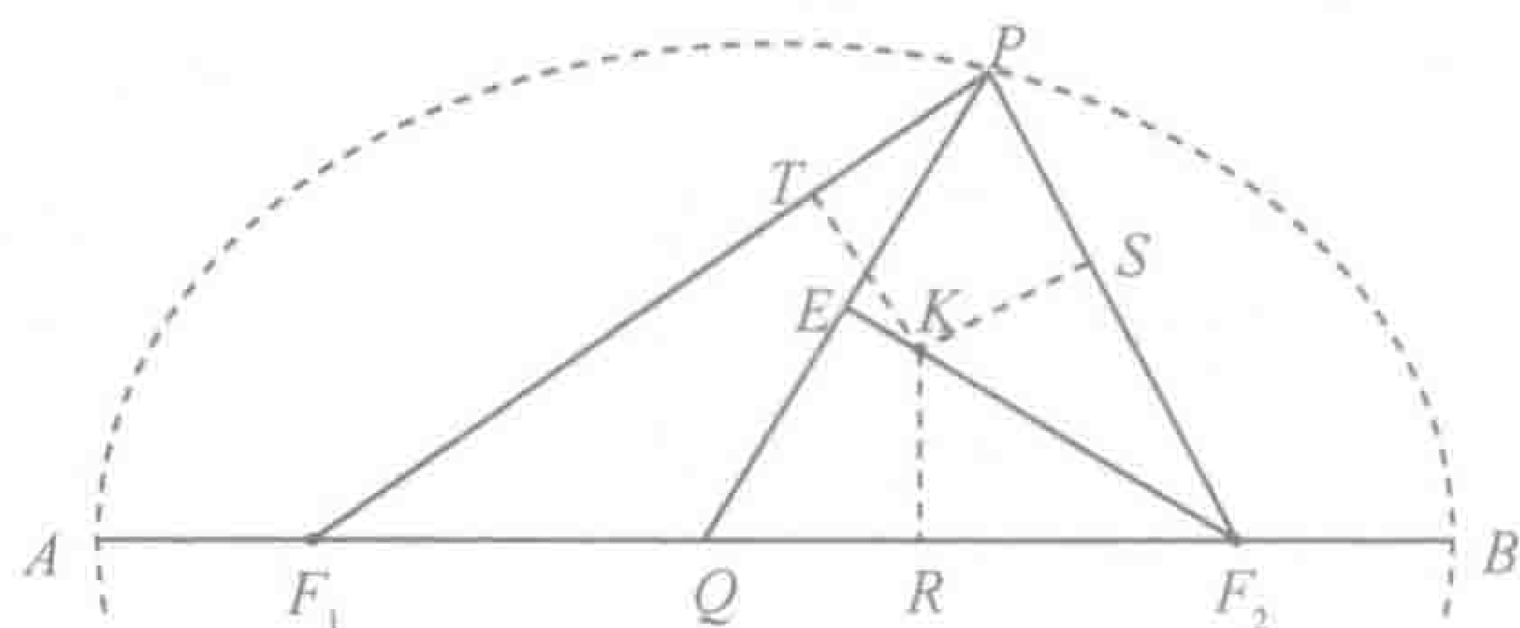


图 32-5-2

如卷一第9题：椭圆有最卑点（A）（及一心（F_1）），有周上任一点（P），求余一心（F_2），其法若何。该题与李善兰论述的9题的第1题同，杨兆鋆的做法更为简洁（图32-5-2）。

（1）在 AF_1 的延长线上取点 Q，使得 $AQ = F_1P - F_1A$；

（2）连结 PQ，作 PQ 的垂直平分线交 AF_1 的延长线于点 F_2。点 F_2 即所求。

他还研究了6个求作双曲线焦点的问题，题目如下：

双线有一心，有最近点，有曲线上一点，求余一心，其法若何。

双线有一心，有曲线上二点，其一点并知切线，求余一心，其法若何。

双线有本面心，有三切线，俱不知切点，求对面心，其法若何。

双线有对面心，有本面三切线，不知切点，求本面心，其法若何。

双线有最高点，有本心，有本周上一点，求外心，其法若何。

双线有最卑点，有本心，有本周上一点，求外心，其法若何。

其中，“本面心”指的是与某一支双曲线对应的焦点，“对面心”指的是相对某一支双曲线另一支的焦点。

这6个作图题主要应用《圆锥曲线说》“双曲线”第五款“自二心作二线交于曲线界，二线之较与长径等”（即双曲线上点到两焦点的距离差的绝对值等于实轴长）和第九款“二心至切点作二线，与切线之交角必相等”（即双曲线两焦点与切点的连线与切线的两夹角相等）作图。这些问题在李善兰作图时均有所讨论，杨兆鋆给出了具体的做法，在此不详细论述。杨兆鋆对圆锥曲线焦点作图的研究在一定程度上也反映出京师同文馆的数学教学成果。

二　二次曲线求积问题

所谓二次曲线求积问题指的是二次曲线的周长或弧长、与轴围成的面积或部分面积、绕轴旋转体表面积或部分表面积、体积或部分体积等的求法。这一问题涉及微积分等高等数学知识。清末在这方面的成果突出有两项：椭圆轨道运动算法和椭圆、双曲线弧长算法。

（一）椭圆轨道运动算法

椭圆轨道运动问题是历法中有关太阳运动的算法，包括两方面。一方面是从实际观测得到的太阳离开轨道近地点的距离（真近点角，称为“实行”）算出太阳轨道向径扫过的椭圆面积，由此算出按平均运动计算的所谓平均近点角（称为“平行”），即“以角求积术”。另一方面则是通过平均运动推求在给定时刻的太阳的观测位置，即“以积求角术”。自从《历象考成后编》（1742）刊刻开始，清代数学家对这个问题进行了持久的研究，其中以李善兰的研究最为深刻。

如图 32-5-3 所示，设椭圆 ACB 长半轴 $OA=a$，短半轴为 $OC=b$，F_1、F_2 为两焦点，焦距为 $2c$，偏心率为 $e=\frac{c}{a}$。P 为椭圆上一点，$\angle AF_1P=\theta$ 称为“实引角”。在椭圆上找到一点 P'，将椭圆向径 F_1P（记为 r）扫过的面积 S_{AF_1P} 转化成椭圆扇面积 $S_{AOP'}$，即使 $S_{AOP'}=S_{AF_1P}$。过 P、P' 作长轴的垂线 QD、$Q'D'$，得到它们在大辅圆⊙O（a）上的对应点 Q、Q'，则 $\angle AOQ$ 称为“借积角”，$\angle AOQ'$ 称为“平引角”，分别对应现今的偏近点角 E 和平均近点角 M。面积 S_{AF_1Q} 称为平引面积。由椭圆基本定理，有 $S_{AF_1Q}=\frac{a}{b}S_{AF_1P}=\frac{a}{b}S_{AOP'}=S_{AOQ'}$。不难得到

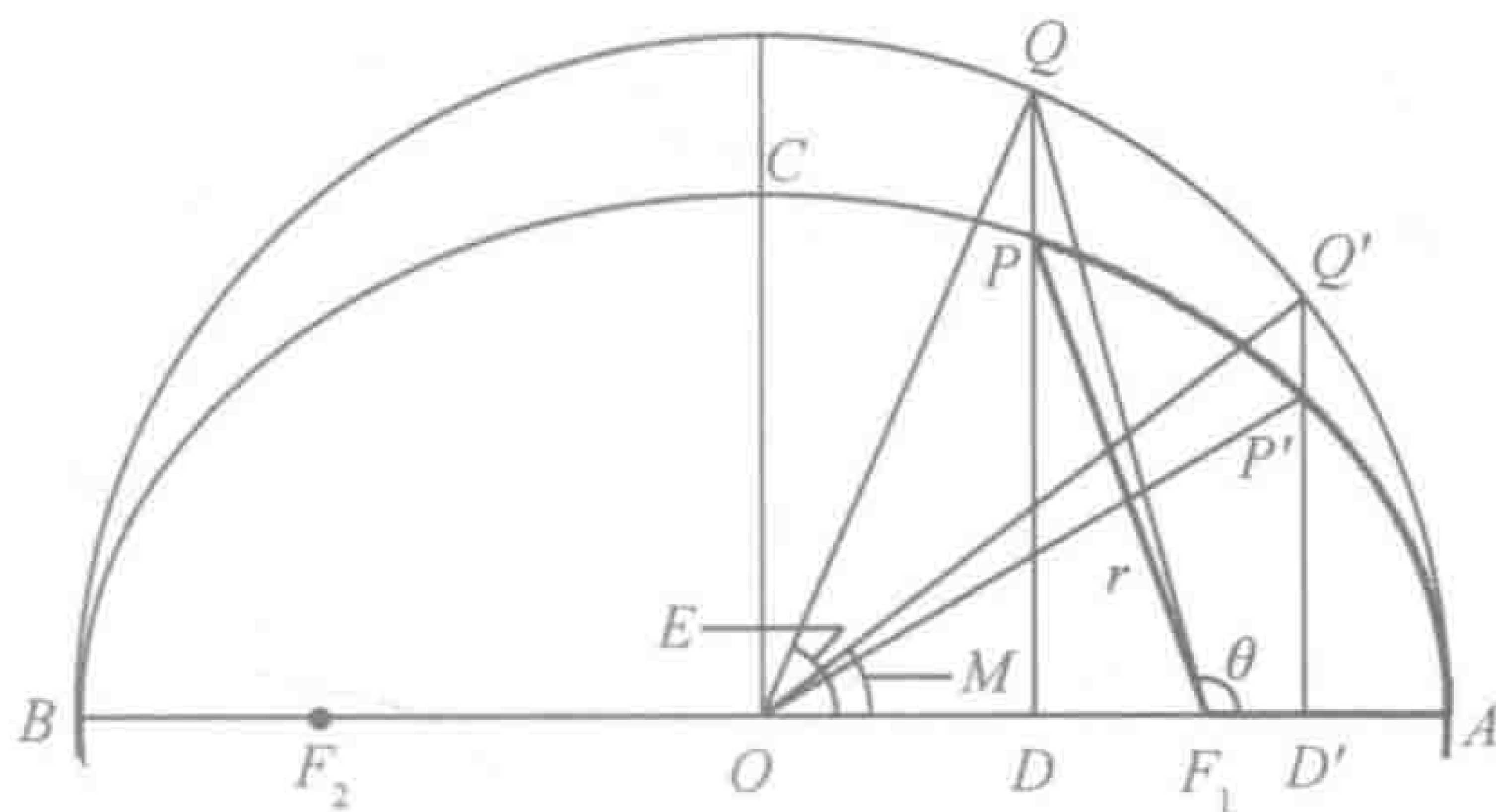


图 32-5-3

$$M=E-e\sin E \qquad (32\text{-}5\text{-}1)$$

此即开普勒方程。《历象考成后编》、徐有壬、李善兰均得到式（32-5-1）。

以角求积术就是已知实引角 θ 求平引角 M，以积求角术就是已知平引角求实引角。由于实引角 θ 与借积角 E 之间的关系比较明显，所以这两术实际上是开普勒方程——式（32-5-1）的推导及其求解问题。清代数学家多采用综合几何的方法得到式（32-5-1），可是由式（32-5-1）是超越方程，李善兰之前的数学家大都采用初等方法进行近似求解 E。①

李善兰《椭圆新术》给出了开普勒方程式（32-5-1）关于 E 对 M 的级数解析式：

$$\begin{aligned}E=M&+(e+e^2+e^3+\cdots)M-(e+4e^2+10e^3+20e^4+35e^5+\cdots)\frac{M^3}{3!}\\&+(e+16e^2+91e^3+336e^4+966e^5+\cdots)\frac{M^5}{5!}\\&-(e+64e^2+820e^3+5440e^4+2,4970e^5+\cdots)\frac{M^7}{7!}+\cdots\end{aligned} \qquad (32\text{-}5\text{-}2)$$

这在中国数学史和天文学史上均属开创性的成果。李善兰得到式（32-5-2）的过程简述如下。

《椭圆拾遗》第十四款运用综合几何的方法得到椭圆向径 r 与平引角 E 之间的关系式：

$$r=a-c+c\cdot\mathrm{vers}E \qquad (32\text{-}5\text{-}3)$$

① 薄树人，清代对开普勒方程的研究，见：中国天文学史文集（第3集），科学出版社，1984年。

进而得到向径 r 关于借积角 E 的级数表达式：

$$r = a - c + \frac{c \cdot E^2}{2!} - \frac{c \cdot E^4}{4!} + \frac{c \cdot E^6}{6!} - \frac{c \cdot E^8}{8!} + \cdots \quad (32\text{-}5\text{-}4)$$

在式（32-5-4）的基础上，李氏得到平引面积 S_{AF_1Q} 的微分表达式。

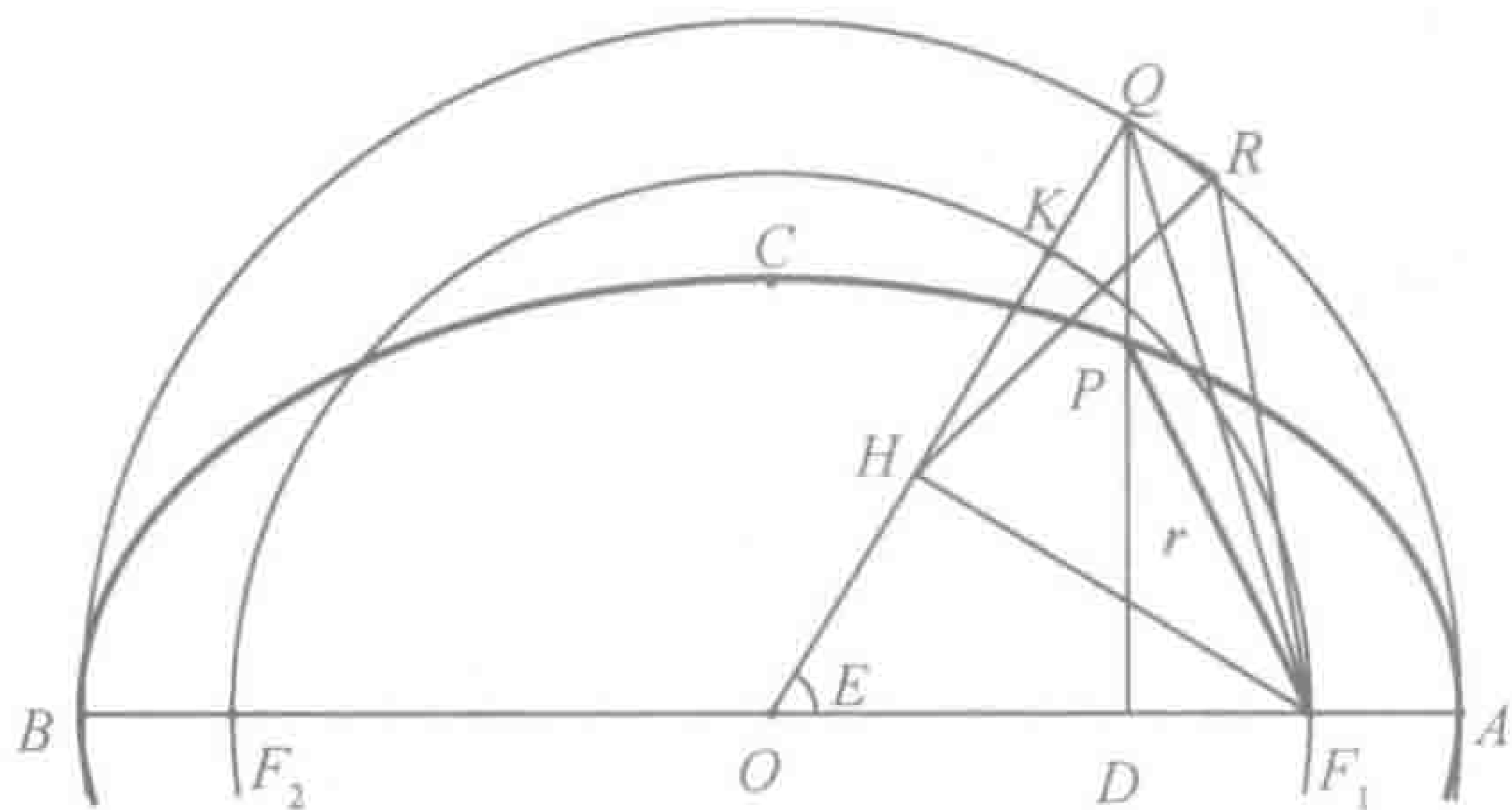


图 32-5-4

如图 32-5-4 所示，QR 为椭圆大辅圆⊙O（OA）上过 Q 点的切线，过 F_1 作 $F_1H \perp OQ$ 交 OQ 于 H 点，则 $QR // F_1H$。若 QR“渐小变为点，则切线、弧线合二为一”，此时平引面积 S_{AF_1Q} 为“无数细三角所积而成”。即

$$QR \to 0 \text{ 时}, S_{AF_1Q} = \int S_{\triangle QRF_1}$$

或

$$S_{\triangle QRF_1} = \mathrm{d}S_{AF_1Q}$$

又△QRH，△QRF_1 为同底等高的两个等积三角形。所以 $S_{\triangle QRH} = S_{\triangle AF_1Q}$。因为 $QR \to 0$ 时，“切线、弧线合二为一”，即 QR 与它在大圆上对应的弧长相等，故

$$\mathrm{d}S_{AF_1Q} = S_{\triangle QRH} = \frac{1}{2}QH \cdot QR = \frac{1}{2}QH \cdot a \cdot \mathrm{d}E = \frac{a}{2} \cdot QH \cdot \mathrm{d}E$$

式中，$\frac{a}{2}$是常数，则认为 QH 是“平引面积微分”。

在图 32-5-4 中，$KH = c \cdot \mathrm{vers}E$，$QH = (a - c) + c \cdot \mathrm{vers}E$，结合式（32-5-3）可得 $QH = F_1P = r$。所以 $\mathrm{d}S_{AF_1Q} = \frac{a}{2} \cdot r\mathrm{d}E$，故

$$\mathrm{d}S_{AF_1Q} = \frac{a}{2}\left(a - c + \frac{c \cdot E^2}{2!} - \frac{c \cdot E^4}{4!} + \frac{c \cdot E^6}{6!} - \frac{c \cdot E^8}{8!} + \cdots\right)\mathrm{d}E \quad (32\text{-}5\text{-}5)$$

由式（32-5-5）得

$$\begin{aligned} S_{AF_1Q} &= \frac{a}{2}\int_0^E \left(a - c + \frac{c \cdot E^2}{2!} - \frac{c \cdot E^4}{4!} + \frac{c \cdot E^6}{6!} - \frac{c \cdot E^8}{8!} + \cdots\right)\mathrm{d}E \\ &= \frac{a}{2}\left[(a - c)E + \frac{c \cdot E^3}{3!} - \frac{c \cdot E^5}{5!} + \frac{c \cdot E^7}{7!} - \frac{c \cdot E^9}{9!} + \cdots\right] \end{aligned} \quad (32\text{-}5\text{-}6)$$

又因为 $S_{AF_1Q} = S_{AOP'} = \frac{1}{2}a^2M$，结合式（32-5-6）便得到平引角（$M$）关于借积角（$E$）级数展开式：

$$M = (1 - e)E + \frac{e \cdot E^3}{3!} - \frac{e \cdot E^5}{5!} + \frac{e \cdot E^7}{7!} - \frac{e \cdot E^9}{9!} + \cdots \quad (32\text{-}5\text{-}7)$$

由式（32-5-7）运用级数回求术得到借积角 E 的关于平引角 M 的级数展开式——式（32-5-2）。

此外，李善兰还得到椭圆极坐标方程

$$r = \frac{b^2}{a + c - c \cdot \mathrm{vers}\theta} = \frac{b^2}{a + c \cdot \cos\theta}$$

的级数展开式

$$r=(a-c)\left\{1+\left(\frac{c}{a+c}\right)\frac{\theta^2}{2!}+\left[6\left(\frac{c}{a+c}\right)^2-\left(\frac{c}{a+c}\right)\right]\frac{\theta^4}{4!}\right.$$
$$+\left[90\left(\frac{c}{a+c}\right)^3-30\left(\frac{c}{a+c}\right)^2+\left(\frac{c}{a+c}\right)\right]\frac{\theta^6}{6!}$$
$$+\left[2520\left(\frac{c}{a+c}\right)^4-1260\left(\frac{c}{a+c}\right)^3+126\left(\frac{c}{a+c}\right)^2-\left(\frac{c}{a+c}\right)\right]\frac{\theta^8}{8!}$$
$$\left.+\left[113400\left(\frac{c}{a+c}\right)^5-75600\left(\frac{c}{a+c}\right)^4+13230\left(\frac{c}{a+c}\right)^3-510\left(\frac{c}{a+c}\right)^2+\left(\frac{c}{a+c}\right)\right]\frac{\theta^{10}}{10!}+\cdots\right\} \tag{32-5-8}$$

由式（32-5-8），李善兰认为椭圆向径扫过的面积微分 $dS_{AF_1P}=\frac{1}{2}r^2d\theta$。又因为 $S_{AF_1P}=\frac{ab}{2}\cdot M$，故

$$dM=\frac{1}{ab}\cdot r^2d\theta$$

所以 $M=\frac{1}{ab}\int_0^\theta r^2d\theta$，将式（32-5-8）代入，积分得平引角 M 关于实引角 θ 的级数展开式

$$M=\frac{(a-c)^2}{ab}\left\{1+2\times\left(\frac{c}{a+c}\right)\frac{\theta^3}{3!}+\left[3\times6\left(\frac{c}{a+c}\right)^2-2\times\left(\frac{c}{a+c}\right)\right]\frac{\theta^5}{5!}\right.$$
$$+\left[4\times90\left(\frac{c}{a+c}\right)^3-3\times30\left(\frac{c}{a+c}\right)^2+2\times\left(\frac{c}{a+c}\right)\right]\frac{\theta^7}{7!}$$
$$+\left[5\times2520\left(\frac{c}{a+c}\right)^4-4\times1260\left(\frac{c}{a+c}\right)^3+3\times126\left(\frac{c}{a+c}\right)^2-2\times\left(\frac{c}{a+c}\right)\right]\frac{\theta^9}{9!}$$
$$+\left[6\times113400\left(\frac{c}{a+c}\right)^5-5\times75600\left(\frac{c}{a+c}\right)^4+4\times13230\left(\frac{c}{a+c}\right)^3-3\times510\left(\frac{c}{a+c}\right)^2\right.$$
$$\left.\left.+2\times\left(\frac{c}{a+c}\right)\right]\frac{\theta^{11}}{11!}+\cdots\right\} \tag{32-5-9}$$

椭圆轨道运动问题实质是椭圆部分面积的计算，涉及微积分方法的运用，椭圆的向径与实引角之间的关系是这个问题的基本关系式。依据《代微积拾级》，这个问题完全可以直接按照微积分的方法得到椭圆向径扫过面积：

$$S_{AF_1P}=\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta\left(\frac{b^2}{a+c\cdot\cos\theta}\right)^2d\theta$$

可是从上文的分析可以看出，虽然李善兰在解答过程中提到“微分”与“积分”，但他的基本方法是先得到某个量 y 的微分关于另外一个量 x 的级数解析式 $dy=\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i\right)dx$，这个级数依据割圆连比例法得到。然后，逐项积分得到 y 关于 x 的幂级数表达式 $y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{i+1}x^{i+1}$，最后运用垛积术与级数回求法得到 x 关于 y 的幂级数表达式。他将微分术等同于幂级数展开式的求法，而幂级数展开式的求法则秉承董祐诚割圆连比例术和级数回求法，并不求助于《代微积拾级》中的泰勒公式和麦克劳林公式。[①]

① 高红成，李善兰对微积分的理解和运用，中国科技史杂志，2009，30（2）。

（二）椭圆求周

椭圆求周问题由董祐诚首次提出并设法探讨，但立术有误。项名达《象数一原》卷六另予讨论，所得结果正确。戴煦所补卷七为之图解，又增一术。项名达、戴煦分别以椭圆的大辅圆和小辅圆立算基本思想相同而所用开方术有别。

设椭圆长半轴为 a，短半轴为 b，周长为 p，则项名达所给椭圆周长可表为

$$p = 2\pi a\left(1 - \frac{1^2}{2^2}e^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2}e^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}e^6 - \cdots\right) \qquad (32\text{-}5\text{-}10)$$

依戴氏的图解，该式主要推导步骤可简述如下。①

如图 32-5-5 所示，椭弧$\widehat{AB}$为象限椭圆周，$\widehat{AB'}$为其对应的象限大辅圆，将$\widehat{AB'}$ n 等分，Q_0（A），Q_1，Q_2，…，Q_i，Q_{i+1}，…，Q_{n-1}，Q_n（B'）为分点，一分大圆弧$\widehat{Q_iQ_{i+1}}$对应的弦长为 Q_iQ_{i+1}，记为 $l_{\frac{1}{n}}$。过点 Q_i（$i=1，2，…，n-1$）作长轴的垂线交椭圆于点 P_i，垂足为 K_i（$i=1，2，…，n-1$），则相应得到与 Q_iQ_{i+1}对应的椭圆弦长 P_iP_{i+1}。过点 P_i，Q_i 分别作 $P_{i+1}Q_{i+1}$的垂线，垂足分别为点 M_{i+1}、R_{i+1}，在 $R_{i+1}Q_{i+1}$上取点 N_{i+1}使得 $R_{i+1}N_{i+1} = M_{i+1}P_{i+1}$。为书写简便，记 Q_iQ_{i+1}为 Z_i（$=l_{\frac{1}{n}}$），P_iP_{i+1}为 z_i，$R_{i+1}Q_{i+1}$为 X_i，$R_{i+1}N_{i+1}$为 x_i，Q_iR_{i+1}为 Y_i，$\angle R_{i+1}Q_iQ_{i+1}$为 θ_i。

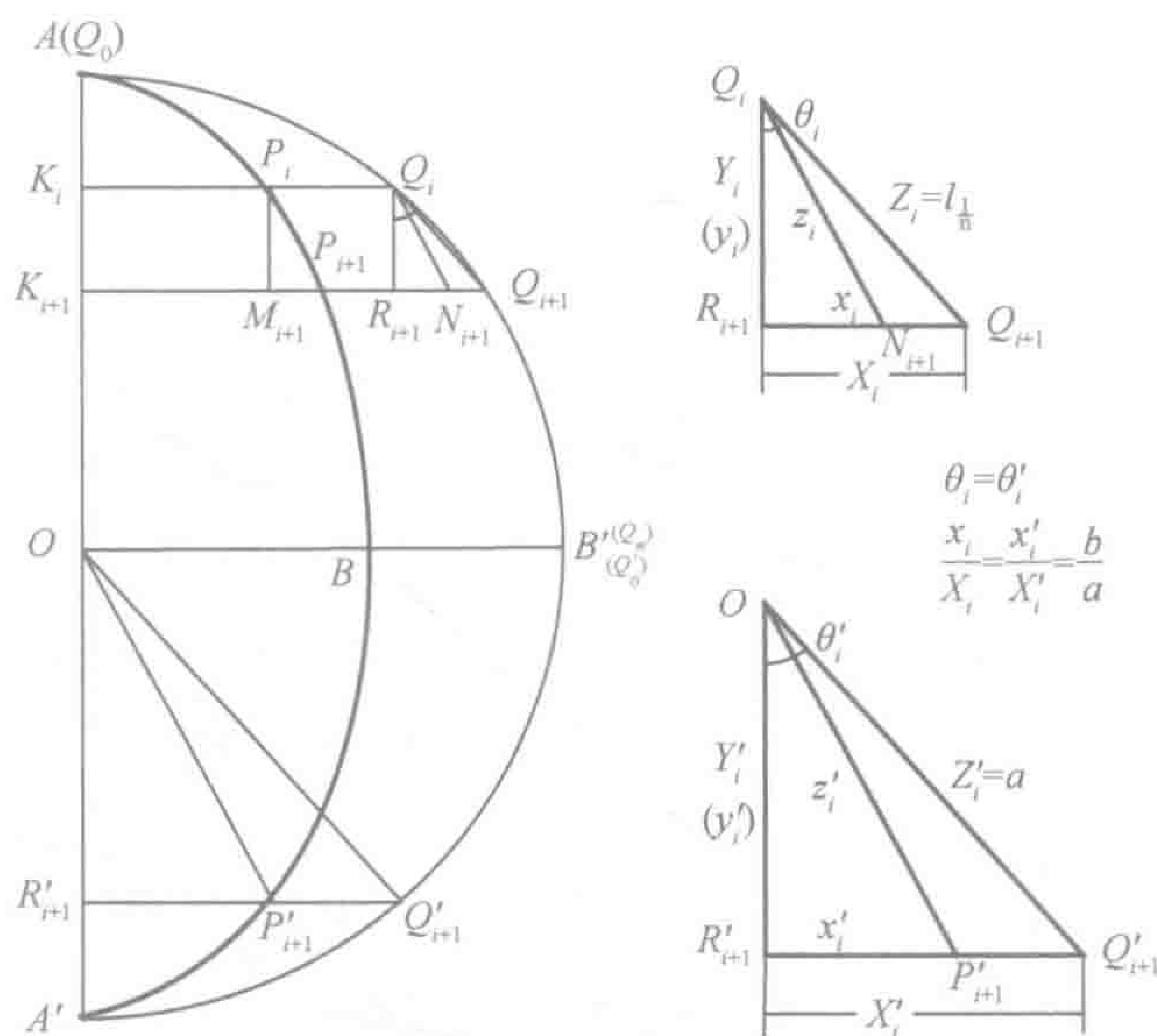


图 32-5-5

由椭圆基本定理及比例运算可得$\dfrac{x_i}{X_i} = \dfrac{b}{a}$。

Z_i 为 n 分之一象限大圆弧的弦长，等于 $l_{\frac{1}{n}}$，z_i 为 Z_i 对应的椭圆弦长，Rt△$Q_iR_{i+1}Q_{i+1}$，Rt△$Q_iR_{i+1}N_{i+1}$为一组同股（$Y_i = y_i$）勾股形，有 $z_i^2 - x_i^2 = Z_i^2 - X_i^2$，所以

---

① 何绍庚，椭圆求周术释义，《科学史集刊》第 11 期，地质出版社，1984 年，第 130 ~ 142 页；牛亚华，项明达的椭圆求周术研究，《内蒙古师大学报（自然科学版）》，1990，（3）：53 ~ 64。

$$z_i = \sqrt{Z_i^2 - X_i^2 + x_i^2} = Z_i \sqrt{1 - \frac{X_i^2 - x_i^2}{Z_i^2}} = l_{\frac{1}{n}} \sqrt{1 - \frac{X_i^2 - x_i^2}{Z_i^2}}$$

由《象数一原》卷六开方捷术

$$A^{\frac{1}{2}} = (a^2 - r)^{\frac{1}{2}} = a\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a^2}\right) - \frac{1}{2 \cdot 4}\left(\frac{r}{a^2}\right)^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{r}{a^2}\right)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\left(\frac{r}{a^2}\right)^4 - \cdots\right]$$

可得

$$z_i = l_{\frac{1}{n}}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{X_i^2 - x_i^2}{Z_i^2}\right) - \frac{1}{2 \cdot 4}\left(\frac{X_i^2 - x_i^2}{Z_i^2}\right)^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{X_i^2 - x_i^2}{Z_i^2}\right)^3 - \cdots\right]$$

又如图 32-5-5 所示，从 B' 起在大辅圆弧 $\widehat{B'A'}$ 上取点 Q'_0（B'），Q'_1，Q'_2，$\cdots Q'_i$，Q'_{i+1}，使得 $\widehat{Q'_0Q'_i} = \frac{2i-1}{2}\widehat{Q_iQ_{i+1}}$，$i=1$，2，…，$n$，过点 Q'_{i+1} 分别作长轴的垂线交椭圆于点 P'_{i+1}，垂足为 R'_{i+1}（$i=1$，2，…，$n-1$）。Rt△$OR'_{i+1}Q'_{i+1}$，Rt△$OR'_{i+1}P'_{i+1}$ 为一组同股勾股形。为书写简便，记 OQ'_{i+1} 为 Z'_i（$=a$），OP'_{i+1} 为 z'_i，$R'_{i+1}Q'_{i+1}$ 为 X'_i，$R'_{i+1}P'_{i+1}$ 为 x'_i，OR'_{i+1} 为 Y'_i，$\angle R'_{i+1}OQ'_{i+1}$ 为 θ'_i。

运用等分圆周、相似勾股形以及椭圆基本定理等知识可得到

$$\frac{x'_i}{X'_i} = \frac{x_i}{X_i} = \frac{b}{a}, \theta'_i = \theta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{2i+1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{2i+1}{4n}\pi \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

所以

$$\frac{X_i^2 - x_i^2}{Z_i^2} = \frac{X'^2_i - x'^2_i}{Z'^2_i} = \frac{X'^2_i}{Z'^2_i}\left[1 - \left(\frac{x'_i}{X'_i}\right)^2\right] = \sin^2\theta'_i\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right] = e^2\,\frac{(1 - \cos 2\theta)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^2 \operatorname{vers} 2\theta = \frac{1}{2}e^2 \operatorname{vers} \frac{2i+1}{2n}\pi$$

所以

$$z_i = l_{\frac{1}{n}}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 \operatorname{vers} \frac{2i+1}{2n}\pi\right) - \frac{1}{2 \cdot 4}\left(\frac{1}{2}e^2 \operatorname{vers} \frac{2i+1}{2n}\pi\right)^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{1}{2}e^2 \operatorname{vers} \frac{2i+1}{2n}\pi\right)^3 - \cdots\right]$$

等式两边对 i 求和得

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i = l_{\frac{1}{n}}\left[n - \frac{1}{2}e^2 \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{vers} \frac{2i+1}{2n}\pi\right) - \frac{1}{2 \cdot 4}e^4 \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{vers} \frac{2i+1}{2n}\pi\right)^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}e^6 \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{vers} \frac{2i+1}{2n}\pi\right)^3 - \cdots\right]$$

式中，$\sum_{i=0}^{n-1} z_i$ 为象限椭周的椭弦和。

项名达将象限大辅圆一等分、二等分、三等分、四等分、五等分、六等分，分别计算出相应正矢各次幂级数之和，寻找规律，通过类比归纳得到，当 $p \leqslant 2n - 1$ 时

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{vers} \frac{2i+1}{2n}\pi\right)^p = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2p} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}n$$

所以，

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i = nl_{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{1}{2^2}e^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2}e^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}e^6 - \cdots\right)$$

项名达最后指出："一象限析分愈多，则椭弦渐与弧合，加减差愈后，而其差愈微，析至无量分，则椭弦和即椭圆象限，亦无加减差可言矣。""析至无量分"时，即 $n \to \infty$ 时，椭弦和趋近于椭圆周，同时辅圆通弦和趋近于辅圆周长，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} z_i = \frac{p}{4}, \lim_{n\to\infty} nl_{\frac{1}{n}} = \frac{2\pi a}{4}$$

由此得到椭圆周长公式——式（32-5-10）。

π 的幂级数展开式可以解决圆径求周的问题。随着椭圆周长公式的建立，圆周求径问题亦得以解决。《象数一原》卷六给出圆周求径术

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \cdots\right)$$

在椭圆周长公式中，令 $e = 1$，则 $p = 4a$，即得此式。项氏指出，此式"降位颇难，求至百余数，八位尚未消尽，固不足为术也。唯确知其得数的是圆径"。"降位破难"意即收敛较慢。

戴煦校补后指出，项氏椭圆求周公式系以大辅圆立算而"借大积"开平方，故亦可以小辅圆立算而"借小积"开平方。借小积开平方即

$$A^{\frac{1}{2}} = (a^2 + r)^{\frac{1}{2}} = a\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a^2}\right) - \frac{1}{2 \cdot 4}\left(\frac{r}{a^2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{r}{a^2}\right)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\left(\frac{r}{a^2}\right)^4 + \cdots\right]$$

由此戴煦给出椭圆求周长的另一公式

$$p = 2\pi b\left(1 + \frac{1^2}{2^2}e_1^2 + \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2}e_1^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}e_1^6 + \cdots\right)$$

式中，$e_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$。

项名达与戴煦所给椭圆周长公式正确，主要运用椭圆基本定理、二项式平方根的级数展开式以及等分圆周时正矢各次幂的级数求和公式等知识，其思想亦与椭圆积分原理相符。以其方法初等故运算量大。

项名达、戴煦之后，项名达的入室弟子夏鸾翔得到了椭圆弧长公式，结果更具有一般性。其《致曲术》"椭正弦求椭弧背术"给出椭弧长公式的幂级数展开式，即椭圆 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 上从点（0，b）到点（x，y）的一段椭弧长 L 公式

$$\begin{aligned} L = & \left(x + \frac{1^2}{3!a^2}x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!a^4}x^5 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!a^6}x^7 + \cdots\right) \\ & - \left(\frac{c^2}{2 \cdot 3a^4}x^3 + \frac{c^2}{2 \cdot 2 \cdot 5a^6}x^5 + \frac{1 \cdot 3c^2}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7a^8}x^7 + \cdots\right) \\ & - \left(\frac{c^4}{2 \cdot 4 \cdot 5a^8}x^5 + \frac{c^4}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7a^{10}}x^7 + \cdots\right) \\ & - \left(\frac{c^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7a^{12}}x^7 + \cdots\right) \\ & - \cdots \end{aligned} \tag{32-5-11}$$

式（32-5-11）原著是以"递加数"的形式给出如下：

椭圆正弦为第一数；次置第一数以椭圆正弦幂乘之，椭半径幂除之，一乘之，

又一乘之，二除之，三除之为第二数；次置第二数以椭正弦幂乘之，椭半径幂除之，三乘之，又三乘之，四除之，五除之为第三数；次置第三数以椭正弦幂乘之，椭半径幂除之，五乘之，又五乘之，六除之，七除之为第四数；顺是以下皆如是，求至单位下，乃相并为总第一数。凡用大半径幂者总第一数正以下均负。用小半径幂者总一二数正以下负正相间。

置半心差自乘方以椭正弦立方乘之，椭半径三乘方除之，二而一，三除之为第一数；次置第一数以椭正弦幂乘之，椭半径幂除之，一乘之，三乘之，二除之，五除之为第二数；次置第二数以椭正弦幂乘之，椭半径幂除之，三乘之，五乘之，四除之，七除之为第三数；次置第三数以椭正弦幂乘之，椭半径幂除之，五乘之，七乘之，六除之，九除之为第四数；顺是以下皆如是，求至单位下，乃相并为总第二数。

置半心差三乘方以椭正弦四乘方之，椭半径七乘方除之，二而一，又四而一，五除之为第一数；次置第一数以椭正弦幂乘之，椭半径幂除之，一乘之，五乘之，二除之，七除之为第二数；次置第二数以椭正弦幂乘之，椭半径幂除之，三乘之，七乘之，四除之，九除之为第三数；次置第三数以椭正弦幂乘之，椭半径幂除之，五乘之，九乘之，六除之，十一除之为第四数；顺是以下皆如是，求至单位下，乃相并为总第三数。

……

如是叠次求之，求得总数降至单位下止，乃以诸总数正负并减为椭圆弧背。

并且，原著不详推导过程，现根据夏氏《万象一原》以及《致曲术图解》对该式进行说明。

《代微积拾级》卷十四第八款给出曲线 $y=f(x)$ 的弧长微分式为

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

《代微积拾级》卷十八给出椭圆弧长公式为

$$L = \int_0^x \frac{a\sqrt{1-\frac{e^2}{a^2}x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(1 - \frac{e^2}{2a^2}x^2 - \frac{e^4}{2\cdot 4a^4}x^4 - \frac{3e^4}{2\cdot 4\cdot 6a^6}x^6 - \cdots\right)dx$$

$$= l_0 - \frac{e^2}{2a}l_2 - \frac{e^4}{2\cdot 4a^3}l_4 - \frac{3e^6}{2\cdot 4\cdot 6a^5}l_6 - \cdots \qquad (32\text{-}5\text{-}12)$$

式中，

$$e = \frac{c}{a}$$

$$l_0 = \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a\arcsin\frac{x}{a}$$

$$l_2 = \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{a}{2}l_0 - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$l_4 = \int_0^x \frac{x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{3a^2}{4}l_2 - \frac{x^3}{4}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\cdots$$

$$l_{2m}=\int_0^x \frac{x^{2m}}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{(2m-1)a^m}{2m}l_{2m-2}-\frac{x^{2m-1}}{2m}\sqrt{a^2-x^2}\quad (m=1,2,3,\cdots)$$

显然，式（32-5-12）不是一个幂级数展开式。

由平方根展开式

$$A^{\frac{1}{2}}=(a^2-r)^{\frac{1}{2}}=a\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a^2}\right)-\frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{r}{a^2}\right)^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{r}{a^2}\right)^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{r}{a^2}\right)^4-\cdots\right]$$

则式（32-5-12）相应的 l_{2m}（$m=0$，1，2，…）级数展开式依次为

$$\begin{aligned}
l_0&=\int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^x\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^x\left(1+\frac{1}{2!a^2}x^2+\frac{1^2\cdot 3^2}{4!a^4}x^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{6!a^6}x^6+\cdots\right)\mathrm{d}x\\
&=x+\frac{1^2}{3!a^2}x^3+\frac{1^2\cdot 3^2}{5!a^4}x^5+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!a^6}x^7+\cdots\\
l_2&=\int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^x \frac{x^2}{a}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^x \frac{x^2}{a}\left(1+\frac{1}{2a^2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4a^4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6a^6}x^6+\cdots\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^x\left(\frac{1}{a}x^2+\frac{1}{2a^3}x^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4a^5}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6a^7}x^8+\cdots\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{3\cdot a}x^3+\frac{1}{2\cdot 5a^3}x^5+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 7a^5}x^7+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9a^7}x^9+\cdots\\
l_{2m}&=\int_0^x \frac{x^{2m}}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^x \frac{x^{2m}}{a}\left(1+\frac{1}{2a^2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4a^4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6a^6}x^6+\cdots\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{(2m+1)a}x^{2m+1}+\frac{1}{2\cdot(2m+3)a^3}x^{2m+3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot(2m+5)a^5}x^{2m+5}\\
&\quad+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2m+7)a^7}x^{2m+7}+\cdots
\end{aligned}$$

代入式（32-5-12），即得到式（32-5-11）。

令式（32-5-11）中 $x=a$，再乘以 4，便得到项名达的椭圆求周术——式（32-5-10）。

类似地，夏鸾翔给出双曲线 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上从点（a，0）到点（x，y）的弧长 L 公式：

$$\begin{aligned}
L=&\left(y-\frac{1^2}{3!b^2}y^3+\frac{1^2\cdot 3^2}{5!b^4}y^5-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!b^6}y^7+\cdots\right)\\
&+\left(\frac{c^2}{2\cdot 3b^4}y^3-\frac{c^2}{2\cdot 2\cdot 5b^6}y^5+\frac{1^2\cdot 3^2c^2}{2\cdot 4!\cdot 7b^8}y^7-\cdots\right)\\
&-\left(\frac{c^4}{2\cdot 4\cdot 5b^8}y^5-\frac{c^4}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 7b^{10}}y^7+\frac{1^2\cdot 3^2c^4}{2\cdot 4\cdot 4!\cdot 9b^{12}}y^9-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2c^4}{2\cdot 4\cdot 6!\cdot 11b^{14}}y^{11}+\cdots\right)\\
&+\left(\frac{1\cdot 3c^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7b^{12}}y^7-\frac{1\cdot 3c^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot 9b^{14}}y^9+\frac{1\cdot 3\cdot 1^2\cdot 3^2c^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4!\cdot 11b^{16}}y^{11}\right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2c^6}{2\cdot4\cdot6\cdot6!\cdot13b^{18}}y^{13}+\cdots\Big)$$
$$-\cdots \tag{32-5-13}$$

式中，$0\leqslant y\leqslant\frac{b^2}{c}$。同样，夏鸾翔也是用“递加数”的形式给出式（32-5-13）。

式（32-5-11）和式（32-5-13）在《代微积拾级》中均没有。

（三）夏鸾翔的旋转曲面面积的级数展开式

《代微积拾级》只有计算椭圆绕长轴旋转曲面全面积公式，夏鸾翔创立旋转曲面部分面积的级数展开式。《万象一原》卷四“椭圆求大径端截盖壳积”术给出椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 点（0，b）到点（x，y）的椭弧绕长轴的旋转曲面部分面积 A：

$$A=2\pi b\left(x-\frac{c^2}{3!a^4}x^3-\frac{1\cdot3c^4}{5!a^8}x^5-\frac{1\cdot3^2\cdot5c^6}{7!a^{12}}x^7-\cdots\right) \tag{32-5-14}$$

式（32-5-14）的推导过程如下：

由《代微积拾级》卷十四第十款，曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转曲面面积 A 的微分为

$$\mathrm{d}A=2\pi y\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

所以，椭弧绕轴旋转曲面面积为

$$A=\int_0^x\mathrm{d}A=\int_0^x2\pi y\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=2\pi b\int_0^x\sqrt{1-\left(\frac{c}{a^2}x\right)^2}\mathrm{d}x$$
$$=2\pi b\int_0^x\left(1-\frac{c^2}{2a^4}x^2-\frac{1\cdot3c^4}{4!a^8}x^4-\frac{1\cdot3^2\cdot5c^6}{6!a^{12}}x^6-\cdots\right)\mathrm{d}x$$
$$=2\pi b\left(x-\frac{c^2}{3!a^4}x^3-\frac{1\cdot3c^4}{5!a^8}x^5-\frac{1\cdot3^2\cdot5c^6}{7!a^{12}}x^7-\cdots\right)$$

至于旋转双曲面的情形要复杂一些。《致曲术》中将 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 绕 x 轴旋转分两种情况讨论。若 $a<b$，夏氏称相应的旋转曲面为“笠体双曲线”；若 $a>b$，相应的旋转曲面称为“钟体双曲线”。这两种面积的求法分别被称为“笠体双曲线求截盖壳积术”与“钟体双曲线求截盖壳积术”，但只是有目而无术。而在后来的《万象一原》卷六“斜双曲线”给出“斜双线求大径端截盖壳积”（即“钟体双曲线”）术，给出 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$（$x>a$）绕 x 轴旋转所得曲面的部分面积公式：

$$A=2b\pi\left(A_1+\frac{c^2}{2b^4}A_3-\frac{c^4}{2\cdot4b^8}A_5+\frac{1\cdot3c^6}{2\cdot4\cdot6a^{12}}A_7-\cdots\right) \tag{32-5-15}$$

式中，

$$A_1=\sqrt{y^2+b^2}-b,$$
$$A_3=\frac{1}{3}y^2\sqrt{y^2+b^2}-\frac{2}{3}b^2A_1$$
$$A_5=\frac{1}{5}y^4\sqrt{y^2+b^2}-\frac{4}{5}b^2A_3$$
$$\vdots$$
$$A_{2m+1}=\frac{1}{2m+1}y^{2m}\sqrt{y^2+b^2}-\frac{2m}{2m+1}b^2A_{2m-1}\quad(m=1,2,3,\cdots)$$

实际上，

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^y \mathrm{d}A \\
&= \int_0^y 2\pi y \mathrm{d}l \\
&= 2b\pi\int_0^y \frac{y}{\sqrt{y^2+b^2}}\sqrt{1+\left(\frac{c}{b^2}y\right)^2}\mathrm{d}y \\
&= 2b\pi\int_0^y \frac{y}{\sqrt{y^2+b^2}}\left(1+\frac{c^2}{2b^4}y^2-\frac{c^4}{2\cdot 4b^8}y^4+\frac{1\cdot 3c^6}{2\cdot 4\cdot 6a^{12}}y^6-\cdots\right)\mathrm{d}y \\
&= 2b\pi\left(\int_0^y \frac{y}{\sqrt{y^2+b^2}}\mathrm{d}y+\frac{c^2}{2b^4}\int_0^y \frac{y^3}{\sqrt{y^2+b^2}}\mathrm{d}y-\frac{c^4}{2\cdot 4b^8}\int_0^y \frac{y^5}{\sqrt{y^2+b^2}}\mathrm{d}y\right. \\
&\quad \left.+\frac{1\cdot 3c^6}{2\cdot 4\cdot 6a^{12}}\int_0^y \frac{y^7}{\sqrt{y^2+b^2}}\mathrm{d}y-\cdots\right)
\end{aligned}$$

式中，

$$\int_0^y \frac{y}{\sqrt{y^2+b^2}}\mathrm{d}y = \sqrt{y^2+b^2}-b = A_1$$

$$\int_0^y \frac{y^{2m+1}}{\sqrt{y^2+b^2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{2m+1}y^{2m}\sqrt{y^2+b^2}-\frac{2m}{2m+1}b^2\quad A_{2m-1} = A_{2m+1}\quad (m=1,2,3,\cdots)$$

这样便得到式（32-5-15）。

夏鸾翔对二次曲线求积问题的处理实际上是以“递加数”对被积函数为不同指数类型（或 $\pm\frac{1}{n}$ 型，或 $\pm\frac{m}{n}$ 型）的二项式函数进行展开①，然后根据积分法行进积分运算，最终的结果还用递加数的形式表达。他吸收了《代微积拾级》中的积分术，得到较之于其师项名达椭圆求周术更为一般的椭弧公式，扩大了二次曲线求积问题的领域。但同时，他并没有吸收《代微积拾级》中的解析几何知识、有关现代微分的泰勒展开式与麦克劳林展开式等知识，囿于“递加数”，使得他的成果显得很“笨拙”。其成果特色与创新显然，不足亦显然。②

三　平圆容切与累圆

周达对平圆容切与累圆问题有深入的研究，著有《平圆互容新义》与《巴氏累圆奇题解》。

（一）平圆容切

《平圆互容新义》完成于1900年，发表于《亚泉杂志》四至六册（1900～1901）。全书前面分三款说明原理，后面出了10道练习题作为理论的具体应用。周达为《平圆互容新义》写的序文说明了《平圆互容新义》的基本内容及其思想，现录于下：

① 在《万象一原》中夏鸾翔在处理对数螺线求积问题时用到 $\ln x$ 的展开式。

② 高红成，夏鸾翔对二次曲线求积问题的研究——兼论中算家对微积分的早期认识和理解，自然科学史研究，2009，28（1）。

平圆交互相容，其理极繁赜杂糅，不可以平常几何之法驭之，间常深思而得其故。知须藉径于圆锥三曲线，理幽趣奥，实于形学中别开一径，不可无专书以发明之。爰为之首列三款，以明其理，次设诸题以竟其用。凡向之所谓繁赜杂糅无法可驭者，今皆视为坦途矣。三曲之妙用，其不可测哉。庚子初冬，周达自识。

周达是用二次曲线来解决复杂的平圆互切问题，这在当时我国初等几何研究中是一种新的方法，可谓“别开一径”。[①]“以明其理”的三款内容是：

第一款：设不等两圆相交，或内切，或内含，在两圆间作切圆，使诸圆内切于一圆，外切于另一圆，则诸切圆圆心的轨迹为椭圆。现改用现在的叙述形式说明周达的证明。

证明：设 A、B 为两圆圆心。圆 C_1 切圆 A 于 D，切圆 B 于 E，则有 $AC_1 = AD - C_1D$，$BC_1 = BE + C_1E$。又因为 $C_1D = C_1E$，均为动圆半径，所以 $AC_1 + BC_1 = AD + BE$，故动圆圆心的轨迹为以 A、B 为焦点的椭圆（图 32-5-6）。

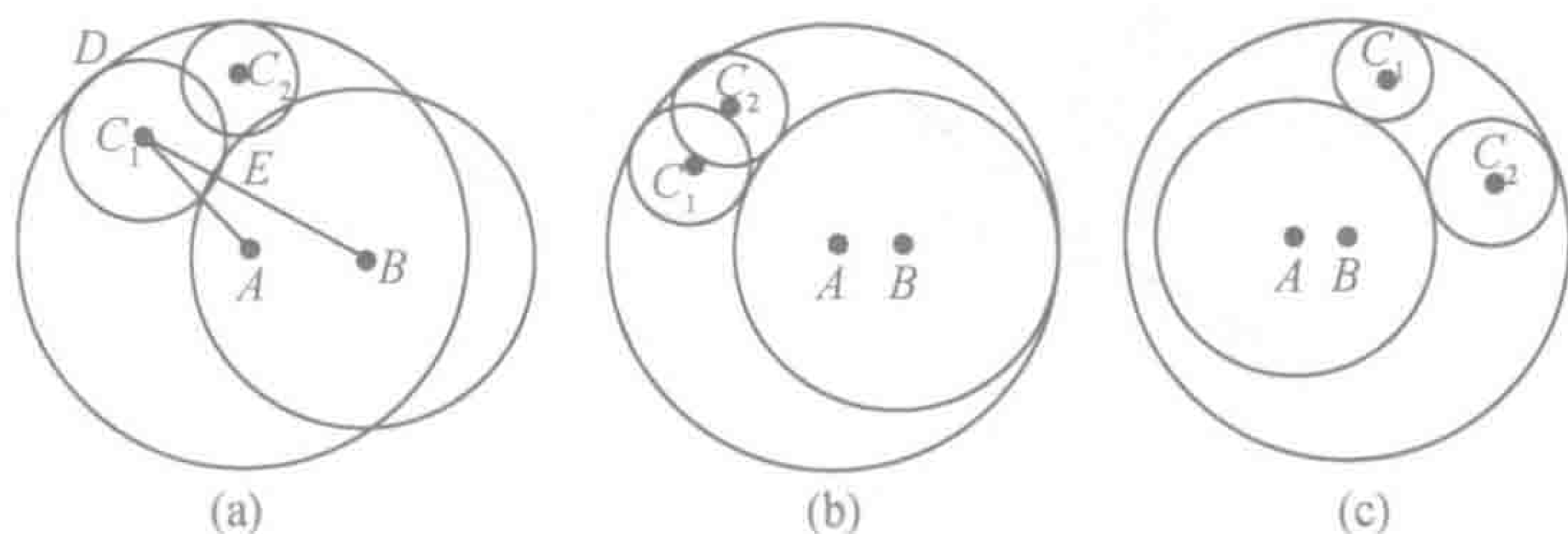


图 32-5-6

第二款：设两圆相交，或相切，或相离，动圆与两定圆均相切，如图 32-5-7 所示，则动圆圆心的轨迹为双曲线（只有一支）。

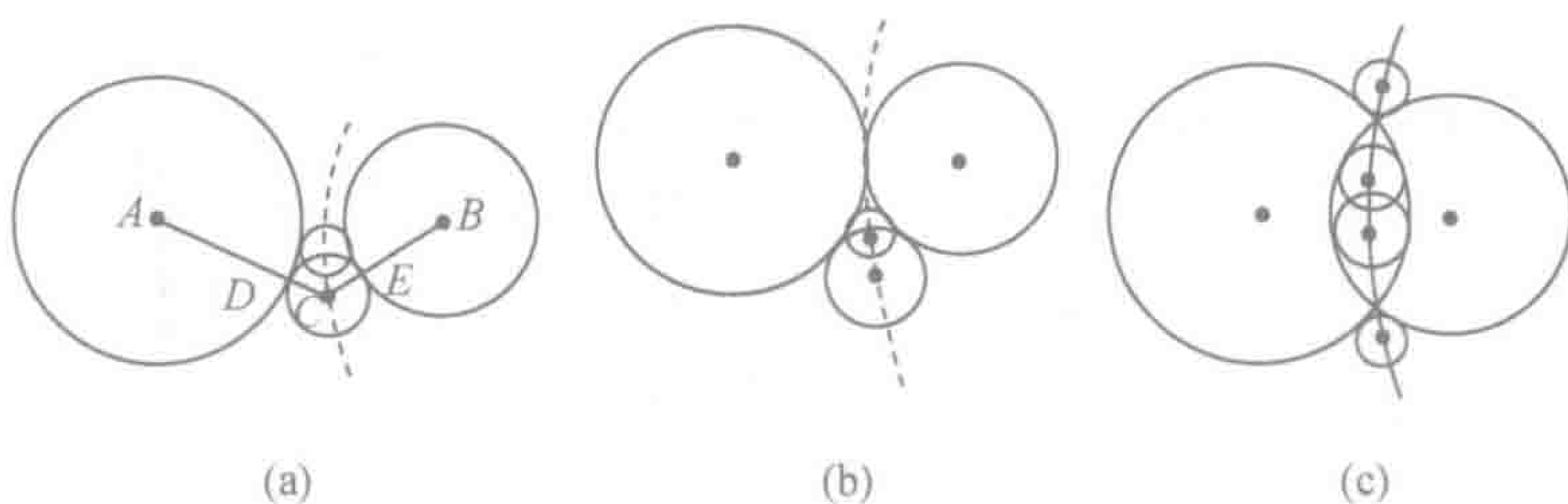


图 32-5-7

证明：图 A、B 为两圆圆心，C 为与两圆相切动圆圆心，D、E 为切点。因为 $AC = AD + DC$，$BC = BE + EC$，所以 $AC - BC = (AD + DC) - (BE + EC) = AD - BE$。故动圆圆心 C 的轨迹为双曲线之一支。

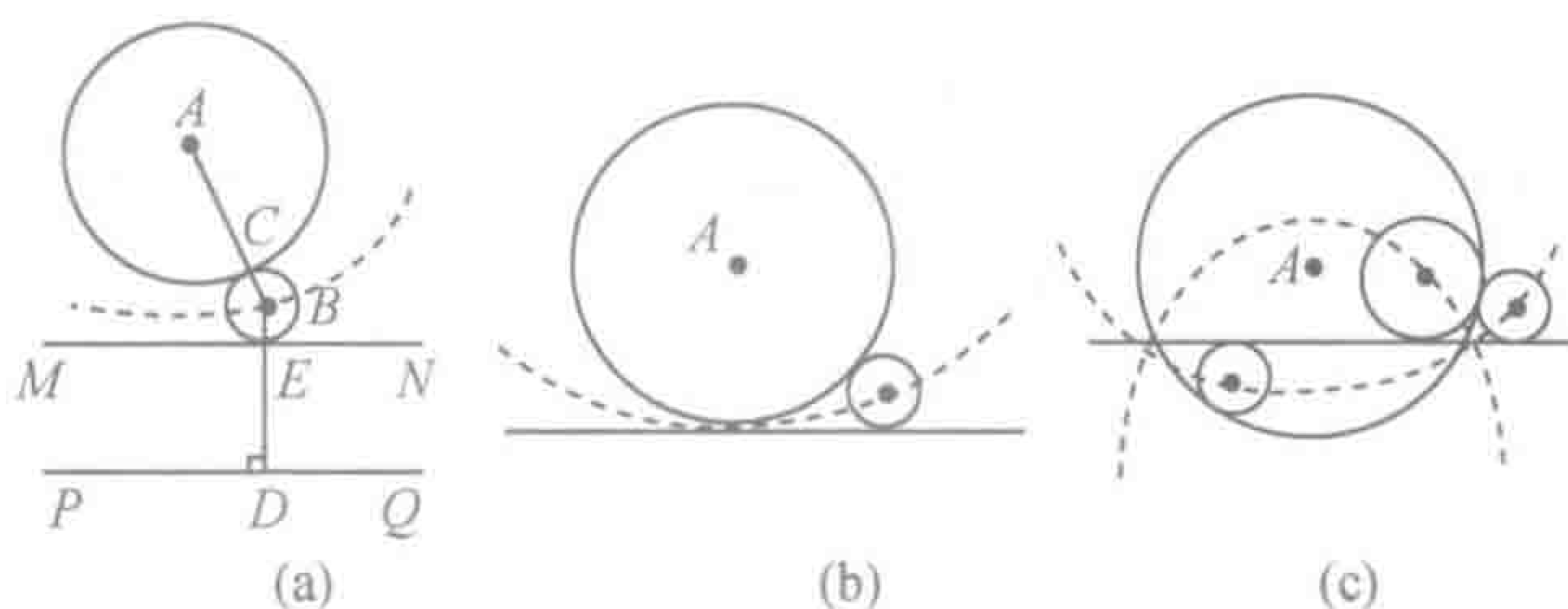


图 32-5-8

第三款：设一圆与一直线相离，或相切，或相交。动圆与定圆及直线均相切，如图 32-5-8所示，则动圆圆心的轨迹为抛物线。

① 李迪，中国现代数学的先驱者周达，中国科学技术史论文集，内蒙古教育出版社，1991 年，第 255 ~ 275 页。

证明：A 为定圆圆心，B 为动圆圆心，MN 为定直线，圆 B 切圆 A 于 C 点，将直线 MN 向下平移至 PQ，使 MN 与 PQ 之间距离为定圆 A 的半径 AC，自 B 点作 $BD \perp PQ$，则 BD 必通过圆 B 与 MN 的切点 E。因为 $BA=AC+CB$，$BD=BE+ED$，又因为 $AC=ED$，$CB=BE$，所以 $BA=BD$，故动圆圆心 B 的轨迹为抛物线。①

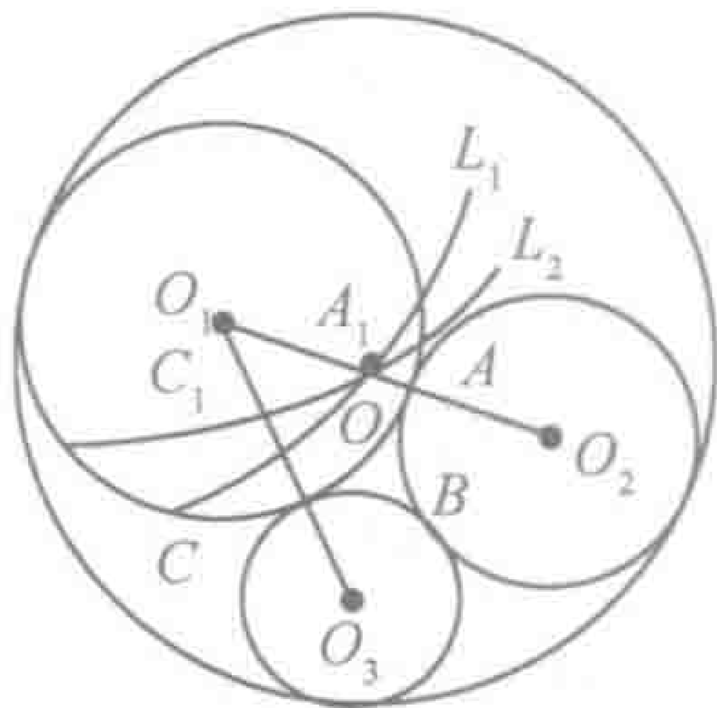


图 32-5-9

周达的证明均是正确的，上述三款为利用二次曲线的几何定义得到三个定理，周达巧妙用以解决平圆互切问题。在第三款后面的 10 道练习题，周达都给出了解答。这些题大致可分为两类：一类求切圆圆心的轨迹，另一类通过轨迹的交点来确定切圆的圆心。现仅举一例如下。②

设不等三平圆，圆心分别为 O_1，O_2，O_3，三圆两两相切于 A、B、C。有一大圆与此三圆均内切，求大圆心（图 32-5-9）。

证明：连接圆 O_1O_2，则 A 点必在 O_1O_2 上，截 $O_1A_1=O_2A$，A_1 在 O_1O_2 上，以 O_1、O_2 为两心，以 A_1 为顶点作双曲线 L_1。同法，在 O_1O_3 上取得 C_1，以 O_1、O_3 为两心，以 C_1 为顶点作双曲线 L_2，则 L_1 与 L_2 的交点 O 即所求。

（二）累圆

周达的《巴氏累圆奇题解》（图 32-5-10）是关于古希腊巴普斯（Pappus）之“巴氏累圆奇题”及其扩展形式问题的专著，刊行于光绪三十年（1904）秋天，第二年 1 月便被长泽龟之助译为日文。周达对此问题产生兴趣，与长泽龟之助有关，他在 1902 年访日时“初受是题于长泽氏”，并被告知“除转倒法外，尚无他法能解”，希望周达进一步研究这一问题。这里所说的“转倒法”即反演法，产生于 19 世纪后期，周达认为：“巴氏则为 5 世纪人，其时除欧几里得纯正几何学之外，别无他术可用。”因此，转倒法不可能是希腊人原来的方法。他回到国内后，因岁末闲暇，得以从容研究，于是“豁然贯通，不独巴氏题得以证明，且更扩充至诸般容法，而得普通之范式”。他将初稿立即寄给长泽龟之助，长泽龟之助回信说：“千年积雾，一旦涣然冰释，足为纯正几何张目。”③ 长泽龟之助对周达的成果给予了高度评价，并将周达的有关成果以补遗的形式收入其刚刚译完的 E. Catalan 的《几何学定理及问题》一书中“补遗”部分（图 32-5-11）。

图 32-5-10 所示是《巴氏累圆奇题解》中有关“巴氏累圆奇题”的证明结果，周达通过三款命题给出了“巴氏累圆奇题”的几何论证过程。周达原书采用的是李善兰式的汉化符号与公式表达方式，排版也是传统的竖排方式（图 32-5-11）。但后来，他在《圆理奇侅》一书中改用与现在相同的符号、公式重述了证明过程。下面依后者略加介绍。

周达对第一款表述如下：

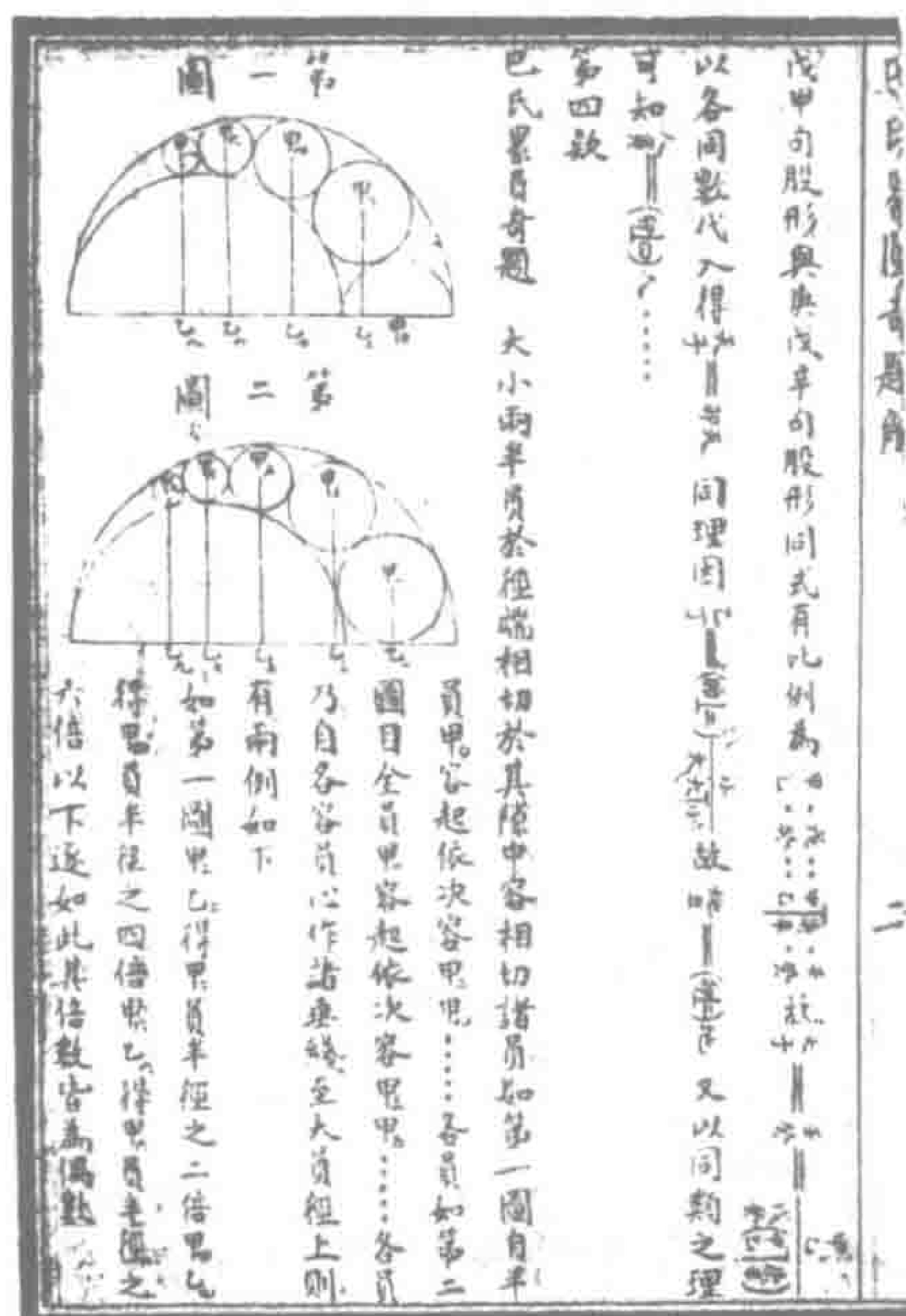
A、B 两圆相切，又切于大圆周之 C、D 两点，则 $\overline{CD}=2R\sqrt{\dfrac{rr'}{(R-r)\cdot(R-r')}}$，其中 R 为大圆半径，r 为 A 圆半径，r' 为 B 圆半径。

---

① 李迪，中国现代数学的先驱者周达，中国科学技术史论文集，内蒙古教育出版社，1991 年，第 255～275 页。

② 李兆华，中国近代数学教育史稿，山东教育出版社，2005 年，第 220～221 页。

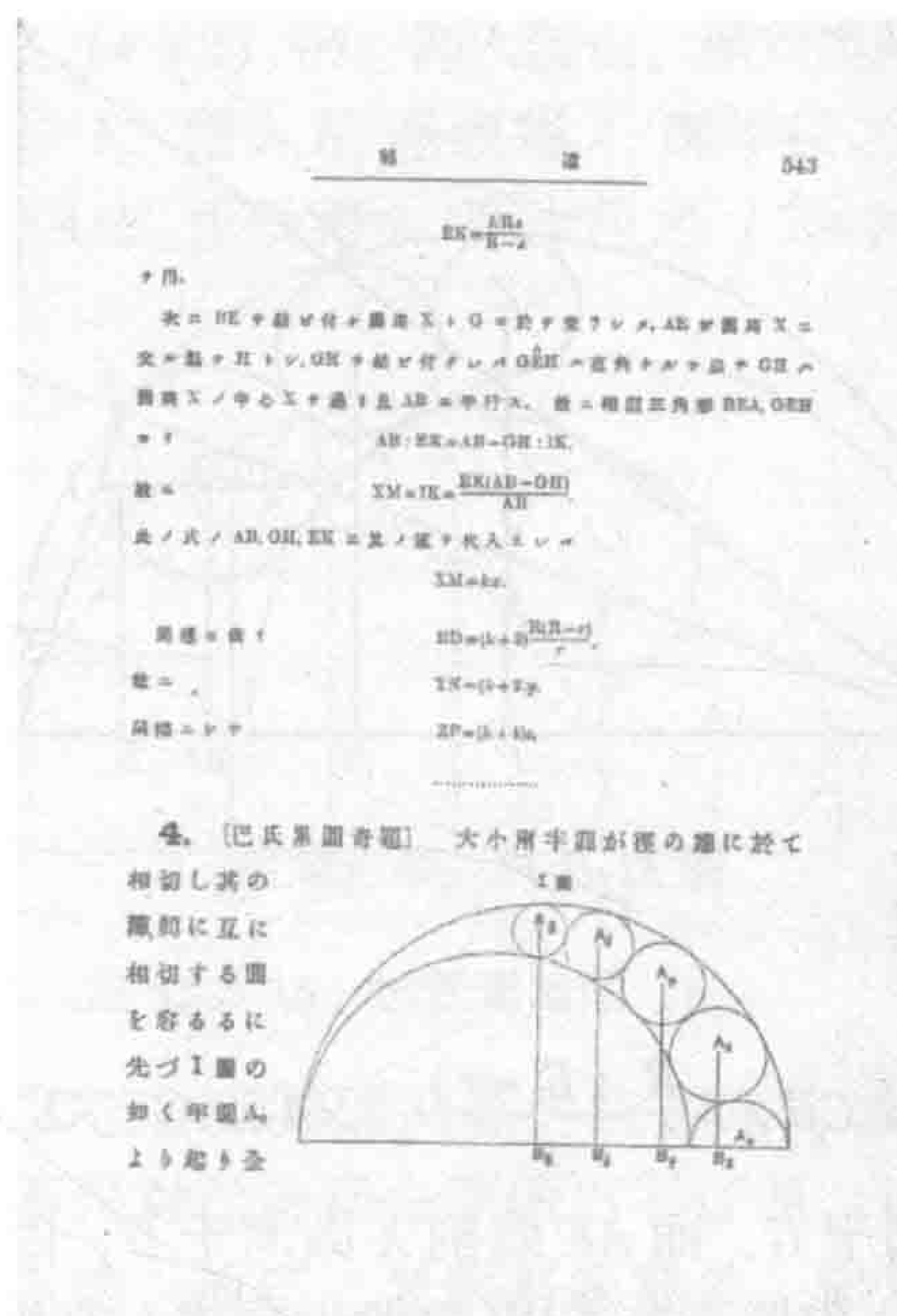
③ 周达，圆理奇侅 ·“叙”，光绪丁未（1907）年。



第四款

巴氏累圓奇題　大小兩半圓於徑端相切於其隙中容相切諸圓如第一圖自半圓甲容起依次容甲甲……各圓如第二圖自全圓甲容起依次容甲甲……各圓乃自各容圓心作諸垂線至大圓徑上則有兩例如下

图 32-5-10　周达《巴氏累圆奇题解》书影



$XM = kx.$

4. 〔巴氏累圓奇題〕 大小兩半圓が徑の端に於て相切し其の隙間に互に相切する圓を容るるに先づ I 圖の如く半圓 A_0 より起り

图 32-5-11　长泽龟之助所译周达书中的“巴氏累圆奇题”

周达的证明如下，如图 32-5-12 所示，O、A、B 为各圆心。自 B 作 BE 为 OC 之垂线，则从△ABO 得

$$\overline{OE} = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}{2\,\overline{OA}} = \frac{(R-r)^2 - (R-r')^2 - (r+r')^2}{2(R-r)} = (R-r') - \frac{2rr'}{R-r}$$

又自 D 作 DF，与 BE 平行，从△CDO 得

$$\overline{OF} = \frac{\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 - \overline{CD}^2}{2\,\overline{OC}} = \frac{2R^2 - \overline{CD}^2}{2R} = R - \frac{\overline{CD}^2}{2R}$$

依同式比例：$\overline{OB} : \overline{OE} = \overline{OD} : \overline{OF}$，故 $R \cdot \overline{OE} = (R-r') \cdot \overline{OF}$，以 $\overline{OE}$，$\overline{OF}$ 之值代入，得

$$R(R-r') - \frac{2Rrr'}{R-r} = R(R-r') - \frac{(R-r')\,\overline{CD}^2}{2R}$$

即

$$\frac{2Rrr'}{R-r} = \frac{(R-r')\,\overline{CD}^2}{2R}$$

故

$$\overline{CD} = 2R\sqrt{\frac{rr'}{(R-r)(R-r')}}$$

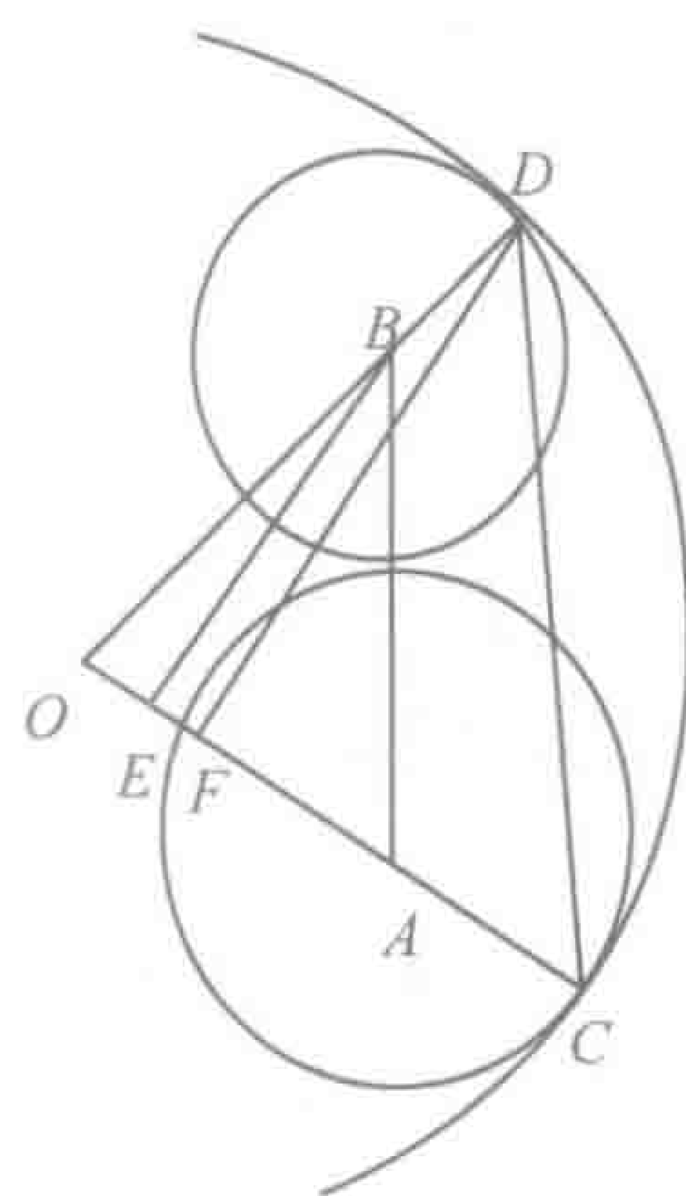


图 32-5-12　第一款图

第一款为基础，其结论在周达的累圆证明体系中十分重要。

第三款可由第一款推得，是证明巴氏累圆奇题的一个重要定理。其内容如下：

大小两圆相切之隙中，任容 X、Y、Z…各圆，自各容圆心，至 AB 公径上，作 XM，YN，ZP，…诸垂线，如 $XM = kx$，则 $YN = (k+2)\,y$，$ZP = (k+4)\,z$，…其 x，y，z，…为诸容圆半径，而 k 可为或整或分或任何无理之数。

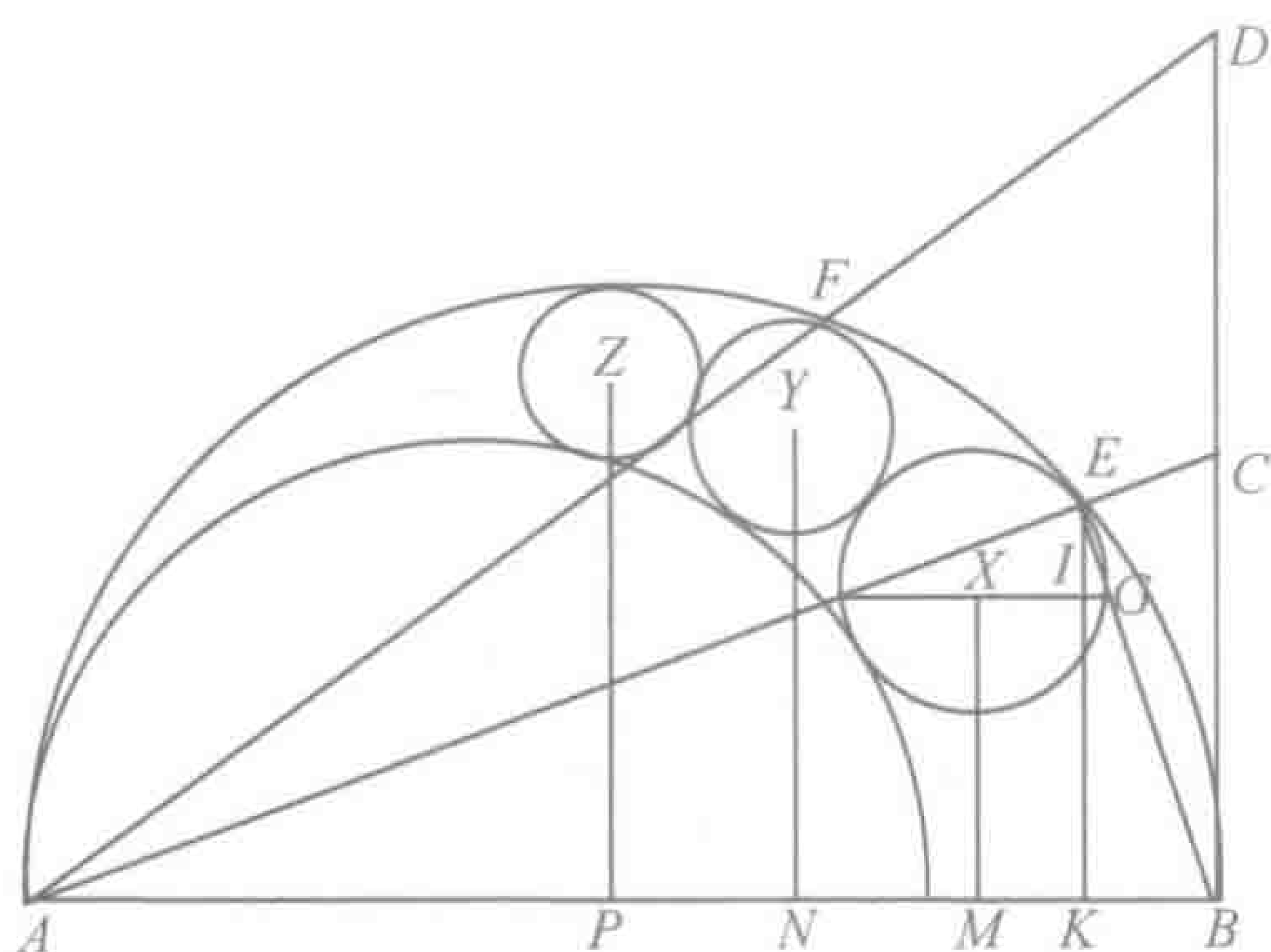


图 32-5-13　第三款图

周达的证明：自大小圆切点 A，至 X、Y 两圆切大圆之 E、F 两点，作 AE、AF，分别延长至 BD 切线上之点 C、点 D（图 32-5-13）。

依第一款之例，则得

$$AE = 2R\sqrt{\frac{rx}{(R-r)\cdot(R-x)}}$$

$$AC = \frac{\overline{AB}^2}{AE} = 2R\sqrt{\frac{(R-r)(R-x)}{rx}}$$

自 E 作 AB 之垂线 EK，则依同式比例 AC: $CB = AE$: EK，故

$$EK = \frac{CB \cdot AE}{AC}$$

设 $CB = k\dfrac{R(R-r)}{r}$，又以 AC、AE 之同数代入，则得 $EK = \dfrac{k \cdot R \cdot x}{R-x}$，次作 BE 联线，割 X 圆周于 G，而 AE 线割 X 圆周于 H，因 GEH 为直角，故 GH 线必过 X 圆心，且于 AB 平行，故 BEA 勾股形与 GEH 勾股形同式。有比例为

$$AB : EK = (AB - GH) : IK$$

故

$$XM = IK = \frac{EK(AB - GH)}{AB}$$

以各同数代入，得

$$XM = kx$$

同理，因

$$BD = (k+2)\frac{R(R-r)}{r}$$

故

$$YN = (k+2)y$$

又以同类之理，可知 $ZP = (k+4)z$，…

第四款即著名的巴氏累圆奇题：

> 大小两半圆，于径端相切，于其隙中容相切诸圆。如第四图（图 32-5-14），自半圆 A_0 容起，依次容 A_2，A_4，A_6，A_8，…各圆。第五图（图 32-5-15），自圆 A_1 容起，依次容 A_3，A_5，A_7，…各圆。乃自各容圆心作诸垂线至大圆径上，则有两例如下：
>
> 如第四图，A_2B_2 得 A_2 圆半径之二倍；A_4B_4 得 A_4 圆半径之四倍；A_6B_6 得 A_6 圆半径之六倍；以下递如此，其倍数皆为偶数。
>
> 如第五图，A_1B_1 得 A_1 圆半径之一倍；A_3B_3 得 A_3 圆半径之三倍；A_5B_5 得 A_5 圆半径之五倍；以下递如此，其倍数皆为奇数。

周达的证明如下：

此第三款之特别形也。如第四图（图 32-5-14）所示，可令公式中之 $k=0$，则 A_0 圆垂线得 A_0 圆半径之 0 倍，故 A_2B_2 垂线得 A_2 圆半径之（0+2）倍，即二倍也；A_4B_4 垂线得 A_4 圆半

径之（2+2）倍，即四倍也；A_6B_6 垂线得 A_6 圆半径之（4+2）倍，即六倍也。照此类推。

如第五图（图 32-5-15）所示，可令公式中之 $k=1$，则 A_1B_1 垂线得 A_1 圆半径之 1 倍，故 A_3B_3 垂线得 A_3 圆半径之（1+2）倍，即三倍也；A_5B_5 垂线得 A_5 圆半径之（3+2）倍，即五倍也。照此类推。

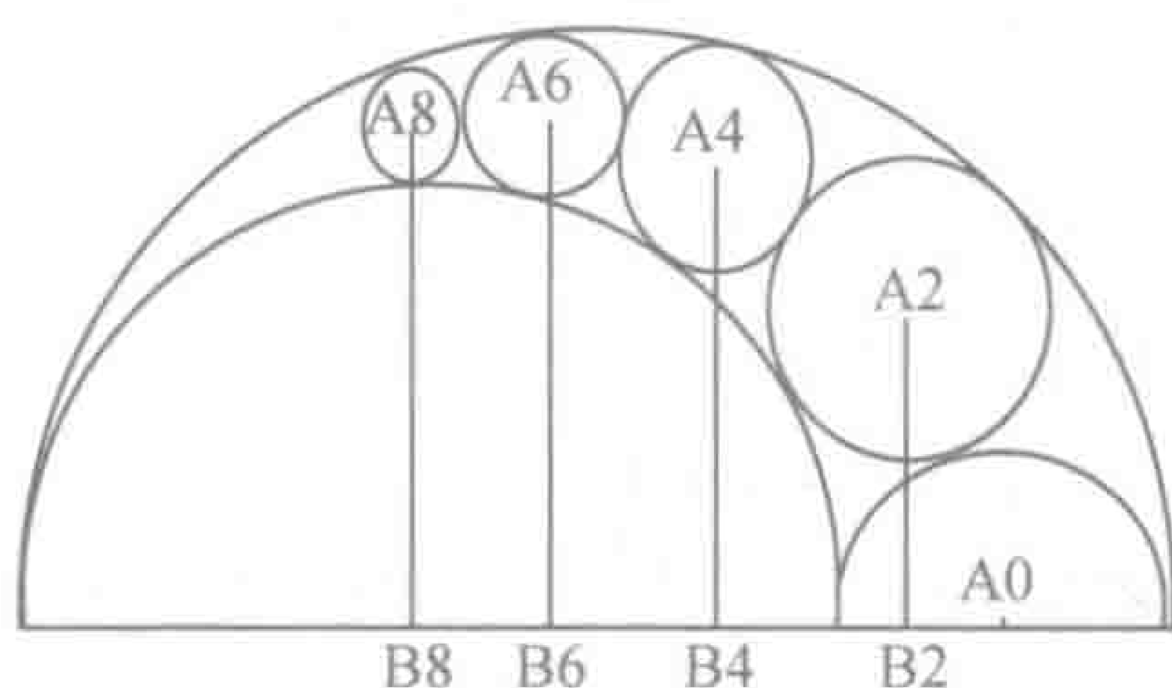


图 32-5-14 巴氏累圆图（a）

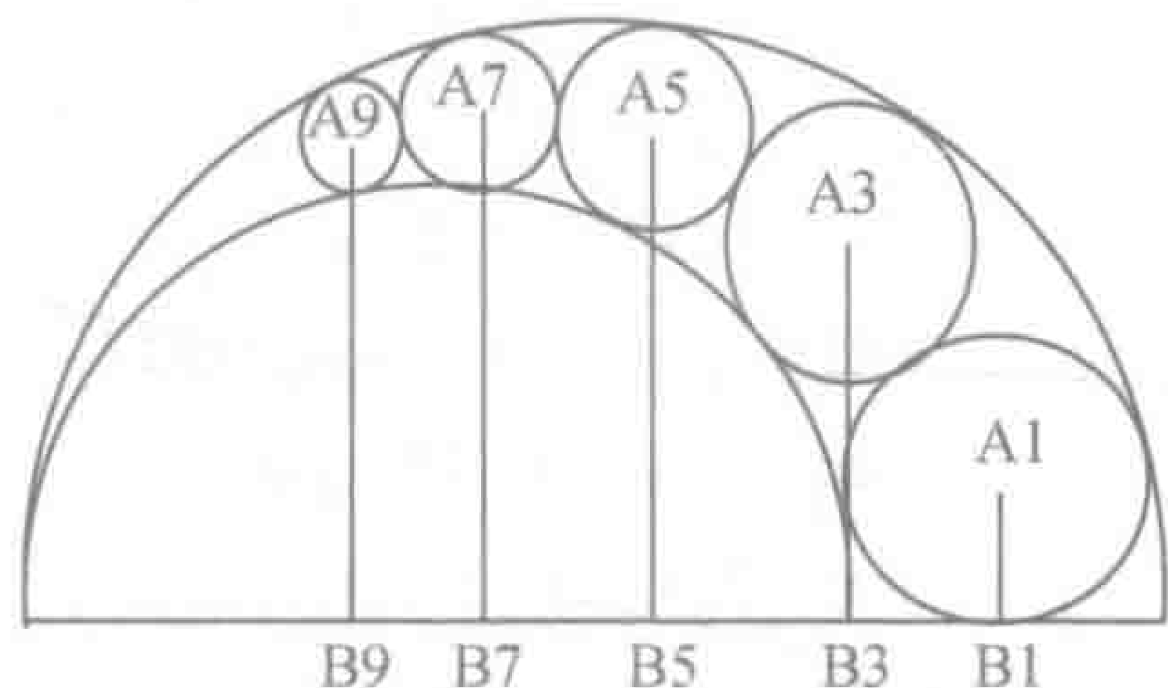


图 32-5-15 巴氏累圆图（b）

根据第一款、第三款，周达巧妙、简捷地给出了巴普斯累圆问题的纯正几何学证明。《巴氏累圆奇题解》共包括了 10 个相关命题。周达不仅对巴普斯命题做出了证明，更重要的是还对问题进行了推广，获得了更为一般情形的定理。他还“复附新题数条，皆几何中之精义妙理，足补巴氏所不及者”。[①] 因此，可以说，周达对这一类问题给出了一整套的解决方案法。

将长泽龟之助所译《カたらん氏几何学定理及问题》的初版（明治三十八年 1 月 25 日（1905 年 1 月）印刷，同年 1 月 29 日发行）与周达的《巴氏累圆奇题解》[②] 对比，我们发现，长泽龟之助实际上翻译了周达《巴氏累圆奇题解》一书的全部内容。明治三十八年 1 月（1905 年 1 月），因此长泽龟之助译著的刊行略晚于周达的《巴氏累圆奇题解》。长泽龟之助译著的“补遗”分为十四个部分，其中第十三部分题为“《巴氏累圆奇题解》；建德周达著”，[③]［日］长泽龟之助在这一部分加了一段按语：“余曾在东京数学会社杂志第 53 号应用代数学解巴氏（Pappus）累圆奇题，又由 Hutton 数学字典见本问题名称为累圆奇题。后数学协会杂志第 17 号用反形法解之。然清周达用几何学解之，送致与余，兹和译辑录之。”除译出了《巴氏累圆奇题解》中的全部十个问题及其解法外，还译出了周达得到的另一个累圆定理。由此可知，巴普斯累圆问题是当时日本数学家关注的问题。然后，长泽龟之助将每一命题都译成了日文，长泽龟之助翻译时采用的则是与现在相同的符号、公式体系，并将竖排方式改为横排方式。图 32-5-11 是长泽译周达“巴氏累圆奇题”命题证明的书影。

是周达在《巴氏累圆奇题解》的基础上，补充多条定理，使关于平圆容切的问题形成了一套体系——专著《圆理奇侅》。该书成书于清末，1938 年中国科学社为感谢周达“曾捐赠中西数学书志，价值金元逾万”且“更以节衣缩食所得万元，移作藏书基本之用”，决定印行一部周达的书稿，以贺其六十岁生日。于是，《圆理奇侅》又有单行本印行。

《圆理奇侅》包括前叙、后序、正文、附论、附“以转倒法解累圆难题”五部分。[④]

① 周达，巴氏累圆奇题解 · “叙”，光绪三十年（1904）扬州知新算社石印本。

② 周达，巴氏累圆奇题解，光绪三十年（1904）扬州知新算社石印本。

③［日］长泽龟之助译补，《佛国カたらん氏几何学定理及问题》，日本书籍株式会社，明治三十八年（1905），第 539 ~ 554 页。

④ 劳汉生、廖世发，周达《圆理奇侅》简析，科学技术与辩证法，1991，46。

《前叙》作于1907年三月（光绪丁未）扬州知新算社，周达说明了巴氏累圆题的发展历史，介绍了与日本学界的学术交流情况，当时周达年仅29岁，因为获得巴氏累圆题的欧式证明，“自喜之慨，不觉流露于辞表”。《后序》作于1938年晚秋（戊寅），周达回顾了一生的治学经历，说明了刊行此书的原因，并表示：“吾所欲言者，西人早已言之……独此编，则三十年来，历徵西籍，尚未见有先我而言者，虽最近于德人司丹内（Steiner，1796～1863）全集中，发见有类似之作，而取径不同。”该书正文46页，30款，插图41幅，推论15条，实为45个几何定理。在该书《附论》部分，周达进一步讨论了“巴氏问题”的不同解法，并将其纯正欧几里得解法和相似心法及反演法进行了比较。他还论及近代中国数学发展迟缓及其原因，十分感慨。《附“以转倒法解累圆难题”》作于1903～1904年，20题，14幅插图。

除了与“巴氏累圆奇题”相关的问题外，周达还发现了一些重要的命题，并给出了证明。例如，第二十八款即一非常漂亮的几何定理：

> “圆内容K边形，任取其一角点为主点，自主点至其他诸角点作对角线，分K边形为$K-2$个三角形，于此诸三角形内容一圆，其圆半径命为r_1，r_2，r_3，…，r_{k-2}，又任取其他一角点为主点，如前作对角线，分k边形为$k-2$个三角形，命其诸容圆半径为r'_1，r'_2，r'_3，…，r'_{k-2}，则$r_1+r_2+\cdots+r_{k-2}=r'_1+r'_2+\cdots+r'_{k-2}$。其$k$个角点，可任取为主点，其诸圆半径之和，无不相等也。”（《圆理奇侅》第二十八款）

在《圆理奇侅》重刊本注中，周达称这一定理为：“余于乙巳年（1905），告之东友上野清氏，嗣见东京某数学杂志登载，称曰支那之问题，研证者颇不乏人，盖由上野清氏传述而出者也。”可是在长泽的译著《カたらん氏几何学定理及问题》初版（1905年1月）的“补遗”中已经载有周达对四边形情形下此定理的证明（即《圆理奇侅》第二十七款），因而此定理的发现当在1904年就已做出。此定理传日后很快在日本引起了反响，而且马上通过日本数学家被介绍到欧洲。①

又如，第二十九款涉及司丹内（Steiner）问题：

> “大小两圆相切，于其隙中任容相切诸圆X_1，X_2，…，自诸圆心至平面上任一直线，作诸垂线X_1D_1，X_2D_2，…，试求$\frac{X_1D_1}{x_1}$，$\frac{X_2D_2}{x_2}$，…诸值之公式。”

周达给出的公式是此类问题的“最普遍之范式，即任作一斜交线，皆可以此式解之也”。当“其斜交线经过大圆心”时，即司丹内公式。因此，司丹内氏公式为周达公式的特例。

---

① 冯立昇，周达与中日数学交往，自然辩证法通讯，2002，24（1）：70。

第三十三章　清末数学教育

自鸦片战争至辛亥革命的数十年间，中国的教育发生了重大变化，以“中学为体，西学为用”作为宗旨的教育变革逐步付诸实践。兴办学堂、颁行学制、废除科举、设立学部、推行师范教育、派遣留学生等措施使得传统教育变革过程基本完成。科学教育与儒学教育的矛盾、科学教育与科举制度的矛盾逐步解决。若自同治元年（1862）京师同文馆的设立起，至辛亥革命（1911）推翻清朝统治止，教育变革经历了大约半个世纪。其中，以光绪二十八年（1902）《钦定学堂章程》即壬寅学制的产生为断，又可分为前后两个阶段。前一阶段表现为学校类型与数量的增加、教学内容与教学方法的变革，后一阶段表现为壬寅学制的颁布、癸卯学制的实施、教育行政机构的设立、科举制度的废除与相关机构的裁撤。随着清末教育的近代化，数学教育的变革逐步展开。

第一节　清末数学教育概述

一　数学教育的变革

自乾隆三年（1738）设立算学馆，翌年定名国子监算学，直至光绪三十一年（1905）废除科举，成立学部，国子监并入学部。国子监算学改隶钦天监，改称“钦天监天文算学”。算学馆作为清朝最高学府的一个组成部分，先后存在160余年。清代的书院堪称发达。其中，一部分书院注重经世致用之学、考据之学，数学知识的传授亦随之受到重视。尽管如此，数学教育仍是经学教育的补充。鸦片战争之后，“师夷长技以制夷”的思想逐渐得到传播。先是设立洋务学堂，创办教会学校，到清末，又兴办新式学堂。甚至传统的书院也发生了变革。数学是这些教育机构的重要科目。

（一）洋务学堂的设立

自第二次鸦片战争至甲午战争的30余年间，民间的有识之士及清廷的部分大员逐步认识到，中国面临“数千年来未有之变局”、“数千年来未有之强敌”。[1]“求强”、“求富”的口号被付诸实践，制造船炮、编练新军、开矿运输、兴办学堂、派遣留学等成为一时潮流，史称洋务运动。为培养实学人才而建立的洋务学堂比较重视数学课程的设置。洋务学堂大致可分为综合性学堂与专门性学堂两种类型，举例说明如下。

京师同文馆，同治元年（1862）恭亲王奕䜣奏准设立。同治五年，奕䜣奏请馆内增设天文算学馆。虽有大学士倭仁反对，终于同治六年五月获准增设。翌年李善兰应召入馆执

---

① 清・李鸿章，筹议海防折，《洋务运动》（一），上海人民出版社，1959年，第41页。

教。此后京师同文馆的数学教育成为一时表率。今传《（同文馆）算学课艺》四卷（1880）。

上海广方言馆，同治二年李鸿章奏准设立。该馆于设馆之初即设置数学课程。其《试办章程十二条》规定“凡肄业者，算学与西文并须逐日讲习。其余经史各类，随其资禀所近分习之。专习算学者，听从其便。”[①] 至光绪二十年（1894）拟定《酌立简明条规十则》，其中明定学生分作英文、法文、算学、天文四馆肄业。光绪三十一年归并为工业学堂。今传《广方言馆算学课艺》不分卷（1896）。

天津武备学堂，光绪十一年（1885）李鸿章奏准设立。光绪十三年（1887）卢靖（1855～1948）、华蘅芳均到堂讲授数学。今传华蘅芳著《三角测量说》为当时的讲义。又传《九章代数草》残本两册，有光绪二十九年卢靖序。

当时较为著名的洋务学堂有十余所，几乎都设有数学课程。洋务学堂存在的时间长短不一，数学教学的水平亦参差不齐。然而，这毕竟是中国的数学教育近代化的起步和探索。

（二）教会学校

鸦片战争之后，随着一系列不平等条约的签订，自雍正元年（1723）以来的“百年禁教”结束，教会学校的数量不断增加。循至清末，形成了一个独立的学校系统。道光二十六年（1846）正月上谕，传习天主教为合法，且将前已充公之天主堂、学堂等赔还。[②] 而当清廷严禁天主教之时，基督教教士已自西徂东。嘉庆二十三年（1818），英国伦敦会教士马礼逊（R. Morrison，1782～1834）与米怜（W. Milne，1785～1822）在马六甲开设英华书院（The Anglo-Chinese College）。道光二十三年（1843）该校迁至香港，咸丰六年（1856）停办。这是传教士在华设立的第一所学校。至辛亥前十年间，一些教会学校逐渐归并为大学。基督教、天主教建立并发展学校是列强对华进行文化与教育侵略的一个重要方面。教会学校的课程设置比较重视包括数学在内的科学教育，故其存在对清末的数学教育产生了深刻的影响。教会学校的数学教育，大致可以“学校教科书委员会”成立为界，分为前后两个阶段。较之前段，后段的数学课程设置与教材采用等方面已趋规范。光绪三年（1877），“在华基督教传教士大会”第一届会议在上海举行，决定成立“教科书委员会”，英文名 School and Textbooks Series Committee，中文名益智书会。光绪十六年（1890），第二届会议决定将其改组为“中华教育会”，英文名 The Education Association of China，中文名仍为益智书会。光绪三十一年（1905），中文名改用中华教育会。教科书委员会及中华教育会下设的出版委员会负责在华教会学校教科书的编译、出版。教科书一词也由此采用至今。

在数学课程的设置方面，登州文会馆和中西书院可以为例。登州文会馆：同治三年（1864）美国长老会教士狄考文（C. W. Masteer，1836～1908）设立，光绪二十八年（1902）并为广文学堂，迁至潍县，光绪三十年（1904）并为山东新教大学，1917 年并为山东基督教大学，迁至济南，后又并为齐鲁大学。文会馆六年制所开课程有：代数备旨、形学备旨、八线备旨、圆锥曲线、微积分以及测绘、格致、天文等。[③] 中西书院：光绪七年

---

① 试办章程十二条，朱有瓛主编，《中国近代学制史料》第一辑上册。华东师范大学出版社，1983 年，第 216 页。

② 王铁崖，中外旧约章汇编，第一册，三联书店，1957 年，第 147 页。

③ 《登州文会馆的创立及其章程》，见：中国书院史资料（下册），第 2092 页。

(1881) 美国监理会教士林乐知 (Y. J. Allen, 1836~1907) 设于上海，光绪二十七年 (1901) 并为苏州东吴大学。八年制所开课程有：数学启蒙、代数学、勾股法则、平三角、弧三角、微积分以及格致、重学、天文等。[①] 上述两所学校均设有微积分课程，这是清末数学教学的先进水平。

学校教科书委员会成立之后，就教会学校教学用书的编写原则、门类、水准及名词术语的统一方面做出计划，一些数学教科书随之编译出版。例如，《形学备旨》十卷 (1885)，《代数备旨》十三章 (1891)，《笔算数学》三卷 (1892)，《八线备旨》四卷 (1893)，《圆锥曲线》不分卷 (1893)，《代形合参》三卷附一卷 (1893) 均多次印刷，在癸卯学制颁行前被广泛采用。

（三）新式学堂的设立

仿照外国学校制度建立新式学堂的意见出现较早。光绪二十二年 (1896)，刑部左侍郎李端棻 (1833~1907) 奏请："自京师以及各省府州县皆设学堂。" 诸学皆以三年为期。[②] 两个月之后，总理衙门议准。于是有筹建京师大学堂之议。光绪二十四年 (1898) 四月，颁诏明定国是，诏谓 "京师大学堂为各行省之倡，尤应首先举办"。五月上谕 "即将各省府厅州县现有之大小书院，一律改为兼习中学西学之学校"。以戊戌变法失败未能实施，然风气已开。光绪二十七年 (1901) 八月上谕之后，新政复行，各省竞相将书院改设大学堂。例如：江苏改南菁书院 (1882) 为 (江苏全省) 南菁高等学堂 (1901)。浙江改求是书院 (1897) 为浙江大学堂 (1902)。陕西改宏道书院为宏道大学堂 (1902)。味经书院 (1873) 与崇实 (1897) 停办，经费图籍并入大学堂。湖北改两湖书院 (1890) 为两湖大学堂 (1902)。不久，改为两湖总师范学堂 (1904)。山西改令德堂 (1882) 与晋阳书院为山西大学堂 (1902)。李提摩太 (T. Richard, 1845~1919) 主持的中西大学堂并为山西大学堂西学专斋。四川改尊经书院 (1875) 为四川大学堂 (1902)。四川中西学堂 (1896) 并入大学堂。先是，成都锦江书院已并入尊经书院。此外，湖南、广东、山东、广西等亦均设大学堂，壬寅学制颁布后，除京师大学堂、山西大学堂外，各省大学堂改为高等学堂。数学课程的设置依照学制渐趋一致。此后新式学堂获得较快的发展。数学课程的设置，学习年限及教学方式等方面，新式学堂较洋务学堂及书院为规范。

早期设立的新式学堂以天津中西学堂 (1895)、上海南洋公学 (1897) 和京师大学堂 (1898) 最为著名。南洋公学成立之初 "以专学政治家之学为断"。天津中西学堂包括头等学堂和二等学堂，分别与大学和中学相当，学制各四年，按年分课。头等学堂第一年设有几何学、三角勾股学。自第二年起分为普通和专门两途。第二年普通学包括量地法、重学、微分学。光绪二十四年十月，京师大学堂开学后科系尚未实设，后以庚子之乱而停办。光绪二十八年十一月复校，师范馆与仕学馆开学。依同年颁布的《钦定京师大学堂章程》，师范馆学制四年，每年均设数学课。每周钟点，第一年 3，第二年 4，第三年 4，第四年 4。教学内容，第一年，加减乘除、分数、比例、开方；第二年，算表成式、几何面积、比例；第三

① 中西书院课程规条，见：中国书院史资料（下册），第 2068 页。

② 李端棻，《请推广学校折》，见：中国近代教育史资料（上册），第 145 页。

年，代数、方程、立体几何等；第四年，代数、级数、对数、教法①。因癸卯学制的颁行，实际设置的课程其门类与水准已初具近代的规格。

（四）清末数学教育制度的建立

在洋务学堂、书院、教会学校与新式学堂中，数学教育均得到不同程度的重视与发展。除教会学校外，洋务学堂的设立，书院的变革和新式学堂的出现，其结果是辛亥前十年间新式学堂形成一定的数量和规模，进一步推动了教育制度的变革。

壬寅学制（1902）颁布，癸卯学制（1903）② 的颁行与学部的设立是清末教育变革的重要措施，数学教育亦随之制度化。

光绪二十七年五月，刘坤一（1830～1902）、张之洞（1837～1909）“江楚会奏”第一疏推动了教育变革之议复起，两个学制相继完成。壬寅学制，本称《钦定学堂章程》，由张百熙（1847～1907）主持制定，光绪二十八年七月奏进，同年十一月颁布。该章程包括《钦定蒙养院章程》以至《钦定京师大学堂章程》等6种。壬寅学制尚欠完备，颁布而未实行。癸卯学制，本称《奏定学堂章程》，由张之洞主持制定，张百熙、荣庆（1859～1916）协助，光绪二十九年十一月奏进，即日颁布，次第推行。该章程包括《学务纲要》、《蒙养院章程附家庭教育法章程》以至《大学堂章程附通儒院章程》等22种。除实业教育与师范教育两系外，直系的教育共分学前、初等、中等、高等四段。不包括学前段，共三段六级，在学年限25～26年。癸卯学制是中国第一个颁布并实行的学制。至此学校教育制度初步建立。癸卯学制贯彻“中学为体，西学为用”的原则。就数学课程的设置而言，算术、代数、几何、三角、解析几何、微积分、函数论、偏微分方程、整数论等均已列入三段六级的教学计划之中。

中国传统的教育管理向由礼部与国子监分任。咸丰十一年（1861），总理衙门成立之后，洋务学堂事务悉由该衙门裁定。光绪二十四年，京师大学堂成立，设管学大臣一人。此后，各省学堂均归京师大学堂统辖。癸卯学制颁行后，是年同月，依《学务纲要》规定，“京师专设总理学务大臣统辖全国学务”，“大学堂应请另派专员管理”。至此，行政管理与学堂系统独立。光绪三十一年九月，山西学政宝熙（1868～1942）奏请设立学部，“令全国学制画一整齐”，国子监等衙门“归并学部”。同年十一月，上谕设立学部。翌年，国子监归并学部，各省裁撤学政衙门改设提学使司，裁撤学务处改设学务公所，各厅州县设劝学所。至此，教育行政管理制度初步建立。学校教育制度与教育行政管理制度共同构成近代教育体系的初步基础。

学部下设五司十二科、三局、二所，分曹隶事。编译图书局“附设研究所，专研究编纂各种课本”。宣统元年（1909）设立“编订名词馆”，统一名词术语以应教科书之需。总务司所属审定科“掌审查教科图书。凡编译局已经编译者，详加审核颁行”。《奏定学堂章程》强调师范教育和教科书编审。学部建立之后，师资培训制度和教科书编审制度逐渐规范。

---

① 《钦定京师大学堂章程》，见：《中国近代教育史资料》（中册），第55页。

② 张之洞等奏进学堂章程在光绪二十九年十一月二十六日（1904年1月13日）。是年为癸卯年。此处仍注1903年以免歧误。

除科学教育与儒学教育的矛盾外，科学教育与科举选士制度也是一个突出的矛盾。癸卯学制颁行之后，这一矛盾更为突出，以至于“科举一日不停”，“学堂决无大兴之望”。清末科举制度的变革经历了变革考试内容、递减科举中额、废除科举制度等三步。考试内容的变革包括增设实学内容与废除八股、试帖诗等两个方面。数学作为实学最终列为科考的内容。

道光二十三年（1843），两广总督祁埙（1777～1844）奏请开设制器通算科。同治九年（1870），闽浙总督英桂，船政大臣沈葆桢（1820～1879）“请特开算学一科”。光绪十年，国子监司业潘衍桐奏请“另开一艺学科”。以上奏议均未获准，仅实学人才的选拔途径有所变通。“如有专精算学者”可以“核实保荐”，“听候简用”。“愿学算法者，统归国子监算学照章学习”。光绪十三年，御史陈琇莹奏请“明习算学人员量予科甲出身”。议准凡生员，监生报考算学者，可于乡试之年经总理衙考试，其明通者录送顺天乡试。如人数在20名以上，统于卷面加印“算学”字样，与通场士子同考诗文策问。每20名取一名举人，最多不得超过三名。光绪十四年，有32人报考，取中一名。以后各科报考人数均不足20名。光绪二十二年，礼部增加算学录取名额，不拘定三名限制，即使诗文策问文字稍平，亦准酌量取中。① 虽中额仍很有限，考试亦不得法，但数学终列入科考的内容。

甲午战败之后，兴学堂、废八股成为一时舆论。戊戌变法期间第一次明令废除八股文。光绪二十四年五月上谕：“著自下科始，乡会试及生童岁科各试，向用四书文者，一律改试策论。”② 试帖诗、楷法等科举考试重点亦随之取消。因戊戌变法失败，旋复其旧。至新政复行，光绪二十七年七月上谕之后，以八股文取士才完全废除。

光绪二十七年五月，“江楚会奏”第一疏提出“按科举递减科举取士之额，为学堂取士之额”。光绪二十九年十一月，张百熙、荣庆、张之洞奏准：“自下届丙午科起，每科分减中额三分之一。”三科之后，停止乡试，会试。光绪三十一年八月，袁世凯等六大员会奏：“欲推广学校，必自先停科举始。”疏上，奉上谕：“著即自丙午科为始，所有乡会试一律停止，各省岁科考试亦即停止。”③ 自隋炀帝大业三年（607）以来行用一千三百年的科举制度至此废除，包括数学教育在内的科学教育与科举选士制度的矛盾基本解决。

二　清末的数学教育观念

乾嘉以降，中国传统数学著作的复显与传刻，兼以清末西方数学的再次传入，数学教育的内容亦属丰富，数学教育的普及程度堪称空前。而就数学教育的观念而言，尚有一个发展变化的过程。在中国传统的学术中，儒学具有深厚的社会基础与广泛的影响。儒学的基本内容包括“道”与“艺”，而道又是儒学的根本所在。清代戴震尝谓：“有志闻道，谓非求之六经、孔孟不得。”④ 自汉代以降，儒学独尊，“数居六艺之末”遂成正统观念。这一观念决定了数学作为“艺”的实用性质与边缘位置。17世纪以来的“西学东渐”以及伴随而产生的“西学中源说”与“中体西用说”均主张接受而不排斥西方数学。随着清末教育的变革，

① 礼部议复整顿各省书院折，《中国近代教育史资料》上册，第72页。

② 光绪二十四年五月初五日上谕，《中国近代学制史料》第一辑下册，第83页。

③ 清帝谕立停科举以广学校，《中国近代教育史资料》上册，第66页。

④ 段玉裁，戴东原先生年谱，见：戴震文集，中华书局，1980年，第240页。

数学知识的普及，数学的边缘位置已经发生明显的改变，而数学属于实用知识的观念没有改变。简言之，数学教育的目的是训练一种技能。这种技能只是工艺制造、经世致用的工具而不是训练科学精神与方法，籍以提高人才的素质。清末倡言西学者，几无不表述其数学观念。其中，以洋务运动后期的代表人物、癸卯学制制定的主持人张之洞所述最具代表性："天文、地图、化、力、光、电，一切格致制造，莫不有算，各视所业何学，即习何学之算，取足应用而止。如是则得实用而有涯涘。今世学人治算者如李尚之、项梅侣、李壬叔诸君，专讲算理，穷幽极微，欲卒其业，皓首难期，此专家之学，非经世之具也。"① 所云"取足应用而止""非经世之具也"即以数学为一种实用知识。以实用为目的而不深求算理，数学教学水平与研究势难进步。清末的数学教学内容以初等数学为主，接受数学教育的人数不少而研究成就无多，当与数学教育观念有直接关系。自《代微积拾级》出版（1859）至国人自编的第一本微积分教材《微积阐详》序成（1905），相距45年之久。其间开设微积分课程的学堂、书院、学校为数无几。数学作为一个独立的专业见诸《奏定大学堂章程》（1904）。章程规定大学堂的格致科大学（相当于学系）下设算学门（相当于数学专业）。算学门的必修课与选修课的课程设置已较规范。此一变化说明，数学属于实用知识的观念有所改变。然而，终清之世，格致科大学算学门未曾建立，付诸实践仍需时日。

"中学为体，西学为用"是清末主流的学术思想和官方的教育宗旨。数学教育观念之浅陋亦即"中体西用说"局限性的具体反映。《奏定学堂章程》进呈时，张百熙、荣庆、张之洞奏称："至于立学宗旨，无论何等学堂，均以忠孝为本，以中国经史之学为基。俾学生心术壹归于纯正，而后以西学瀹其智识，练其艺能，务期他日成材，各适实用，以仰副国家造就通才，慎防流弊之意。"② 这也就是"中体西用说"所决定的教育宗旨。尽管中体西用说受到清末有识之士的批评，然而作为官方的理论一直推行至清代灭亡。在此背景之下，数学教育观念之浅陋固自必然。

三 清末的留学活动与数学留学生

洋务运动兴起以后，在容闳等有识之士的积极倡议下，曾国藩、李鸿章等朝廷重臣认识到直接派遣留学生到西方学习对培养洋务人才和国家自强的重要性。1872年8月，晚清政府派出第一批幼童30人赴美留学。这是中国首次有计划地向国外派遣官费留学生。此后至1875年，清廷又先后派遣三批共90名幼童赴美留学。这些留美生约在13岁至20岁之间，计划在美留学15年，主要学习"军政、船政、步算、制造诸学"③。这些留学生有的赴美不久就成为其所就读学校的优秀学生。但由于种种原因，晚清政府于1881年将他们全部撤回，这致使幼童留美计划中途夭折。

此外，为培养海、陆军等军事人才，晚清政府还多次向欧洲派遣留学生。1875年，福州船政学堂派遣学生5人赴英法两国考察学习。1876年，李鸿章奏请派遣7人赴德国学习

---

① 张之洞，《劝学篇·内篇·守约》，中州古籍出版社，1998年，第97页。

② 张百熙、荣庆、张之洞，《重订学堂章程折》，见：舒新城编．中国近代教育史资料（上册），人民教育出版社，1980年，第197页。

③ 曾国藩、李鸿章，《奏选派幼童赴美肄业办理章程折》，见：舒新城编，中国近代教育史资料（上册），人民教育出版社，1980年，第163页。

水陆军械技艺。1877～1897年，福州船政学堂又先后派出三批学生到欧洲留学。1881年12月，李鸿章从北洋水师经过严格挑选，将十多名人员送到欧洲留学，其中有数名北洋水师学堂学生。1886年3月，李鸿章又从北洋水师学堂选派10名优秀学生赴欧洲留学。[①]

甲午战争后，张之洞等当权派官员力主通过留学日本学习西方，使晚清政府开始将日本作为留学国别。1896年，中国驻日公使经日本政府同意，选派等13人赴日留学。此后，中国人留学日本的数量剧增。1903年，清廷颁布了张之洞奏定的《奖励游学毕业生章程》，规定："中国游学生在日本各学堂毕业者，视所学等差，给以奖励。"其中，包括给予拔贡、举人、进士、翰林等出身。在日本国家大学院5年毕业且获博士学位者，"除给以翰林出身外，并予以翰林升阶。"[②] 这又激励了一大批中国青年留学日本。至1911年清朝灭亡，中国的留日学生已数以万计。

1901年9月，晚清政府被迫与八国联军签订了屈辱的"辛丑条约"。条约规定，中国赔款白银四亿五千万两，这就是"庚子赔款"。美国分到2444万余美金，而美国战争损失仅为1165．5万余元，超索1278.5万余元。若加上利息，美国所得赔款总数则超过美金5300万元。[③] 1905年以后，美国驻华公使柔克义（W. W. Rockhill）和美国公理会教士斯密斯（Arthur H. Smith）倡议，并加之中国驻美公使梁诚锲而不舍地与美方运动交涉，美国决定将超索的庚子赔款退还中国，用于中国的教育事业，并特别希望将退款用于选拔学生"赴美入学校及求高深学问"之用。清政府于是由外务部出头允诺，"初四年每年派学生约一百名，自第五年起于赔款期内每年至少亦续派学生五十名"。[④] 在1909年7月在北京设立"游美学务处"，并于9月28日在清华园内开办"游美肄业馆"。自1909年8月至1910年9月，游美学务处甄选了两批共117名学生赴美留学。1910底，"游美肄业馆"更名为"清华学堂"。半年之后，清华学堂又经考试录取63人径送到美国学习。这三批学生的数量为180名，仅为原计划三年资送定额的60%。这些学生到美国后，主要以工、商、矿等科为主修专业，以数学作为主修专业的学生约为5人，不足留学生总数的3%。

从19世纪70年代晚清政府开始正式派遣留学生至清朝灭亡，中国的留学生中研习数学者包括冯祖荀（1880～约1940）、郑之蕃（1887～1963）、秦汾（1887～1971）、王仁辅（1886～1959）、胡明复（1891～1927）、姜立夫（1890～1978）、马仙峤、朱篆等人。他们归国后基本都对传播近代数学知识和推动高等数学教育发展起到了奠基性的作用。冯祖荀是京师大学堂赴日留学生。他1904年入日本第一京都学校，1908年入京都帝国大学学习数学，返国后于1913年到北京大学任数学教授，曾任数学系主任。郑之蕃1907年入美国康奈尔大学研习数学，1910年入耶鲁大学深造，回国后长期任教于清华大学，曾任数学系主任。秦汾1906年入哈佛大学攻读天文数学，1913年获硕士学位，返国后长期担任北京大学数学教授。王仁辅于1909年由游美学务处甄选赴美后在哈佛大学研习数学，1915年获硕士学位，1931年之前，长期担任北京大学数学教授，曾任数学系主任，此后在北平师范大学、

---

① 宋美云，归国留学生与天津近代企业，见：李喜所主编，留学生与中外文化，南开大学出版社，2005年，第126页。

② 张之洞，《奖励游学毕业生章程》，见：舒新城编，中国近代教育史资料（上册），人民教育出版社，1980年，第185～187页。

③ 苏云峰，从清华学堂到清华大学1911～1929，生活·读书·新知三联书店，2001年，第2页。

④ 清华大学校史研究室编，清华大学史料选编（第1卷），清华大学出版社，1991年，第90页。

辅仁大学等校任教。胡明复于1910年由游美学务处甄选赴美后，先入康奈尔大学深造，后入哈佛大学研究院专攻数学，并于1917年获哈佛大学哲学博士学位。他是中国第一位数学博士，是中国科学社的创建者之一，返国后担任大同大学数学教授，不幸于1927年溺水身亡。姜立夫先后在美国伯克利加州大学和哈佛大学研究生院深造，1919年获哈佛大学哲学博士学位。学成归国后，他长期任教于南开大学数学系并任系主任，曾任中央研究院数学研究所所长，1948年当选为中央研究院首届院士。

第二节　晚清数学教育

一　洋务学堂的数学教育

由于制器是自强之先路，讲求算学乃制器之根本的思想，已成为洋务运动的领导者曾国藩、左宗棠、李鸿章及总理衙门奕䜣等朝廷重臣的共识，数学教育遂成为京师同文馆、上海广方言馆等重要洋务学堂科学教育的重点。

（一）上海广方言馆的数学教学

上海广方言馆在1863年一开馆便开设算学课程。其章程谓“西人制器尚象之法，皆从算学出，若不通算学，即精熟西文亦难施之实用”。① 广方言馆最初的课程分为“经学、史学、算学、词章”四类。算学为四类课程之一，所有学生的主课。1870年，广方言馆移入江南制造局后，学生分为上、下两班。下班是低年级，学习“算学、代数学、对数学、几何学、重学、天文、地理、绘画”，并须熟习“算经十书”。上班是高年级，尽管是学习勘探、设计、制造、外语等课程，但亦多以算学为基础。1894年后，广方言馆专设算学馆及天文馆。陈旸、时曰醇、刘彝程、沈善蒸及席淦等人都担任过算学教习。其中，刘彝程在馆中任教时间最长。

广方言馆的数学教学内容可由沈善蒸编辑的《广方言馆算学课艺》了解大概。《课艺》辑录了刘彝程任教期间8位学生的课卷，完成于1873～1896年，收入《课艺》时由刘彝程、沈善蒸“择取”和“厘定”。《课艺》凡43题②，可分别归入“算学”、“代数学”、“几何学”、“重学”课程之中。广方言馆开设的“对数学”与“天文”课程，在《课艺》中没有体现出来，可能这两门课程在广方言馆数学课程中地位较轻。

“算学”类都是中算问题，凡20题，包括勾股和较术16题、《九章算术》盈不足类1题、《九章算术》少广类1题以及《测圆海镜》类2题。但其解法却不限于中法。大体说来，主要以中法解决的有5题。这5题中使用“天元术”求解的有4题。另有3题是以中算知识求证。例如，第38题是一个有关“盈朒或双套盈朒及贵贱差分”的问题。

基本以西法求解有7题。例如，第15题是一个一元三次方程求根问题：“今有俱整实根

---

① 《上海初次设立学习外国语言文字同文馆试办章程十二条》，见：朱有瓛主编，中国近代学制史料（第1辑上册），华东师范大学出版社，1983年，第216～217页。

② 清·沈善蒸辑，《广方言馆算学课艺》，上海著易堂书局发兑，1896年。

之立方式，一百二十八为负实，四十八为负上廉，空下廉，一为正隅。试用代数亥加入法，开得三个方根，各几何？并录细草。”按现代数学术语解释，即求方程 $x^3-48x-128=0$ 的根。广方言馆学生龚杰解此题时使用了《代数术》① 第十一卷第一百一十四款有关三次方程“地^{三}⊥午地⊥未 =0”，即 $x^3+ax+b=0$ 的求解公式。

以中算与西算结合的方法求解有 5 题，都属勾股和较术问题，且解法以刘彝程本人的相关成果为主。例如，第 18 题是一构造勾股形的问题。此题可分为两部分：第一部分为求证造一个勾股形，使其勾股较等于原勾股形之勾股较的幂的方法，与刘彝程《简易庵算稿》卷四“甲午冬一”题中的三种形式的第一种的情形相同，证法也与《简易庵算稿》的方法基本相同。第二部分为求证造一个勾股形，使其勾股较等于原勾股形之勾股较的方法，与《简易庵算稿》卷四“甲午冬二”题相同，基本上是以刘彝程在此题中创立的三个基本算式为基础进行证明的。

《课艺》的西算及力学问题，凡 23 题：“代数学”类 7 题，包括连比例级数、二项式定理、二次不定方程、四率比例原理证明各 1 题及 3 道应用题；“几何学”类 15 题，包括平面几何 12 题和立体几何 3 题。“重学”即今之力学，仅 1 题。其中除第 30 题用“天元术”术语设未知数及以筹算形式表示数字外，其他 22 题均主要以西算求解。第 35 题为力学问题，根据初等物理知识以四率比例法求解。从这些问题的解法可以看出广方言馆的数学教学内容，包括《代数术》和项名达、戴煦以及刘彝程本人等中算家的研究成果。例如，第 3 题为“三角形之三角为角、亢、氐，其三正切连乘等于三正切相加。试证其理”。即已知三角形的三个角分别为 A，B，C，求证 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$。解题过程中提到“准代数术吧幅式：（甲⊥乙）正切 =（一 丅甲正切乙正切）/（甲正切⊥乙正切）”，即指《代数术》第二十四卷“论八线数理”第二百四十一款中的第一个“吧幅式”。将其译为现代数学符号为：$\tan(A+B)=(\tan A+\tan B)/(1-\tan A\tan B)$。

从整体上看，在广方言馆的数学教学中，西算的比重超过四分之三。

（二）京师同文馆的数学教学

1867 年 6 月 30 日，朝廷批准了奕䜣等人的建议，京师同文馆增设了天文算学馆，起初由英国人额布廉（M. J. O' Brien）和法国人李弼谐（E. Lepissier）讲授，并经考试录取 10 人。② 李善兰 1868 年入京担任京师同文馆算学教习。1882 年李氏去世后，席淦（1845～1917）于 1886 年被递补为算学教习。19 世纪 90 年代末期，王季同短期担任算学教习之职。

同文馆出版的《算学课艺》③ 为李善兰就任同文馆算学教习后至 1880 年间 52 位学生课卷的合集，乃反映同文馆前中期教学内容的珍贵史料。它共分四卷，总计 198 题，由李善兰亲自阅定，同文馆算学副教习席淦和贵荣编辑。第一卷天文类 20 题，力学类 30 题，凡 50 题。第二卷平面几何 23 题，立体几何 4 题，垛积术类 7 题，招差术类 2 题，连比例类 1 题，物不知数类 2 题，百鸡类 3 题，二项式展开类 1 题，《九章算术》盈不足类 1 题。第三卷测

---

① ［英］华里司撰，［英］傅兰雅口译，清·华蘅芳笔述，《代数术》，江南制造局刊本，1873 年。

② 《同治七年五月二十三日（1868 年 7 月 12 日）总理各国事务奕䜣片》，见《中国近代学制史料》（第 1 辑上册），华东师范大学出版社，1983 年，第 45～46 页。

③ 清·席淦，贵荣辑，《算学课艺》，上海著易堂石印本，1896 年。

圆类 42 题。第四卷勾股合较术类 25 题，组合类 1 题。另外，第二卷和第四卷共有应用杂题 36 题。这大体上反映了李善兰执教时期，讲授内容的侧重顺序。

根据《课艺》，并结合 1876 年同文馆公布的课程表、同文馆岁试、大考试题及《清会典》等相关史料，可知同文馆的数学教学内容大致分为以下几个方面：

第一，明末清初和鸦片战争以后两次传入的部分初等天文、力学知识。约占《课艺》题目的 1/3。天文知识主要包括以日食定方位、计算各星经纬度和北极出地度数、推算太阳高弧、已知日地距离求地所受光热、推求日地距离、推求物在日在地轻重比例等。力学涉及静力学和动力学两部分内容，主要包括并力、分力、重心、杠杆以及运动速度等问题。

第二，西方传入的初等数学知识。主要包括平面几何、立体几何、简单日常应用杂题、对数、排列组合等。其中，平面几何内容占绝大多数；大部分日常应用杂题与人民的衣食住行联系紧密，多为计算分钱、复利、牛马各价、男女人数等；对数与排列组合在同文馆的数学教学中所占分量很轻。

第三，高等数学中的微积分知识。1876 年，同文馆公布的两种课程均包括“微分积分”。然而，从现存同文馆天文算学试题中来看，仅 1878 年、1895 年岁试有 3 道涉及微积分的题目，分别为求二项式的级数、计算旋转体体积和无穷级数求和问题。前者还被编入《课艺》。这说明同文馆在数学教学中虽开设“微分积分”这门课程，但并不是重点内容，而且所教授的仅为简单的微积分入门知识。

第四，传统中算问题，按在《课艺》中的分量多少依次是测圆类、勾股和较术、垛积术、百鸡类、物不知数类、招差术以及盈不足类等。可见，测圆类问题是同文馆数学教学非常重要的内容。该类题目主要根据《测圆海镜》中的问题改编而成，也有李善兰研究《测圆海镜》时加入的合勾股形和断勾股形问题。但是这些问题真正以中算方法求解的只有 6 题，解法有天元术、四元术、大衍总数术、招差术等。其他问题的解法大都采用丁韪良所说的“合中西之各术”① 的形式，但除卷二第 19 题、卷三第 34 题等的解法外，大部分还是西法为主。所谓“合中西之各术”，是指在化成一元高次方程或方程组求解时采用“天元术”与“四元术”中的“天”、“地”、“人”、“物”表示未知数；其他符号，如常数、未知数的幂次、分数、计算符号等，采用李善兰翻译西算著作所采用的符号；化简、消元过程采用初等代数的方法；最简方程援用中算的纵式记法表示；最后采用西方笔算开方。

根据 1876 年同文馆拟订的两种课程以及对《课艺》题目的分析，我们可以确定同文馆的数学教学用书主要有如下几种：《几何原本》、《代数学》、《数理精蕴》、《重学》、《格物入门》、《九章算术》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《测圆海镜》、《四元玉鉴》、《垛积比类》、《四元解》、《代微积拾级》等。

综前所述，上海广方言馆和京师同文馆的数学教学中都包括中算内容，京师同文馆的课程表中还保留着一些与中算相关的科目，但总体说来是以西算为主的，甚至许多中算问题都以西法求解。李善兰“合中西之各术”之教学特色的重心不在“中法”而是在“西法”上。这表明 19 世纪下半叶，西算取代中算，数学教育“西化”在中国已成为一个无法抗拒的潮流。

---

① ［美］丁韪良，《算学课艺序》，见：清 · 席淦，贵荣辑，《算学课艺》，上海著易堂石印本，1896 年。

（三）专业学堂的数学教育

19世纪60年代洋务运动兴起后，部分专业洋务学堂也开设数学课程，并重视数学教育。兹简略介绍如下。

1. 福州船政学堂

由闽浙总督左宗棠于1866年奏请设立，是中国第一所海军学堂。福州船政学堂的教学分为前、后两学堂进行，前学堂，名为法文学堂，专习制造，有造船科、设计科和艺圃等3科；后学堂，名为英文学堂，专习管轮驾驶，有航行理论科、航行实践科和轮机房等3科。两学堂分别聘请法国、英国教习直接用外文授课。

法文学堂的造船科开办于1867年，最初招生12人，基本课程包括法文、算术、代数、画法几何和解析几何、三角、微积分、物理、机械学。设计科开办于1868年，基本课程包括法文、算术、平面几何、画法几何以及一门详论150匹马力轮机的课程。艺圃成立于1868年，课程包括法文、平面几何和画法几何、代数、制图以及一门讲解轮机的课程。

英文学堂的航行理论科的课程有英文、算术、几何、代数、平面三角和球面三角、航海天文学、航海理论、地理。航行实践科，1871年才开始教学。航行实践科的课程涉及航海技术、射击技术和指挥等。轮机房的宗旨是为福州建造的船舶训练高级轮机军官，其课程包括英文、算术、几何、制图、发动机绘制、海上操纵轮机规则等。[①]

2. 广东实学馆（西学馆）暨广东水陆师学堂

在两广总督刘坤一倡议和支持下，由督臣张树声、抚臣裕宽等于1880年筹建。该馆的办学目标是为了培养“水师将材”，分“驾驶一途，制造一途”。驾驶、制造、外文都由名洋教习教授，汉文和算学则由汉文教习教授。初开馆时学生只学外国语言文字和算学。学习算学时，先学笔算，再学代数、几何、平三角和弧三角、测量术。在“诸童算学有得升至一班者”时，再分途教授，分别学习驾驶，制造，翻译。5年期满后，再分赴工厂、轮船、外国学习，使之精益求精。[②] 该馆首届招生50名，由方恺（1839～1891）任汉文教习，教授汉文和算学。[③] 1884年，两广总督张之洞将广东实学馆改名为广州博学馆，1887年又改为广东水陆师学堂。

按照张之洞的计划，广东水陆师学堂的水师和陆师均招生70名。先从博学馆的学生中挑选通晓外语、算学者30人为内学生；再从军营中选20人为营学生；选文理已通者20人为外学生。外学生到学堂后，先学习英文和算学，以作为初步之基础。1889年，张之洞又向朝廷奏请在广东水陆师学堂内增设“五学”：矿学、化学、电学、植物学、公法学。1893年谭钟麟督粤后，解散陆师，改学堂名为黄埔水师学堂。1904年改名为水师鱼雷学堂，

---

① 毕乃德，《毕乃德记福建船政学堂的分科及其课程》，见：朱有瓛主编，中国近代学制史料（第1辑上册），华东师范大学出版社，1983年，第463～467页；Knight Biggerstaff, The Earliest Modern Government Schoolsin China. Ithaca, New York: Cornell University Press, 1961, 210～217。

② 光绪七年五月十三日（1881年6月9日）江海关道禀南洋大臣刘（附拟西学章程），见：朱有瓛主编，中国近代学制史料（第1辑上册），华东师范大学出版社，1983年，第479～482页。

③ 清·方恺，《代数通艺录·徐国栋序》，时务报馆石印本，1896年。

1912 年又改名为黄埔海军学校。①

3. 天津水师学堂

由直隶总督李鸿章 1880 年奏准，于 1881 年正式建立。学堂分驾驶、管轮两门；学制 5 年，其中有 4 年在学堂学习，有 1 年在船上练习。学生在学堂所学功课，包括“英国语言文字、地舆图说、算学至开平立诸方、《几何原本》前六卷、代数至造对数表、平弧三角法、驾驶诸法、测量天象、推算经纬度诸法、重学、化学格致”。考试分春秋两次，凡 10 项，其中包括“算学代数”、“几何”、“平弧三角法” 3 项。两次均通过者，准保以候补把总职。

学生成为候补把总后，在船上练习 1 年，而后通过考试者再入学堂学习 6 个月。学习期满后，考试其驾驶学问。考试内容包括代数、几何、三角、力学、格物学、机器学、英文、气候学、驾驶学、天文学、测量学、仪器用法、测天等 13 项，共计 1500 分。其中，代数、几何、三角 3 项凡 475 分，占总分的 31.7%。从现有资料可知，代数考“通分、方程、积方、开方、指数、二次无根式、二次方程式、三率、三种级数、对数理并用法”；几何有《几何原本》前六卷的内容；三角考各种公式、平弧三角、边角相求法等。② 由此可见，天津水师学堂对数学课程很重视，但其教学内容没有超出初等数学的水平。

4. 天津武备学堂

直隶总督李鸿章 1885 年奏设于天津。数学课程在天津武备学堂亦受重视。1887 年前后，李鸿章鉴于德国教习多非“算量测绘”专家，且学堂成立一年后在数学方面他们仅授“加减乘除”，遂聘请卢靖任天津武备学堂算学总教习，同时华蘅芳、姚石泉、孙晓槎等人亦在堂教授数学。这些算学家朝夕讨论，极一时之盛。卢靖一度专授幼年学生的算术课程。课余之暇，令学生以当时传入的代数知识演算中国古代数学习题，并编为《几何代数衍》六卷、《九章代数草》十卷。

5. 湖北武备学堂

由湖广总督张之洞奏准，于 1896 年建立于武昌。京师同文馆毕业生蔡锡勇任学堂总办，教习起初由两名德国人充任。学生名额为 120 人。其讲堂功课包括算学、测量、绘图学等。学堂学制 3 年，有月课、季课、年终大课。学有成效者，将予以请奖，并择委差缺。③

（四）洋务学堂学生的数学工作

在晚清洋务学堂培养的学生中，席淦、杨兆鋆、王季同等也开展了一些数学工作，并有著作出版，体现了晚清数学教育的成果。

1. 席淦

席淦，原名裕宗，字翰伯，江苏青浦县珠里人。他是上海广方言馆首批毕业生，1868

---

① 陈景芗，《记广东水陆师学堂》，见：中国近代教育史料汇编 · 洋务运动时期教育，上海教育出版社，1992 年，第 462 ~ 464 页。

② 《北洋海军章程》招考学生例，见：朱有瓛主编，中国近代学制史料（第 1 辑上册），华东师范大学出版社，1983 年，第 508 ~ 513 页。

③ 光绪二十二年九月初四日（1896. 10. 10）湖广总督张之洞招考武备学生示并章程、光绪二十三年正月二十八日（1897 年 3 月 1 日）湖广总督张之洞奏设湖北武备学堂，见：朱有瓛主编，中国近代学制史料（第 1 辑上册），华东师范大学出版社，1983 年，第 541 ~ 546 页。

年由曾国藩咨送到京师同文馆[①]，从李善兰学算。李氏逝世之后，总理衙门于1886年将席淦递补为算学教习。席淦教学认真，并有较好的教学方法，在学生中口碑甚佳。例如，曾就读于京师同文馆的齐如山虽对同文馆批评甚苛，但对李善兰师徒评价颇高："其中最认真的，就是汉文算学，教习为席汉[②]伯，乃李善兰得意门生，教法也很好，家兄补六两银子的膏火，就是因为算学学的深。"[③]

据《青浦县续志》记载，席淦在京师同文馆讲授近30年，被"累保至兵部郎中截取知府"。1899年试经济特科，张之洞"以淦名列荐，刻谢不应"。嗣后，直隶总督袁世凯奏调席淦出任北洋官银号筹款局淮军银钱所总会办，但不久"即乞病归"[④]。席淦著有《各等面体互容比例》一卷、《弧矢启秘图解》二卷，均收入刘铎所辑《古今算学丛书》。

2. 杨兆鋆

杨兆鋆（1854~?）[⑤]，字诚之，号须圃，浙江乌程（今湖州市）人。1868年入上海广方言馆学习，因"学有成效"[⑥]，由两江总督曾国藩1871年咨送至京师同文馆深造[⑦]，成为李善兰的高足，在京师同文馆大考中名列全馆第二[⑧]。1877年升迁出馆后，先后任苏松太道公署翻译[⑨]，曾任江苏试用同知。1884年，其以随员身份随许景澄公使出使法、德等国，"与彼都人士交，学业愈进"[⑩]，协助接收北洋向德国订造的定远、震远、济远三舰。1888年返国后，任二品衔江苏补用道。1893年，任金陵同文馆教习兼授算学，选定《天问堂课艺》[⑪]。1897年，杨氏任江南储才学堂督办。1902年任出使比利时钦差大臣。

席淦和贵荣编辑同文馆《算学课艺》时，收录了杨氏的5篇课艺[⑫]。杨兆鋆集其多年学习心得，于1898年撰成《须曼精庐算学》。由其表弟刘承干（1882~1963）1916年在嘉业堂刊刻，收入《吴兴丛书》[⑬]。《须曼精庐算学》凡二十四卷，依次为"椭曲同诠"、"抛摆致用"、"平圆容切"、"体积互容"、"堆垛演算"、"力学探源"、"重心释理"、"动定格物"、"天象管窥"、"健行衍义"、"求一通术"、"割圆举纲"、"勾股索隐"、"九容演代"、"勾股图解"、"勾股容方"、"勾股全草"、"直积各问"、"垂线诸求"、"边径线释"、"方田推步"、"立表测量"、"比例设问"、"难题偶检"。其内容涉及垛积术、勾股和较术、《测圆海镜》等各类中国传统数学问题，还涉及当时已传入中国的圆锥曲线和重学等西方数学和力学知识。

3. 王季同

在中国数学由传统向现代过渡的历史进程中，王季同（1875~1948）是继李善兰之后

---

① 朱有瓛主编，中国近代学制史料（第1辑上册），华东师范大学出版社，1983年，第53页。

② "汉"为"翰"之误。

③ 齐如山，《齐如山回忆录》，宝文堂书店，1889年，第40~41页。

④ 张仁静修，钱崇威纂，金詠榴续纂，《青浦县续志》第3册，成文出版社有限公司，1975年，第867~868页。

⑤ 本部分内容重点参考：王全来，同文馆毕业生杨兆鋆及其数学工作（硕士学位论文），天津师范大学，2001年。

⑥ 清·席淦，《须曼精庐算学原序》，见：清·杨兆鋆，《须曼精庐算学》，吴兴刘氏嘉业堂刊本，1916年。

⑦ 朱有瓛主编，中国近代学制史料（第1辑上册），华东师范大学出版社，1983年，第53页。

⑧ 清·席淦，《须曼精庐算学原序》，见：清·杨兆鋆，《须曼精庐算学》，吴兴刘氏嘉业堂刊本，1916年。

⑨ 《同文馆题名录》，1879年刊。

⑩ 清·席淦，《须曼精庐算学原序》，见：清·杨兆鋆，《须曼精庐算学》，吴兴刘氏嘉业堂刊本，1916年。

⑪ 钱宝琮，浙江畴人著述记，见：李俨钱宝琮科学史全集，辽宁教育出版社，第294页。

⑫ 清·席淦，贵荣辑，《算学课艺》，上海著易堂石印本，1896年。

⑬ 清·杨兆鋆，《须曼精庐算学》，吴兴刘氏嘉业堂刊本，1916年。

中国重要的数学家之一。而且他的《四元函数的微分法》① 是一篇值得关注并具有重要历史意义的论文。

（1）王季同的生平

王季同，又名季锴，字孟晋，号小徐，江苏苏州人，自幼聪慧过人，光绪十七年(1891)，还在京师同文馆学习算学时便有数学著作《泛倍数衍》和《勾股补解》问世。在前者中，他根据中国传统数学“天元代数相消开方之意”，设一“泛函数”来推求级数，颇得当时前辈学者好评。光绪二十一年，王季同在同文馆毕业后留任算学教习，旋有《九容公式》出版②。蔡元培赞誉“小徐先生有数学的天才”。③ 自光绪二十八年起，王季同担任蔡元培为总理的爱国学社教员。次年，蔡元培和王季同等在上海组织对俄同志会。宣统元年(1909)，王季同被派赴英国任清政府驻欧洲留学生监督署随员，遂有机会到英吉利电器公司和德国西门子电机厂研究实习。

1911 年 5 月 8 日王季同向英国爱尔兰皇家科学院（Royal Irish Academy）提交论文《四元函数的微分法》，7 月 13 日在《爱尔兰皇家科学院院刊》（Proceedings of the Royal Irish Academy）上发表。这是一篇具有独创性并达到一定学术水平的论文，是京师同文馆培养出来的数学家在胡明复等接受西方正规数学专业训练的留学生之前发表的得到国际学术界认可的现代数学论文。

第一次世界大战期间，王季同参与倡办实业，1927 年后参与筹备中央研究院，发表多篇现代数学、物理学的论文，为现代科学在中国发展做出了杰出贡献。④

（2）《四元函数的微分法》

四元数系是由爱尔兰数学家哈密顿（William Rowan Hamilton，1805 ~ 1865）在长期研究复数的基础上于 1843 年正式提出的。四元数是由于力图推广复数而产生的历史上第一个超复数系的例子。宣统元年，京师大学堂数学教习顾澄翻译出版了美国数学家哈代（A. S. Hardy）的《四原原理》（原书名为 Elements of Quaternions），比较系统地介绍了四元数的基本内容，王季同的胞兄王季烈为之作序。王季同赴英之前有可能看到此译本。

王季同在《四元函数的微分法》中，主要解决了在四元数 $q = w + ix + jy + kz$（q 为四元变量）与其微分 $\mathrm{d}q$ 非共面情况下，如何得到 q 的函数 $f(q)$ 的一般微分表达式的问题。他的工作主要分以下四个部分：

①将 q 的微分 $\mathrm{d}q$ 分解为两个四元数：其中一个与 q 共面，为 $\mathrm{d}q + Vq \cdot V(V\mathrm{d}q : Vq)$；另一个与 $\mathrm{Ax}q$（其中，Ax 为 axis 的缩写，表示以 $\mathrm{Ax}q$ 为轴的四元数）垂直，为 $-Vq \cdot V(V\mathrm{d}q : Vq)$。对于 q 和 $\mathrm{d}q$ 的每一对值，都有唯一一对对应值 $\mathrm{d}q + Vq \cdot V(V\mathrm{d}q : Vq)$ 和 $-Vq \cdot V(V\mathrm{d}q : Vq)$ 与其对应。

②分解 $F(q, \mathrm{d}q)$，并求 $F[q, \mathrm{d}q + Vq \cdot V(V\mathrm{d}q : Vq)]$ 的值。令 $F(q, \mathrm{d}q) = \mathrm{d}f(q)$，$F(q, \mathrm{d}q)$ 是 $\mathrm{d}q$ 的线性函数，可分解为 $F[q, \mathrm{d}q + Vq \cdot V(V\mathrm{d}q : Vq)] + F\{q, -Vq \cdot V(V\mathrm{d}q : Vq)\}$。因为 $\mathrm{d}q + Vq \cdot V(V\mathrm{d}q : Vq)$ 与 q 共面，且前者的函数不包括四元常量，所以

---

① Wang K T. The differentiation of quaternion functions. Proceedings of the Royal Irish Academy, 1911, 29 (4): 73 ~ 80.

② 清 · 王季同，《九容公式》，见：刘铎辑，《古今算学丛书》，上海算学书局石印本，1898 年。

③ 蔡元培，佛法与科学之比较研究蔡序，见：王季同，佛法与科学之比较研究，世界新闻社，1932 年，1。

④ 郭金海，华尔和胡德关于螺旋弹簧新公式的研究及王季同的回应，自然科学史研究，2005，24 (4)：330 ~ 344；王季同的电网络分析新方法及其学术影响，见：中国科技史料，2003，24 (4)：312 ~ 319。

$F[q, dq+Vq \cdot V(Vdq:Vq)]$ 的值可按 q 与其微分 dq 非共面的情况求得，即 $F[q, dq+Vq \cdot V(Vdq:Vq)] = f'(q) \cdot [dq+Vq \cdot V(Vdq:Vq)]$。其中，$f'$表示$f$的导数。

③求 $df(q)$ 的一般表达式。$F\{q, -Vq \cdot V(Vdq:Vq)\}$ 是垂直于 Axq 或 Ax$f(q)$（其中，Ax 示以 Ax$f(q)$ 为轴的四元数）的矢量。与 dq 的情况相似，$df(q)$ 可分解为两个四元数：一个与$f(q)$ 共面，为 $df(q) + Vf(q) \cdot V\{Vdf(q) : Vf(q)\}$；另一个与 Ax$f(q)$ 垂直，为 $-Vf(q) \cdot V\{Vdf(q) : Vf(q)\}$。因此，$f'(q) \cdot [dq+Vq \cdot V(Vdq:Vq)] = df(q) + Vf(q) \cdot V[Vdf(q) : Vf(q)]$。又因为 $V[Vdf(q) : Vf(q)] = d\,\mathrm{Ax}f(q) : \mathrm{Ax}f(q) = d\,\mathrm{Ax}q : \mathrm{Ax}q = V(Vdq:Vq)$，所以$f'(q) \cdot [dq+Vq \cdot V(Vdq:Vq)] = df(q) + Vf(q) \cdot V(Vdq:Vq)$。从而，$df(q) = f'(q) \cdot dq + [f'(q) \cdot Vq - Vf(q)]V(Vdq:Vq)$。

④对 $df(q)$ 的一般表达式加以验证：首先运用五种函数$f(q) = q^{n/m}$（m，n 均为正整数）、$f(q) = q^{n/m}$（m，n 均为正整数）、$f(q) = \ln^q$、$f(q) = e^q$、$f(q) = \sum a_x q^x$ 加以验证。然后用$f(q) = f_1[f_2(q)]$ 加以验证。其中，f_1 与 f_2 为以上五种函数中的任意两种。

王季同的这篇论文打破了国际数学界以往只知道四元数 q 与其微分 dq 共面时$f(q)$ 的微分公式的局限，通过严谨的推导得出了它们不共面时的一般微分表达式。它的发表意味着王季同完成了由中国传统数学教育的学生与教师向现代数学家的转变，标志着中国现代数学研究的开端。由此，中国数学复兴的曙光已经露出了地平线。

二　书院的变革与数学教育

清代书院众多，就讲学内容来说，主要有以下四种类型。[①]第一类，以讲求理学为主，这种书院到清中叶以后影响渐小。第二类，以博习经史词章为主，倡导于清初，至清中叶大盛，在清代后期仍有相当影响。第三类，以制艺（即八股文）考课为主，这类书院在清代最为普遍，逐渐成为科举的预备场所。第四类，注重学习西方近代科学文化知识，这是由书院到学校的过渡形态。清代众多书院当中，虽然不乏因大师名儒讲学其中、师生切实研究学问、认真整理刊印经籍而成为当时著名学术中心的书院，但就整个书院体系而言，其山长多是“庸陋之师”，教学内容以制艺为主、无裨实用，生徒贪图膏火、志趣卑陋，发展到清代后期时已是弊端丛生、病入膏肓了。因此，对书院进行改革已是势在必行。

对书院应如何改变这一问题，当时存在着不同的认识和主张。归纳起来，主要有变通整顿书院、创设实学书院、书院改学堂三种。对这三种不同意见，清廷最初采取兼容并蓄的做法，将它们“一并通行各省督抚学政，参酌采取，以扩旧规而收实效”[②]。因而从甲午战争以后至戊戌变法以前的这段时间内，全国各地书院改革的具体做法大致可分为两种：一是创设兼课中西实学的书院，二是就原有书院变更章程、进行整顿，而后者最为普遍。

两次鸦片战争之后，随着救图存亡、求强求富思想的不断发展和完善，数学的重要性被越来越多的人所认识。早在咸丰十一年（1861）时，冯桂芬《采西学议》中就指出：“一切

---

① 陈元晖、尹德新、王炳照，中国古代的书院制度，上海教育出版社，1981 年，第 101～108 页。

② 《礼部议复整顿各省书院折》。见：舒新城，中国近代教育史资料（上册），人民教育出版社，1979 年，第 73 页。

西学皆从算学出。”“今欲采西学，自不可不学算。”① 洋务派的首领们“ 敛谓制造巧法，必由算学入手”②。这个观点在洋务派与顽固派关于同文馆添设天文算学馆的争论中曾多次被表述出来。同治九年（1870），闽浙总督英桂、船政大臣沈葆桢也提出：“水师之强弱，以炮船为宗；炮船之巧拙，以算学为本。”③ 在这种思想的指导下，在洋务派创办的大多数学堂中都开设算学课。受其影响，一些书院在教学与考课中也添加数学内容。

据陈学恂《中国近代教育大事记》记载，咸丰十六年（1866），广州学海堂增加算学一门，除课《十三经注疏》、《文选》、《朱子大全》等书外，兼学《算经十书》。

光绪元年（1875），苏松太道冯焌光创办求志书院于上海，分置经学、史学、掌故、算学、舆地、词章六斋。书院聘请刘彝程主持算学斋，每年四次出题考试数学，院外学习数学者也可应试。

光绪五年（1879），宁波创办辨志精舍，分汉学、宋学、史学、算学、舆地、词章六斋课士，聘请黄炳垕为算学斋长，任教十余年。

光绪十六年（1890），湖广总督张之洞在湖北武昌设立两湖书院，课程分为经学、史学、理学、文学、算学、经济学六门。④ 光绪二十四年（1898），张之洞将两湖书院和经心书院改定课程，其《两湖经心两书院改照学堂办法片》云：“兹将两书院均酌照学堂办法，严立学规，改定课程，一洗帖括词章之习，惟以造真才济时用为要归。两湖书院分习经学、史学、地舆学、算学四门，图学附于地舆。每门各设分教，诸生于四门皆须兼通。四门分日轮习。”“用宋太学积分之法，每月终核其所业分数之多寡，以为进退之等差。经心书院分习外政、天文、格致、制造四门，每门亦各设分教，诸生于四门皆须兼通，四门分年轮习，无论所习何门，均兼算学。”⑤ 两湖书院曾聘华蘅芳、支宝枬、汤金铸及曹汝英为算学教习，经心书院曾聘曹汝川为算学教习。

光绪二十一年（1895），陕西味经书院创设时务斋，其目的是“俾人人心目有当时之务，而以求其补救之术于经史。人人出而有用，中国之势、孔孟之教，未必不可雄驾诸洲也”。时务斋章程共有五条。第二条是“严立课程”，其中第一款“读书分类”规定：“算学为各学之门径，重学为制造之权舆，诸艺皆天地自泄之奇。”“凡此诸技，均须自占一门，积渐学去。”由此可知，在时务斋中算学被列为一门，但“诸生视之为商贾之用，全不经心”，故院长刘光蕡决定：“将向之小课改为算学课，每月二十七日，余坐讲堂面课，优者给奖。诸生未习算者，即由加减乘除入手，至日面试可也。”刘光蕡还在《谕味经诸生》中指出：“今定凡有志时务之学者，无论自占何门，均需习算，亦如士子无论为何学，无不习字之类。”“中国之患，固非人人习算所能救，然我辈所能为者，仅在是。”⑥ 这就是味经书院创设时务斋开设算学课的动因。

光绪二十一年底，湖南湘乡县士绅拟开办东山精舍，“仿湖北自强学堂成法，分科造士，为算学、格致、方言、商务四斋”。《东山精舍章程》中规定：“入舍肄业者，算学为

---

① 舒新城，中国近代教育史资料（下册），第895页。
② 朱有瓛，中国近代学制史料（第一辑上册），华东师范大学出版社，1983年，第554页。
③ 《礼部奏请考试算学折》，见：舒新城，中国近代教育史资料（上册），第27页。
④ 陈学恂，《中国近代教育大事记》，第56页。
⑤ 《两湖经心两书院改照学堂办法片》，见：舒新城，中国近代教育史资料（上册），第76～77页。
⑥ 刘光蕡，谕味经诸生，见：陈谷嘉、邓洪波，中国书院史资料（下册），浙江教育出版社，1998年，第2313页。

先。”“算学当循序精进，初学一年习几何、代数、平三角、少广，第二年则习曲线、微分、积分，第三年则习弧三角及微积分之深义、立体之几何。”[①] 《章程》还为“学算法代数者”、“学勾股者”和“学勾股画法者”分别指明学习步骤，由此可知东山精舍开设算学课的内容。东山精舍正式开办时定名为东山书院，光绪二十七年（1901）改为校士馆。

光绪二十二年（1896），江西巡抚德寿《酌裁友教书院童卷移设算科折》奏陈“将江西省城友教书院童卷全裁，所有膏奖移设算科。延请明通算学教习二人住院，名曰斋长，酌给薪水。招集算学生徒十八人在院学习，应支薪水，于裁去童卷膏奖内分给”。“如有才识超越、明通新法又畅达时务者，仍应咨送总理衙门考试，以备器使。”[②]

光绪二十三年（1897），岳麓书院改订章程，将课程定为经学、史学（附舆地）、掌故、算学、译学五门。经、史、掌故由院长自行督课，算学别立斋长，译学延请教习。算、译两学以三年为课程，不拘资格，准令童生报名附学。算学定额为五十名，三年为一班。[③]

同年，广西桂平梧盐法道为培养人才以备时用起见，仿广东学海堂办法，于经古书院添设算学一门，课以四季，每季由书院监院禀请抚宪命题考试，问以算数、算理、天文、时务四项。[④]

同年，云贵总督崧蕃在省城经正书院隙地创建学舍数楹，名曰“算学馆”。分议章程，出示招考，并慎选精通算学之人主教其中。同时，打算“一俟肄业诸生揣摩有得，再行添课天文、格致、舆图诸学，以期逐渐扩充”。[⑤]

同年，原以经史、词章、时艺课士的湖南常德德山书院改课算学，并定出学算生童课章。湖南长沙府宁乡县玉溪、云山两书院略仿岳麓新章，改课经史、掌故、算学，并拟开办译算学堂。江苏江宁的惜阴、文正两书院改考西学，每次课题都分时务、算学、兵、农、矿、化各学。[⑥]

同年，陕西巡抚魏光焘在省城创设游艺学塾。魏光焘《奏设游艺学塾折》称：“迭经通饬府厅州县，各就地方书院增设算学、格致等课，多已渐次遵办。”[⑦] 与此相类，云贵总督崧蕃在《奏改书院折》亦称：“此外各属，亦据该管州县先后禀报，均于旧有书院添课算学。”湖南省平江县和永明县的县令都曾给时务学堂中文总教习梁启超（1873～1929）致函，委托他为县里的书院聘请算学教习。[⑧]

这些迹象表明，至戊戌变法前，书院加课算学已是普遍情形了。

三 教会学校的数学教科书

因清末的教育变革与学校的数量增加，适用的教学用书成为一时急需。教会学校编译的

---

① 《湘乡东山精舍章程》，见：陈谷嘉、邓洪波，中国书院史资料（下册），第2205～2206页。

② 《酌裁友教书院童卷移设算科折》，见：陈谷嘉、邓洪波，中国书院史资料（下册），第1993页。

③ 《岳麓书院院长王先谦月课改章手谕》，见：陈谷嘉、邓洪波，中国书院史资料（下册），第2015～2016页。

④ 《广西书院添设算学季课示谕》，见：陈谷嘉、邓洪波，中国书院史资料（下册），第2019页。

⑤ 《云贵总督崧蕃等奏改书院折》，见：陈谷嘉、邓洪波，中国书院史资料（下册），第2017页。

⑥ 陈谷嘉、邓洪波，中国书院史资料（下册），第1999，2017页。

⑦ 《奏设游艺学塾折》，见：陈谷嘉、邓洪波：中国书院史资料（下册），第2253页。

⑧ 陈谷嘉、邓洪波，中国书院史资料（下册），第2011，2013页。

各种教学用书因而得以广泛采用，翻印次数之多亦属可观。以“学校教科书委员会”成立为界，后期视前期为上。清廷官方编译教科书，以光绪二十八年（1902）京师大学堂附设编译局为始。至癸卯学制颁行之后，学部下设编译图书局专司其事，而民间的教科书编译出版又远过官方。在清廷措意此事之前，教会学校编译的教科书影响堪称广泛。

教会学校编译的教科书大致可以分为基督教教会与天主教教会两部分。就所编教科书的种数与程度而言，前者优于后者。兹就各家书目所载及现在尚有传本者分列于后。

基督教教会学校用书：数学启蒙，二卷，（英）伟烈亚力撰，咸丰三年（1853）活字本；心算启蒙，十五章，（美）那夏礼撰，同治十年（1871）上海美华书馆铅印本；西算启蒙，三十四节①，光绪十一年（1885）活字本；形学备旨，十卷，（美）罗密士原撰，（美）狄考文选译，邹立文笔述，刘永锡参阅，光绪十一年美华书馆铅印本；笔算数学，三卷，（美）狄考文辑，邹立文述，光绪十八年（1892）美华书馆铅印本；圆锥曲线，不分卷，（美）罗密士原撰，（美）求德生选译，刘维师、张宝善同述，光绪十九年（1893）美华书馆铅印本；代形合参，三卷附一卷，（美）罗密士原撰，（美）潘慎文译文，谢洪赉笔述，光绪二十年（1894）美华书馆铅印本；八线备旨，四卷，（美）罗密士原撰，（美）潘慎文选译，谢洪赉校录，光绪二十年美华书馆铅印本；代数备旨，十三章，（美）狄考文选译，邹立文、生福维笔述，光绪二十二年（1896）美华书馆铅印本；心算初学，六卷（官话），高葆琛撰，光绪二十二年美华书馆铅印本。

天主教教会学校用书：数学问答，（德）佘宾王撰，光绪二十七年（1901）上海：土山湾印馆铅印本；量学问答，（德）佘宾王撰，光绪二十八年（1902）上海：土山湾印馆铅印本；代数问答，（德）佘宾王撰，光绪三十年（1904）上海：土山湾印馆铅印本；几何学（平面），Calo Bourler 撰，戴连江译，（1913）上海：土山湾印馆铅印本；代数学，Calo Bourler 撰，陆翔译，（1928）上海：土山湾印馆铅印本；算课指南，天主教启蒙学校用书；算课指南教授法，天主教启蒙学校用书

其中，基督教教会学校用书与罗密士（Elias Loomis，1811～1889）编写的教科书有关。罗密士是 19 世纪美国一位知名的教科书作者，编有三角、几何、代数、解析几何、微积分、天文学及气象学教科书多种。所编教科书简明易懂，多次修订翻印。以上十余种教科书均采用阿拉伯数码，所用数学符号较之李善兰所译有所改进。教科书中间或附有数学名词的中外对照表。清末学部第一次统一数学名词时，曾参考上述教科书采用的名词。

四　癸卯学制的数学课程

癸卯学制对初、中、高三段教育以及师范、实业教育的数学课程均做出明确的规定。以下列出小学堂、中学堂、高等学堂和大学堂的格致科大学算学门的数学课程，见表 33-2-1～表 33-2-4。

① 该书每节序号用罗马数字，用“土白”（似是上海方言）编译。所见传本未署作者及出版者。

表 33-2-1　小学堂数学课程

学年	初等小学堂（五年）		高等小学堂（四年）	
	程度	每星期钟点	程度	每星期钟点
1	数目之名、实物计数、20以下之算数、书法、计数法、加法	6	加减乘除、度量衡、货币及时刻之计算、简易之小数	3
2	100以下之算术、书法、记数法、加减乘除	6	分数、比例、百分数、珠算之加减乘除	3
3	常用之加减乘除	6	小数、分数、简易之比例、珠算之加减乘除	3
4	通用之加减乘除、小数之书法、记数法、珠算之加减	6	比例、百分数、求积、日用薄记、珠算之加减乘除	3
5	通用之加减乘除、简易之小数、珠算之加减乘除	6		

表 33-2-2　中学堂数学课程

学年	程度	每星期钟点
1	算术	4
2	算术、代数、几何、薄记	4
3	代数、几何	4
4	同前学年	4
5	几何、三角	4

表 33-2-3　高等学堂第二类、第三类学科数学课程

	第二类学科（预备入格致、工、农科大学）		第三类学科（预备入医科大学）	
学年	程度	每星期钟点	程度	每星期钟点
1	代数、解析几何	5	代数、解析几何	4
2	解析几何、三角	4	解析几何、微分积分	2
3	微分积分	6	无	无

表 33-2-4　大学堂格致科大学算学门数学课程

课程名称	第一年每星期钟点	第二年每星期钟点	第三年每星期钟点
微分积分	6	0	0
几何学	4	2	2
代数学	2	0	0
算学演习	不定	不定	不定
函数论	0	3	3
部分微分方程式论	0	4	0
代数学及整数论	2	4	4
球函数、高等数学杂论、数学研究	随意科目		

由于教材、师资、生源等原因，高等学堂以上的数学课程并未及时实施，大学堂算学门终清之世亦未曾建立。然而，三段教育的数学课程体系与内容已较规范。较之洋务学堂、书院及教会学校的数学课程，确已做出较为彻底的变革。

第三节　数学丛书、数学社团与刊物

一　数学丛书的编纂

从 19 世纪 70 年代到 20 世纪初，特别是在西方近代印刷术传入我国之后，数学著作的出版呈现出前所未有的繁荣景象。出版的数学书籍中还有不少多卷本的丛书，它们对于数学知识的传播发挥了重要作用。

下面以出版年代为序，选择 4 种大型数学丛书予以简要介绍。

（一）白芙堂算学丛书

《白芙堂算学丛书》是由丁取忠及其高弟黄宗宪、左潜、曾纪鸿等共同审校、编辑的，从同治十一年（1872）开始陆续出版，至光绪二年（1876）全书刊竣。白芙堂是丁取忠的父亲扩建祖屋时所立的支祠堂，丁取忠等就在那里研究、编校数学著作，所以丛书便冠以“白芙堂”之名。该书有丁氏长沙古荷池精舍刊本、光绪十四年（1888）龙文书局石印本、光绪二十二年（1896）味经刊书处刊本、光绪二十三年（1897）上海文澜书局石印本和光绪二十四（1898）年上海鸿文堂书局石印本等版本。《白芙堂算学丛书》收书 23 种[①]，其中包括丁取忠及其弟子的著作 8 种，元代李冶、朱世杰的著作 3 种，日本人加悦传一郎的著作 1 种以及清代数学家李锐、张敦仁、徐有壬、夏鸾翔、吴嘉善、时曰醇、邹伯奇等人的著作。丁福保在《算学书目提要》中说“是书搜辑颇富，蔚为艺圃之钜观”[②]。他认为这其中有些书是“中算之精粹者”，而有些书“虽觉粗浅”，但也是“初学涉猎之资”。

（二）中西算学丛书初编

《中西算学丛书初编》题“四明求敏斋辑订，镇海邵蕙沅较字”，有光绪二十二年（1896）上海鸿宝斋石印本和上海玑衡堂石印本。[③]该丛书收书 22 种，数学著作与天文历法著作几乎各占一半。除北宋苏颂的《新仪象法要》外，还包括西洋传教士利玛窦与徐光启、李之藻等人的翻译及自著著作 8 种，其余为清代王锡阐、江永、焦循、戴煦、徐有壬、邹伯奇、夏鸾翔等人的著作。丁福保在《算学书目提要》中说：“是书卷帙虽富，惟戴氏、徐氏、夏氏、邹氏之书为最精……均宜涉猎。此外诸书，其义太旧，存之以备考核云而。”[④]

---

① 个人丛书以一种计，附卷不计，下同。

② 丁福保，周云青，四部总录算法编，文物出版社，1982 年。

③ 李迪主编，中国算学书目汇编，北京师范大学出版社，2000 年，第 121 页。

④ 丁福保，《算学书目提要》，光绪二十五年（1899）无锡竢实学堂刻本。

（三）测海山房中西算学丛刻初编

《测海山房中西算学丛刻初编》，测海山房主人辑，有光绪二十二年（1896）上海玑衡堂石印本和上海鸿宝斋石印本。[①]测海山房主人的识语说明编辑这部丛书的目的："丛刻书籍，仿自古初。畴人所著，每多散见。戴校算经，古籍是存。梅氏算丛，仅一家言。沿及于今，斯学日新。名贤蔚起，西学踵兴。口录精要，得数十种。次第付印，汇为一编。初学津梁，于是大备。元代微积，近时所尚。浅深本末，咸得取资。续有搜刻，别次编印。"《测海山房中西算学丛刻初编》收书25种，除了元代朱世杰的《算学启蒙》外，其余都是清代的著作。其中包括天文著、译各1种，数学用表2种，科学家传记3种和数学著作17种。数学著作中有7部英国传教士与中国数学家合作翻译的西方数学著作及5部中国传统数学著作及5部中西数学兼收之作。

（四）古今算学丛书

《古今算学丛书》，刘铎辑，有光绪二十四年（1898）上海算学书局石印本。这是清末出版的最大型的一部数学丛书，收书77种[②]，将它们分成象总、勾股、三角、割圆、弧角、曲线、数总、之分、开方、比例、垛积、对数、天元、四元等类，并注明了每部书所据的版本。《古今算学丛书》除收入《几何原本》、《形学备旨》、《圆锥曲线说》、《三角须知》和《数学启蒙》等少量西方数学著作以及日本人会田安明的《算法天生法指南》外，其余均是中国数学家的著作。中算著作包括《周髀算经》、《孙子算经》、《数术记遗》、《夏侯阳算经》、《张邱建算经》等汉唐算经，《测圆海镜》、《益古演段》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》等宋元数学著作及明清数学家对它们的阐释作品，还有近50部清代数学家的著作。清代数学著作中又以割圆、对数、曲线等方面的研究为要，它们反映了当时中算家的研究领域和学术水平。

二　数学社团

19世纪下半叶，近代数学较为发达的一些国家开始成立专业性的数学学会或全国性的数学会。例如，英国在1865年成立了伦敦数学会，法国在1872年成立了法国数学会，日本在1877年成立了东京数学会，意大利在1884年成立了巴勒摩数学会（即意大利数学会）等[③]。中国在20世纪10年代才成立专业性的数学学会，而全国性的数学会——中国数学会则迟至1935年成立。不过，甲午战争之后，中国开始陆续出现由民间人士创办的地方性数学社团。其中具有一定影响的有瑞安天算学社、浏阳算学社、知新算社等。

（一）浏阳算学社

浏阳算学社成立于1895年。甲午战争惨败后，维新派代表人物谭嗣同（1865～1898）

---

① 李迪主编，中国算学书目汇编，北京师范大学出版社，2000年，第347页。

② 此为刊刻出版的书籍的数目，刘氏目录中还记有23种未刊书目。

③ 任南衡、张友余编著，中国数学会史料，江苏教育出版社，1995年，第4页。

不仅倡导新政，立志变法，而且主张开办算学格致馆，以培养数学人才。他认为，“算数者，器象之权舆；学校者，人材之根本”，“其格致、制造、测地、行海诸学，固无一不自测算而得。故无诸学无以致富强，无算学则诸学又靡所附丽。层台寸基，洪波纤受，势使然也”。乃“纠合同志，自立算学社，精研算学”①。浏阳算学社设于浏阳县城的奎文阁，聘湖南新化人晏孝儒为教习，成立不久即显成效。湖南巡抚陈宝箴对谭嗣同的《兴算学议》颇为赞赏，并命刻印千本，在湖南全省各书院广泛散发。这些使浏阳乃至湖南讲求新学之风大开。梁启超曾评价说，该社的成立“实为湖南全省新学之起点焉”②。

1897 年，谭嗣同改浏阳算学社为浏阳算学馆。根据谭嗣同拟订的《浏阳算学馆章程》，该馆设有“正课”和“副课”。正课“专为有志向学者而设”，每年由教习考取“生童三十余人或四十余人入馆肄业”；副课为未经考取正课，而“资禀尤异者”所设，学生人数为“五六十人或七八十人”。馆中聘有一名精通数学的算学教习。正课和副课学生都各分为头班、二班、三班，但每班的学生并不固定。该社每月均依学生的“功夫进退”调整班次。每天学生除学习数学外，还“温习经史，阅看各国史事、古今政事、中外交涉、算学、格致诸书及各新闻纸”。1898 年，谭嗣同随戊戌变法失败而英勇就义后，浏阳算学馆基本停办。

（二）瑞安天算学社

瑞安天算学社成立之前，著名学者孙诒让（1848～1908）等于 1896 年创办了瑞安学计馆（原称瑞安算学书院），是以培养数学人才为主的私立学校，校舍在浙江瑞安城内卓敬祠堂。先后聘林调梅、陈范为馆长（亦称总教习）。学生年龄在 13～20 岁之间，“额数以三十名为率”，“分为三班，轮流到院”。学生每天除学习数学外，还学习有关“中外交涉事务、各国记载及近时西人所诸格致诸书”的内容，以“广见闻而裨实用”。③

1899 年，孙诒让族侄孙冲与馆中学生组织成立了瑞安天算学社，以专门研究天文和数学为宗旨。孙诒让对此非常支持，不仅提供他家的诒善祠堂作为社址，而且撰写了《瑞安天算学社序》。这篇文字简要提到该社的缘起：“泰西教学修明，冥符古谊，通都大邑率有算学之会。极涤洞微，自相师友，新率捷式日出不穷，斯则俦学之大效也。迩来吾乡学者多涉西学，而治算者尤盛。然绸书布策，闭门独笑，虽用志不纷，而鲜渐摩论难之益，则学会之意未甚明也。从子冲，少嗜兹学，叹泰西学会之善，爰与同人联算学社，分期聚讲，以互相考质，其用意甚盛，里之贤者，亦多赞其成。”天算学社的社员共 16 人，他们定期聚会研讨问题。该社鼓励社员撰著相关著作，并设有一小型的专门图书馆，编有《社藏中西算学书目》二卷，附有社员著作目录。1901 年底，瑞安天算学社因社员星散而停办。次年，瑞安学计馆亦停办，与瑞安方言馆合并为瑞安普通学堂。④

---

① 谭嗣同，《浏阳兴算记》，见：清 · 谭嗣同著，《谭嗣同全集》（增订本），中华书局，1998 年，第 185 页。

② 梁启超.《谭嗣同传》，见：清 · 谭嗣同著，《谭嗣同全集》（增订本），中华书局，1998 年，第 553 页。

③ 《算学书院章程一十六则》，《学则二十六则》，见：洪震寰，清末的“瑞安学计馆”与“瑞安天算学社”，中国科技史料，1988，(1)：82～85。

④ 洪震寰，清末的“瑞安学计馆”与“瑞安天算学社”，中国科技史料，1988，(1)：80～81。

（三）知新算社

知新算社成立于1900年。该社是周达与一些“砥行笃学之士”在邗上（今扬州）创立的。他们在知新算社“嘤鸣和声，商榷得失，相期于千载之上，不以世俗之谤誉为愉戚也”。[①] 周达为社长，社员不仅限于扬州。根据1902年周达修订的《知新算社改良章程》，其宗旨是：“研究学理，联络声气，切磋讨论，以辅斯学之进化。”凡入社者皆不需要交纳任何费用，但必须有算稿。社员每月开例会三次，内容是演说学理或讨论问题等。

知新算社研究的内容分为四科：① 普通研究科：数学、代数、几何、三角；② 高等研究科：微分方程式、积分、微分、平面及立体解析几何、圆锥曲线、弧三角及圆函数、高等代数、近世几何；③ 特别研究科：动量法、有限较数法、最小二乘法、定纪法、变分法、决疑数、整数论；④ 应用研究科：物理计算、动静力学、星学、测量学。每月社课一次，分为中等、初等两级。每课问题约二三条，“由社员公评甲乙，择尤付刊，如所作实能戛戛独造翻陈出新者，拟赠以本社同人著述一二种，以志钦佩”。[②]

知新算社鼓励社友撰著数学著作。《知新算社课艺初集》所收录的就是部分社友所撰的课艺。同时，该社鼓励社友翻译数学教科书和编译高等数学书籍，计划每月刊行杂志一册，并打算“购办测量天文力学各种仪器以备演习之用”。此外，社中“备有各种算学书报，至会期之日任人观览”，平日社友亦可到社中查阅。知新算社与日本数学界保持一定的联系。周达曾于1902年受该社委托到日本考察，返国后撰成《日本调查算学记》一书。由于经费所限及其他原因，知新算社存在时间亦不长。

总体来说，清末的数学社团基本都是昙花一现，一般成立几年后便退出历史舞台，亦未培养出颇有建树的近代数学家。然而，它们在传播近代数学知识、普及维新思想以及开启民智等方面均起到了不同程度的积极作用。这在中国近代数学史上具有一定的意义。

三　数学刊物

19世纪末，中国开始出现数学报刊杂志，当时有两种同名的《算学报》。第一种是由黄庆澄（1863～1904）主撰的普及性刊物。它是迄今所知我国最早的数学刊物。第二种是朱宪章等人创办的学术性较强的数学刊物。另外，还有赵连璧编撰的《中外算报》。19世纪后期还有一些科技期刊刊登数学文章，如美国传教士丁韪良（W. A. P. Martin，1827～1916年）和英国传教士艾约瑟（Joseph Edkins，1823～1905）等主编的《中西闻见录》。李善兰在该刊第2、3、4号上连续发表的《考数根法》，是我国有关素数论的最早著述。由英国人傅兰雅（John Fryer，1839～1928）主编的《格致汇编》设有“算学奇题”专栏，专门刊登疑难数学问题。其他报刊如《格致新报》、《湘学报》、《新学报》等亦刊登数学文章。

（一）黄庆澄主撰的《算学报》

黄庆澄，原名炳达，字钦教，号愚初，亦作源初，晚年自号寿昌主人，浙江平阳县

① 清·周达，《福慧双修馆算稿·自叙》，维扬刊本，1909年。

② 清·周达，《知新算社改良章程》，见：清·周达，《知新算社课艺初集》，扬州知新算社石印本，1903年。

（今苍南县）人。他家境贫寒，为人“跌宕有奇气”，处世为学常能“独抒所见，不肯人云亦云”①。其少时师事孙诒让等人。1889 年，黄氏被聘为上海梅溪书院的教习。1891 年，任安徽潜山县幕僚。1893 年，由安徽巡抚沈秉成介绍赴日本考察两个月。其《东游日记》②由孙诒让作序印行。黄氏的著作流传至今的还有《黄氏数学启蒙》③、《中西普通书目表》④ 等。

黄氏所主撰的《算学报》创刊于光绪二十三年（1897）六月，为月刊，每期 30 ~ 40 页，次年五月停刊，凡出十二大册。创刊号“公启”申明其宗旨说：在“时局艰迫，外患迭乘”的形势下，“特创兹报，冀为格致之权舆，以辟黄人之智慧”⑤。第一、二期为石印，第三期起改为木刻，有俞樾序文。其尽管是月刊，但意在系统介绍中国传统数学及西方传入的初等数学知识。在第一期“公启”中就公布了各期的内容的设想：“本报第一期论加减乘除、命分、约分、通分之理；二期论开方比例；三期论代数入门之决；四期论几何浅理；五期论几何无比例之理；六期论九章；七期以后未定，容俟续布。”然而实际上自第二期起，内容都有调整：第二期为“总论比例”，第三期为“开方”，第四至十期为“代数论”，第十一、十二期为“几何第十卷释义”，并没有完全遵从原来的设想，而且不再有“论九章”等中算内容，却始终没有脱离系统介绍初等数学知识的本意。

《算学报》每期末都附有黄庆澄的一段文字，是对本期内容的发挥，颇有哲理。例如，第二期最末有：“黄庆澄曰：异哉，异哉！太空冥冥无端有物，有物斯有比，有比斯有差，有差斯有例。……断之曰：世间无物，见物非物，我不见物，惟见比例。”若发现某期有误，就另附“勘误记”在下期刊出，说明黄氏的编撰工作严肃认真。《算学报》第一期发行后，“诸君纷纷函购”⑥，颇受欢迎。该报还引起梁启超的关注。他在 1896 年强学会被封禁后专门撰文，介绍强学会创办两年内全国设立的私立学会、学堂和报馆，其中提到《算学报》。⑦ 应该说，黄庆澄主撰的《算学报》对于推动数学知识在大众中的普及起到了积极的作用。

（二）朱宪章等人创办的《算学报》

由朱宪章、严杏林、朱成章、严槐林四人共同创办的《算学报》自光绪二十五年（1899）八月出版，月刊，每月十五日出版，前后共出 3 期。⑧ 朱成章、朱宪章兄弟为广东番禺人，严杏林、严槐林兄弟为浙江桐乡人，都是广东番禺徐绍桢的学生。徐绍桢，字固卿，精于算学，著有《勾股通义》三卷（1888）、《学一斋勾股代数草》二卷、《学一斋算课草》四卷（1897）、《学一斋算学问答》一卷、《算学入门》二卷（1906）等书。⑨ 严氏和

---

① 《黄庆澄硃卷》“荐批”，藏温州市文物管理委员会，编号 60. 8990。

② 清 · 黄庆澄，《东游日记》，清光绪二十年（1894 年）刻本。

③ 清 · 黄庆澄，《黄氏数学启蒙》，清光绪二十五年（1899）刻本。

④ 清 · 黄庆澄，《中西普通书目表》，清光绪二十四年（1898）刻本。

⑤ 清 · 黄庆澄，《算学报》，中国科学院自然科学史研究所藏本。

⑥ 清 · 黄庆澄，《算学报》第 2 期，中国科学院自然科学史研究所藏本。

⑦ 清 · 梁启超，《强学会封禁后之学会学堂报馆》，见：《中国近代史资料丛刊》编委会编，《戊戌变法》第 4 册，上海书店出版社，2000 年，第 395 ~ 396 页。

⑧ 清 · 朱宪章辑，《算学报》，收入徐绍桢辑《学寿堂丛书》，清宣统元年（1909）刻本。

⑨ 李俨，《近代中算著述记》，见：李俨钱宝琮科学史全集，第六卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 580 页。

章氏昆仲认为“今之算学胜于古昔不啻千百”，如加以研究推广，以后的数学必将“远胜于今日”。他们还认为“今之算学诚为超越前代，然天元、四元以及几何、代数、微积各学或创、或因、或由翻译而得，其间不无参错，亦有言而未尽及尽而未明者”。[①] 因此，朱氏与严氏昆仲一起筹办《算学报》。

《算学报》3 期共刊出 38 篇文章，第 1 期 14 篇，后 2 期各 12 篇。这些文章大多为朱、严 4 人“平日读书所得者”。朱氏等人创办的《算学报》“以阐明新理，纠正谬误为宗”，规定“其有浅近易知及陈腐无谓者，本报概不登录”。该刊内容有两大类，一为“论算”，“凡阐明古义及纠正前人之失、补苴算法之阙者附焉”；另一类为“演算”，“凡设题演草及创立新法者附焉”。[②] 因此，《算学报》多是纠正前人之失，有价值的创新不多。例如，第 3 期朱宪章所撰《同文馆课艺辨误》指出了《同文馆算学课艺》卷四中贵荣所作勾股和有中垂线求勾股弦一题的错误，提出了合理建议，并“另演一式”附于后。

朱氏等人创办的《算学报》后被收入《学寿堂丛书》。

据 1901 年日本横滨出版的《清议报》合编本，记当时与该报交换的报刊名录中有《算学报》。[③] 这至少说明黄氏与朱氏等人创办的两种《算学报》中的一种已流传到国外。

（三）赵连璧编撰的《中外算报》

赵连璧，字星衫，江都人。《中外算报》，自光绪二十八年正月（1902 年 3 月）起，由上海中外算报馆发行，由高邮沈为轩校算绘图。李俨先生称，《中外算报》创刊当年共刊出 5 册，光绪二十九年（1903）正月刊出第 6 册[④]。上海图书馆藏有前 3 册。[⑤]

赵连璧在创刊号的序中表明了他对教育和数学的看法。他认为要使“吾国达于文明之原始”，一方面需要编译数学教科书，另一方面需要设立普通学堂。若要“统二者而兼之”，则惟有先“设立算学报馆”。《中外算报》的宗旨为“讲求实学，开通风气为主”，“发明旧说，推广新理，远以补先代畴人之不足，近以师东西硕学之所长”。《中外算报》设置的栏目有文编、演说、译编、来稿、课艺、问答等。从《中外算报》前 3 册来看，它所刊载的内容除了初等数学知识之外，还有一些微分等高等数学内容以及物理、化学计算等。“译编”中的内容大多取自日文数学译著。《中外算报》的程度要较两种《算学报》有所提高，但是有价值的创新也很少。

《中外算报》的发行范围较广，其代售处约有 25 处，也得到一些读者的积极回应。读者所询问的问题涉及微分、代数、几何、三角等。

---

① 清·严杏林，《算学报叙》，见：清·朱宪章辑，《算学报》（第 1 期），收入徐绍桢辑《学寿堂丛书》，清宣统元年（1909）刻本。

② 清·朱宪章等，《算学报略例》，见：清·朱宪章辑，《算学报》（第 2 期），收入徐绍桢辑《学寿堂丛书》，清宣统元年（1909）刻本。

③ 张静庐辑注，《中国近代出版史料初编》，中华书局，1957 年，第 88 页。

④ 李俨，《近代中算著述记》，见：李俨钱宝琮科学史全集，第六卷，辽宁教育出版社，1998 年，第 660 页。

⑤ 王秀良，中国近代科学知识的传播——以科学杂志和数学杂志为载体，中国科学院自然科学史研究所博士学位论文，2006 年，第 74～79 页。

*　*　*　*　*

有清一代，官方对数学教育之重视，知识分子对数学认识之高，数学家对数学研究之执著，出版数学著作之多，涉及数学分支之广泛，远远超过历代任何一个王朝。应该说，清朝，尤其是在中后期，数学成果和数学水平已经远远超过宋元数学，但是与世界数学先进水平比较，差距却越来越大。明末清初，当中国数学家开始接受西方三角函数与对数知识的时候，这个差距仅几十年，19 世纪 50 年代当微积分学介绍到中国的时候，差距已达 100 多年。不过，包括微积分在内的数学知识在有清一代广泛的传播，人们对数学认识的提高，为中国数学在 20 世纪完成融入世界统一的数学的过程准备了并不贫瘠的土壤。20 世纪新文化运动之后，中国现代数学正是在此数学土壤中发展起来。

主要参考文献[①]

原始文献

百子全书．1984．杭州：浙江人民出版社

班固（东汉）撰．1962．汉书．北京：中华书局

陈谷嘉、邓洪波编．1998．中国书院史资料．杭州：浙江教育出版社

陈彭年（宋）撰．1982．广韵．北京：中国书店

陈维祺（清），叶耀元（清）编．1889．中西算法大成．同文书局石印本

陈振孙（南宋）．1986．直斋书录解题．《四库全书》文渊阁本．台北：商务印书馆影印

陈元靓编．1999．事林广记・辛集上・筭法类．北京：中华书局

陈志坚（清）撰．1904．求一得斋算学．松江：嵇文墨斋刊本

陈志坚（清）撰．1906．微积阐详．松江：嵇文墨斋刊本

川原秀城［日］译．1980．刘徽注九章算术．载：薮内清编．中国天文学、数学集．东京：朝日出版社

戴震（清）撰．1980．戴震文集．北京：中华书局

狄考文［美］编、邹立文（清）等译．1890．代数备旨．上海：美华书馆

棣么甘［英］撰，李善兰（清）、伟烈亚力［英］合译．1859．代数学．上海：墨海书馆

丁福保（清），周云青（清）编．1982．四部总录算法编．北京：文物出版社

丁福保（清）编．1899．算学书目提要．无锡：竣实学堂刻本

丁取忠（清）编．1874．白芙堂算学丛书（二十三种）．长沙：古荷池精舍刻本

丁易东（宋）．1986．大衍索隐．《四库全书》文渊阁本．台北：商务印书馆

杜佑（唐）撰．1984．通典．北京：中华书局

兒玉明人［日］编．1970．十六世纪末明刊の珠算书．东京：富士短期大学出版部刊

二十二子．1986．上海：上海古籍出版社

范晔（南朝宋）撰．1965．后汉书．北京：中华书局

方恺（清）．1896．代数通艺录．时务报馆石印本

方克猷（清）．1906．方子壮数学．方氏家刻本

房玄龄（唐）等撰．1974．晋书．北京：中华书局

故宫珍本丛刊．2000．海口：海南出版社

顾观光（清）撰．1883．武陵山人遗书．独山莫氏刊本

郭沫若主编．1979～1983．甲骨文合集．北京：中华书局

郭书春．2004．汇校《九章算术》．增补版．沈阳：辽宁教育出版社；台北：九章算术出版社

郭书春，刘钝校点．算经十书．沈阳：辽宁教育出版社（1998）；台北：九章出版社（2001）

郭书春主编．1993．中国科学技术典籍通汇・数学卷．第1～5册．郑州：河南教育出版社

韩琦、吴旻校注．2006．熙朝定案．北京：中华书局

华蘅芳（清）．1882．行素轩算稿．梁溪华氏刊本

---

① 主要参考文献分原始文献和研究文献。同一版本的一部文献一般不重复出现。例如，《宜稼堂丛书》本《数书九章》已被收入《中国科学技术典籍通汇・数学卷》，便不再被列入此版《数书九章》。同样，某些论文已被收入主要参考文献中的文集，便不再被单独列出。

华里司［英］撰 . 1874. 微积溯源 . 傅兰雅［英］，华蘅芳（清）合译 . 上海：江南制造局刊本
华里司［英］撰 . 1873. 代数术 . 傅兰雅［英］口译，华蘅芳（清）笔述 . 上海：江南制造局刊本
焦循（清）撰 . 1799. 里堂学算记 . 雕菰楼丛书本
靖玉树编勘 . 1993. 中国历代算学集成 . 济南：山东人民出版社
李笃培（明）. 中西数学图说 . 抄本
李昉（北宋）. 1809. 太平御览 . 嘉庆十四年从善堂校明钞宋蜀刻本
李隆基（唐）撰 . 1986. 唐六典 .《四库全书》文渊阁本 . 台北：商务印书馆影印
李锐（清）撰 . 1890. 李氏遗书 . 醉六堂重刊本
李善兰（清）. 1867. 则古昔斋算学 . 同治六年莫有芝金陵刊本
李延寿（唐）撰 . 1974. 北史 . 北京：中华书局
李延寿（唐）撰 . 1975. 南史 . 北京：中华书局
李冶（元）撰 . 1995. 敬斋古今黈 . 北京：中华书局
李子金（清）撰 . 1676. 算法通义 . 自序刊本
利玛窦［意］撰 . 1986. 利玛窦书信集 . 罗渔译 . 台北：光启出版社
梁启超（清）撰 . 1898. 读西学书法 . 载：中西学门径书七种 . 上海：大同译书局石印本
梁启超（清）撰 . 1941. 墨经校释 . 昆明：中华书局
令狐德棻（唐）撰 . 1971. 周书 . 北京：中华书局
令义解［日］. 2000. 东京：吉川弘文馆
刘安（西汉）撰，何宁集释 . 1998. 淮南子集释 . 新编诸子集成本 . 北京：中华书局
刘铎（清）编纂 1898. 古今算学丛书 . 上海：算学书局石印本
刘向（西汉）集录 1995. 战国策 . 上海：上海古籍出版社
刘昫（后晋）撰 1975. 旧唐书 . 北京：中华书局
刘彝程（清）撰 1900. 简易庵算稿 . 上海：江南制造局刊本
刘彝程，沈善蒸（清）辑 . 1896. 广方言馆算学课艺 . 上海：上海撰易堂书局发兑
刘岳云（清）撰 . 1896. 测圆海镜通释 . 成都：尊经书局
鲁米斯［美］撰 . 1885. 形学备旨 . 狄考文［美］，邹立文（清），刘永锡合译 . 上海：美华书馆
陆德明（唐）撰 . 1985. 经典释文 . 北京：中华书局
陆心源（清）. 1990. 仪顾堂题跋 . 北京：中华书局
吕不韦（秦）撰 . 1991. 吕氏春秋 . 诸子集成本 . 上海：上海书店
罗士琳（清）. 1818. 比例汇通 . 罗氏家刻本
马端临（元）. 1983. 文献通考 . 北京：商务印书馆
梅文鼎（清）撰 . 1761. 梅氏丛书辑要 . 乾隆二十六年承学堂刊本
欧几里得［希］. 1865. 几何原本 . 利玛窦［意］，徐光启［明］，伟烈亚力［英］，李善兰（清）合译 . 南京：金陵书局
欧阳修（北宋）撰 . 1975. 新唐书 . 北京：中华书局
欧阳询（唐）等辑 . 1965. 艺文类聚 . 上海：中华书局上海编辑所
钱大昕（清）. 1983. 十驾斋养新录 . 上海：上海书店
秦九韶（南宋）撰 . 1986. 数学九章 .《四库全书》文渊阁本 . 台北：商务印书馆影印
屈曾发（清）. 1772. 九数通考 . 常熟：豫簪堂
阮元（清）编 . 1981. 十三经注疏 . 北京：中华书局
阮元（清）等撰 . 1955. 畴人传 . 上海：商务印书馆
沙克什（元）编 . 1986. 河防通议 .《四库全书》文渊阁本 . 台北：商务印书馆影印
舍人亲王［日］. 2007. 日本书纪［日］. 小学馆

沈括（北宋）撰，胡道静校证. 1987. 梦溪笔谈校证. 上海：上海古籍出版社
沈约（梁）撰. 1974. 宋书. 北京：中华书局
舒新城主编. 1980. 中国近代教育史资料. 北京：人民教育出版社
睡虎地秦墓竹简整理小组. 1978. 睡虎地秦墓竹简. 北京：文物出版社
司马迁（西汉）. 1959. 史记. 北京：中华书局
宋刻算经六种. 1980. 北京：文物出版社
宋濂等（明）. 1976. 元史. 北京：中华书局
宋衷注，秦嘉谟等辑. 1957. 世本八种. 上海：商务印书馆
苏天爵（元）编. 1986. 元文类.《四库全书》文渊阁本. 台北：商务印书馆
苏天爵（元）撰. 1962. 国朝名臣事略. 北京：中华书局影元刊本
孙诒让（清）撰. 1991. 墨子间诂. 上海：上海书店
陶宗仪（元）撰. 1988. 说郛. 上海：上海古籍出版社
藤原佐世［日·平安中期］. 1851. 日本国见在书目录. 载：续群书类从. 日本嘉永四年初刻本
脱脱（元）等撰. 1974. 辽史. 北京：中华书局
脱脱（元）等撰. 1975. 金史. 北京：中华书局
脱脱（元）等撰. 1977. 宋史. 北京：中华书局
汪莱（清）撰. 1854. 衡斋遗书. 夏燮刻板
王弼（三国魏）撰. 1986. 周易略例.《四库全书》文渊阁本. 台北：商务印书馆影印
王充（东汉）. 2006. 论衡. 长沙：岳麓书社
王存（北宋）. 1984. 元丰九域志. 北京：中华书局
王符（东汉）撰，汪继培笺. 1991. 潜夫论. 诸子集成本. 上海：上海书店
王溥（北宋）编撰. 1983. 唐会要. 北京：商务印书馆
王钦若（北宋）等. 1642. 册府元龟. 明崇祯十五年黄国琦刻本
王尧臣（北宋）等撰. 1986. 崇文总目.《四库全书》文渊阁本. 台北：商务印书馆影印
王应麟（南宋）撰. 1983. 玉海. 北京：商务印书馆
王恽（元）撰. 1936. 秋涧先生大全文集.《四部丛刊》影印本. 上海：商务印书馆
王洙（北宋）. 1986. 王氏谈录.《四库全书》文渊阁本. 台北：商务印书馆
伟烈亚力［英］撰. 1853. 数学启蒙. 官版排印本
魏收（北齐）撰. 1974. 魏书. 北京：中华书局
魏徵（唐）等撰. 1973. 隋书. 北京：中华书局
希尔伯特［德］撰.（1900）. 1981. 数学问题. 李文林，袁向东译. 中国科学院自然科学史研究所数学史组，中国科学院数学研究所数学史组编. 数学史译文集. 上海科学技术出版社
席淦（清），贵荣（清）辑. 1896. 算学课艺. 上海：著易堂石印本
萧统（梁）编，李善（唐）注. 1977. 文选. 北京：中华书局
徐光启（明）撰，王重民辑校. 1984. 徐光启集. 上海：上海古籍出版社
徐中舒主编. 1986. 殷周金文集录. 成都：四川辞书出版社
徐中舒主编. 1995. 甲骨文字典. 成都：四川辞书出版社
许慎（东汉）撰. 1987. 说文解字. 北京：中华书局
续修四库全书. 2002. 第 141 ~ 147 册. 上海：上海古籍出版社
严敦杰校释. 2000. 祖冲之科学撰作校释. 沈阳：辽宁教育出版社
严克均（清）. 1958. 全上古三代秦汉三国六朝文. 北京：中华书局
杨伯峻. 1991. 列子集释. 北京：中华书局
姚思廉（唐）撰. 1973. 梁书. 北京：中华书局

姚孝遂主编 . 1992. 殷墟甲骨刻辞摹释总集 . 北京：中华书局
佚名（明）撰 . 1840. 铜陵算法 . 道光二十年京都打磨厂文成堂刊本
银雀山汉墓竹简整理小组. 1985. 银雀山汉墓竹简［壹］. 北京：文物出版社
永容，纪晓岚等（清）撰 . 1965. 四库全书总目 . 北京：中华书局
于省吾主编 1996. 甲骨文字诂林 . 北京：中华书局
袁桷（元）. 1986. 封龙山书院重修记 . 清容居士集，卷十八 . 《四库全书》文渊阁本 . 台北：商务印书馆影印
张家山二四七汉墓竹简整理小组 . 2001. 张家山汉墓竹简［二四七号墓］. 北京：文物出版社
张家山汉简《算数书》研究会［日］编 . 2006. 汉简《算数书》—写真版 . 京都［日］：朋友书店
张廷玉（清）等撰 . 1974. 明史 . 北京：中华书局
赵友钦（元）撰 . 1986. 革象新书 . 《四库全书》文渊阁本 . 台北：商务印书馆影印
郑樵（南宋）撰 . 1935. 通志 . 上海：商务印书馆
中国近代教育史料汇编 . 1992. 上海：上海教育出版社
中国社会科学院考古研究所 . 1985. 殷周金文集成 . 北京：中华书局
周达（清）1904. 巴氏累圆奇题解 . 扬州：知新算社石印本
周达（清）1907. 圆理奇侅 . 光绪丁未年刻本
周达（清）撰 . 1903. 知新算社课艺初集 . 扬州：知新算社石印本
周达（清）撰 . 1909. 福慧双修馆算稿 . 宣统元年维扬刊本
周密（南宋）撰 . 1986. 癸辛杂识续集 . 《四库全书》文渊阁本 . 台北：商务印书馆影印
朱谦之 . 1984. 老子校释 . 北京：中华书局
朱世杰（元）撰，郭书春今译，陈在新英译. 2007. 汉英对照四元玉鉴（Jade Mirror of the Four Unknowns）. 沈阳：辽宁教育出版社
朱宪章（清）辑 . 1909. 算学报 . 徐绍桢辑 . 学寿堂丛书
朱载堉（明）. 1931. 乐律全书 . 上海：商务印书馆
庄子，郭庆藩 . 1991. 庄子集释 . 《诸子集成》本 . 上海：上海书店

研究文献

薄树人 . 1984. 清代对开普勒方程的研究 . 中国天文学史文集（3）. 北京：科学出版社
薄树人主编 . 1992. 中国传统科技文化探胜 . 北京：科学出版社
蔡运章 . 1996. 甲骨金文与古史新探 . 北京：中国社会科学出版社
陈久金 . 1993. 陈久金集 . 哈尔滨：黑龙江教育出版社
陈美东，林文照，周嘉华主编 . 1992. 中国科学技术史国际学术研讨会论文集（北京 · 1990）. 北京：中国科学技术出版社
陈美东，沈荣法主编 . 2000. 王锡阐研究文集 . 石家庄：河北科学技术出版社
陈美东 . 2003. 中国科学技术史 · 天文学卷 . 北京：科学出版社
陈遵妫 . 2006. 中国天文学史 . 上海：上海人民出版社
程贞一，席泽宗 . 1991. 陈子模型和早期对於太阳的测量 . 京都大学人文科学研究所研究报告 . 中国古代科学史论续篇
戴念祖 . 1986. 朱载堉——明代的科学和艺术巨星 . 北京：人民出版社
戴吾三，维快［德］主编 . 2003. 中国科技典籍研究——第二届中国科技典籍国际会议论文集 . 郑州：大象出版社
董光璧主编 . 1997. 中国近现代科学技术史 . 长沙：湖南教育出版社
董杰，郭世荣 . 2009. 西学东渐与清初科学精神之兴起——以中算家对三角学的会通为中心 . 2009 年全国博士生学术会议——科技进步与社会发展研讨会论文集 . 上海：上海交通大学出版社
杜石然 . 2003. 数学、历史、社会 . 沈阳：辽宁教育出版社

杜石然等．中国科学技术史稿．北京：科学出版社
杜石然主编．中国古代科学家传记．北京：科学出版社
段耀勇，郭书春．2004. 对增乘开方及其相关问题的再探讨．广西民族学院学报，10（2）
方孝博．1983. 墨经的数学和物理学．北京：中国社会科学出版社
冯立昇，李迪．2000.《六章》、《三开》新探．西北大学学报（自），30（1）
冯立昇．1989.《数术记遗》及甄鸾注研究．内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版），1989，（1）
冯立昇．1995. 中国古代测量学史．呼和浩特：内蒙古大学出版社
冯立昇．2002. 周达与中日数学交往．自然辩证法通讯，24（1）
冯立昇．2009. 中日数学关系史．济南：山东教育出版社
冯友兰．1986. 中国哲学史简编．北京：人民出版社
傅海伦，郭书春．2003. 为数学而数学——刘徽科学价值观探析．自然辩证法通讯，25（1）
傅海伦．2003. 传统文化与数学机械化．北京：科学出版社
盖建民．2005. 道教科学思想发凡．北京：社会科学文献出版社
高亨．1958. 墨经校诠．北京：科学出版社
郭世荣．1986. 罗士琳的撰述活动及其数学思想．内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版），15（2）
郭世荣．1993. 程、梅、戴、汪的数学与天文学研究．安徽师范大学学报，（4）
郭世荣．1993. 中西数学交流与清初数学的发展．中华文明史，第九卷．石家庄：河北教育出版社
郭世荣．2000.《算法统宗》导读．武汉：湖北教育出版社
郭世荣．2001.《算数书》校勘．内蒙古师大学报（自），30（3）
郭世荣．2002. 明代数学与天文学知识的失传问题．法国汉学，（六）．北京：中华书局
郭世荣．2005. 秦九韶《数书九章》在朝鲜的流传与影响．内蒙古师大学报，34（3）
郭世荣．2006. 论《几何原本》对明清数学的影响．载：《欧几里得》几何原本研究文集要．呼和浩特：内蒙古文化出版社
郭世荣．2007. 17 世纪汉译西方数学著作在朝鲜．内蒙古师范大学学报，36（6）
郭世荣．2009. 中国数学典籍在朝鲜半岛的流传与影响．济南：山东教育出版社
郭世荣，李迪．2005. 朝鲜数学家对《四元玉鉴》的研究．内蒙古师大学报，34（3）
郭书春．1983. 刘徽的面积理论．辽宁师院学报，（1）
郭书春．1983. 刘徽在数学上的伟大贡献．数学的实践和认识，（3）
郭书春．1984. 刘徽思想探源．中国哲学史研究，（2）
郭书春．1985. 中国古代数学与封建社会刍议．科学技术与辩证法，（2）
郭书春．1986. 从刘徽《九章算术注》看我国对祖暅公理的认识过程．辽宁师范大学学报（数学史专辑）
郭书春．1986. 略谈世界数学重心的三次大转移．科学技术与辩证法，（1）
郭书春．1987. 试论刘徽的数学理论体系．自然辩证法通讯，9（2）
郭书春．1987. 王国维一失．古籍整理研究学刊，（2）
郭书春．1988. 希腊与中国古代数学比较刍议．自然辩证法研究，4（6）
郭书春．1989. 贾宪的数学成就．自然辩证法通讯，11（1）
郭书春．1992. 古代世界数学泰斗刘徽．济南：山东科学技术出版社；修订本 1995. 台北：明文书局
郭书春．1992. 刘徽测望过泰山之高吗．载：戴有奎，张杰主编，泰山研究论丛．第五集．青岛：中国海洋大学出版社
郭书春．1992. 刘徽祖籍考．自然辩证法通讯，14（3）
郭书春．1993. 刘徽与先秦两汉学者．中国哲学史，（2）
郭书春．1993. 中国古典数学的思维方式．中国人传统思维方式新探．沈阳：辽宁教育出版社
郭书春．1995. 秦九韶——将数学进之于道．科学巨星（6）．西安：陕西人民出版社

郭书春 . 1997. 关于《九章算术》及其刘徽注的研究 . 传统文化与现代化，(1)
郭书春 . 1998.《管子》与中国古代数学 . 中国科技典籍研究——第一届中国科技典籍国际会议论文集 . 郑州：大象出版社
郭书春 . 1998. 刘徽——总算术之根源 . 科学巨星（11）. 西安：陕西人民出版社
郭书春 . 1998. 译注《九章算术》. 沈阳：辽宁教育出版社
郭书春 . 2000. 从面积问题看《算学宝鉴》在中国传统数学中的地位 . 汉学研究（台北），18（2）
郭书春 . 2001. 关于中国传统数学的"术". 载：李文林等主编 . 数学与数学机械化 . 济南：山东教育出版社
郭书春 . 2001. 是《缀术》全错不通还是王孝通莫能究其深奥 . 数学史研究，(7)
郭书春 . 2002. 试论《算数书》的理论贡献与编纂 . 法国汉学，（六）. 北京：中华书局
郭书春 . 2003.《算数书》初探 . 国学研究，11 卷 . 北京：北京大学出版社
郭书春 . 2003. 试论《算数书》的数学表达方式 . 中国历史文物，(2)
郭书春 . 2004.《算数书》に关する问题点 . 城地茂译 . 和算研究所纪要，(5)
郭书春 . 2004. 秦九韶《数书九章序》注释 . 湖州师范学院学报，26（1）
郭书春 . 2006. 关于《算经十书》的几个问题 . 中华科技史学会会刊（台北）(10)
郭书春 . 2006. 中国传统数学与数学机械化 . 曲阜师范大学学报（自然科学版），32（3）
郭书春 . 2007. 数学在皇朝末世政治斗争漩涡中的尴尬——从南宋数学大师秦九韶的遭遇谈起 . 宋代国家文化中的科学 . 北京：中国科学技术出版社
郭书春 . 2008. 关于《算数书》与《九章算术》的关系 . 曲阜师范大学学报（自然科学版），34（3）
郭书春 . 2008. 关于中国数学史的几个问题刍议 . 广西民族大学学报（自然科学版），14（4）. 2009. 科学技术哲学，(5)
郭书春 . 2008. 中国传统数学分期刍议 . 中华科技史学会学刊（台北），(12)
郭书春 . 2009. 九章筭术译注 . 上海古籍出版社
郭书春 . 2009. 重新品评秦九韶 . 台湾新行清华大学历史系讲演 . 在 2004 年秦九韶学术讨论会（湖州）上的报告载：姜锡东主编 . 宋史研究论丛 . 第 10 辑 . 保定：河北大学出版社 . 191 ~ 236
郭书春 . 2010.《筭数书》"斩都"求积公式造术初探 . 曲阜师范大学学报（自然科学版），36（3）
郭书春 . 中国古代数学 . 济南：山东教育出版社（1991）；台北：商务印书馆（1994，1995）；增补版 . 北京：商务印书馆（1997，2004）；修订本 . 北京：商务印书馆（2009）
郭书春，城地茂 . 2003.《算数书》中国数学パテダィム. 数学ヤミナー，42（9）
郭书春，王渝生 . 1992. 数学大师秦九韶 . 山东古代科学家 . 济南：山东教育出版社
郭熙汉 . 1996. 杨辉算法导读 . 武汉：湖北教育出版社
国家计量总局编 . 1984. 中国古代度量衡图集 . 北京：文物出版社
韩琦 . 1996. 君主和布衣之间：李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响 . 清华学报（台湾），新 26（4）
韩琦 . 1997. 17、18 世纪欧洲和中国的科学关系：以英国皇家学会和在华耶稣会士的交流为例 . 自然辩证法通讯，19（3）
韩琦 . 1998. 白晋的《易经》研究和康熙时代的"西学中源"说 . 汉学研究（台北），16（1）
韩琦 . 1999. 格物穷理院与蒙养斋——17、18 世纪之中法科学交流 . 载：法国汉学（四）. 北京：中华书局
韩琦 . 1999. 中国科学技术的西传及其影响（1582 - 1793）. 石家庄：河北人民出版社
韩琦 . 2001. 从《律历渊源》的编纂看康熙时代的历法改革 . 载：吴嘉丽，周湘华主编 . 世界华人科学史学术研讨会论文集 . 台湾淡江大学
韩琦 . 2003. 陈厚耀《召对纪言》释证 . 载：汤一介编 . 文史新澜 . 杭州：浙江古籍出版社
韩琦 . 2003. 康熙时代的数学教育及其社会背景 . 载：法国汉学（八）北京：中华书局
韩琦 . 2007. 康熙时代的历算活动：基于档案资料的新研究 . 载：张先清编 . 史料与视界——中文文献与中国基督教史研究 . 上海：上海人民出版社

韩琦 . 2008. 耶稣会士和康熙时代历算知识的传入 . 载：吴志良，金国平，汤开建主编 . 澳门史新编 . 第三册
韩琦 . 2010. 西方数学的传入和乾嘉时期古算的复兴——以借根方的传入和天元术研究的关系为例 . 载：祝平一主编 . 中国史新论：科技与中国社会分册 . 台北：联经出版公司
洪万生 . 1999. 全真教与金元数学——以李冶（1192 – 1279）为例 . 载：王秋桂主编 . 金庸小说国际学术研讨会论文集 . 台北：远流出版事业公司
洪万生 . 2004. 数学史论文选集（I）（II）. 台湾师范大学数学系
洪万生等 . 2006. 数之起源——中国数学史开章《筭数书》. 台北：商务印书馆
洪万生主编 . 1993. 谈天三友 . 台北：明文书局
侯钢 . 2004. 华蘅芳《积较术》注记 . 载：李兆华主编 . 汉字文化圈数学传统与数学教育 . 北京：科学出版社
侯钢 . 2006. 两宋易数及其与数学之关系初论 . 中国科学院自然科学史研究所博士学位论文
侯外庐等 . 1957. 中国思想通史 . 北京：人民出版社
胡平生 . 1998. 阜阳双古堆汉简数术书简论 . 载：出土文献研究（四）. 北京：中华书局
华印椿 . 1987. 中国珠算史稿 . 北京：中国财政经济出版社
纪志刚 . 1995. 刘焯二次内插算法及其在唐代的历史演变 . 西北大学学报（自然科学版），25（2）
纪志刚 . 2000. 杰出的翻译家和实践家——华蘅芳 . 北京：科学出版社
纪志刚 . 2000. 南北朝隋唐数学 . 石家庄：河北科学技术出版社
江晓原 . 1996. 译注《周髀算经》. 沈阳：辽宁教育出版社
姜克华 . 1983.《数术记遗》初考 . 珠算研究，（4）
金秋鹏主编 . 1998. 中国科学技术史 · 人物卷 . 北京：科学出版社
金容云，金容局［韩］. 1978. 韩国数学史（日文）. 东京：桢书店
卡尔 · B. 波耶［美］. 1977 微积分概念史 . 上海：上海人民出版社
科学史集刊编辑委员会编 . 1984. 科学史集刊（11）. 北京：地质出版社
孔国平 . 1988. 大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论 . 北京师范学院学报（自），9（2）
孔国平 . 1988. 李冶传 . 石家庄：河北教育出版社
孔国平 . 1996. 测圆海镜导读 . 武汉：湖北教育出版社
孔国平 . 2000. 李冶朱世杰与金元数学 . 石家庄：河北科学技术出版社
堀毅［日］. 1988. 秦汉法制史论考 . 北京：法律出版社
李迪，冯立昇 . 2003. 对《铜陵算法》之研究 . 载：戴吾三，维快主编 . 中国科技典籍研究 . 郑州：大象
李迪 . 1984. 中国数学史简编 . 沈阳：辽宁人民出版社
李迪 . 1991. 中国科学技术史论文集 . 呼和浩特：内蒙古教育出版社
李迪 . 1997，1999，2004. 中国数学通史 . 第 1 ~ 3 卷 . 南京：江苏教育出版社
李迪 . 2006. 梅文鼎评传 . 南京：南京大学出版社
李迪主编 . 1990. 数学史研究文集 . 第一至六辑 . 呼和浩特：内蒙古大学出版社；台北：九章出版社
李迪主编 . 1993. 中外数学史教程 . 福州：福建教育出版社
李迪主编 . 2000. 中国算学书目汇编 . 北京：北京师范大学出版社
李迪主编 . 2001. 数学史研究，7. 呼和浩特：内蒙古大学出版社、台北：九章出版社
李继闵 . 1990. 东方数学典籍《九章算术》及其刘徽注研究 . 西安：陕西人民教育出版社
李继闵 . 1993. 九章算术校证 . 西安：陕西科学技术出版社
李继闵 . 1998.《九章算术》导读与译注 . 西安：陕西科学技术出版社
李培业 . 1982. 唐代创始算盘论 . 珠算研究，（3）
李胜伍，郭书春 . 1982. 石家庄东汉墓及其中出土的算筹 . 考古，（3）
李文林 . 2000. 数学史教程 . 北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社

李文林 . 2001. 古为今用的典范——吴文俊教授的中国数学史研究 . 载：林东岱，李文林，虞言林主编 . 数学与数学机械化 . 济南：山东教育出版社
李文林 . 2005. 数学的进化——东西方数学史比较研究 . 北京：科学出版社
李文铭 . 2005. 清末长沙数学学派的兴衰及其活动概述 . 西北大学学报（自然科学版），35（2）
李学勤 . 2007. 走出疑古时代 . 长春：长春出版社
李学勤主编 . 1997. 中国古代文明与国家形成研究 . 昆明：云南人民出版社
李俨，钱宝琮撰 . 郭书春，刘钝执行主编 . 1998. 李俨钱宝琮科学史全集 . 第 1 ~ 10 卷 . 沈阳：辽宁教育出版社
李约瑟 . 1978. 中国科学技术史 . 第 3 卷，数学 . 北京：科学出版社
李约瑟 . 1990. 中国科学技术史 . 第 1 卷 . 北京：科学出版社；上海：上海古籍出版社
李兆华 . 1995. 中国数学史 . 台北：文津出版社
李兆华 . 1998. 衡斋算学校证 . 西安：陕西科学技术出版社
李兆华 . 2000. 古算今论 . 天津：天津科学技术出版社
李兆华主编 . 2005. 中国近代数学教育史稿 . 济南：山东教育出版社
励乃骥 . 1957. 九章算经圆田题和刘徽注的今释 . 数学教学，（6）
梁启超 . 2003. 中国近三百年学术史 . 天津：天津古籍出版社
梁宗巨 . 1980. 世界数学史简编 . 沈阳：辽宁人民出版社
梁宗巨 . 1992. 数学历史典故 . 沈阳：辽宁教育出版社
刘钝，韩琦主编 . 1997. 科史薪传 . 沈阳：辽宁教育出版社
刘钝 . 1993. 大哉言数 . 沈阳：辽宁教育出版社
刘复 . 1928. 新嘉量之校量及推算 . 辅仁学志
刘金华 . 2008. 张家山汉简《算数书》研究 . 香港：华夏文化艺术出版社
刘起釪 . 1997. 关于隶古定与河图洛书问题 . 传统文化与现代化，（2）
梅荣照，王渝生 . 1983. 解析几何能在中国产生吗？——李善兰尖锥术中的解析几何思想 . 载：传统科学与文化 . 西安：陕西科学技术出版社
梅荣照主编 . 1990. 明清数学史论文集 . 南京：江苏教育出版社
牛亚华 . 1990. 项名达的椭圆求周术研究 . 内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版），（3）
彭浩 . 2001. 张家山汉简《算数书》注释 . 北京：科学出版社
钱宝琮等 . 1966. 宋元数学史论文集 . 北京：科学出版社
丘光明编撰 . 1992. 中国历代度量衡考 . 北京：科学出版社
曲安京，纪志刚，王荣彬 . 1994. 中国古代数理天文学探析 . 西安：西北大学出版社
曲安京 . 2005. 中国历法与数学 . 北京：科学出版社
曲安京主编 . 2000. 中国古代科学技术史纲 · 数学卷 . 沈阳：辽宁教育出版社
饶宗颐 . 1990. 未有文字以前表示“方位”与“数理关系”的玉版 . 文物研究，总第六辑
任南衡，张友余编撰 . 1995. 中国数学会史料 . 南京：江苏教育出版社
日本学士院日本科学史刊行会［日］. 1979. 明治前日本数学史 . 东京：野间科学医学研究资料馆
三上义夫［日］. 1932 ~ 1935. 关孝和の业绩と京坂の算家并に支那の算法との关系び比较 . 东洋学报，20 ~ 22
山西省珠算协会编 . 2002. 王文素与《算学宝鉴》研究 . 太原：山西人民出版社
沈康身 . 1986. 中算导论 . 上海：上海教育出版社
沈康身 . 1996. 九章算术导读 . 武汉：湖北教育出版社
宋杰 . 1994.《九章算术》与汉代社会经济 . 北京：首都师范大学出版社
薮内清［日］. 1944. 隋唐历法史之研究 . 东京：三省堂版
孙宏安译注 . 1997. 杨辉算法 . 沈阳：辽宁教育出版社

孙文青．1931. 九章算术源流考．学术季刊（女师大），2（1）
谭戒甫．1987. 墨辩发微．北京：中华书局
田淼．2005. 中国数学的西化历程．济南：山东教育出版社
王荣彬，李迪．1991. 新发现“一鸿算法”の珠算を探究する．珠算史研究（日本），(26)
王文素（明）著．刘五然等注．2008.《算学宝鉴》校注．北京：科学出版社
王义民主编．1995. 中华算盘精品鉴赏．西安：陕西科学技术出版社
王渝生主编．1999. 第七届国际中国科学史会议论文集．郑州：大象出版社
王宇信．1999. 甲骨学通论．北京：中国社会科学出版社
吴文俊．1996. 吴文俊论数学机械化．济南：山东教育出版社
吴文俊主编．1982.《九章算术》与刘徽．北京：北京师范大学出版社
吴文俊主编．1985，1986，1987，1996. 中国数学史论文集．第1～4集．济南：山东教育出版社
吴文俊主编．1987. 秦九韶与《数书九章》．北京：北京师范大学出版社
吴文俊主编．1993. 刘徽研究．西安：陕西人民教育出版社，台北：九章出版社
吴文俊主编．1998，1999，2000. 中国数学史大系．第1～8卷，副第1、2卷．北京：北京师范大学出版社
希尔伯特［德］．1981. 数学问题——在1900年巴黎国际数学家大会上的讲演．载：李文林、袁向东译．数学史译文集．上海：上海科学技术出版社
许义夫，张殿民，郭书春主编．1992. 山东古代科学家．济南：山东教育出版社
严敦杰．1943. 欧几里得《几何原本》元代输入中国说．东方杂志，39（13）
严敦杰．1954. 中算家的素数论．数学通报，(4)，(5)
严敦杰．1955. 中算家的招差术．数学通报，(1)，(2)
严敦杰．1956. 中国古代数学的成就．中华全国科学技术普及协会
严敦杰．1958. 中国古代的黄赤道差计算法．科学史集刊．第一期．北京：科学出版社
严敦杰．1960. 方中通《数度衍》评述．安徽史学，(创刊号)
严敦杰．1978. 关于西汉初期的式盘与占盘．考古，(5)
严敦杰．1978. 中国古代数理天文学的特点．科技史文集．第一辑．上海：上海科学技术出版社
杨俊光．2002. 墨经研究．南京：南京大学出版社
杨宽．1980. 战国史．上海：上海人民出版社
杨宽．1999. 西周史．上海：上海人民出版社
伊夫斯［美］．欧阳绛译．1986. 数学史概论．太原：山西人民出版社
余嘉锡．1946-12-11. 南宋算学家秦九韶事迹考．大公报·文史周刊（上海、天津），(9)
张家山汉简《算数书》研究会［日］编．2006. 汉简《算数书》—中国最古の数学书．京都：朋友书店
张沛．1996. 出土算筹考略．文博，(4)
张其成主编．1992. 易学大辞典．北京：华夏出版社
张政烺．1951. 古代中国的十进制氏族组织．历史教学，(9)，(10)，(12)
章用．1939. 垛积比类疏证．科学，23（11）
赵栓林，郭世荣．2007.《代数学》和《代数术》中的术语翻译规则．内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版），35（6）
中国科技史杂志．1980～2009. 第1～30卷．1980～2004年名为《中国科技史料》
中国科学院自然科学史研究所数学史组编．1982. 科技史文集·数学史专辑．上海：上海科学技术出版社
中国科学院自然科学史研究所主编．1995. 中国古代科技成就（修订本）．北京：中国青年出版社
中国天文学史编写组．1981. 中国天文学史．北京：科学出版社
中山茂［日］．1964. 符天历的天文学史的位置．科学史研究（日），(71)
中外数学简史编写组编．1986. 中国数学简史．济南：山东教育出版社

周瀚光，孔国平. 1994. 刘徽评传. 南京：南京大学出版社
周全中. 1983.《数术记遗》成书年代问题. 珠算研究，(3)
朱彭寿. 2005. 清代人物大事纪年. 北京：北京图书馆出版社
朱启新. 1989. 商代的六艺. 文史知识，(4)
朱世杰（元）著，李兆华校证. 2007. 四元玉鉴校证. 北京：科学出版社
朱锡禄. 1986. 武氏祠汉画像石. 济南：山东美术出版社
朱有瓛主编. 1983. 中国近代学制史料. 上海：华东师范大学出版社
自然科学史研究. 1981 ~ 2009. 第 1 ~ 29 卷
邹大海. 2000. "轮不蹍地"诸说考评与新解. 哈尔滨工业大学学报（社会科学版），(4)
邹大海. 2000. 先秦时期时空无限思想的若干研究. 自然辩证法通讯，22 (1)
邹大海. 2001. 墨家和名家的不可分量思想与运动观. 汉学研究（台北），19 (1)
邹大海. 2001. 中国数学的兴起与先秦数学. 石家庄：河北科学技术出版社
邹大海. 2003.《墨经》不应为墨子所自著. 安徽史学，(4)
邹大海. 2004. 从《算数书》与《九章算术》的关系看算法式数学文献在上古时代的流传. 赣南师范学院学报，(6)
邹大海. 2005. 睡虎地秦简与先秦数学. 考古，(6)
邹大海. 2008. 出土简牍与中国早期数学史. 人文与社会学报（台湾），2 (2)
邹大海. 2009. 关于《算数书》、秦律和上古粮米计量单位的几个问题. 内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版），38 (5)
Chemla K［林力娜］. 1990. Du parallélisme entre énoncés mathématiques: analyse d' un formulaire rédigé en Chine au 13e siècle. Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications, 43 (1)
Chemla K［林力娜］. 1996. Positions et changements en mathématiques? partir de textes chinois des dynasties Han? Song-Yuan. Quelques remarques. Extrere-Orient, Extrere-Occident, 18
Chemla K, Guo Shuchun. 2004. Les Neuf Chapitres : Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaries（中法对照本九章算术）. Paris: DUNOD
Cullen C［古克礼］. 1982. An Early 7th Century Chinese Table of Tangents. Chinese Science
Cullen C［古克礼］. 1996. Astronomy and Mathematics in Ancient China: the Zhou Bi Suan Jing. Cambridge University Press
Dauben J. 2007. Chinese Mathematics. *In*: Katz V J, ed. The Mathematics of Egpyt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook. Princeton University Press. 187 ~ 384
Dauben J. 2008. Suan shu shu. A book on numbers and computations. Translated from the Chinese and with commentary by Dauben J W. Arch Hist Exact Sci, 62 (2): 91 ~ 178
Dehergne, Joseph. 1973. Répertoire des Jésuites de Chine de 1552 à 1800. (Rome)
Engelfriet, Peter M. 1998. Euclid in China: The Genesis of the First Chinese Translation of Euclid's Elements. Books I-VI (Jihe Yuanben, Beijing, 1607) and its Reception up to 1723. Leiden: Brill
Guo Shirong. 1991. The Role of Mathematics to Agriculture in Ancient Time. Journal of the Cultural History of Mathematics, 1
Guo Shirong. 1997. Comparison Between Korean Jade Clepsydra and Chinese Clepsydras. Proceedings of the International Conference on the History of Oriental Astronomy from Guo Shoujing to King Sejong. 汉城：延世大学出版社
Guo Shirong. 2002. The Influence of Yang Hui's Works on the Mathematical Mainstream in the Ming Dynasty. Historical Perspectives on East Asian Science, Technology and Medicine. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific
Guo Shuchun. 2001. On the Procedures in Traditional Chinese Mathematical Works. *In*: Kobayashi Tatsuhiko, Ogawa

Tsukane, Sato Ken'ichi et al., eds. Proceedings of the 4th International Symposium on the History of Mathematics and Mathematical Education Using Chinese Characters. Maebashi Institute of Technology

Han Qi. 1997. Patronage scientifique et carrière politique: Li Guangdi entre Kangxi et Mei Wending. Etudes Chinoises, 16 (2) (automme)

Han Qi. 1999. Emperor, prince and literati: role of the princes in the organization of scientific activities in early Qing Period. *In*: Yung Sik Kim, Bray F eds. Current Perspectives in the History of Science in East Asia. Seoul: Seoul National University

Han Qi. 1999. The role of the directorate of astronomy in the Catholic mission during the Qing period. *In*: Golvers N, ed. The Christian Mission in China in the Verbiest Era: Some Aspects of the Missionary Approach. Leuven: Leuven University Press

Han Qi. 2003. Antoine Thomas, SJ, and his mathematical activities in China: a preliminary research through Chinese sources. *In*: Vande Walle W F. The History of the Relations Between the Low Countries and China in the Qing Era (1644 – 1911). Leuven: Leuven University Press

Ho Peng Yoke (何丙郁). 1985. Li, Qi and Shu: An Introduction to Science and Civilization in China. Hong Kong: Hong Kong University Press

Jami C J-F. 1986. Foucquet et la modernisation de la science en Chine: la "Nouvelle Mèthode d'Algèbre". Mémoire de Maitrise, Universitéde Paris VII

Jami C. 1994. Learning mathematical sciences during the early and mid-Ch'ing, *In*: Elman B, Wood side A, eds. Education and Society in Late Imperial China 1600 – 1900. Berkeley: University of California Press

Libbrecht U (李倍始). 1973. Chinese Mathematiques in the Thirteenth Century. The Shu-shu-chiu-chang of Chin Chiu-shao. Cambridge, Massachusetts; London, England: The M I T Press

Martzloff J – C (马若安). Histoire des mathématiques chinoise (中算导论)

Martzloff J. -C. The Manchu Manuscript "Bodoro arga i oyonggongge be araha uheri hesen i bithe" of the Bibliotheque Nationale. Paris: Preliminary Investigations

Needham J. 1959. Science and Civilization in China. Vol. 3. Cambridge: Cambridge University Press

Sarton G. 1947. Introduction to the History of Science. Vol. 3. Baltimore: Williams and Wilkins (Carnegie Institution Pub. No. 376)

Smith D E. 1925. History of Mathematics. Dover Publications

Tian Miao. 1999. Jiegenfang, Tianyuan, and Daishu: Algebra in Qing China. Historia Scientiarum, 9 (1).

Tian Miao. 2001. Education of mathematics of traditional academies in late Qing China. *In*: Kobayashi Tatsuhiko, Ogawa Tsukane, Sato Ken'ichi et al., eds. Proceedings of the 4th International Symposium on the History of Mathematics and Mathematical Education Using Chinese Characters Maebashi Institute of Technology

Tian Miao. 2003. The westernization of Chinese mathematics: a case study of the Duoji method and its development. EASTM, 20

Tian Miao. 2005. The transmission of European mathematics in the Kangxi reign (1662 – 1722) —looking at the international role China could play from an historical perspective. *In*: Assmann H-D, Karin von Filseck KM) China's New Role in the International Community: Challenges and Expectations for the 21st Century, Peter Lang

Wagner D B (华道安). 1979. An early Chinese derivation of the volume of a pyramid: Liu Hui, third century A D. Historia Mathematica, (6)

Witek J. 1982. Controversial ideas in China and in Europe: a biography of J. -F. Foucquet (1665 – 1741). Roma

Zou Dahai. 2007. Shuihudi bamboo strips of the Qin Dynasty and mathematics in Pre-Qin Period. Frontiers of History in China, 2 (4). Higher Education Press, Springer

后　记

《中国科学技术史》是“八五”计划中国科学院重大课题，《数学卷》是其子课题之一，由于种种原因没有按时完成。在陈美东先生和中国科学院自然科学史研究所领导反复动员下，我在2004年夏应允出任《中国科学技术史・数学卷》（以下简称《数学卷》）主编，至于我参加《数学卷》的工作，则是在1988年秋宣州梅文鼎会议期间杜石然先生约请的，二年后杜先生即退休去国。我则在90年代初完成了我承担部分的初稿。

本书编委会是在2004年下半年重新组建的，后来又有增补。《数学卷》的编写得到李兆华、（以下以姓氏汉语拼音为序）邸利会、冯立昇、傅祚华、高红成、郭金海、郭世荣、韩琦、侯钢、纪志刚、孔国平、吕兴焕、田淼、汪晓勤、王渝生、徐泽林、张棋、张升、邹大海等先生的鼎力支持。考虑到我本人关于明末之后的数学史修养比较薄弱，由我提议，征得《中国科学技术史》编委会的同意，李兆华先生出任《数学卷》副主编。2005年1月在中国科学技术馆召开了《数学卷》第一次编委会会议，明确了编写的宗旨、原则，分配了撰写任务。后来在写作过程中，作者及其写作任务又有部分增补和调整。由于李俨、钱宝琮、严敦杰等大师及诸多前辈的艰辛努力，中国数学史学科具有坚实的基础，成为20世纪70年代以前研究基础最好、成果最为突出的中国科学技术史学科。30余年来，由于吴文俊院士的倡导，在各位同仁的努力下，中国数学史研究不断深入，成果丰硕。所有这些，都为本书的编纂提供了可靠的保障。

各位作者完成初稿，交主编、副主编修订，提出修改意见后，再请作者本人修改，如此往复数次，最后定稿。凡是引用前人的论点，本书尽量注出；对中国数学史研究中不同的学术观点，只要有原始文献作依据，言之成理，本书或以一家为主，兼述他家；或诸家之说并列，兼收并蓄，博采众长。2009年2月，召开了第二次编委会会议，对第一至五编的稿件进行了审查。李兆华先生牺牲暑假的休息，冒着酷暑加工了第六编稿件，并在2009年11月底召开了第六编审稿会。

在各位作者的大力襄助下，《数学卷》得以顺利出版。在这里，我要特别感谢从事本卷写作的各位同仁。我常说，要完成一个课题，你请来参加的都是大忙人，不忙的人你也不敢请。确实，参加本书撰写的十余位作者大都是中国数学史学科的学术带头人或科研骨干，不仅承担多项国家、省部、学校重大课题（包括我们另一项重大国家课题《中华大典・数学典》的编纂），而且担任一定的领导职责，其繁忙程度可想而知。说实话，近两年，我给各位作者发邮件、打电话，连嘱咐“注意休息”都不敢了，因为连连催稿的同时讲这些话，几乎是废话，也有言不由衷之嫌！令人欣喜的是，大多数作者都很重视本书，协调好各项工作，为《数学卷》交出了高质量的稿件，多数稿件是在原有深厚功底基础上重新研究的成果。感谢岳麓书院为本书提供了封面用图，肖灿博士又对图片进行了精心加工。王渝生先生、李安平先生协助安排了2005年编委会会议和2009年2月、11月审稿会，在此表示衷心感谢。

吴文俊院士一直关心本书的编纂，他的关心是对我们的鞭策和鼓励。他和李文林、何绍

庚教授为本书申请中华人民共和国科学技术部科学技术学术著作出版基金写了很好的推荐，我们对此表示由衷的感谢！

感谢科学出版社胡升华编审、孔国平博士、张凡编辑，他们为本书的编纂与出版做了大量工作。

承担《数学卷》写作工作的先生及撰写的内容依次（以编、章、节为序，第一次出现某作者时，则将该作者写作的内容以章节为序全部列入）是：

邹大海：第一编；第二编第三章第一节一，第二节一（一）（二）、二—四，第三节。

邹大海、郭书春第二编第三章第二节一（三。）

郭书春：第二编第三章第一节二，第四—七节，第四—六章。第三编第七章第一—四节，第五节二、三，第六、七节，第八章，第九章第一节一—三，第二—四节，第十章第一节一、二（一）、三—五，第二—四节，第十一章，第十二章。第四编第十五章第一节，第三、四、五节，第六节一（一）（二）、二（一）—（三）、三（一）（二），第七节二，第九节一—三、六、七，第十六章第一节、第二节，第三节二，第十七章第一节一，第二节一，第十八章第一节，第二节一（一）、二（一）。第六编第二十九章第二节一—三。

纪志刚：第三编第七章第五节一、四、五，第十章第一节六，第十三章。

汪晓勤：第三编第九章第一节四、第十章第一节二（二）。

冯立昇：第三编第十四章，第六编第三十二章第一节四（二）、第五节三。

李兆华：第四编第十五章第二节，第八节，第九节四、五，第十七章第二节二，第十八章第三节，第十九章。第六编第二十九章第三节；第三十三章第一节一、二，第二节三、四。

郭书春、孔国平：第四编第十五章第六节一（三），第七节一、三，第十七章第二节三，第十八章第二节一（二）、二（二）。

孔国平：第四编第十五章第六节二（四）、三（三），第十七章第一节二、三，第十八章第二节二（三），第二十章第二节二，第二十一章。

郭世荣、郭书春：第四编第十六章第三节一。

侯钢：第四编第二十章第一节，第二节一、三。第六编第三十二章第一节一、二、四（一），第二节二（二）、三（一）（二），第三节二，第四节，第三十三章第二节二、第三节一。

郭世荣：第五编第二十二章，第二十三章，第二十四章第一—二节，第二十五章第一、二、四、五节，第二十六章。

郭世荣，张升：第五编第二十四章第三节。

郭世荣，张棋：第五编第二十五章第三节。

韩琦：第六编第二十七章第一节，第四节三，第二十八章。

高红成：第六编第二十七章第二、三节，第四节一、四，第三十二章第五节一、二。

邸利会：第六编第二十七章第四节二。

田淼：第六编第二十九章第一节，第三十二章第一节三，第二节二（一），第三节三。

傅祚华：第六编第二十九章第二节四。

王渝生、吕兴焕：第六编第三十、三十一章，第三十二章第二节一，第三节一。

徐泽林：第六编第三十二章第二节三（三）。

郭金海：第六编第三十三章第一节四，第二节一，第三节二、三。

中国古代数学博大精深。目前，国内外（包括我们作者在内）的研究仍是阶段性成果。由于水平有限，本书错误及不足在所难免。恳请各位同人批评指正，不吝赐教，以期在今后的工作中改进，在本书再版时修订。我们共同的心愿是不断推进中国数学史研究，开辟数学史研究的新天地。

郭书春

2009 年 12 月 7 日大雪定稿

总 跋

凡是听到编著《中国科学技术史》计划的人士，都称道这是一个宏大的学术工程和文化工程。确实，要完成一部30卷本、2000余万字的学术专著，不论是在科学史界，还是在科学界都是一件大事。经过同仁们10年的艰辛努力，现在这一宏大的工程终于完成，本书得以与大家见面了。此时此刻，我们在兴奋、激动之余，脑海中思绪万千，感到有很多话要说，又不知从何说起。

可以说，这一宏大的工程凝聚着几代人的关切和期望，经历过曲折的历程。早在1956年，中国自然科学史研究委员会曾专门召开会议，讨论有关的编写问题，但由于三年困难、"四清"、"文革"，这个计划尚未实施就夭折了。1975年，邓小平同志主持国务院工作时，中国自然科学史研究室演变为自然科学史研究所，并恢复工作，这个打算又被提到议事日程，专门为此开会讨论。而年底的"反右倾翻案风"，又使设想落空。打倒"四人帮"后，自然科学史研究所再次提出编著《中国科学技术史丛书》的计划，被列入中国科学院哲学社会科学部的重点项目，作了一些安排和分工，也编写和出版了几部著作，如《中国科学技术史稿》、《中国天文学史》、《中国古代地理学史》、《中国古代生物学史》、《中国古代建筑技术史》、《中国古桥技术史》、《中国纺织科学技术史（古代部分）》等，但因没有统一的组织协调，《丛书》计划半途而废。1978年，中国社会科学院成立，自然科学史研究所划归中国科学院，仍一如既往为实现这一工程而努力。80年代初期，在《中国科学技术史稿》完成之后，自然科学史研究所科学技术通史研究室就曾制订编著断代体多卷本《中国科学技术史》的计划，并被列入中国科学院重点课题，但由于种种原因而未能实施。1987年，科学技术通史研究室又一次提出了编著系列性《中国科学技术史丛书》（现定名《中国科学技术史》）的设想和计划。经广泛征询，反复论证，多方协商，周详筹备，1991年终于在中国科学院、院基础局、院计划局、院出版委领导的支持下，列为中国科学院重点项目，落实了经费，使这一工程得以全面实施。我们的老院长、副委员长卢嘉锡慨然出任本书总主编，自始至终关心这一工程的实施。

我们不会忘记，这一工程在筹备和实施过程中，一直得到科学界和科学史界前辈们的鼓励和支持。他们在百忙之中，或致书，或出席论证会，或出任顾问，提出了许多宝贵的意见和建议。特别是他们关心科学事业，热爱科学事业的精神，更是一种无形的力量，激励着我们克服重重困难，为完成肩负的重任而奋斗。

我们不会忘记，作为这一工程的发起和组织单位的自然科学史研究所，历届领导都予以高度重视和大力支持。他们把这一工程作为研究所的第一大事，在人力、物力、时间等方面都给予必要的保证，对实施过程进行督促，帮助解决所遇到的问题。所图书馆、办公室、科研处、行政处以及全所的同仁，也都给予热情的支持和帮助。

这样一个宏大的工程，单靠一个单位的力量是不可能完成的。在实施过程中，我们得到了北京大学、中国人民解放军军事科学院、中国科学院上海硅酸盐研究所、中国水利水电科学研究院、铁道部大桥管理局、北京科技大学、复旦大学、东南大学、大连海事大学、武汉交通科技大学、中国社会科学院考古研究所、温州大学等单位的大力支持，他们为本单位参加编撰人员提

供了种种方便，保证了编著任务的完成。

为了保证这一宏大工程得以顺利进行，中国科学院基础局还指派了李满园、刘佩华二位同志，与自然科学史研究所领导(陈美东、王渝生先后参加)及科研处负责人(周嘉华参加)组成协调小组，负责协调、监督工作。他们花了大量心血，提出了很多建议和意见，协助解决了不少困难，为本工程的完成做出了重要贡献。

在本工程进行的关键时刻，我们遇到经费方面的严重困难。对此，国家自然科学基金委员会给予了大力资助，促成了本工程的顺利完成。

要完成这样一个宏大的工程，离不开出版社的通力合作。科学出版社在克服经费困难的同时，组织精干的专门编辑班子，以最好的纸张，最好的质量出版本书。编辑们不辞辛劳，对书稿进行认真地编辑加工，并提出了很多很好的修改意见。因此，本书能够以高水平的编辑，高质量的印刷，精美的装帧，奉献给读者。

我们还要提到的是，这一宏大工程，从设想的提出，意见的征询，可行性的论证，规划的制订，组织分工，到规划的实施，中国科学院自然科学史研究所科技通史研究室的全体同仁，特别是杜石然先生，做了大量的工作，作出了巨大的贡献。参加本书编撰和组织工作的全体人员，在长达10年的时间内，同心协力，兢兢业业，无私奉献，付出了大量的心血和精力。他们的敬业精神和道德学风，是值得赞扬和敬佩的。

在此，我们谨对关心、支持、参与本书编撰的人士表示衷心的感谢，对已离我们而去的顾问和编写人员表达我们深切的哀思。

要将本书编写成一部高水平的学术著作，是参与编撰人员的共识，为此还形成了共同的质量要求：

1.学术性。要求有史有论，史论结合，同时把本学科的内史和外史结合起来。通过史论结合，内外史结合，尽可能地总结中国科学技术发展的经验和教训，尽可能把中国有关的科技成就和科技事件，放在世界范围内进行考察，通过中外对比，阐明中国历史上科学技术在世界上的地位和作用。整部著作都要求言之有据，言之成理，经得起时间的考验。

2.可读性。要求尽量地做到深入浅出，力争文字生动流畅。

3.总结性。要求容纳古今中外的研究成果，特别是吸收国内外最新的研究成果，以及最新的考古文物发现，使本书充分地反映国内外现有的研究水平，对近百年来有关中国科学技术史的研究作一次总结。

4.准确性。要求所征引的史料和史实准确有据，所得的结论真实可信。

5.系统性。要求每卷既有自己的系统，整部著作又形成一个统一的系统。

在编写过程中，大家都是朝着这一方向努力的。当然，要圆满地完成这些要求，难度很大，在目前的条件下也难以完全做到。至于做得如何，那只有请广大读者来评定了。编写这样一部大型著作，缺陷和错讹在所难免，我们殷切地期待着各界人士能够给予批评指正，并提出宝贵意见。

《中国科学技术史》编委会

1997年7月